Universidad Industrial de Santander

Tensors: A guide for undergraduate students

Johan Manuel Orozco Mesa
Juan Camilo Sánchez Mendoza

Battaglia, F., & George, T. F. (2013). Tensors: A guide for undergraduate students. American Journal of Physics, 81(7), 498–511.

#LaUISqueQueremos

72 años Universidad Industrial de Santander
Patrimonio educativo y cultural

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Universidad Industrial de Santander

- El estudio de tensores presenta dos principales dificultades
    - La no correlación con los conocimientos previos del estudiante.
    - El uso de notación de índices mal implementada.

- Notación Propuesta:

$$A_{a'b'}B = \sum_b A_{a'b'}B = A_{a'1'}B^{1'}_{c} + A_{a'2'}B^{2'}_{c} + \cdots$$

REGLAS

1. Letras diferentes para expresar sumas dobles.
2. Se puede cambiar el nombre de un índice si es necesario siempre que no interfiera con (1)
3. Los índices deben conservarse.

Regla 1: no se escribe: $A_{a'a}B^{a'a}$ Sino: $A_{a'b}B^{a'b}$

BASES ORTONORMALES

La notación de índices resulta útil al momento para reducir expresiones.

- Independencia Lineal: $C_n \mathbf{A}_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}_n = 0 \ \forall n.$
- Combinación Lineal: $\mathbf{A} = A_a \hat{x}_a$
- Delta de Kronecker: $\hat{x}_a \cdot \hat{x}_b = \delta_{ab}$
- Producto Punto: $$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_a \hat{x}_a) \cdot (B_b \hat{x}_b) = (A_a B_b)(\hat{x}_a \cdot \hat{x}_b) \\ &= (A_a B_b)\delta_{ab} = A_a B_a . \end{aligned}$$
- Componentes Vectoriales: $A_a = \hat{x}_a \cdot \mathbf{A}$

Símbolo de Levi - Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (1,2,3), (2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (3,2,1), (1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{de otro modo } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases}$$

- Producto Vectorial: $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \det \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_{abc} A_a B_b \hat{x}_c$$

BASES ORTONORMALES

- Gradiente: $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \hat{x}_a \partial_a \phi$
- Divergencia: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_a A_a$
- Rotacional: $\nabla \times \mathbf{A} \equiv \det \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_{abc} \partial_a A_b \hat{x}_c$
- Laplaciano: $\Delta\phi \equiv \nabla^2\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi = \partial_a \partial_a \phi.$

BASES ARBITRARIAS: DUALIDAD

La definición de un tensor de métrica y de los espacios duales permiten expresar las componentes covariantes y contravariantes en función de estas.

Se define el tensor gab como el producto tensorial entre dos bases distintas de una mismo espacio y se denomina tensor métrico

$$g_{ab} = e_a \cdot e_b \neq \delta_{ab}$$

La matriz del tensor métrico de bases duales será la matriz inversa de la métrica del espacio directo

$$[g_{ab}]^{-1} = [g^{ab}] \qquad [g_{ab}][g^{ab}] = I$$

El tensor métrico permite transformar coordenadas.

$$e_a \cdot A = e_a \cdot (A^b e_b) = g_{ab} A^b \neq \delta^a_b A^b = A^a$$

$$A^a = e^a \cdot A = e^a \cdot (A^b e_b) = (e^a \cdot e_b) A^b = \delta^a_b A^b$$

BASES ARBITRARIAS: DUALIDAD

El artículo presenta algunos errores como

$$e^a = C^{ac} e_c$$

$$\mathbf{A} = A^b \mathbf{e}_b = A_b \mathbf{e}^b$$

Una base dual no puede ser escrita como combinación lineal de la base directa

BASES ARBITRARIAS: DUALIDAD

En conclusión se puede transformar coordenadas utilizando el tensor métrico de la siguiente manera

$$A_a = g_{ab}A^b \qquad\qquad A^a = g^{ab}A_b$$

Se puede definir un producto mediante la métrica

$$A \cdot B = g_{ab}A^a B^b = g^{ab}A_a B_a = A^a B_a = A_a B^b$$

Bases recíprocas para R3

$$\mathbf{e}^a = \frac{\mathbf{e}_b \times \mathbf{e}_c}{V}$$

CAMBIO DE BASES: TENSORES

Mediante matrices de transformación se pueden transformar bases en otras y transformar tensores de componentes en tensores de componentes de otras bases.

