

# Ejercicios de Repaso

Johan Posada

## Conceptos Básicos

1. Defina la integral definida y explique su interpretación geométrica.

Sea  $\int_a^b f(x) dx$  la integral definida de  $f(x)$  desde  $a$  hasta  $b$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b \quad \text{donde } \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

la integral definida se puede entender como el área bajo la curva  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

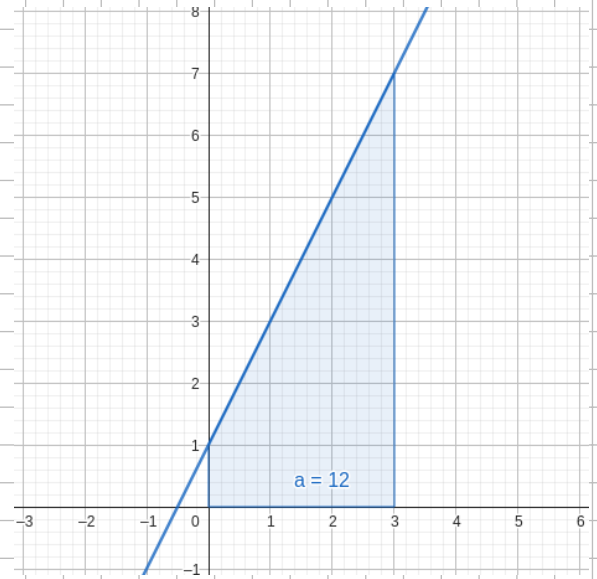
En los siguientes ejercicios se puede ver el gráfico en Geogebra.

2. Calcule  $\int_0^3 (2x + 1) dx$  y explique su significado.

$$2 \int_0^3 x dx + \int_0^3 dx = \left[ 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_0^3 = (3^2 + 3) = 12 u^2$$

Significa que el área bajo la curva  $f(x) = 2x + 1$  es  $12 u^2$ ,

Si me dieran un contexto podría dar una mejor definición;  
por ejemplo si el contexto fuera un evento probabilístico,  
entonces diría que es la probabilidad de que el evento  
esté en el intervalo  $[x_1, x_2]$



3. Explique la diferencia entre integral definida e indefinida.

La integral definida calcula el área bajo la curva o función  $f(x)$ , la integral indefinida calcula la antiderivada o primitiva de  $f(x)$  que es  $F(x) + C$ .

$$\text{Donde } \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$\int dF(x) \approx \int f(x) dx$$

$F(x) = F(x) + C$  Donde la primitiva es la familia de funciones  $F(x)$  que difieren de la constante  $C$ .

# Ejercicios de Rutina

## Cálculo de Áreas y Volúmenes

1. Determine el área bajo la curva  $y = x^3 - 2x + 1$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

$$\int_0^2 x^3 dx - 2 \int_0^2 x dx + \int_0^2 1 dx$$

$$\left[ \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2$$

$$\frac{1}{4}(2^4) - 4 + 2$$

$$\frac{16}{4} - 4 + 2 = 2$$

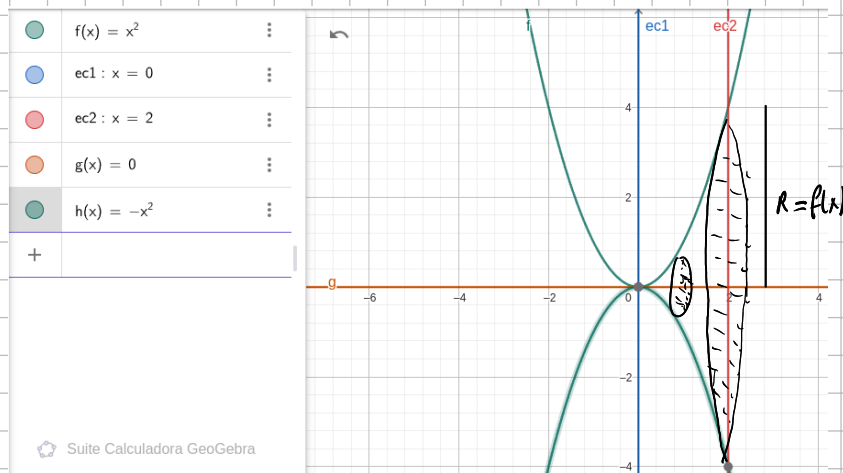
2. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región delimitada por  $y = x^2$  y  $x = 2$  alrededor del eje  $x$ .

Región:  $d(x,y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2$

$f(x) = x^2$   $g(x) = 0$   $x_1 = 0$   $x_2 = 2$

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

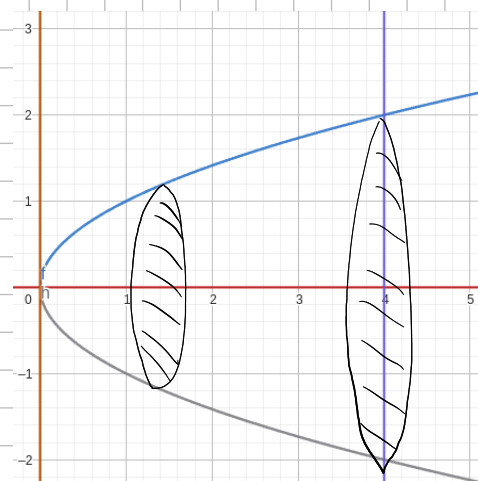


3. Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar  $y = \sqrt{x}$  en  $[0, 4]$  alrededor del eje  $x$ .

