2 Análisis, repaso y ejercicios

Johan Posada

Universidad de Cundinamarca.

1. Defina qué es una serie infinita y explique brevemente cómo valor se relaciona con las sumas parciales.

Una serie infinita está relacionada con las sucesiones, cuando se toma una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y se suman sus términos $\rightarrow$ se tiene una suma de infinitos términos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\dots$$

En matemáticas no se puede sumar infinitamente, porque nunca terminamos, para solucionar este problema están las sumas parciales, donde la suma toma la forma:

$$\sum_{i=1}^{K} a_i = a_1+a_2+a_3+\dots+a_i+a_{i+1}+\dots+a_K = S_K$$ donde S_K son las sumas parciales (sumas finitas)

donde K debe tender a infinito o ser muy grande pues si $\lim_{K\to\infty} S_K = L$ y L es finito, entonces la serie infinita converge a L, en otro caso: si $L=\infty$, entonces diverge.

2. Recordar el procedimiento hecho por el joven Gauss para la resolución de la serie finita $\Sigma_1^n i$. De una fórmula explícita para la serie $\Sigma_1^n 2i$.

Demostrar:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ a partir de $\sum_{i=0}^{n} 2i$

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1+2+3+4+5+6$$
$$=(1+6)+(2+5)+(3+4)$$
$$=(\underbrace{7}_{n+1})+(\underbrace{7}_{n+1})+(\underbrace{7}_{n+1})$$
$$=3\cdot 7=21$$

Si se suma desde afuera hacia adentro

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = \left\{\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ + & n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \hline & n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 & n+1 \end{array}\right. = n(n+1)$$

Como la suma de $(n+1)$ se realizó n veces y se duplicó, entonces se tiene $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \longrightarrow$ si la suma original $\sum_{i=1}^{n} i$ se hizo 2 veces para facilitar los cálculos y el resultado es: $n(n+1)$, quiere decir que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3). Series Telescópicas

a). $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = S_n$

$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$ $\quad 1 \to a_1 \quad \frac{1}{2} \to a_2$

$S_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

$= 1 - \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{1}{n+1}}^{\,0} = \boxed{1}$

b). $\sum_{i=1}^{\infty} \log\left(\frac{i}{i+1}\right) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \log i - \log(i+1)$

$S_1 = \log 1 - \log 2$

$S_2 = (\log 1 - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 2} - \log 3) = \log_1 - \log_3$

$S_n = \log 1 - \log(n+1)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \cancel{\log 1}^{\,0} - \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \boxed{\infty}$ $\longrightarrow$ La Serie es divergente

4. Series Geométricas

$\sum_{i=k}^{\infty} a x^i$

donde x es la razón

Si $|x| < 1 \longrightarrow$ La serie converge

y $\sum_{i=1}^{\infty} a x^i = \frac{a}{1-x}$; Donde a es el primer término de la Serie: S_k

a). Dan Solución a la paradoja de Zenón

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = S_n$

S_1 es el primer término de la Serie; ya que i comienza en 1

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \longrightarrow$ Razón

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = S_n$$

Si $|x| < 1 \longrightarrow$ La Serie Converge

$x = 1/2 \qquad \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ ✓ Converge

$$\longrightarrow S_n = \frac{a}{1-x} \qquad \boxed{a = S_1}$$

$$S_n = \frac{1/2}{1 - 1/2} \qquad S_n = \frac{1/2}{1/2} \qquad \boxed{S_n = 1}$$

b). $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$ $\quad \boxed{k-1 = i}$ $\quad k = K$

$k = i - 1$; $k = 1$ $\quad i - 1 = 1$

$\boxed{i = 0}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = S_n$$

x : Razón

$x = 1/3 \qquad |1/3| < 1$ ✓ Convergente

$S_n = \frac{a}{1-x}$; $a = S_0$ Porque i empieza en 0

$S_0 = a = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \qquad \boxed{a = 2}$

$$\longrightarrow S_n = \frac{2}{1 - 1/3} = 2 \div \frac{2}{3}$$

$$\boxed{S_n = 3}$$

5). Criterio de la Comparación:

