Конспект по мере и интегралу Лебега.

Пешехонов Иван. БПМИ195

Дата последней компиляции: 30.11.2020 22:08

Содержание

1 Пространные и неформальные рассуждения о понятии длины множества. 2

1.1 Множество Витали . . . 3

2 Алгебры. 4

2.1 Определения. . . . 4

2.2 Примеры σ-алгебр. . . . 4

2.3 Порождённая σ-алгебра . . . 5

3 Мера. 8

3.1 Внешняя мера. . . . 9

3.2 Теорема Лебега. . . . 9

4 Компакты. 11

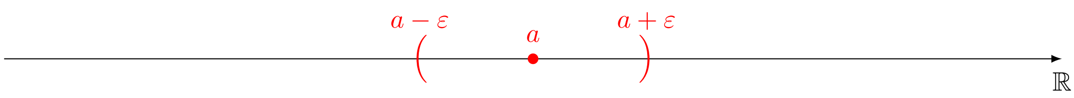
1 Пространные и неформальные рассуждения о понятии длины множества.

Мы считаем, что найти длину произвольного отрезка или полуинтервала на $\mathbb{R}$ впринципе задача тривиальная: например если $[a, b) \in \mathbb{R}$, то длина такого полуинтервала равна $b - a$. При этом мы считаем, что у нас есть некоторое множество ($[0, 1)$) эталонной длины 1, и длиной всех остальных полуинтервалов мы называем такое число, которое обозначает, сколько раз эталонное множество вошло в данный полуинтервал. При этом нас не смущает, если ответ получается не целым, а даже иррациональным. В самом деле, мы без проблем поверим, что длина полуинтервала $[0, \sqrt{2})$ равна $\sqrt{2}$, т.е. эталонный полуинтервал $[0, 1)$ входит в данный полуинтервал ровно $\sqrt{2}$ раз, что бы это ни значило.

Если мы имеем дело с двумерным множеством, то мы даже ввели специальное слово, чтобы научиться измерять его *длину*: *площадь*. Однако такое понятие мы уже определяем с трудом. Мы научились считать площадь каких-то простых фигур, и ввели отдельное понятие для множества, ассоциированного с конкретной функцией — *криволинейная трапеция*.

И чем выше размерность, тем грустнее нам становится считать различные представления длин множеств: *площади*, *объёмы*, *k-мерные объёмы*. Однако проблемы могут возникнуть даже в одномерном случае:

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество в $\mathbb{R}$. Как тогда посчитать его длину в общем случае? Мы умеем находить длину поуинтервалов, ну тогда для нас не является проблемой найти длину конечного набора полуинтервалов. Что если множество E не представимо, как конечный набор полуинтервалов? Применяя теорию рядов мы можем посчитать длинну счётного набора полуинтервалов. Однако что если E не представимо даже счётным набором? Хорошей идеей может быть попытаться приблизить множество E каким-то другим множеством, или набором множеств, длины которых мы умеем считать. Однако сразу возникает вопрос: что значит *приблизить множество*, и что значит, что *множества будут мало отличаться*? Приведём простейший пример:
Пусть нашим множеством является точка $a \in \mathbb{R}$



Мы знаем, что длина точки равна 0. Однако это совершенно не мешает нам пытаться приблизить её некоторым интервалом $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Но совершенно не очевидно, что значит *интервал приближает точку*. В каком смысле он её *приближает*? Он содержит ещё несчётное множество других точек, отличных от a, да и длину его мы можем посчитать, и она будет зависеть от ε и быть больше 0. Это у нас с точкой такие проблемы возникли, а что же будет, когда мы начнём говорить вообще о произвольном множестве?

Мы пока не можем ответить на вопрос "что такое длина произвольного множества", но мы можем попытаться сформулировать свойства, которые, мы ожидаем, будут выполняться. Пусть l — длина множества, тогда

- $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $l(A) \geqslant 0$, в частности длина не может быть отрицательной.
- Если $A \cap B = \varnothing$, то $l(A \cup B) = l(A) + l(B)$ (длина аддитивна).
- Длина уважает движение, в частности:
  - Если U — произвольное ортогональное преобразование, и $U(A) = B$, то $l(U(A)) = l(B)$.
  - Если h — произвольное движение, и $A + h = B$, то $l(A + h) = l(B)$

  т.е. если мы взяли некоторое множество и повертели его, то его длина не изменилась. Аналогично если мы взяли множество, и передвинули все его элементы на одно и то же значение, его длина не изменилась.
- $l([0, 1]^n) = 1$, в частности длина единичного куба любой размерности всегда равна 1.