Región:  $d(x,y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$   $g(x) = 0$   $x_1 = 0$   $x_2 = 4$

$$V = \pi \int_0^4 x dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$



## Ejercicios No Rutinarios

1. Use integración para demostrar la fórmula del área de un círculo.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A_0 = 4 \int_0^r y$$

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$A = 4 \int_0^r \underbrace{(1 - \sin^2(u))}_{\cos^2(u)} \cdot r \cos(u) du$$

$$A = 4 \int_0^r r \cos(u) \cdot r \cos(u) du$$

$$A = 4r^2 \int_0^r \cos^2(u) du \quad \cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

$$A = 4r^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \int_0^r du + \int_0^r \cos(2u) du \right) \right]$$

$$A = 2r^2 \left[ u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right] \Big|_{x=0}^{x=r}$$

$$A = 2r^2 \left[ (0 + \pi/2) + \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot \pi/2) \right]$$

$$A = 2r^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right]$$

$$A = \pi r^2$$

$$u = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$x = r \sin(u)$$

$$dx = r \cos(u) du$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \quad \text{Ambos lados por } r^2$$

$$(r \cos(x))^2 = r^2 - (r \sin(x))^2$$

$$r^2 \cos^2(x) = r^2 (1 - \sin^2(x))$$

$$x_1 = r \cos(u)$$

$$\text{Si } x_1 = 0$$

$$0 = \cos(u)$$

$$u = -\pi/2 \text{ ó } \pi/2$$

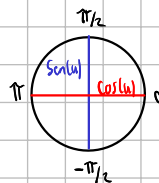
$$x_2 = r \cos(u)$$

$$\text{Si } x_2 = r$$

$$r = r \cos(u)$$

$$u = \arccos(1)$$

$$u = 0$$



3. Determine la convergencia o divergencia de la integral  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ .

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1 \quad \text{Converge}$$

## Ejercicios de Aplicación en Ingeniería

1. En un sistema de refrigeración, la tasa de transferencia de calor está dada por  $Q(t) = 5t + 3$ . Determine el calor total transferido en 10 segundos.

$$5 \int_0^{10} t dt + 3 \int_0^{10} dt = \left[ \frac{5}{2} t^2 + 3t \right]_0^{10} = \frac{5}{2} (10^2) + 3(10) = 280$$

2. En mecánica, la distancia recorrida por un objeto con velocidad  $v(t) = 2t + 1$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

$$2 \int_0^5 t dt + \int_0^5 dt = \left[ t^2 + t \right]_0^5 = 5^2 + 5 = 30$$

3. En probabilidades, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria es  $f(x) = e^{-x}$  en  $[0, \infty)$ . Calcule la probabilidad de que  $X \leq 2$ .

$$\int_0^2 e^{-x} dx$$

$u = -x$   
 $du = -dx \quad dx = -du$

$$= \int_0^2 e^u du = [-e^u]_0^2 = [-e^x]_0^2 = -e^2 + e^0 = 1 - e^{-2} = 0.8647$$

## Análisis Numérico usando Python

1. Escriba un código en Python que aproxime  $\int_0^1 e^x dx$  usando el método del trapecio con  $n = 10$ .

```

Inserte el valor de n: 10
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 1

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 3

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 1.6337993999663625
Aproximación por derecha: 1.805627582812267
Aproximación por punto medio: 1.7175660864611277

Método del Trapecio:
Aproximación: 1.7197134913893146

Método de Simpson:
Aproximación: 1.7182827819248236

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 1.745073797194146

```

2. Compare la precisión del método del trapecio y el método de Simpson para  $\int_0^\pi \sin x dx$ .

```

Inserte el valor de n: 100000
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: pi

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 1

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 1.9999999998354792
Aproximación por derecha: 1.9999999998354792
Aproximación por punto medio: 2.0000000000000000

Método del Trapecio:
Aproximación: 1.9999999998354792

Método de Simpson:
Aproximación: 2.0000000000000000

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 1.9972003861642635

```

3. Use Monte Carlo para aproximar  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

```

Inserte el valor de n: 10000000
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 1

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 5

Suponiendo que la raíz tiene un polinomio dentro

Inserte el grado del polinomio: 2
Inserte el coeficiente de x^2: -1
Inserte el coeficiente de x^1: 0
Inserte el coeficiente de x^0: 1

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 0.785398213388178
Aproximación por derecha: 0.7853981133881781
Aproximación por punto medio: 0.7853981634000865

Método del Trapecio:
Aproximación: 0.7853981633881781

Método de Simpson:
Aproximación: 0.7853981633938383

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 0.7853828383917574

```

Puede acceder al repositorio y al código mediante: [https://github.com/johanP051/aplicaciones\\_integral](https://github.com/johanP051/aplicaciones_integral)