(a) Suponiendo que $\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/i$ diverge, use el criterio de comparación para demostrar la divergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} i^n$ con $n \geq 0$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^n \qquad \frac{1}{i} \leq i^n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} b_n$$

$a_n, b_n \geq 0$

i). Si $a_n \leq b_n \ \forall n$ y Σb_n es convergente $\longrightarrow \Sigma a_n$ es convergente

ii). Si $a_n \geq b_n \ \forall n$ y Σb_n es divergente $\longrightarrow \Sigma a_n$ es divergente

$$i^n \geq \frac{1}{i}$$

$\lim_{n\to\infty} i^n = \infty \longrightarrow \Sigma i^n$ diverge puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{i} = \infty \longrightarrow \Sigma \frac{1}{i}$ diverge puesto que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

$\sum_{i=1}^{\infty} i^n$ es mayor que una Serie b_n divergente $\longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i^n$ es divergente

// Serie Armónica:

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ converge si $p > 1$

b). Demostrar que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ converge, usando $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2+i}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2+i} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p} \text{ converge si } p>1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n^2+n} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\overset{1/n}{\cancel{n/n^2}}}{1}=1$$

$\longrightarrow a_n\leq cb_n\,;\; a_n\leq b_n$

$c=1$; a_n y b_n son asintóticamente iguales, como $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también

c). Ya que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ converge, demuestre que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$ converge si $n\geq 2$

$$\frac{1}{i^2}\leq\frac{1}{i^n}\;;\,n\geq 2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$$

Ya que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ converge y es menor o igual que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$ $\forall n\geq 2$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$ converge

b). Criterio de Comparación por paso al límite:

Sean 2 sucesiones: $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ tq' $a_n, b_n>0$

Sea: $\lim_{i\to\infty}\frac{a_i}{b_i}=c$ tq' $c\in(0,\infty)$

entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen juntas.

Si $c=1$; a_n y b_n son asintóticamente iguales y $\boxed{\text{si } c\in(0,\infty)\longrightarrow a_n\leq cb_n}$

7. Criterio de la Integral

(a) Sea $n\in\mathbf{Z}$, dar los casos en que $\Sigma_{i=2}^{\infty}i^n$ converge, y los casos en que diverge.

$$\sum_{i=2}^{\infty}i^n$$

Caso I).: $n=-1$; $p=1$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\right]_2^b=\lim_{b\to\infty}\ln(b)-\ln(2)=\boxed{\infty}$$ Diverge

Caso II).: $n=-p\,;\ p>1$

$$\int_2^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_2^b \qquad \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[x^{1-p}\right]_2^b$$

$$\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left[b^{1-p}-2^{1-p}\right] \qquad p>1$$

Si $p>1 \rightarrow p-1>0$ ó $1-p<0$

$$\longrightarrow \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left[b^{-(p-1)}-2^{1-p}\right] \qquad \frac{1}{1-p}\left[\lim_{b\to\infty}\overset{0}{\frac{1}{b^{p-1}}}-2^{1-p}\right] = \boxed{\frac{-2^{1-p}}{1-p}}$$ Convergente

Caso III).: $n=p\,;\ p>1$

$$\int_2^\infty x^{p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_2^b$$

$$\frac{1}{p+1}\left\{\lim_{b\to\infty} b^{p+1}-\lim_{b\to\infty} 2^{p+1}\right\} \qquad p>1$$

Si $p>1 \rightarrow p+1>2$

$$\longrightarrow \frac{1}{p+1}\left[\infty-2^{p+1}\right]=\boxed{\infty} \longrightarrow$$ Divergente

Caso IV).: $n=p\,;\ p=0$

$$\int_2^\infty 1\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[x\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} b-2 = \boxed{\infty}$$ Divergente

Conclusión: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p}$ converge cuando $p>1$; en otro caso diverge

(b) Sean $n \in \mathbf{Z}$ y $\Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(log(i))^n}$. Dar los casos en que la serie converge (use sustitución).

