Laboration i Signaler och System

Fredrik Lundberg 881110-4937
Johan Höglund 880910-4857

2014-10-19

3.1 Fourierseriens uppbyggnad

För en udda signal gäller generellt att $A_k = 0$, vi vet även att $B_k$generellt kan skrivas som:

$$B_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt$$

För att förenkla integrering av fyrkantsvågen bryter vi upp denna i två delar. För intervallet $[0, \frac{T}{2}]$ blir integralen av $f(t)$ $\frac{T}{2}$, och i intervallet $[\frac{T}{2}, T]$ blir integralen $-\frac{T}{2}$. Hela uttrycket kan därför skrivas som:

$B_k = \frac{T}{2}\left(\int_0^{T/2} sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt - \int_{T/2}^{T} sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt\right)$

Från sökningar på Internet har vi funnit ett kombinerat uttryck för C_k som används i matlabkoden nedan för att generera signaler för att bygga upp en fyrkantsvåg.

```
T=1;
w=2*pi/T;
M=200;
t=T*(0:M-1)/M;
y=zeros(1,200);
ind=30; %intervall
C= 1:(ind*2 + 1);
for a = 1:(ind*2 + 1)
        k = a - ind - 1;
        syms p;
        % Addera båda integralerna
        C(a) = 1/T *(int(exp(-1i*p*w*k) , 0 , T/2 ) ...
                        + int ( -exp(-1i*p*w*k) , T/2 , T));
end
for k = -ind:ind
        a = k+ind + 1;
        y = y + C(a)*exp(1i*w*t*k);
```