В дальнейшем используя словосочетание "длина множества" я буду иметь ввиду длину в приведённом смысле.

Итак, на данном этапе мы можем сформулировать два вопроса, на которые в дальнейшем будем исккать ответ:

1. Чем приблизить произвольное множество? А если мы знаем чем, то как именно надо приближать?
2. А возможно ли вообще измерить длину произвольного множества?

Прямо сейчас приведём пример, который даст нам ответ на второй вопрос:

1.1 Множество Витали

Рассмотрим отрезок $[0,1]$, и введём на нём отношение эквивалентности: будем считать, что $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Т.е. x эквивалентно y, если разница между ними является рациональным числом, или, что то же самое: если одно получается из другого путём сдвига на рациональное число. Можно строго проверить, что данное отношение действительно является отношением эквивалентно, но это тривиально следует из коммутативности и ассоциативности операции сложения в $\mathbb{Q}$.
Тогда весь отрезок разбивается на классы эквивалентности. Выберем из каждого класса по представителю, и сложим их в одно множество V: $V = \{x_i \mid x_i \in [x_i]\}$.

Предложение. Для множества V мы не можем посчитать длину.

Доказательство. Рассмотрим все рациональные сдвиги множества $V + r_n$ из отрезка $r_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Т.е мы рассматриваем последовательность множеств следующего строения:

$$V_n = V + r_n = \{x_i + r_n \mid x_i \in V, r_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]\}$$

Понятно, что $\forall\, n\ V_n \subset [-1,2]$. С другой стороны очевидно, что объединение всех V_n содержит исходный отрезок $[0,1]$. Итого имеем следующее двойное включение:

$$[0,1] \subset \bigcup_n V_n \subset [-1,2]$$

Заметим, что $\forall\, n \neq m \implies V_n \cap V_m = \varnothing$. Это тривиально проверяется, если вспомнить, что в V содержится ровно по одному представителю из каждого класса. Естесственным свойством длинны является аддитивность, т.е.

$$l\left(\bigcup_n V_n\right) = \sum_n l(V_n)$$

В самом деле, звучит логично, что если мы имеем множество, составленное из непересекающихся отрезков, то длину этого множества мы можем найти как сумму длин всех входящих в него отрезков.
Известно, что $l([0,1]) = 1$; $l([-1,2]) = 3$. Тогда имеем следующее двойное неравенство:

$$l([0,1]) \leqslant l\left(\bigcup_n V_n\right) \leqslant l([-1,2]) \iff 1 \leqslant \sum_n l(V_n) \leqslant 3$$

Из свойств длины мы знаем, что $\forall\, n\, l(V_n) = l(+r_n) = l(V)$, т.к. r_n это просто сдвиг множества V. Рассмотрим теперь следующие два случая:

Случай первый: $l(V) = 0$. Но тогда $l(V_n) = 0$ для любого n. Тогда $\sum_n l(V_n) = 0 \implies$ двойное неравенство $1 \leqslant 0 \leqslant 3$ не выполняется. Значит, этот случай невозможен.

Случай второй: $l(V) > 0$. Тогда $l(V_n) > 0$ для любого n, и $\sum_n l(V_n) = \infty$. Но тогда двойное неравенство $1 \leqslant \infty \leqslant 3$ снова не выполняется.

Исходя из невозможности этих двух случаев делаем вывод, что посчитать длину множества V невозможно. ■

Итак, мы смогли ответить на один из заявленных вопросов: теперь нам доподлинно известно, что для произвольного множества измерить длину не получится, более того можно привести явный пример множества, длину которого впринципе измерить нельзя. Но тогда мы, встречая новое множество даже не знаем, можем ли мы посчитать его длину или нет. И тогда к вопросам, заявленным выше (*чем приближать; как приближать*) добавляется ещё один, не менее важный вопрос: *что именно нужно приближать?*

2 Алгебры.

2.1 Определения.

Пусть множество X не пусто.

Определение 1. *Алгеброй подмножеств множества* X (алгеброй) называется набор $\mathcal{A} \subset 2^X$, если выполнены следующие свойства:

1. $X, \varnothing \in \mathcal{A}$.
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$.