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(\log(i))^n}$$

Caso I). $n=p\,;\ p>1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^p}\,dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{[\ln(x)]^p}\,dx \qquad u=\ln x,\quad du=\frac{1}{x}dx,\quad dx=x\,du$$

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^p} \qquad \int_1^\infty u^{-p}\,du = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^{1-p}}{1-p}\right]_1^b \qquad \lim_{b\to\infty}\frac{(\ln b)^{1-p}}{1-p}-\frac{\ln(1)^{1-p}}{1-p}$$

Si $p>1\,;\ 0>1-p$

$$\text{Si } 1-p<0 \rightarrow \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(b)^{1-p}}}{1-p}-0 \qquad \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\overset{0}{\frac{1}{\ln(b)^{1-p}}}=0$$

Caso II).: $n=p\,;\ p\leq 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^p}\,dx \qquad \int_1^\infty u^{p}\,du = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^{p+1}}{p+1}\right]_1^b \qquad \frac{1}{p+1}\lim_{b\to\infty}\left\{\ln(x)^{p+1}\right\}_1^b$$

$$\frac{1}{p+1}\left[\lim_{b\to\infty}\ln(x)^{p+1}-\ln(1)^{p+1}\right] \qquad \frac{1}{p+1}\left[\infty-0\right]=\boxed{\infty}$$ divergente

8). Criterio de la Raíz y del Cociente

a). $\sum_{i=1}^{\infty} x^i \qquad a_{n+1} = x^{n+1} \qquad a_n = x^n \qquad n \in \mathbb{Z}$

Si: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Si $|L| < 1 \rightarrow$ Converge
- Si $|L| > 1 \rightarrow$ Diverge
- Si $|L| = 1 \rightarrow$ No concluye

Si $\sum |a_n|$ converge $\longrightarrow \sum a_n$ también converge

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|$$

$|x| < 1$; $\sum_{i=1}^{\infty} x^n$ converge en $-1 < x < 1$

b). $\sum_{i=1}^{\infty} (\log i)^i = \qquad a_n = (\log(n))^n \qquad a_{n+1} = \log(n+1)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)^{n+1}}{\log(n)^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)} \right)^n \cdot \log(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \log(n+1) \qquad \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = 1 \cdot \infty = \boxed{\infty} \longrightarrow \text{Divergente}$$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i}{i+1}\right)^{i^2} \qquad \sqrt[n^2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$ Criterio de la Raíz

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \qquad L = 1 \longrightarrow$ El criterio no concluye

d). $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad (n+1)! = n! \cdot n+1 \qquad (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{n!}{n^n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)} \cancel{n!}} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

La Serie converge si $|L| < 1$; $|1| \geq 1 \longrightarrow$ La Serie es divergente

Por el criterio de la divergencia: Sea $\sum a_n$; Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow$ Diverge

$n^n \geq n!$

$1 \geq \frac{n^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} 1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

$1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \neq 0 \longrightarrow \sum a_n$ es divergente

e). $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2\cdot(n+1)]!} \div \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{(2(n+1))!\,(n!)^2} \qquad (2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$10! = (\overset{n}{8}+2)!$
$= (8+2)(8+1)\cdot 8!$
$= 10 \cdot 9 \cdot 8!$

entonces
$(n+2)! = (n+2)(n+1)\cdot n!$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)n!]^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(n!)^2}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)\cancel{(n!)^2}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+4} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancel{1/n}^{\,0}}{4+\cancel{4/n}^{\,0}} = \frac{1}{4}$$

f). $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i (i!)}{i^i}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \frac{3^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{3^n \cdot n!\,(n+1)^{n+1}}$$

Definición de e a partir del límite

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{3^n \cdot n!\,(n+1)^{n+1}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1)^n \cancel{(n+1)}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} \quad \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \quad \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e}$$

$L = \frac{3}{e}$ $\quad L \approx 1.104$

Si $L > 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i \cdot i!}{i^i}$ Diverge

Análisis computacional:

Puede acceder al repositorio mediante el link: https://github.com/johanP051/Series-Infinitas, y al código de Python en https://github.com/johanP051/Series-Infinitas/analisisComputacional/analisis_series_python.py. Este último fue escrito usando POO, si se desea, en la carpeta de análisis computacional se encuentra un cuaderno de Jupyter con el mismo código usando programación secuencial.