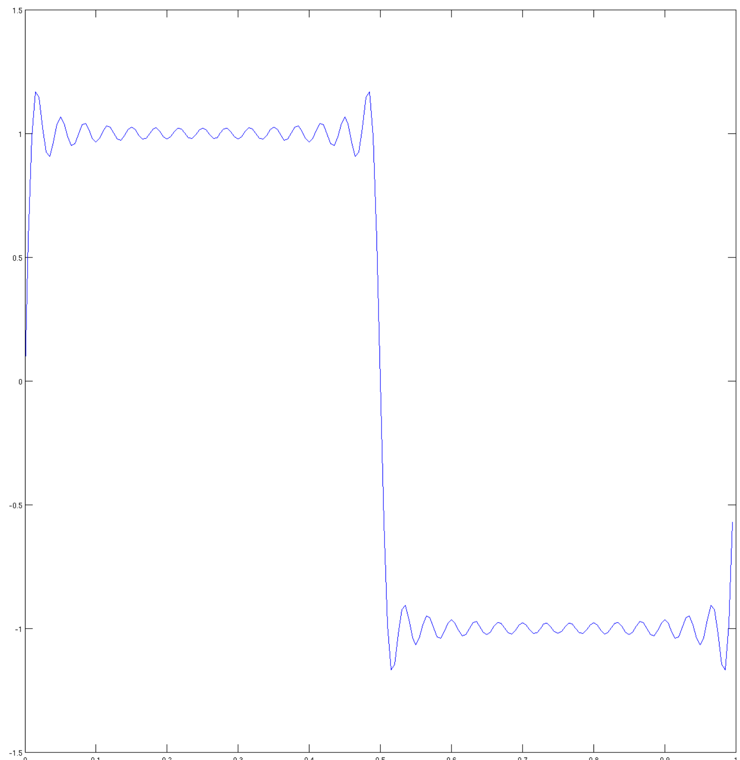


Figure 1: Plot av sinusvågor kombinerade till fyrkantsvåg

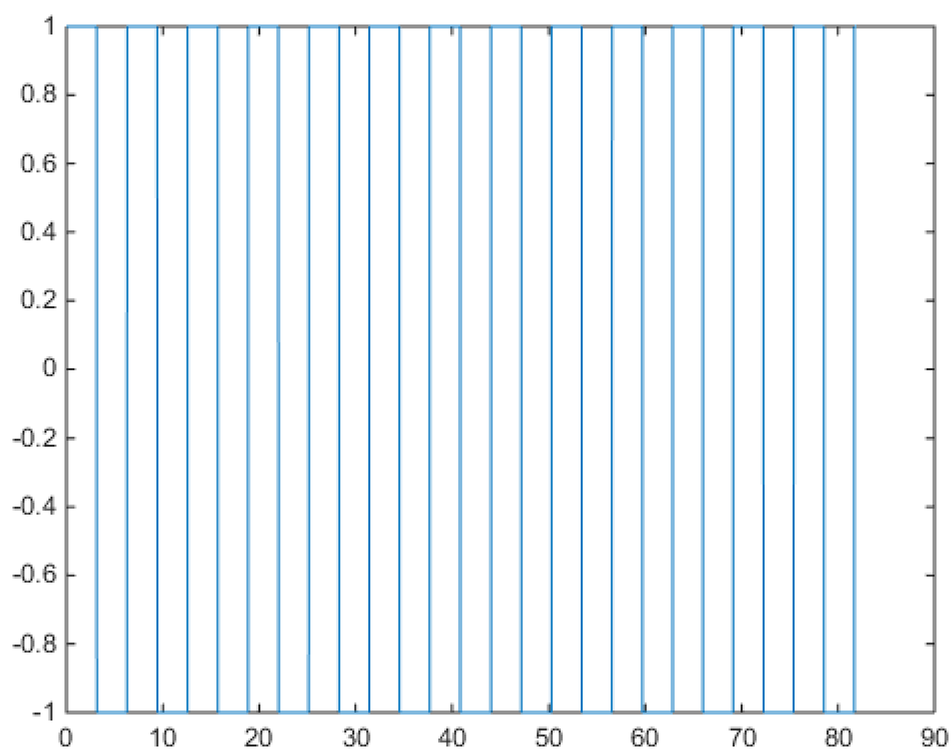
```
end
plot(t,y);
```

3.2 Linjära system och sinusar

```
%Num = (s+0.1)(s+10) blir s^2+10.1s+1
num=[1 10.1 1];
%Den = (s+1)(s^2+s+9) blir s^3+2s^2+10s+9
den=[1 2 10 9];
sys=tf(num,den);
bode(sys);
pzmap(sys);
```

```
t=0:0.01:81.92;
x1=sin(1*t);
x2=sin(3*t);
x3=sin(5*t);
y1=lsim(sys,x1,t);
y2=lsim(sys,x2,t);
y3=lsim(sys,x3,t);
%verifiera ekvationen y(t) = g()sin(t + ()) beräkna g() och () för
% =3
gw = (abs(evalfr(sys,3i)));
fi = (angle(evalfr(sys,3i)));
y = gw*sin(3*t + fi);
% Plotta ut y2 och y
plot(y2);
hold on;
plot(y);
```

