Introduksjon

Hovedmålet med dette prosjektet er å lære om aspekter knyttet til den deriverte av reelle funksjoner. Arbeidet er delt i to, og omhandler:

1. Numeriske tilnærminger til den deriverte av en reell funksjon.
2. Bruk av Newton-Raphsons metode for å finne tilnærminger til løsninger av ikke-lineære ligninger.

Læringsutbytte

Studenten skal kjenne til og kunne bruke:

- Terminologi, resultater og metoder som relaterer til derivasjon av reelle funksjoner.
- Metoder for å tilnærme løsninger av ikke-lineære ligninger.
- Programvare for å kunne utføre enkle numeriske beregninger, samt kjenne til begrensninger til slik programvare.

Programvare

Det anbefales å bruke enten Python (med biblioteker) eller MATLAB i arbeidet med prosjektet. Det er opp til hver enkelt gruppe å bestemme seg for hvilken programvare som skal benyttes.

Evaluering

Prosjektet skal utføres i grupper, og hver gruppe skal utforme og levere en skriftlig rapport på inntil 16 sider. Det er anledning til å levere vedlegg (kildekode, etc.) i tillegg til rapporten.

Hver gruppes rapport vil bli bedømt av en prosjektveileder, og vil bli bedømt til enten "bestått" eller "ikke bestått". Det er krav om bestått prosjektoppgave for å kunne gå opp til eksamen.

Rapporten

Hovedpoenget med rapporten er å gi prosjektveilederen mulighet til å bedømme om prosjektets oppgaver er gjort, og læringsmål nådd, på en tilfredsstillende måte.

Hvert delprosjekt skal ha et avsnitt for introduksjon og et for konklusjon. Mellom disse to presenteres resultatene av delprosjektet. Sørg for at presentasjonen er klar og lett å lese samt at den kan leses uten å måtte slå opp i prosjektbeskrivelsen.

Diskuter med veileder hvordan ligninger, figurer og plott best kan presenteres. Sett deg i leserens posisjon når du skriver og tenk på hva som må med for å gjøre framstillingen lesbar.

Denne prosjektbeskrivelsen kan legges ved som et vedlegg til rapporten.

Del 1: Numeriske tilnærminger til den deriverte

La f være en reell kontinuerlig funksjon, og la x være et reelt tall. Den deriverte til en funksjon er et mål på hvor mye funksjonen endrer seg når variabelen x forandres. I kapittel 2.2 i boka finner vi definisjonen av den deriverte til f i punktet x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \,. \tag{1}$$

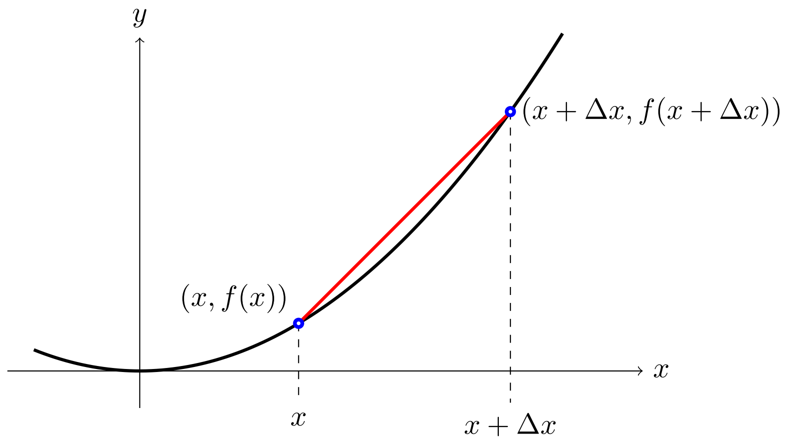
Hvis grensa eksisterer, sier vi at dette er den deriverte til funksjonen f i punktet x. Ut fra denne formelen kan en utlede de vanlige derivasjonsreglene som for eksempel produkt-, kjerne- og kvotientregelen.

