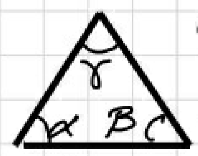
$a)$ Construya la tabla de multiplicación para $\mathbf{G}_\triangle$, vale decir $\mathbf{G}_\triangle = \{\mathcal{I}, \{\mathcal{R}_i\}, \{\bar{\mathcal{R}}_j\}, \{\mathcal{X}_k\}\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde $\mathcal{I}$ es la operación identidad, $\{\mathcal{R}_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{\mathcal{R}}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.

$\square$	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_A	X_B	X_C
R_i	R_i	$\bar{R}_j$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	R_i	$\bar{R}_j$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_j$	I	R_i
X_C	X_C	X_A	X_B	R_i	$\bar{R}_j$	I



Para completar la tabla se realizan las respectivas transformaciones que dejan invariante el triángulo. Una concatenación que es igual a transformar el triángulo una sola vez.

$b)$ Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: $\mathbf{G}_\triangle$.

Para eso hay que probar los axiomas de Grupo.

1. Cerrado. $\forall\, x, y \in G \rightarrow x \square y \in G$. En la tabla se observa que todos los elementos al realizar la operación $\square$ se mantienen dentro del grupo y por tanto cumple ser cerrado bajo esa operación.

2. Asociativo: $\forall\, x, y, w \in G \longrightarrow x(y \square w) = (x \square y) w$. Este axioma se puede demostrar mediante la tabla. Si tomamos 3 elementos al azar debe cumplir, por ejemplo

$$\bar{R}_j (X_A \square R_i) = (\bar{R}_j \square X_A) R_i$$

$$\bar{R}_j X_B = X_B R_i$$

$$X_C = X_C \checkmark$$

* Resolviendo los paréntesis a ambos lados tenemos:

* Y así queda demostrado. Se puede probar para cualquier elemento.

3. Elemento Neutro. $\forall\, x \in G\ \exists\, I \mid x \square I = x$. Este axioma se prueba muy fácil observando la tabla y notando que el elemento "I" es el elemento neutro, puesto que no altera los elementos del grupo al operar con él.

4. Elemento Inverso. $\forall\, x \in G\ \exists\, x^{-1} \mid x \square x^{-1} = I$. Este axioma se prueba observando la tabla y notando que en cada fila y columna de elementos aparece el elemento neutro.

c) Identifique cada una de las $\mathcal{R}_i$ y $\bar{\mathcal{R}}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{\mathcal{I}, \mathcal{X}_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

$\square$	I	R_i	$\bar{R}_j$
I	I	R_i	$\bar{R}_j$
R_i	R_i	$\bar{R}_j$	I
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i

$\square$	I	χ_K
I	I	χ_K
χ_K	χ_K	I

d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$.

$\times$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

$\square$	I	R_i	$\bar{R}_j$	χ_A	χ_B	χ_C
I	I	R_i	$\bar{R}_j$	χ_A	χ_B	χ_C
R_i	R_i	$\bar{R}_j$	I	χ_C	χ_A	χ_B
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i	χ_B	χ_C	χ_A
χ_A	χ_A	χ_B	χ_C	I	R_i	$\bar{R}_j$
χ_B	χ_B	χ_C	χ_A	$\bar{R}_j$	I	R_i
χ_C	χ_C	χ_A	χ_B	R_i	$\bar{R}_j$	I

Nótese que las tablas son equivalentes, es decir, al realizar las operaciones en ambas tablas me devuelve la misma posición de un elemento en los dos espacios, por ejemplo

$$B \square C = D \qquad y \qquad \bar{R}_j \square \chi_A = \chi_B$$

Los elementos B y $\bar{R}_j$ tienen la posición 3 en cada uno de sus grupos, los elementos C y χ_A tienen la posición 4 en cada grupo y el resultado de la operación da el elemento que se encuentra en la posición 5.

e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.1.6. ¿ Es ese grupo isomorfo a $\boldsymbol{G}_{\triangle}$? Justifique su respuesta.

La tabla de Permutación de 3 objetos como en el ejemplo de la sección 2.1.6 es

$\odot$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_2$
$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3$
$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_1$
$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_0$
$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_4$

$\square$	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_A	X_B	X_C
I	I	R_i	$\bar{R}_j$	X_A	X_B	X_C
R_i	R_i	$\bar{R}_j$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	R_i	$\bar{R}_j$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_j$	I	R_i
X_C	X_C	X_A	X_B	R_i	$\bar{R}_j$	I

$3 \times 2 - 1$

No son isomorfos, puesto que las tablas no son equivalentes por ejemplo

Elementos: $P_2 \odot P_1 = P_4$ $\qquad$ $\bar{R}_j \,\square\, R_i = I$

Posiciones: $3 \times 2 = 5$ $\qquad$ $3 \times 2 = 1$

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas.

* Operación suma:

$$|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle + b^\alpha |q_\alpha\rangle =$$
$$= (a^0 |q_0\rangle + a_j |q_j\rangle) + (b^0 |q_0\rangle + a_j |q_j\rangle) =$$
$$= (a^0 + (a^1 |q_1\rangle + a^2 |q_2\rangle + a^3 |q_3\rangle) + (b^0 + (b^1 |q_1\rangle + b^2 |q_2\rangle + b^3 |q_3\rangle)) =$$
$$= a^0 + b^0 + (a^1 + b^1)|q_1\rangle + (a^2 + b^2)|q_2\rangle + (a^3 + b^3)|q_3\rangle$$

La suma de números reales también es un número real por lo tanto:

$$|c\rangle = \underbrace{d^0}_{\text{parte real}} + \underbrace{(f^1)|q_1\rangle + (j^2)|q_2\rangle + (h^3)|q_3\rangle}_{\text{parte compleja}}, \quad d, f, j, K \in \mathbb{R}.$$

* Operación multiplicación por escalares.

$$\alpha |c\rangle = \alpha c^\alpha |q_\alpha\rangle = \alpha a^0 + \alpha (a^1 |q_1\rangle + a^2 |q_2\rangle + a^3 |q_3\rangle)$$

Un número real multiplicado por otro número real sigue siendo un número real, por lo tanto:

$$\alpha |c\rangle = d^0 + (f^1)|q_1\rangle + (j^2)|q_2\rangle + (h^3)|q_3\rangle$$

$d, f, j, h \in \mathbb{R}$.

$b)$ Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = \left(b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r},\ r^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{r} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}\right) ,$$

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

$$b_0(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_1 i (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + \ldots$$

$$\ldots\ b_2 j (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_3 k (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

$$b_0 r_0 + b_0 r_1 i + b_0 r_2 j + b_0 r_3 k + b_1 i r_0 - b_1 r_1 + b_1 r_2 k - b_1 r_3 j + \ldots$$

$$\ldots\ b_2 j r_0 - b_2 r_1 k - b_2 r_2 + b_2 r_3 i + b_3 k r_0 + b_3 r_1 j - b_3 r_2 i - b_3 r_3$$

$$(b_0 r_0 - b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3)$$

$$b_0 r_0 - (b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3)$$

$$(b_0 r_0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r},\ b_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r})$$

$c)$ Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a |q_0\rangle + S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle .$$

donde a representa un número, $S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j, k, l = 1, 2, 3$, mientras $\alpha = 0, 1, 2, 3$), donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto $\left(S^{\alpha j} \delta^0_\alpha + S^{j\alpha} \delta^0_\alpha\right) |q_j\rangle$.

Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k:[13]

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to \left(A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k\right) |q_i\rangle .$$