Tarea Series

Facultad de Ingeniería- Universidad de Cundinamarca

April 5, 2025

1 Objetivo

Este taller tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a interpretar el concepto de serie, mediante ejemplos apropiar los criterios de convergencia clásicos y si considera necesario, usar la herramienta de geogebra para el desarrollo de limites de sucesiones que concluyan los criterios de convergencia Se abordan los siguientes temas:

1. Definición y clasificación de series.
2. Convergencia y divergencia de series.
3. Criterios de convergencia.
4. Análisis numérico utilizando Python

2 Análisis, repaso y ejercicios

1. Defina qué es una serie infinita y explique brevemente cómo valor se relaciona con las sumas parciales.

2. Recordar el procedimiento hecho por el joven Gauss para la resolución de la serie finita $\Sigma_1^n i$. De una fórmula explícita para la serie $\Sigma_1^n 2i$.

3. **Serie telescópica** Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión. La serie telescópica asociada se define como

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}(a_i - a_{i+1})$$

Donde las sumas parciales tienen por construcción la siguiente propiedad.

$$S_n = \Sigma_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Con esto, haciendo S_n tender a infinito, se tiene que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - lim_{a\to\infty} a_i$$

Diga si las siguientes series convergen o divergen, en caso de que converjan de el valor exacto.

(a) $\Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
(b) $\Sigma_{i=1}^{\infty}log(\frac{n}{n+1})$

4. **Serie geométrica** Sea $x \in \mathbf{R}$, la serie geométrica asociada es

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}x^i.$$

Es claro que si $|x| \geq 1$ la serie diverge, en caso contrario la serie es $\frac{1}{1-x}$

(a) De solución matemática a la paradoja de los griegos sobre la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$.
(b) De el valor exacto de la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$

5. **Criterio de comparación** Para saber si una serie $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$ converge o diverge, el criterio de comparación es el más fundamental de todos y la herramienta que permite demostrar todos los siguientes criterios, siendo el mas importante o **ÚTIL**. Su poca practicidad, hace que aplicarlo directamente no sea fácil y no sea útil a la practica, siendo no apreciado a pesar de todo.

   Sean dos sucesiones $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ tales que sus términos son mayores o iguales a cero, si existe $c > 0$ tal que para todo $i \in I$ se tiene $a_i \leq cb_i$. La convergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} b_i$ implica la convergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$, también la divergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$ implica la divergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} b_i$.

   (a) Suponiendo que $\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/i$ diverge, use el criterio de comparación para demostrar la divergencia de $\Sigma_{i=1}^{\infty} i^n$ con $n \geq 0$.
   (b) Usando la serie del ejercicio 3(a), demostrar que la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge.
   (c) Ya que $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge, demuestre que $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$ converge si $n \geq 2$.

6. **Criterio de comparación paso al limite** Sean dos sucesiones $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ tales que sus términos son mayores estrictos a cero. Sea

$$\lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{b_i}$$

   Si este límite converge a un número c tal que $c > 0$, entonces $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si y solo si $\Sigma_{i=1}^{\infty} b_i$, análogamente $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge si y solo si $\Sigma_{i=1}^{\infty} b_i$.

7. **Criterio de la integral** Sea f una función positiva decreciente definida para $x \geq 0$. Analizando el dibujo de las sumas de Riemann por derecha e izquierda, se llegan a las siguientes desigualdades.

$$\Sigma_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \qquad \Sigma_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x)dx$$

   El criterio de la integral establece que si

$$S_n = \Sigma_{i=1}^{n} f(i) \quad I_n = \int_1^n f(x)dx$$

   Entonces, S_n converge si y solo si I_n converge.

   (a) Sea $n \in \mathbf{Z}$, dar los casos en que $\Sigma_{i=2}^{\infty} i^n$ converge, y los casos en que diverge.
   (b) Sean $n \in \mathbf{Z}$ y $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(log(i))^n}$. Dar los casos en que la serie converge (use sustitución).

8. **Criterio de la Raíz y del Cociente** Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de términos mayores o iguales a cero. Sean los limites

$$lim_{i \to \infty \frac{a_{i+1}}{a_i}} \qquad lim_{i \to \infty} (a_i)^{\frac{1}{i}}.$$

   Si alguno de estos limites existen, y su valor es es L.

   (a) Si $L < 1$ la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty} i$ converge.
   (b) Si $L > 1$ la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty} i$ diverge.
   (c) Si $L = 1$ no se puede decir si la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty} i$ converge o diverge.

   Ejercicios. Decir si las siguientes series convergen o divergen.

   (a) Aplique el criterio del cociente para las series

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} x^n$$

   con $n \in \mathbf{Z}$.
   (b) $\Sigma_{i=1}^{\infty} (log(i))^i$
   (c) $\Sigma_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$
   (d) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
   (e) $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
   (f) $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)}{n^n}$

3 Análisis numérico

1. Escriba un código en Python para calcular la suma de la serie geométrica $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$ para $n \in \{10, 50, 100\}$
2. Compara la convergencia de las series $\Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ y $\Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^5}$ mediante la comparación de sus sumar parciales en $n \in \{10, 50, 100\}$
3. Programe la n-esima suma parcial de la serie armónica $\Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$. De el N lo suficientemente grande para que S_N sobre pase el valor de 10.