Når man skal bruke deriverte på en datamaskin kan det være nyttig å finne tilnærmede verdier av $f'(x)$ uten være nødt til å regne ut et eksakt uttrykk for f' først. En slik situasjon har vi f.eks. når f ikke er gitt ved et algebraisk uttrykk, men bare ved en masse datapunkter (akkurat som når vi plotter en funksjon ut fra en tabell av x og y-verdier).

Vi tar utgangspunkt (1) og velger et tall Δx, f.eks. $\Delta x = 0.1$, som h og sier

$$f'(x) \approx g(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \,. \tag{2}$$

Dette kan vi tegne opp



Stigningstallet til det røde linjesegmentet i figuren over er gitt ved

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = g(x) \,. \tag{3}$$

Så $g(x)$ kan tenkes på som den gjennomsnittlige vekstraten til f over intervallet $[x, x+\Delta x]$.

Den deriverte i x er også stigningstallet til tangentlinjen til grafen til f i punktet $(x, f(x))$. Den deriverte kan tenkes på som den momentane vekstraten, vekstraten i et øyeblikk, til f i punktet x.

Den gjennomsnittlige vekstraten (3) tilnærmerer den momentane vekstraten (1). Feilen vi gjør når vi bruker (2) og sier $f'(x) \approx g(x)$ skriver vi som

$$E(x) = |f'(x) - \text{tilnærmet verdi}| = |f'(x) - g(x)| \,. \tag{4}$$

Tilnærmingen bør bli bedre hvis vi startet med en mindre Δx. Dette skal vi se på i oppgavene under.

Oppgaver om numerisk derivasjon

Funksjon $f(x)$	**intervall**	x_0
$7x^2 - 8x + 1$	$0 \leq x \leq 2$	1
$\sin(x)$	$0 \leq x \leq 2\pi$	$\pi/4$
$\frac{1-x}{(x+3)^2}$	$-2 \leq x \leq 2$	1
$\sqrt{1+x^2}$	$0 \leq x \leq 10$	5

For hver av funksjonene i tabellen over, gjør følgende:

Oppgave 1 . . . .

(a) Finn den deriverte, $f'(x)$ (ikke en tilnærming), ved å bruke kjente regler for derivasjon.

(b) Regn ut $f'(x_0)$, samt en tilnærming ved å gjøre bruk av $g(x)$ fra (2) med $\Delta x = 0.1$.

(c) Beregn $E(x_0)$.

(d) Finn, ved prøving og feiling, den største Δx avrundet til to signifikante desimaler, slik at $E(x_0) \leq 0.001$.

Oppgave 2 . . . .

Plott grafen til følgende funksjoner i intervallet fra tabellen over:

(a) $f(x)$.

(b) $f'(x)$.

(c) Tilnærmingen $g(x)$ fra (2) med Δx verdien fra Oppgave 1 d.

(d) Feilen $E(x)$.

Hvert plott skal inneholde 1000 evalueringspunkter som er jevnt fordelt over intervallet.

Det oppfordres til å utforske følgende:

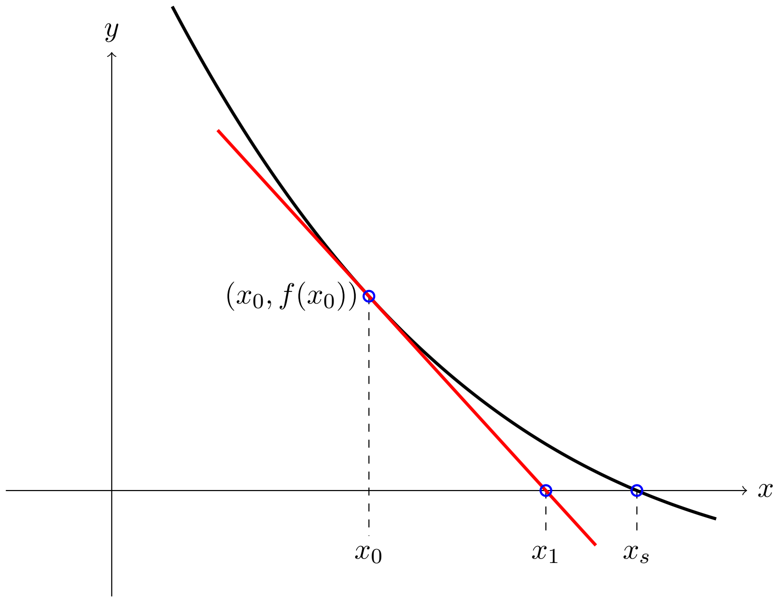
- Sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$. F.eks. hvordan $f'(x)$ varierer i forhold til $f(x)$.
- Hvordan valg av Δx påvirker nøyaktigheten av tilnærmingene. F.eks. hvor liten kan vi velge Δx?
- Hvordan feilen $E(x)$ varierer som en funksjon av x.
- Begrensninger ved numeriske tilnærminger av den deriverte.