Определение 2. *σ-алгеброй* называется набор $\mathcal{A} \subset 2^X$, если выполнены следующие свойства:

1. $\mathcal{A}$ является алгеброй.
2. Если множества $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, то их счётные объединение и пересечение также там лежат: $\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}, \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

2.2 Примеры σ-алгебр.

Пример. (Собственные σ-алгебры.)
Наборы $\{\varnothing, X\}$ и 2^X очевидно являются σ-алгебрами.

Пример. Пусть $B \subset X$ — произвольно подмножество. Тогда набор $\{\varnothing, B, X \setminus B, X\}$ является σ-алгеброй. Ну действительно: $\varnothing$ и X в нём лежит, объединение любых множеств из набора, как конечное, так и счётное снова даст множество из набора (проверяется перебором всех случаев). Аналогично для пересечения и разности.

Пример. Пусть $X = \mathbb{N}$. Рассмотрим следующий набор: $\mathcal{A} = \{$конечные множества (включая $\varnothing$) и дополнения к конечным$\}$. Очевидно, что $\varnothing$ и $\mathbb{N}$ в нём лежит ($\mathbb{N} = \overline{\varnothing}$). Кроме того при конечном объединении конечных множеств мы получаем конечное множество. При конечном объединении дополнений к конечным множествам мы получим дополнение к некоторому конечному множеству. Аналогично для конечного объединения конечного множества и его дополнения. Аналогично все возможные разности так же снова будут лежать в этом наборе. При этом отдельно для любого множества A из нашего набора разность вида $\mathbb{N} \setminus A$ можно воспринимать как дополнение A ($\overline{A}$), и они все будут лежать в наборе. Кроме того наш набор так же замкнут относительно конечного операции пересечения, т.к. мы уже выяснили, что всевозможные объединения и дополнения множеств из набора снова лежат в наборе, по закону де Моргана операция пересечения выражается через операции объединения и дополнения.
Таким образом набор $\mathcal{A}$ является алгеброй.
Рассмотрим подмножество $2\mathbb{N}$ — подмножество чётных чисел. Оно являет счётным объединением конечных множеств ($2\mathbb{N} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} 2i$), но не является дополнением ни к какому конечному множеству, а значит не лежит в $\mathcal{A}$. Таким образом $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй.

Пример. Пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим набор $\mathcal{A} = \{$конечное объединение попарно непересекающихся промежутков на $X\}$, где под промежутком понимаются интервалы, отрезки и полуинтервалы.
Очевидно, что сам X там лежит. Пустое множество можно обозначить как (a, a) например, оно там также лежит. Очевидно, что конечное объединение конечных объединений в свою очередь будет являться конечным объединением, и будет лежать в наборе. Кроме того понятно, что разность двух конечных объединений промежутков может быть либо пустым множеством, либо конечным объединением, и, соответственно, в обоих случаях она будет лежать в наборе. Рассмотрим теперь операцию пересечения двух конечных объединений промежутков:

Пусть у нас есть два конечных объединения попарно не пересекающихся промежутков: $\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} I_n$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{M} J_k$. Тогда имеем:

$$\bigsqcup_{n=1}^{N} I_n \cap \bigsqcup_{k=1}^{M} J_k = \bigsqcup_{n=1}^{N} \left(I_n \cap \bigsqcup_{k=1}^{M} J_k \right) = \bigsqcup_{n=1}^{N} \bigsqcup_{k=1}^{M} I_n \cap J_k$$

Т.к. никакие промежутки у нас попарно не пересекаются, то $I_n \cap J_k$ может быть равно

- $\varnothing$, если $I_n \neq J_k$;

- некоторому отрезку, если $I_n = J_k$;

В любом из двух случаев мы снова получаем множество из $\mathcal{A}$. Таким образом $\mathcal{A}$ является алгеброй.
Чтобы показать, что $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй, покажем, что ...?

Именно с последнего примера мы и начнём вникать в понятие *длины множества.*

2.3 Порождённая σ-алгебра

Предложение. Пусть наборы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — σ-алгебры. Тогда $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ так же является σ-алгеброй.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Очевидно, что $\varnothing$ и $X \in \mathcal{F}$, т.к. они лежали в исходнных σ-алгебрах. Пусть теперь $A, B \in \mathcal{F}$. Значит A, B лежали так же в исходных σ-алгебрах, а значит в них же лежали их пересечение, объединение и разность, а значит они так же лежат и в $\mathcal{F}$. Пусть теперь $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ — произвольный счётный набор множеств. Значит этот набор также лежал в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а значит там же лежали их счётные объединение и пересечение (т.к. σ-алгебры), а значит они так же лежат в $\mathcal{F}$. ■

Следствие. Пересечение произвольного числа σ-алгебр является σ-алгеброй.