3.3 Periodiska insignaler och DFT



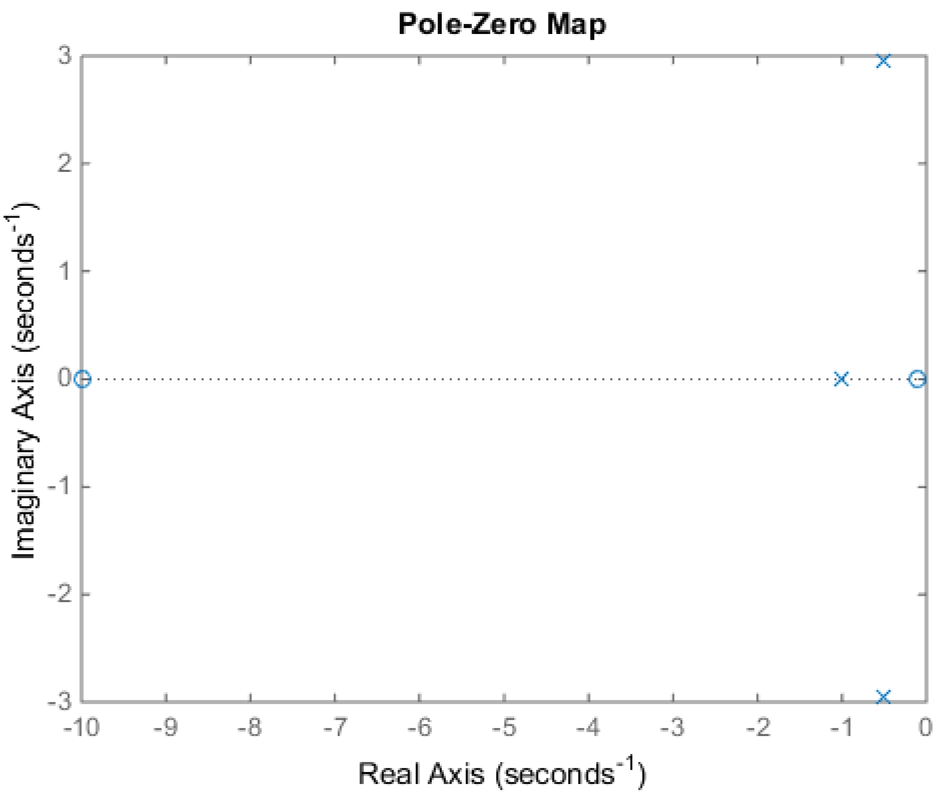


Figure 2: Pol och nollställeplacering för överföringsfunktion G(s)

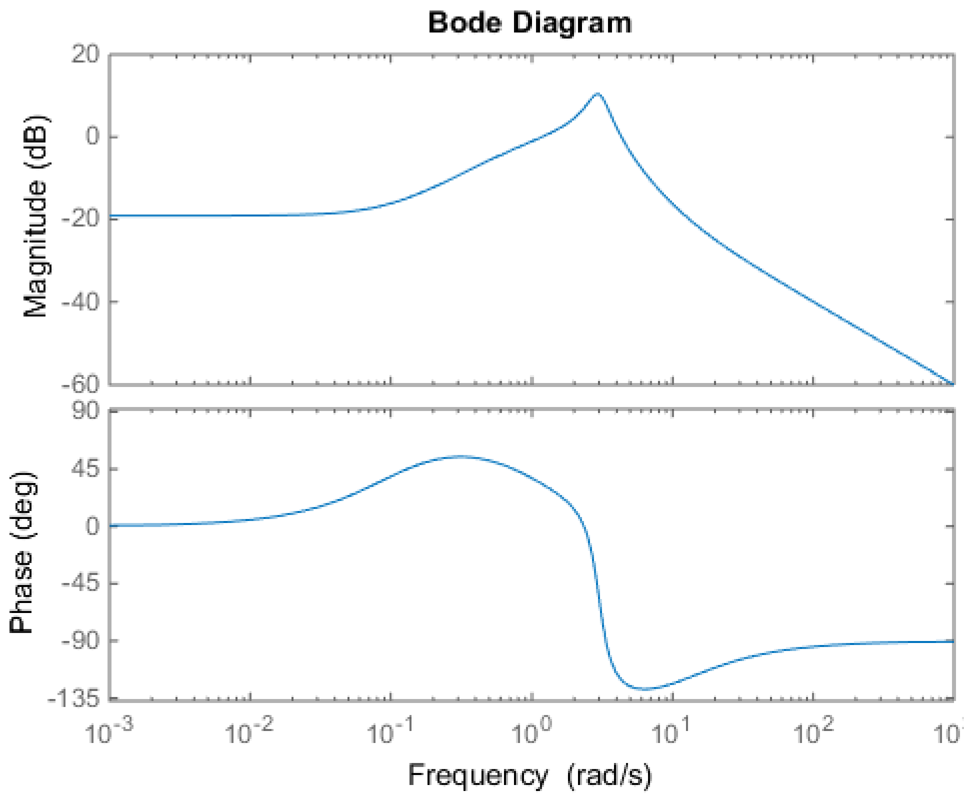


Figure 3: I bodediagrammet syns det att den maximala förstärkningen för systemet ligger runt $\omega = 3$ rad/s

