Représentation des entiers non signés

Selma - Département Informatique - IUT Fontainebleau/Sénart

Représentation d’un nombre entier dans une base donnée.

Un nombre est dit non signé s’il est considéré sans signe. Il n’est ni positif, ni négatif, mais simplement un entier naturel.

On fixe un nombre (non signé) B. Représenter un entier N (non signé) dans la base B, c’est trouver le plus petit entier k et les coefficients $a_{k-1},\ldots,a_0$, tels que :

$$N=a_{k-1}* B^{k-1}+a_{k-2}* B^{k-2}+...+a_1* B^1+a_0* B^0 \quad \text{où chaque } a_i \text{ est un entier dans } \{0,1,\ldots,B-1\}.$$

Nous sommes familiers avec les nombres décimaux : B=10. Dans ce cas, a_0 est le chiffre des unités, a_1 est le chiffre des dizaines, a_2 est le chiffre des centaines, etc.

Mais nous pouvons considérer n’importe quelle valeur pour la base B. Ainsi, la représentation 544 donne la valeur entière décimale 544 si la base de la représentation est 10, et donne la valeur entière décimale 208 si la base de la représentation est 6.

$$(544)_6 \rightarrow 5*6^2+4*6+4=208.$$

Comment trouver k et les coefficients a_i ?

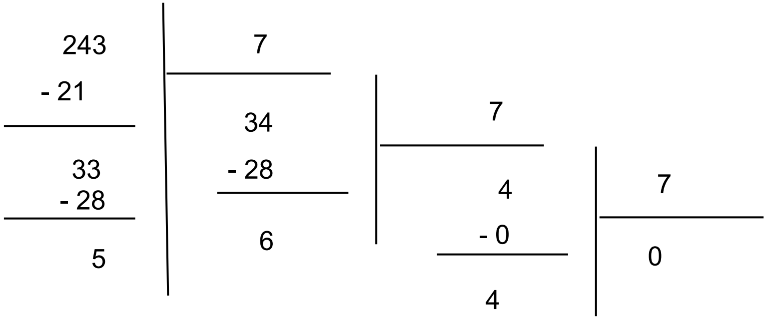
$N=a_{k-1} * B^{k-1}+a_{k-2} * B^{k-2}+...+a_1 * B^1+a_0 * B^0$ où chaque a_i est un entier dans {0,1,…,B-1}.

ou encore $N= (a_{k-1} * B^{k-2}+a_{k-2} * B^{k-3}+...+a_1) * B+a_0$

Ainsi a_0 est le reste de la division (entière) de N par B, et $q_0= a_{k-1} * B^{k-2}+a_{k-2} * B^{k-3}+...+a_1$ est le quotient de cette division.

Maintenant, a_1 apparaît comme le reste de la division de q_0 par B. On continue en considérant le quotient de cette deuxième division qu'il faut diviser par B. On aura fini lorsqu'on obtient un quotient nul.

Exemple. On cherche la représentation de la valeur décimale 243 dans la base 7.



Ainsi, k=3, $a_0=5$, $a_1=6$, $a_2=4$.

$(243)_{10} \rightarrow (465)_7$

Quelques bases usuelles : 2,8,16.

Une représentation est dite binaire lorsque la base considérée est 2. Une représentation commençant par 0b donne un nombre en binaire. Les digits sont 0,1.

Une représentation est dite octale lorsque la base considérée est 8. Une représentation commençant par 0 donne un nombre en octal. Les digits sont 0,1,...,7.

Une représentation est dite hexadécimale lorsque la base considérée est 16. Une représentation commençant par 0x donne un nombre en hexadécimal. Les digits sont 0,1,...,9,a,...,f.

Du binaire vers l’octal.

$N=a_{k-1} * 2^{k-1} +....+a_5 * 2^5+a_4 * 2^4+a_3 * 2^3+a_2 * 2^2+a_1 * 2+a_0$ où chaque a_i est 0 ou 1.

$$N= ......\quad) * \underbrace{(2^3)^3}_{8^3} + (.........) * \underbrace{(2^3)^2}_{8^2} + \underbrace{(a_5 * 2^2+a_4 * 2+a_3)}_{\text{Entier entre 0 et 7}} * \underbrace{2^3}_{8} + \underbrace{(a_2 * 2^2+a_1 * 2+a_0)}_{\text{Entier entre 0 et 7}}$$ où chaque a_i est 0 ou 1.

Exemple. 0b111101001 → 0751

Du binaire vers l’hexadécimal.

$N=a_{k-1} * 2^{k-1} +....+a_5 * 2^5+a_4 * 2^4+a_3 * 2^3+a_2 * 2^2+a_1 * 2+a_0$ où chaque a_i est 0 ou 1.

$a_3 * 2^3+a_2 * 2^2+a_1 * 2+a_0$ est un entier entre 0 et 15. De même pour $a_7 * 2^3+a_6 * 2^2+a_5 * 2+a_4$

On met ici les puissances de 2^4 en facteur. Donc ici,on fait des paquets de 4 bits en partant de la droite.

Exemple. 0b111101001 → 0x1e9

L’addition binaire.

0b 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 + 0b 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0

```
    1  1  1  1  1     1        1  1
          1  1  1  1  0  1  0  0  1  1  1
 +     1  1  0  0  1  0  1  1  0  1  1  0
 ----------------------------------------
    1  0  1  0  0  0  1  0  1  1  1  0  1
```

L’addition octale.

0 3 6 4 7 + 0 1 7 2 2 5

```
   1  1     1
      3  6  4  7
 + 1  7  2  2  5
 ---------------
   2  3  0  7  4
```

L'addition hexadécimale.

0x 4 e d a + 0x c 9 f b 6

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 4 & e & d & a \\
+ & c & 9 & f & b & 6 \\
\hline
 & c & e & e & 9 & 0
\end{array}
$$

Le décalage binaire vers la gauche.

On ne considère ici aucune contrainte sur la longueur du codage. Seules les représentations nous intéressent.

$0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0 < 1 \rightarrow 0b\ a_{k-1} \ldots\ldots a_0 0$ C'est donc une multiplication de $0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0$ par 2.

$0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0 < 2 \rightarrow 0b\ a_{k-1} \ldots\ldots a_0 00$ C'est donc une multiplication de $0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0$ par 4.

$0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0 < 3 \rightarrow 0b\ a_{k-1} \ldots\ldots a_0 000$ C'est donc une multiplication de $0b\ a_{k-1}a_{k-2} \ldots\ldots a_0$ par 8.

etc.

La multiplication binaire.

x*y avec y disons 0b 1 0 0 0 1 1 0 1

$x*y = x * (2^0+2^2+2^3+2^7) = x + 2^2 * x + 2^3 * x + 2^7 * x$

x décalé de 2 positions vers la gauche.

x décalé de 3 positions vers la gauche.

x décalé de 7 positions vers la gauche.

$$
\begin{array}{r}
1\ 1\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\qquad\quad \\
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
+ \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
+ \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
+ \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
\hline
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Disons que x: 0b 1 0 1 0 1 1 alors x*y → 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1

Il est donc inutile d’aligner des lignes qui ne contiennent que des zéros.