Пусть S — какой-то набор подмножеств множества X.

Определение 3. $\sigma(S)$ называется σ-алгеброй, *порождённой* S. $\sigma(S)$ есть пересечение всех σ-алгебр, содержащих S.

Пример. Пусть $S = \{B\}$. Тогда $\sigma(S) = \{\varnothing, B, X \setminus B, X\}$

Пример. (Борелевские σ-алгебры)

$\mathcal{B}[0,1]$ — σ-алгебра порождена всеми возможными промежутками на [0,1].

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра порождена всеми возможными промежутками на $\mathbb{R}$.

Такие σ-алгебры называются *Борелевскими σ-алгебрами.* Аналогично определяются Борелевские σ-алгебры в многомерном случае.

Предложение.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a, +\infty))$$

Доказательство. Включение $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma((a, +\infty))$ очевидно.
Докажем $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma((a, +\infty))$. Докажем, что $\sigma((a, +\infty))$ содержит так же все промежутки. Понятно, что для этого достаточно показать, что $\sigma((a, +\infty))$ содержит всевозможные лучи во всех концах. Обозначим $\sigma((a, +\infty))$ как $\mathcal{A}$. Тогда:

- $\mathcal{A}$ содержит лучи вида $(-\infty, a]$, т.к. они являются дополнением к лучам вида $(a, +\infty)$, а все дополнения лежат в $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ содержит лучи вида $(-\infty, a)$, как счётное объединение лучей вида $\left(-\infty, a - \dfrac{1}{n}\right]$.
- $\mathcal{A}$ содержит лучи вида $[a, \infty)$, как дополнение к лучам вида $(-\infty, a)$.

Таким образом мы показали, что $\mathcal{A}$ содержит все возможные виды лучей. Далее применяя операцию разности множеств можно получить всевозможные промежутки, а это в точности $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — две σ-алгебры.

Определение 4. *Произведением* σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется σ-алгебра $\mathcal{C}$, такая что

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{C} = \sigma\left(\{A \times B \colon A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right)$$

Задача 2.1. Возьмём Борелевскую σ-алгебру на плоскости $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. По аналогии с Борелевской σ-алгеброй на прямой можно показать, что

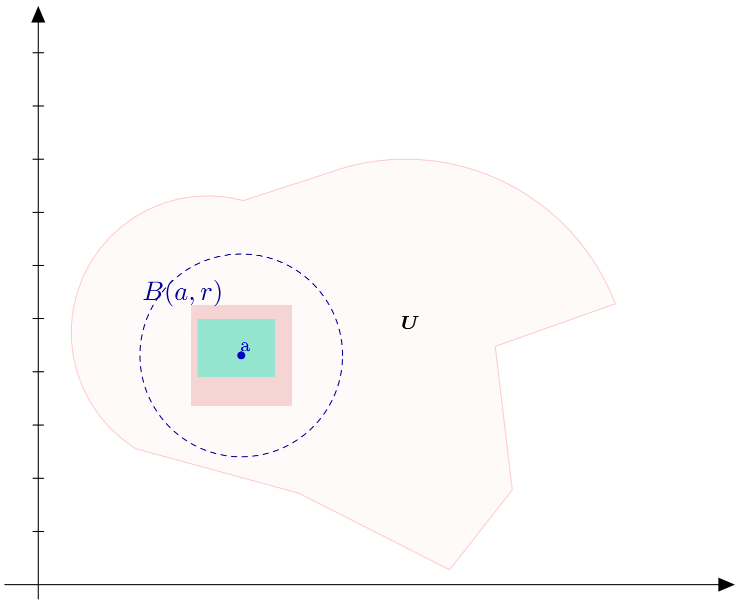
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{B_i \subset \mathbb{R}^2 \colon B_i \text{ — открытое множество}\})$$

1. Покажите, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ совпадает с σ-алгеброй, порождённой всеми открытыми прямоугольниками в $\mathbb{R}^2$, где под "открытыми прямоугольниками“ понимается декартово произведение интервалов.
2. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Решение:

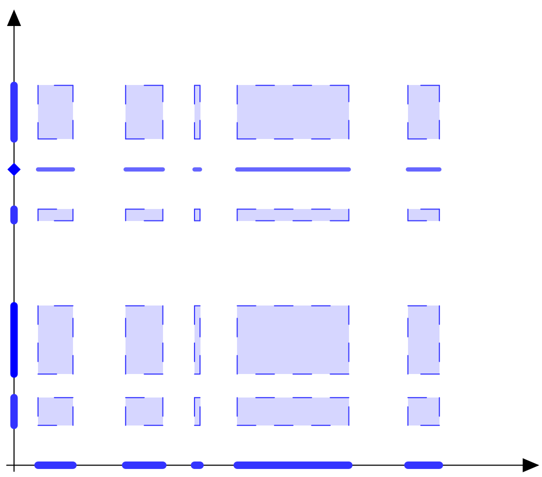
1) Введём обозначение: $\mathcal{O} = \sigma(\{B_i \subset \mathbb{R}^2 \colon B_i$ — открытое множество$\})$, $\sigma(\square)$ — σ-алгебра, порождённая всеми открытыми прямоугольниками. Тогда очевидно включение $\mathcal{O} \supset \sigma(\square)$. Покажем теперь включение в обратную сторону.

По определению: некоторое множество называется открытым, если каждая точка входит в него с некоторым открытым шаром. Пусть $U \in \sigma(\square)$ — открытое множество. И пусть $a \in U$ — произвольная точка. Тогда, т.к. U — открытое множество, то $\exists\ B(a, r) \subset U$ — открытый шар с центром в точке a некоторого радиуса r. Но в каждый шар можно вписать прямоугольник, в котором данная точка будет содержаться. Впишем прямоугольник в открытый шар B, и будем уменьшать его до тех пор, пока все вершины прямоугольника не станут рациональными точками. Более формально: $\forall\ a \in U\ \exists\ \square$ с рациональными вершинами $: a \in \square \subset U$. А значит, U разбивается на пересечение таких квадратиков $\square$, причём, т.к. их вершины являются рациональными точками, то таких квадратиков не более чем счётно, а значит $\mathcal{O} \subset \sigma(\square)$, и $\mathcal{O} = \sigma(\square)$.

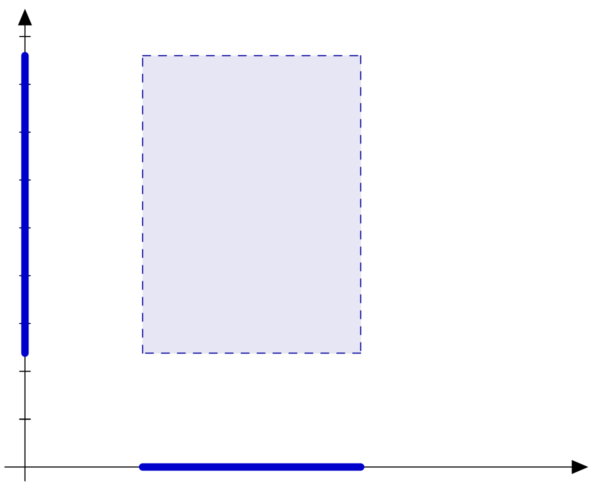


Здесь U — открытое множество, a — произвольная точка в нём,
$B(a, r)$ — открытый шар точки a,
красный квадрат — произвольный вписаный в шар прямоугольник,
зелёный квадрат — прямоугольник с рациональными вершинами.

2) Введём обозначение: $\mathcal{A} = \sigma(\square)$ — σ-алгебра, порождённая всеми открытыми прямоугольниками. Известно, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. По определению $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{B_1 \times B_2 \colon B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$. Множество $B_1 \times B_2, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ называется *измеримым прямоугольником*. Для большего понимания происходящего изобразим на плоскости открытый прямоугольник и измеримый прямоугольник:



a) Измеримый прямоугольник



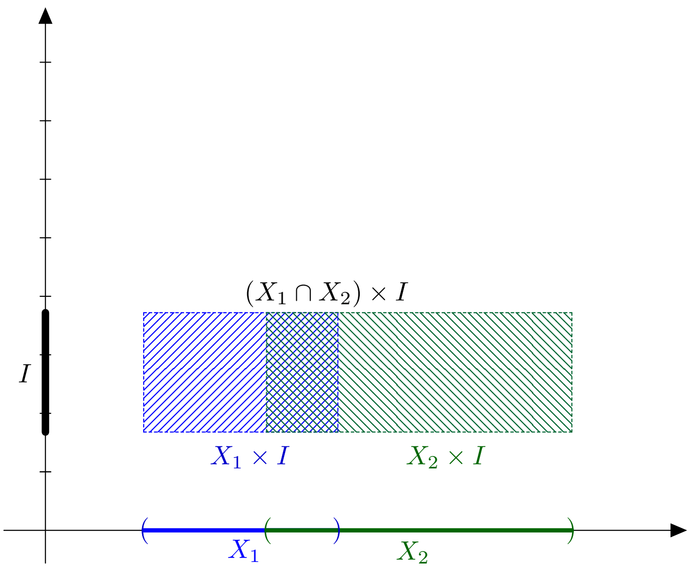
b) Открытый прямоугольник

Очевидно, что открытый прямоугольник, как декартово произведение промежутков, является частным случаем измеримого прямоугольника, а потому справедливо включение $\mathcal{A} \subset \sigma\left(\{B_1 \times B_2 \colon B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right)$. Покажем теперь включение в другую сторону:

Достаточно доказать, что каждый измеримый прямоугольник $B_1 \times B_2 \in \mathcal{A}$. В этом случае вместе с ними, очевидно, там будет лежать и наименьшая порождаемая ими σ-алгебра. Пусть I — промежуток, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Докажем, что $B \times I \in \mathcal{A}$. Рассмотрим следующий набор подмножеств $\mathbb{R}$: $\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{R} \colon X \times I \in \mathcal{A}\}$.

- Всякий промежуток принадлежит $\mathcal{F}$ (Возьмём X равный некоторому промежутку, тогда $X \times I$ задаёт некоторый прямоугольник, и, следовательно, лежит в $\mathcal{A}$).

- $\mathcal{F}$ — σ-алгебра. Очевидно, что $\varnothing \in \mathcal{F}$. $\mathbb{R} \times I$ так же задаёт некоторый прямоугольник $\implies \mathbb{R} \in \mathcal{F}$. Пусть теперь $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$. Тогда $X_1 \times I$ и $X_2 \times I$ задают два прямоугольника, и их пересечение, объединение и разность так же являются прямоугольником (см. рисунок ниже), а значит, лежат в $\mathcal{F}$. (Кроме того верно, что $(X_1 \times I) \cap (X_2 \times I) = (X_1 \cap X_2) \times I$. Для остальных операций аналогично). Кроме того очеивдно, что если взять счётный набор $\{X\}_i \subseteq \mathcal{F}$, то для каждого i $X_i \times I$ будет задавать прямоугольник, и их счётное объединение и пересечение также будет прямоугольником, а значит, будет лежать в $\mathcal{F}$.



Отсюда следует, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. Рассмотрим теперь следующий набор подмножеств в $\mathbb{R}$: $\widetilde{\mathcal{F}} = \{X \subseteq \mathbb{R} \colon B \times X \in \mathcal{A}\}$.

1. $\widetilde{\mathcal{F}}$ содержит все промежутки. Действительно, положим $X = I$ — некоторому промежутку. Тогда необходимо доказать, что $B \times I \in A$. Но известно, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$, а значит $B \times I \in A$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. $\widetilde{\mathcal{F}}$ — σ-алгебра. Это вобщем-то очевидно, т.к. все действия, которые нужно проверить, мы будем делать со второй компонентой, а для неё уже всё доказано.

Отсюда следует, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Таким образом мы доказали требуемое, а именно, что каждый измеримый прямоугольник $B_1 \times B_2$ лежит в $\mathcal{A}$, а значит, $\mathcal{A} \supset \sigma\left(\{B_1 \times B_2 \colon B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right)$.

Показали включение в обе стороны, а значит

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\square) = \mathcal{A} = \sigma\left(\{B_1 \times B_2 \colon B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Упражнение. Вернёмся к первому пункту предыдущей задачи: известно, что в U содержится континуум точек. При этом для каждой точки мы вписываем прямоугольник открытый шар этой точки. Получается, что прямоугольников будет столько же, сколько точек. Почему же мы тогда утверждаем, что прямоугольников будет не более чем счётно?