Del 2: Newton-Raphsons metode

La f være en reell derivérbar funksjon av én variabel. Vi ønsker ofte å finne krysningspunktet mellom grafen til f og x-aksen, eller med andre ord finne de verdier x som passer inn i ligningen:

$$f(x) = 0\,. \tag{5}$$

La x_s være en slik løsning av ligningen over, og anta at vi har valgt et punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ som ligger relativt nærme x_s. Figuren under viser et eksempel på denne situasjonen der vi også har tegnet inn tangentlinjen L_0 til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$. La x_1 være krysningspunktet mellom L_0 og x-aksen.



Ideelt sett har vi nå lyst til å starte i x_0 og så følge grafen til f til den krysser x-aksen, og på denne måten finne x_s. Dette er ikke alltid så lett i praksis, så vi velger å løse et enklere problem: Vi bytter ut grafen til f med tangentlinjen til grafen, og velger å følge denne til den krysser x-aksen i stedet. Siden vi antok at x_0 lå nærme løsningen x_s, vil tangentlinjen være en god tilnærming til grafen til f i det området vi er interessert i. Vi håper derfor at x_1 vil ligge enda nærmere x_s enn x_0 gjorde, og at $|f(x_1)| < |f(x_0)|$. Dette er idéen bak Newton-Raphsons metode.

For å beregne x_1 bruker vi at tangentlinjen har stigningstall $f'(x_0)$, som til sammen med formelen for stigningstallet til en rett linje gir oss:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,.$$

Vi løser denne ligningen for x_1 og får:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,. \tag{6}$$

Ved å gjenta denne prosessen får vi en tallfølge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ som forhåpentligvis tilnærmer løsningen x_s bedre og bedre for hvert steg.

Vi oppsummerer:

- Newton-Raphsons metode starter ved å velge en $x_0 \in \mathbb{R}$, og en feiltoleranse $E > 0$.
- Deretter bruker vi metoden over til å finne tilnærminger:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

  For hvert steg beregnes feilen $E_n = |f(x_n)|$. Dersom $E_n < E$ anser vi tilnærmingen x_n som god nok, og algoritmen terminerer. I motsatt fall fortsettes prosedyren.

Bemerkninger og advarsler

Det er flere ting å bemerke med algoritmen slik den er fremstilt over:

- Hvis $f(x) = ax + b$ med $a \neq 0$, så kalles ligningen "lineær" og algoritmen gir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{ax_0 + b}{a} = x_0 - x_0 - \frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$$

  som er eksakt løsning. Algoritmen terminerer etter ett steg.

- I motsetning til en lineær ligning, vil en ikke-lineær ligning $f(x) = 0$ kunne ha flere løsninger. Valget av initialverdien x_0 vil påvirke hvilken løsning algoritmen konvergerer mot, hvis den konvergerer i det hele tatt (se kommentar under).

- Uttrykket (6) gir ikke mening hvis $f'(x_n) = 0$. Hvis denne situasjonen oppstår, bør algoritmen avbryte og starte på nytt med en ny initialverdi x_0.

- Algoritmen over er ikke sikret å konvergere for alle f og alle initialverdier x_0. Det finnes eksempler der algoritmen blir "sittende fast" i et repeterende mønster av tilnærminger, og det finnes situasjoner der tallfølgen $x_0, x_1, \ldots$ divergerer mot uendelig uten at $f(x_n)$ noensinne er nær verdien 0. (Se oppgave 4.2.21, 22 og 23 i læreboka.)