Se pueden expresar bases en términos de otras bases. Donde R es la matriz cambio de base.

$$e_a = R_a^{b'} e_{b'} \qquad\qquad e_{a'} = R_{a'}^{b} e_b$$

Manipulando las ecuaciones de arriba se puede escribir:

$$e_a = R_a^{b'}(R_{b'}^{c} e_c) = (R_a^{b'} R_{b'}^{c}) e_c$$

Donde:

$$R_a^{b'} R_{b'}^{c} = \delta_a^c \qquad\qquad [R_a^{b'}][R_{a'}^{b}] = I$$

CAMBIO DE BASES: TENSORES

Para un sistema primado podemos escribir:

$$g_{a'b'} \equiv e_{a'} \cdot e_{b'} = (R^c_{a'} e_c) \cdot (R^d_{b'} e_d) = R^c_{a'} R^d_{b'} (e_c \cdot e_d) = R^c_{a'} R^d_{b'} g_{cd}$$

Además:

$$A^{a'} e_{a'} \equiv A^a e_a = A^a (R^{b'}_a e_{b'}) = (R^{b'}_a A^a) e_{b'} = (R^{a'}_b A^b) e_{a'}$$

Donde:

$$A^{a'} = R^{a'}_b A^b$$

Para obtener el componente covariante primado desde el no primado se debe bajar el índice de la componente contravariante mediante el tensor métrico:

$$A^{a'} = g_{a'c'} A^{c'} = (R^b_{a'} R^d_{c'} g_{bd})(R^{c'}_e A^e) = R^b_{a'} g_{bd} (R^d_{c'} R^{c'}_e) A^e = R^b_{a'} g_{bd} (\delta^d_e A^e)$$

$$= R^b_{a'} (g_{bd} A^d)$$

$$A^{a'} = R^b_{a'} A_b$$

CAMBIO DE BASES: TENSORES

De igual manera se pueden obtener los vectores duales primados desde los no primados:

$$e^{a'} = R^{a'}_{b} e^{b}$$

Las componentes covariantes transforman igual que las bases directas. Esta transformación está gobernada por las matrices R de cambio de base.

De esta manera podemos ver que el producto escalar es invariante a transformaciones

$$A_{a'} B^{a'} = (R^{c}_{a'} A_c)(R^{a'}_{d} B^{d}) = (R^{c}_{a'} R^{a'}_{d}) A_c B^{d} =$$
$$\delta^{c}_{d} A_c B^{d} = A_c B^{c} = A_a B^{a}$$

CAMBIO DE BASES: TENSORES

Formando un par de vectores como A_aB^a se obtiene un escalar, mientras que los pares A_aB^b, A_aB_b o A^aB^b producen 9 componentes. Este tipo de composiciones se denomina tensor de segundo grado, cuyas transformaciones son:

$$T_{a'b'} = R^c_{a'} R^d_{b'} T_{cd} \qquad T^{a'b'} = R^{a'}_c R^{b'}_d T^{cd} \qquad T^{b'}_{a'} = R^c_{a'} R^{b'}_d T^d_c$$

(0,2) **(2,0)** **(1,1)**

Los tensores métricos g_{ab} y g^{ab} son componentes covariantes y contravariantes de segundo rango. Sus componentes mixtos pueden ser obtenidos subiendo o bajando alguna de sus componentes.

En cualquier caso:

$$g^{cb} g_{ab} = \delta^{b'}_{a'}$$

Regla de Quotient

Fields

Se define como campo a una función de espacios coordenados.

$$x^{a'} = x^{a'}(x^1, x^2, x^3) \equiv x^{a'}(\mathbf{x})$$

$$x^{a} = x^{a}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \equiv x^{a}(\mathbf{x}')$$

$$J \equiv \det\left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b}}\right] \equiv \det[R^{a'}_{b}] \neq 0 \qquad J^{-1} \equiv \det\left[\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{b'}}\right] \equiv \det[R^{a}_{b'}] \neq 0$$

Dónde

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b}} \equiv R^{a'}_{b} \text{ and } \frac{\partial x^{a}}{\partial x^{b'}} \equiv R^{a}_{b'}$$

Por ser inversas

$$R^a_{b'}R^{b'}_c = \sum_b \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\frac{\partial x^{b'}}{\partial x^c} = \frac{\partial x^a}{\partial x^c} = \delta^a_c$$

Manipulando los grados de libertad se llega la conclusión de que una base para un campo sería las tangentes que existen en el punto donde cortan los planos.

$$\mathbf{e}_a = \sum_b \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a}\mathbf{e}_{b'} = R^{b'}_a \mathbf{e}_{b'}$$

Y la base dual los vectores que son normales a las superficies coordenadas

$$\mathbf{e}^a \equiv \nabla x^a = \sum_b \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\mathbf{e}_{b'} = R^a_{b'}\mathbf{e}^{b'}$$

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander

#LaUISqueQueremos

¡Gracias!