3 Мера.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра.

Определение 5. Функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ называется *мерой*, если она обладает свойством аддитивности:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n), \quad A_n \in \mathcal{A}$$

Мера μ называется *счётно-аддитивной*, если для неё выполнена *счётная аддитивность*:

$$\forall\, A_n \in \mathcal{A}\colon \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Пример.

Пусть Ω — вероятностное пространство, и $|\Omega| < \infty$. Тогда 2^Ω очевидно алгебра. Тогда $P\colon 2^\Omega \to [0,1] \subset [0, +\infty)$ — вероятностная мера, по определению является мерой.

Пусть теперь Ω — счётное вероятностное пространство. Тогда вероятностная мера на нём является счётно-аддитивной мерой.

Замечание. В пункте 2.2 мы привели пример алгебры $\mathcal{A}$ конечных объединений попарно непересекающихся промежутков на отрезке $[0,1]$. На этом отрезке есть мера λ, которую мы привыкли понимать как "длина промежутков". Нам хочется знать, а можно ли такую удобную функцию продолжить с такой области определения на нечто большее. Например на алгебру, порождаемую этой. Нетрудно видеть, что $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}[0,1]$. Таким образом если продолжим λ на Борелевскую алгебру, мы сможем находить длину (далее будем всё же использовать термин "мера") практически произвольного подмножества в $[0,1]$, а значит, на самом деле, в любом отрезке.

Пример. Пусть $X = \mathbb{N}$, и $\mathcal{A} = \{$ конечные множества и дополнения к ним $\}$ — алгебра (доказывалось в этом примере). Введём на этой алгебре меру:

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & |B| < \infty \ (B \text{ — конечное множество}) \\ 1 & |B| = |\mathbb{N}| \ (B \text{ — дополнение к конечному множеству}) \end{cases}$$

В одну сторону очевидно, что μ — аддитивная мера. В другую сторону тривиально, что μ не является счётно-аддитивной мерой: действительно, возьмём одноэлементные множества B_i — i-ое чётное число. Тогда если если μ — счётно-аддитивна, то мера их счётного объединения равна сумме мер каждого множества, но мера каждого отдельного B_i равно 0. С другой стороны очевидно, что счётное объединение B_i является счётным множеством всех чётных чисел ($2\mathbb{N}$), а значит его мера должна быть 1. Противоречие.

Предложение. Пусть μ — аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ — σ-аддитивна $\iff$ $\mathcal{A} \ni A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, таких что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \implies \lim \mu(A_n) = 0$. Т.е. μ счётно-аддитивна тогда и только тогда, когда для всякой последовательности вложенных множеств, таких что их пересечение пусто, предел $\lim \mu(A_n) = 0$.

Доказательство.
$\Rightarrow$: Пусть $C_i = A_i \setminus A_{i+1}$ — i-ый слой. Все слои попарно не пересекаются. Тогда

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k \implies \mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k)$$

Т.к. мера μ — счётно-аддитивна, то ряд $\mu(A_1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(C_k)$ сходится. Тогда $\mu(A_n) = r_n$ остаток этого ряда. Т.к. ряд сходится, то $r_n \to 0 \iff \mu(A_n) \to 0$.

$\Leftarrow$: Пусть $\{C\}_n \subset \mathcal{A}$ — набор попарно непересекающихся множеств, и известно, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} = A_1 \in \mathcal{A}$. Пусть $A_{n+1} = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} C_k$, тогда $A_{n+1} \subset A_n$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$. По конечной аддитивности: $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} C_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu(C_k)$. Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \mu(A_{n+1}) \to 0$$

Отсюда следует счётная аддитивность. ■

3.1 Внешняя мера.

Пусть X — некоторое множество, $\mathcal{A}$ — алгебра на X, μ — мера на $\mathcal{A}$. Мы научились измерять произвольные наборы множеств, лежащие в алгебре. Теперь мы хоти уметь измерить произвольное подмножество в X.
Пусть $E \subset X$ — произвольное подмножество.

Определение 6. Число $\mu^*(E)$ называется *внешней мерой* E и определяется следующим образом:

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \colon A_k \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}$$

Т.е. мы берём не более чем счётный набор множеств из алгебры, такой что в объединении он накрывает E, и тогда внешняя мера E это самая точная нижняя оценка на сумму мер такого набора. Понятно, что всегда можно взять само множество X: мы знаем, что оно всегда лежит в алгебре и оно точно накроет E. Однако почти никогда мера всего множества адекватно не приблизит меру его произвольного подмножества.

