6. En el caso 3D tenemos que si $\{\mathbf{e}_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) no necesariamente ortogonal, entonces, demuestre que:

a)

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ y sus permutaciones cíclicas}$$

b) si los volumenes: $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ y $\tilde{V} = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$.

c) ¿Qué vector satisface $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = 1$? Demuestre que $\mathbf{a}$ es único.

d) Encuentre el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo: Dada la base: $\mathbf{w}_1 = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{k}$. Entonces encuentre:

1) Las bases recíprocas $\{\mathbf{e}^i\}$.
2) Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

a) Proyectamos un vector $|a\rangle$ sobre uno de los ejes, de ta manera que $|a\rangle = \alpha w_1$ y por tanto

$$|a\rangle \cdot w_1 = 1 \qquad \text{y por construcción } w_i \cdot w^j = \delta_j^i$$

Por tanto $w^1 = \alpha(w_2 \times w_3)$

Por lo que podemos escribir

$$\alpha w_1 \cdot (w_2 \times w_3) = 1 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)}$$

y multiplicando a ambos lados por $(w_2 \times w_3)$

$$w^1 = \frac{(w_2 \times w_3)}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)}$$

y en general se puede escribir

$$w^i = \frac{w_j \times w_k}{w_i \cdot (w_j \times w_k)}$$ donde i, j, k son permutaciones cíclicas de $1, 2, 3$

b) $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \qquad \bar{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$

Como $e_2 \times e_3 = e^1$ y $e^2 \times e^3 = e_1$

$$V\bar{V} = (e_1 \cdot e^1)(e^1 \cdot e_1)$$ * Por construcción $w_i \cdot w^j = \delta_j^i$

$$V\bar{V} = (1)(1) = 1$$

c) $a \cdot e^{j} = 1$

* Expandiendo a

$$(c^1 e_1 + c^2 e_2 + c^3 e_3) \cdot e^{j}$$

$c^1 e_1 = 1$, por tanto e_1 es único

d) $w_1 = 4i + 2j + k$; $w_2 = 3i + 3j$; $w_3 = 2k$

$$e^1 = \frac{w_2 \times w_3}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)} = \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j$$

$$e^2 = \frac{w_3 \times w_1}{w_2 \cdot (w_3 \times w_1)} = -\frac{1}{3} i + \frac{2}{3} j$$

$$e^3 = \frac{w_1 \times w_2}{w_3 \cdot (w_1 \times w_2)} = -\frac{1}{4} i + \frac{1}{4} j + \frac{1}{2} k$$