

Factorización LU

Johan Posada y Juan Morales

Mayo 9 2024

1 Introducción

La factorización LU descompone una matriz A en el producto de dos matrices: una matriz L (Lower) triangular inferior y una matriz U (Upper) triangular superior. Para la matriz L , todos los elementos de la diagonal son iguales a uno. Esta factorización sigue la forma $A = L \cdot U$, este tipo de factorización solo se cumple para matrices cuadradas, es bastante usada para solución de sistemas de ecuaciones de la forma $Ax = b$ o para hallar el determinante: $|A| = |L| \cdot |U|$, en este trabajo solo nos enfocaremos en como realizar la factorización LU.

2 Pasos para factorizar por LU

1. Realizamos el proceso de eliminación de Gauss para convertir la matriz en triangular superior, mientras mantenemos un registro de las operaciones realizadas. Por ejemplo, si tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} F_2 + 4F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 31 & 26 \\ 0 & -23 & -17 \end{pmatrix} \quad F_3 + \frac{23}{31}F_2 \rightarrow F_3$$
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 31 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{71}{31} \end{pmatrix}$$

2. U es la matriz triangular superior resultante de la eliminación de Gauss.
3. Si tomamos los escalares que usamos para realizar la eliminación de Gauss y les cambiamos el signo, obtendremos una matriz que al sumarla con la identidad da como resultado la matriz inferior L .

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{-23}{31} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{-23}{31} & 1 \end{pmatrix}$$

4. Por último se verifica que $L \cdot U = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{-23}{31} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 31 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{71}{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

References

- [1] Torres Solís, M., Villalobos Castillo, N. (s.f). Factorización LU. Universidad del Bío-Bío. Recuperado de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1811/1/Torres_Solis_Marcos.pdf