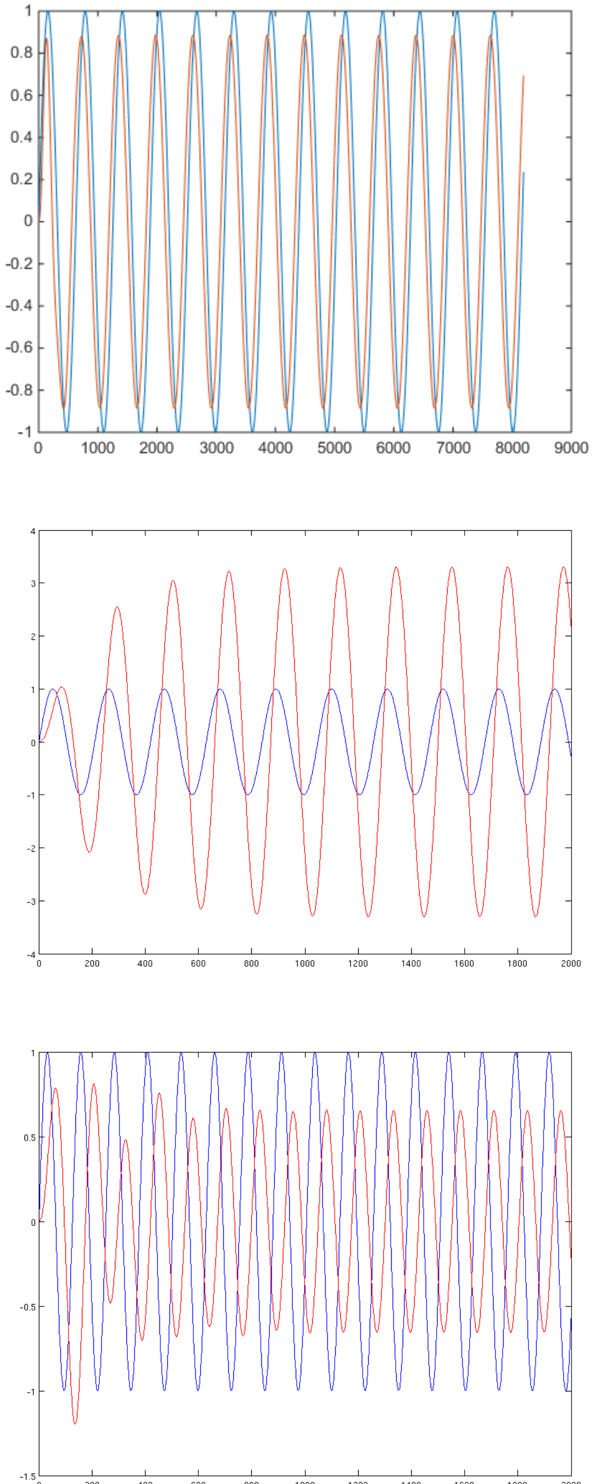


Figure 4: Signalerna x_1, x_2, $x_3$genom systemet G(s), röd är insignal

Fyrkantsvågen

```
%generera en fyrkantigvåg
t=0:0.01:81.92;
x = square(t);
plot(t,x);
```

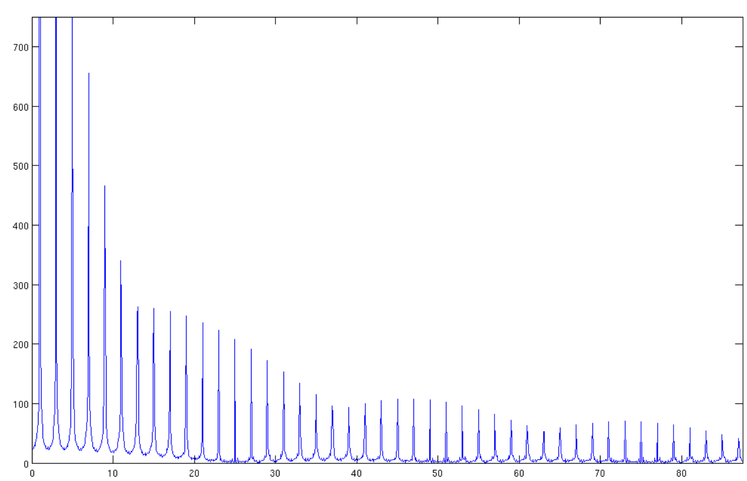
Man ser att den är udda

```
for k = 1:2:5
        ko = @(k) (-1i * 2) / (pi * k);
    B = @(k) 2 * ko(k) / (-1i);
    B(k)
end
```