Замечание. Вообще говоря **внешняя мера не является мерой**.

Пример. Продолжим мучить наш пример: пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\text{конечные множества и дополнения к ним}\}$, и мера μ на $\mathcal{A}$ определяется как $\mu(A) = 0$ если A конечное, и $\mu(A) = 1$, если A — дополнение к конечному. Посмотрим как выглядит внешняя мера на этом примере: пусть E_1 — все чётные числа, E_2 — все нечётные числа. Тогда

$$\mu^*(E_1) = 0$$
$$\mu^*(E_2) = 0$$
$$\mu^*(\mathbb{N}) = 0$$

Каждое чётное число лежит в алгебре, и мера каждого такого числа равна 0, отсюда значение внешней меры на чётных числах. Аналогично для нечётных. И аналогично для всего X: каждое натуральное число лежит в $\mathcal{A}$, и мера каждого натурального числа равна 0. Таким образом самая точная оценка на сумму их мер равна 0. Пример интересен тем, что внешняя мера на таком множестве с такой алгеброй и мерой получилась просто тождественным нулём ($\mu^* \equiv 0$). И вот этот новый, придуманный нами способ измерить любое подмножество не имеет ничего общего с тем, как мы меряли множества раньше, т.к. $0 = \mu^*(\mathbb{N}) \neq \mu(\mathbb{N}) = 1$.

Пример. Пусть $X = \{2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}, \mu(\varnothing) = 0, \mu(X) = 1$. Посмотрим на внешнюю меру на таком примере:

$$\mu^*(\varnothing) = 0 \qquad \mu^*(\{2\}) = \mu^*(\{3\}) = \mu^*(\{4\}) = \mu^*(X) = 1$$

В этом примере внешняя мера даже не обладает свойством аддитивности ($\mu^*(\{2\}) + \mu^*(\{3\}) = 2 \neq 1 = \mu^*(\{2, 3\})$), а значит не является мерой в нашем понимании. Понятно, что имея такую скудную алгебру покрыть любое непустое множество можно только множеством X.

Из этих двух примеров мы можем сформулировать следующее желание: мы хотим получить такую функцию, которая на известных множествах из алгебры совпадала бы с их уже определённой мерой, а для всех остальных множеств являлась бы хотя бы аддитивной (т.е. являлась хотя бы мерой в нашем понимании), а ещё лучше: счётно-аддитивной.

3.2 Теорема Лебега.

Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{A}$ — алгебра на X, μ — мера на $\mathcal{A}$.

Определение 7. Множество $E \subset X$ называется *измеримым*, если принадлежит *классу измеримых множеств* $\mathcal{A}_\mu$, который определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}_\mu = \{E \subset X : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{A} \implies \mu^*(E \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

где $\triangle$ — симметрическая разность множеств.
Можно понимать это так: как только мы максимально покрыли наше множество E множествами из алгебры, может случиться такое, что остался некоторый зазор, свободный участок множества E, не покрываемый ни одним из множеств $A_i \in \mathcal{A}$. Симметрическая разность множеств это всё равно что взять их объединене и выкинуть их пересечение. А мера симметрической разности можества E, и набора, который его покрывает, это как раз мера того самого зазора, который мы не покрыли, и чтобы множество было измеримо, мы требуем, чтобы мера этого зазора была сколь угодно мала.

Теорема 3.1 (Лебега)**.** *Пусть μ — счётно-аддитивная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда*

1. $\mathcal{A}_\mu$ *— σ-алгебра.*
2. $\mathcal{A}_\mu \supset \sigma(\mathcal{A})$.
3. μ^* *— счётно-аддитивная мера на* $\mathcal{A}_\mu$.
4. $\mu^* = \mu$ *на* $\mathcal{A}$.
5. μ^* *— единственное продолжение μ на $\sigma(\mathcal{A})$ и на* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство. Не будет приводиться. ■

Таким образом мы получили самую важную теорему, которая одновременно даёт нам ответы на все вопросы, которые только можно было задать про измерения "длины множеств". Самое сложное действие, которое нам надо проделать, чтобы научиться измерять какое-то множество, это проверить, мера на данной алгебре действительно является счётно-аддитивной.

4 Компакты.