

1. (1 балл) В массиве чисел a_1, \dots, a_n за одну операцию можно поменять местами любые два соседних элемента. Можно ли отсортировать массив (то есть расположить все числа в порядке неубывания) таким образом, чтобы каждый элемент поучаствовал в чётном числе перестановок? Определите ответ за $O(n \log n)$.
2. (1 балл) Дан массив чисел a_1, \dots, a_n , причём $a_i \in \{0, 1, \dots, k\}$ при всех i . Отсортируйте этот массив за $O(n + \sqrt{k})$.
3. (3 балла) Дана квадратная матрица $n \times n$ из нулей и единиц. Найдите в ней прямоугольник максимальной площади, целиком состоящий из нулей, за $O(n^2)$.
4. (2 балла) Пусть дан массив длины n и m запросов поиска порядковой статистики. Придумайте детерминированный алгоритм, отвечающий на все запросы на время $O(n \log m)$.
5. (1 балл) В этой задаче использовать разрешается не более одной кучи. Разработайте структуру данных S , которая бы позволяла обрабатывать любой запрос из нижеперечисленных за $O(\log n)$, где n — текущий размер структуры:
 - `insert x` : вставить целое число x в S ;
 - `getMin`: сообщить минимальное число в S ;
 - `getMax`: сообщить максимальное число в S ;
 - `extractMin`: удалить минимальное число из S .
6. (2 балла) Дано два отсортированных массива: a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m . Определим $A + B$ как множество всевозможных попарных сумм вида $a_i + b_j$ с повторениями. Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{2, 3, 4\}$, то $A + B = \{3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7\}$. По данному числу k вам надо найти k -ю порядковую статистику в $A + B$ (заметьте, что $A + B$ вам не дан). Требуемая асимптотика: $O(k \log k)$. Разрешается использовать не больше $O(k)$ дополнительных ячеек памяти.
7. (3 балла) В алгоритме поиска m -й порядковой статистики за линейное время (Quick Select) весь массив бьётся на блоки по 5 элементов. А что если разбивать на блоки по $2k + 1$ элементов (где k — константа)? Найдите время работы алгоритма в таком случае.
8. (3 балла) Разработайте структуру данных S , которая бы позволяла хранить множество целых чисел, добавлять в него элементы (по одному), удалять $|S| / 2$ наибольших элементов из множества, а также выводить максимальный элемент. Асимптотика: $O(1)$ амортизированно (то есть q последовательных запросов к изначально пустому S должны обрабатываться за $O(q)$).
9. (4 балла) В памяти компьютера расположен массив чисел a_1, \dots, a_n , каждое из которых — целое от 1 до $n - 1$. Найдите какое-нибудь число, которое встречается в массиве как минимум дважды. Асимптотика: $O(n)$ времени и $O(1)$ дополнительной памяти.
10. (1 балл) Изучите сортировку слиянием, быструю сортировку на стабильность. Стабильна ли их классическая реализация? Можно ли её таковой сделать?