Vi genererar 3 nollskilda fourierkoefficienter, nämligen $\omega = \{1, 3, 5\}$, och får teoretiska värden för B_k enligt nedan.

```
% plotta DFT
Fs=100;% 100 Hz
N=8192;
for k = 1:N
    w(k) = (2 * pi * Fs * k) / N;
end
y = abs(fft(x));
plot(w,y);
```

Plotta DFT



Tabellen visar B_k-värdena, teoretiska togs fram med koden ovan och de praktiska togs fram med ekvationen från häftet:

$$B = \frac{2|X[k_0]|}{N}$$

ω	Teoretisk	Praktisk
1	1.2732	1.2701
3	0.4244	0.4147
5	0.2546	0.2386

Applicera nu vår fyrkantssignal på systemet:

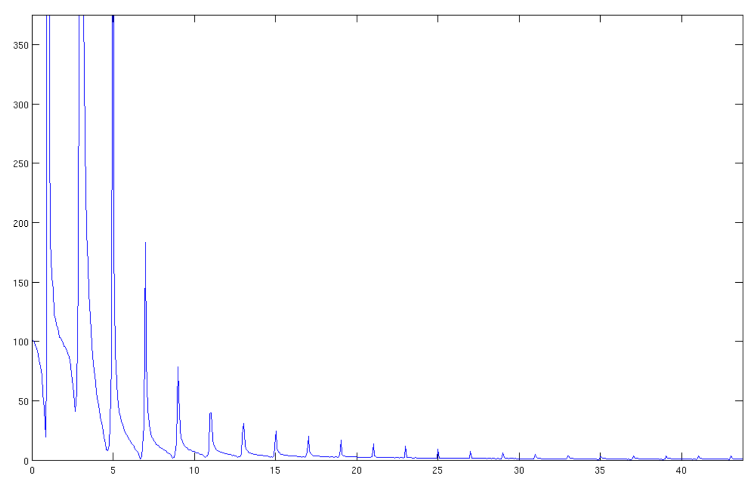
$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s+10)}{(s+1)(s^2+s+9)}$$

Med koden:

```
num = [1  10.1  1];
den = [1  2  10  9];

sys = tf(num,den);

y = lsim(num,den);
plot(w,abs(fft(y)));
```



Vi kan beräkna koefficienterna för $\omega = 3$ med:

$$G(3j) = \frac{(3j+0.1)(3j+10)}{(3j+1)((3j)^2+3j+9)} = \frac{-8+30.3j}{-9+3j}$$

Vi beräknade också *andra teoretiska värden* genom $B_k = \frac{2}{\pi k}$

ω	Praktiska värden	Teoretiska värden	Andra teoretiska värden
1		1.1022	0.6366
3		1.3356	0.2122
5		0.1505	0.1273

