5. Suponga que un operador $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}\,|x\rangle = \lambda\,|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+\,|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}\,|y\rangle = (\lambda+1)\,|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}\,|x\rangle = \lambda\,|x\rangle \quad \text{y} \quad |z\rangle = \mathbb{L}_-\,|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}\,|z\rangle = (\lambda-1)\,|z\rangle\ .$$

Por ello es costumbre denominar a $\mathbb{L}_+$ y $\mathbb{L}_-$ los operadores de "subidas" y de "bajada" respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

$$[\mathcal{L}_-, \mathcal{L}_+] = \mathcal{I} = (\mathcal{L}_-)(\mathcal{L}_+) - (\mathcal{L}_+)(\mathcal{L}_-)$$

$$|y\rangle = \mathcal{L}_+|x\rangle \to \mathcal{L}|y\rangle = \mathcal{L}\mathcal{L}_+|x\rangle$$

$$\mathcal{L}|y\rangle = (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+)|y\rangle \to \mathcal{L}|y\rangle = (\mathcal{I} + \mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)|y\rangle$$

$$|y\rangle = \mathcal{L}_x|x\rangle \to \mathcal{L}_-|y\rangle = \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+|x\rangle = \mathcal{L}|x\rangle$$

$$\mathcal{L}_-|y\rangle = \lambda|x\rangle$$

$$\mathcal{L}|y\rangle = (\mathcal{I}|y\rangle + \mathcal{L}_+\mathcal{L}_-|y\rangle) = |y\rangle \to \mathcal{L}|y\rangle = |y\rangle + \mathcal{L}_+\lambda|x\rangle$$

$$\boxed{\mathcal{L}|y\rangle = |y\rangle + \lambda|y\rangle}$$

$$|z\rangle = \mathcal{L}_- |x\rangle \longrightarrow \mathcal{L}|z\rangle = \mathcal{L}\mathcal{L}_- |x\rangle$$

$$\mathcal{L}|z\rangle = (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+)\mathcal{L}_- |x\rangle = \mathcal{L}_- (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-) |x\rangle$$

$$\mathcal{L}|z\rangle = \mathcal{L}_- (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ - I) |x\rangle$$

$$\mathcal{L}_- \lambda |x\rangle - \mathcal{L}_- |x\rangle = \mathcal{L}|z\rangle$$

$$\boxed{\lambda |z\rangle - |z\rangle = \mathcal{L}|z\rangle}$$