  I disse situasjonene vil algoritmen, slik den er presentert her, aldri terminere. Når man implementerer algoritmen bør man derfor holde telling på antall iterasjoner som er utført, og starte på nytt med en ny initialverdi når et visst antall iterasjoner er nådd.

Oppgaver: Newton–Raphson

Oppgave 1: Løsninger av en kvadratisk ligning . . . .

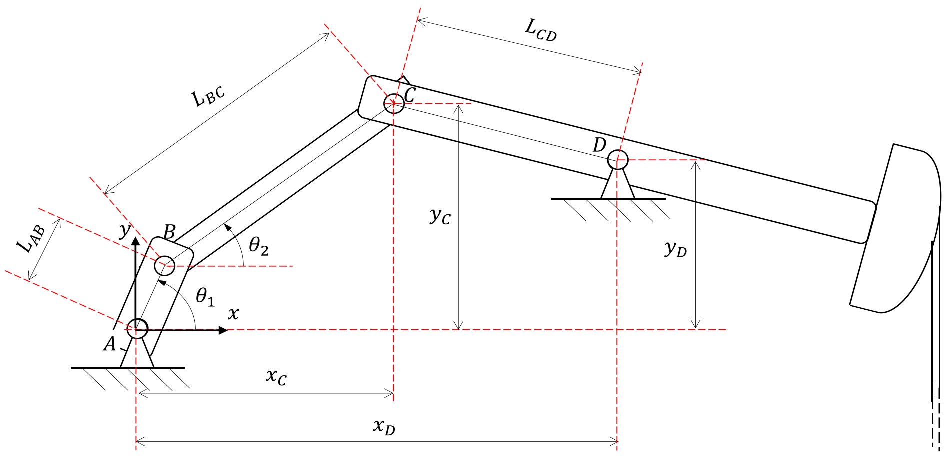
Bruk Newton-Raphsons metode for å finne tilnærminger til begge løsningene av ligningen:

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 4\,.$$

Bruk en feiltoleranse på $E = 10^{-12}$. Utforsk hvordan valget av initialverdi x_0 påvirker hvilken av løsningene algoritmen konvergerer mot.

Oppgave 2: Vinkler i en leddet mekanisk arm . . . .

En typisk landbasert oljepumpe (derrick) er vist i figuren under. Vi ønsker å beregne vinkelen θ_2 i situasjoner der vi kjenner vinkelen θ_1. Vi ønsker å tilnærme svaret ved hjelp av Newton-Raphsons metode.



Derricken har følgende dimensjoner: $L_{AB} = 2$m, $L_{BC} = 8.5$m, $L_{CD} = 7$m, $x_D = 10$m, og $y_D = 6$m. Videre er følgende relasjoner gyldige:

$$(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = L_{CD}^2 \tag{7}$$

der

$$x_C = L_{AB} \cdot c_1 + L_{BC} \cdot c_2 \quad \text{og} \quad y_C = L_{AB} \cdot s_1 + L_{BC} \cdot s_2. \tag{8}$$

Her er $c_i = \cos(\theta_i)$ og $s_i = \sin(\theta_i)$, for $i = 1, 2$.

Bruk (7) og (8) til å utlede én ligning som vi kan løse for å finne den ukjente θ_2:

$$f(\theta_2) = 0\,. \tag{9}$$

For en gitt θ_1 vil denne ligningen har to løsninger. Bruk Newton-Raphsons metode med en feiltoleranse på $E = 10^{-12}$ til å finne tilnærminger til begge løsningene i alle tre tilfellene under.

(a) Løs $f(\theta_2) = 0$, når $\theta_1 = 0$.

(b) Løs $f(\theta_2) = 0$, når $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

(c) Løs $f(\theta_2) = 0$, når $\theta_1 = \pi$.

Utforsk den fysiske betydningen av de to løsningene i hvert tilfelle.

Finn også sammenhengen mellom initialverdien brukt i løsningsmetoden, og hvilken av de to løsningene metoden konvergerer mot.