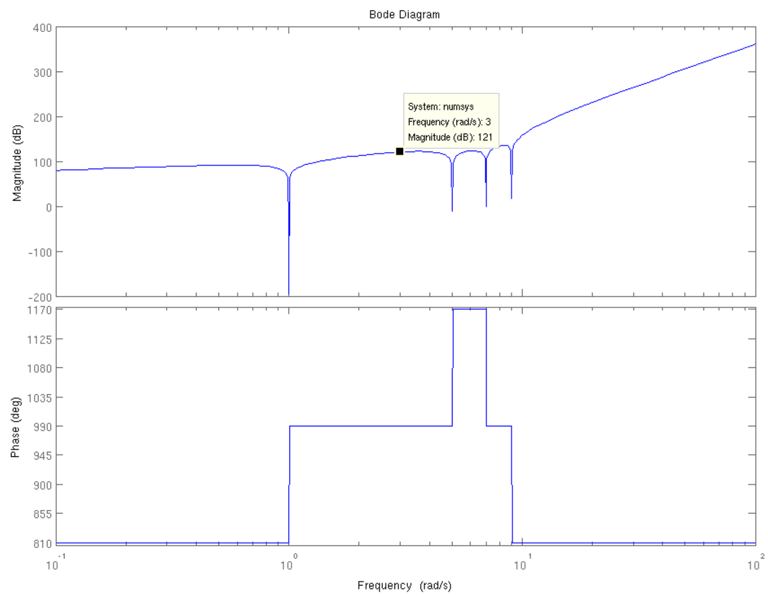


Figure 5: Bodediagram för täljarpolynomet

3.4 Notch-filter

För att skapa ett täljarpolynom med komplex-konjugerade nollställen i $\omega = \{0, 1, 5, 7, 9\}$ ställer vi upp nedanstående uttryck:

$$(s)(s-1)(s+1)(s-5)(s+5)(s-7)(s+7)(s-9)(s+9)$$

Genom att använda funktionen ***poly*** i Matlab får vi ut att ovanstående motsvaras av nedanstående polynom:

$$s^4 + 156s^3 + 7374s^2 + 106444s + 99225$$

Plottar vi ovanstående uttryck som ett system i ett bodediagram ser vi att vi som önskat får nollställen i 1, 5, 7 samt 9. Då x-axeln i Matlabs bodediagram är logaritmisk ser vi dock aldrig att systemet ger en utsläckning av insignalen för $\omega = 0$.

Polynomet ovan motsvarar totalt nio nollställen, för att eliminera förstärkningen ovanför $\omega = 9$ krävs således nio poler, skall vi däremot nå en dämpning om 60 dB per dekad krävs totalt elva poler. Vi lägger till samtliga poler i $s = -4$ och får följande nämnare:

$$(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)(s-4)$$

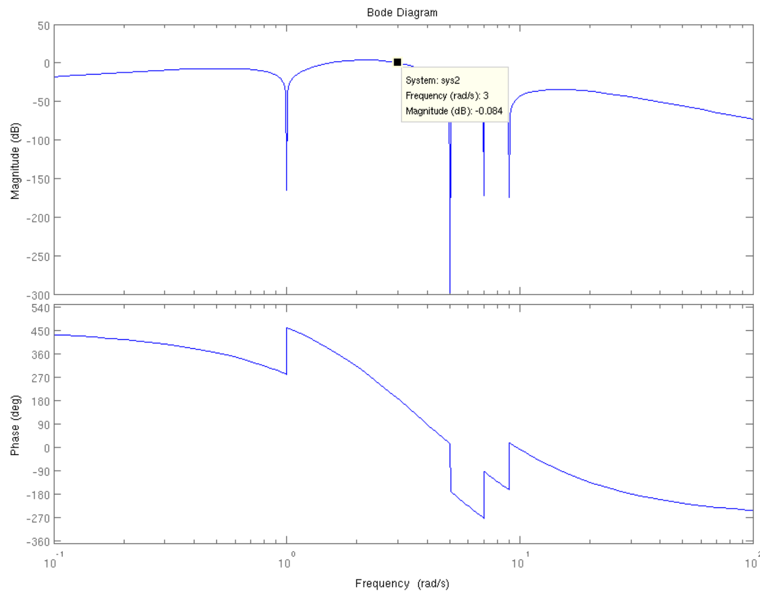


Figure 6: Bodediagram för systemet efter skalning

Plottar vi bodediagrammet ser vi att den sökta dämpningen om 60 dB per dekad för frekvenser $\omega \geqslant 9$ har uppnåtts. Eftersom vi vill att en signal med frekvens $\omega = 3$ skall passera utan att amplituden förändras, söker vi först den amplitud som system f.n. svarar med vid $\omega = 3$: *evalfr(sys,* $3rad/s$*)*$= 0.0045$. En skalning av täljarpolynomet om $\frac{1}{0.0045} \approx 222.22$ krävs således för att eliminera den dämpning som skrev vid $\omega = 3$.