Igualmente, recordar que el código también está adjunto en la carpeta enviada.

```
class Series():
    def serie(self, n):
        s_n = 0
        for i in range(0, n + 1):
            s_n += 1 / (2**i)
        return s_n

    def serie_p(self, n, p):
    #1 / n^p converge para p >1
        s_n = 0
        for i in range(1, n + 1):
            s_n += 1/ i**p
        return s_n
```

```
def main():
#Escriba un código en Python para calcular la suma de la serie geométrica 1/2^i para n ∈ {10, 50, 100}
    print("\n\nPrimer Ejercicio")
    mi_serieGeometrica = Series()
    N = [10, 50, 100]
    for n in N:
        print(f"Para n = {n}, La serie converge a S_n = {mi_serieGeometrica.serie(n)}")
```

```
Primer Ejercicio
Para n = 10, La serie converge a S_n = 1.9990234375
Para n = 50, La serie converge a S_n = 1.9999999999999991
Para n = 100, La serie converge a S_n = 2.0
```

```
print("\n\nSegundo Ejercicio")
# Compara la convergencia de las series 1/i² y 1/i^5 mediante la comparación de sus sumas parciales en n ∈ {10, 50,
100}

mi_serie_p = Series()

P = [2, 5]
N = [10, 50, 100]


for n in N:
    print("\n")
    for p in P:
        print(f"Para n = {n}, La serie_p 1/i^{p} converge a S_n= {mi_serie_p.serie_p(n, p)}")
```

```
Segundo Ejercicio


Para n = 10, La serie_p 1/i^2 converge a S_n= 1.5497677311665408
Para n = 10, La serie_p 1/i^5 converge a S_n= 1.0369073413446939


Para n = 50, La serie_p 1/i^2 converge a S_n= 1.625132733621529
Para n = 50, La serie_p 1/i^5 converge a S_n= 1.036927716716712


Para n = 100, La serie_p 1/i^2 converge a S_n= 1.6349839001848923
Para n = 100, La serie_p 1/i^5 converge a S_n= 1.0369277526929555
```

Se puede decir que la la serie con p = 5 converge más rápido que la serie con p = 2, puesto que la primera con n = 10 y n = 100 converge a 1.0396 y 1.0369 respectivamente; la segunda converge a 1.5497 y 1.6349 respectivamente.

```
print("\n\nTercer Ejercicio")
#Programe la n-esima suma parcial de la serie armónica 1/i . Dé el N lo suficientemente grande para que S_n sobre
pase el valor de 10.
mi_serie_armonica = Series()

#Para que s_n sea mayor a 10, n tiene que ser >= a 100001
n_1 = 100001
p_1 = 1

print(f"{mi_serie_armonica.serie_p(n_1, p_1)}\n\n")
```

```
Tercer Ejercicio
12.090156129763336
```

Esta serie es curiosa porque n tiene que ser 10000 para que sobrepase el valor de 10, lo cual es bastante grande, se puede decir que el valor de esta serie va a aumentando más lento conforme n se hace más grande, para n = 500000000 la suma parcial tiene el valor de 20.6073, pero se demora bastante en llegar a este valor y si se hace mucho más grande llega el momento que la suma parcial diverge.

Referencias:

Strang, G., & Herman, E. J. (2022). 5.2 Serie infinita. En Cálculo volumen 2. OpenStax. https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/5-2-serie-infinita

Tom Apostol. Cálculo volumen 1.