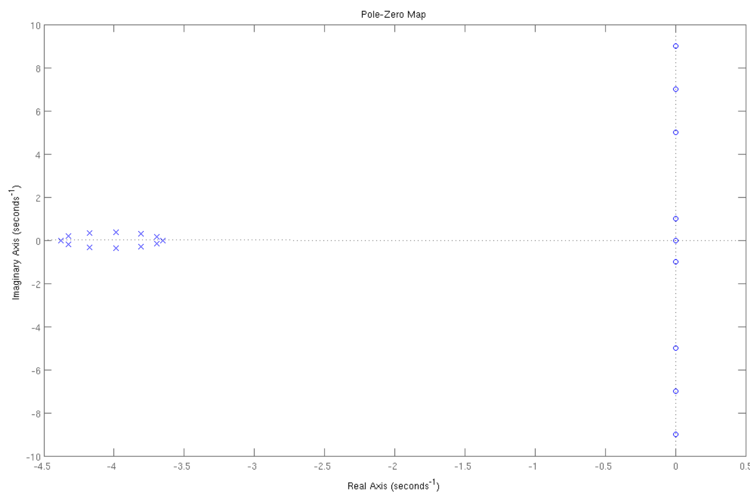


Figure 7: Pol-nollställediagram för det slutliga systemet

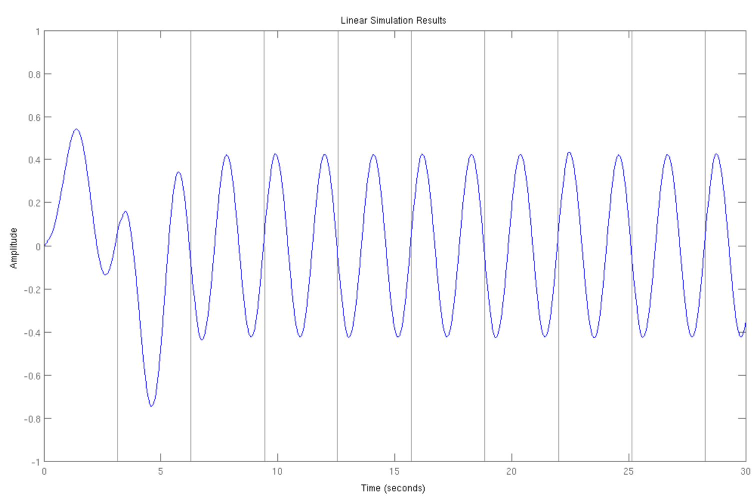


Figure 8: Utsignal genom notch-filtret när en fyrkantsvåg matas genom systemet.

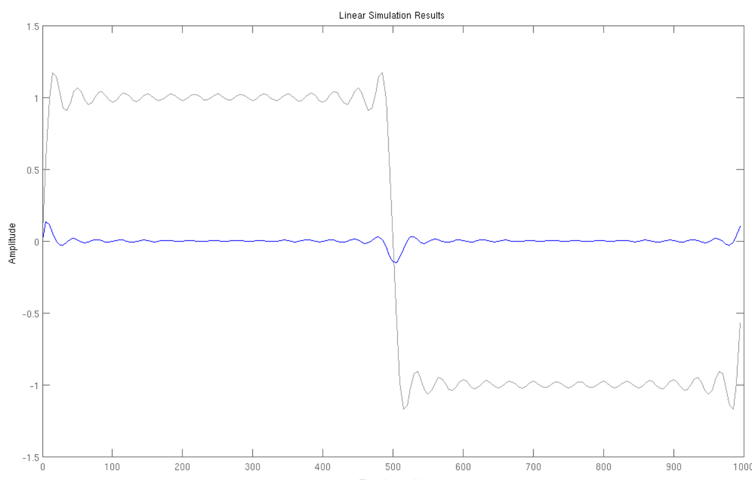


Figure 9: Utsignal genom notch-filtret när det matats med en approximering av tidigare visad fyrkantsvåg.