Ejercicios de Repaso

Johan Posada

Conceptos Básicos

1. Defina la integral definida y explique su interpretación geométrica.

Sea $\int_a^b f(x)\,dx$ la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \quad \text{donde} \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

la integral definida se puede entender como el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

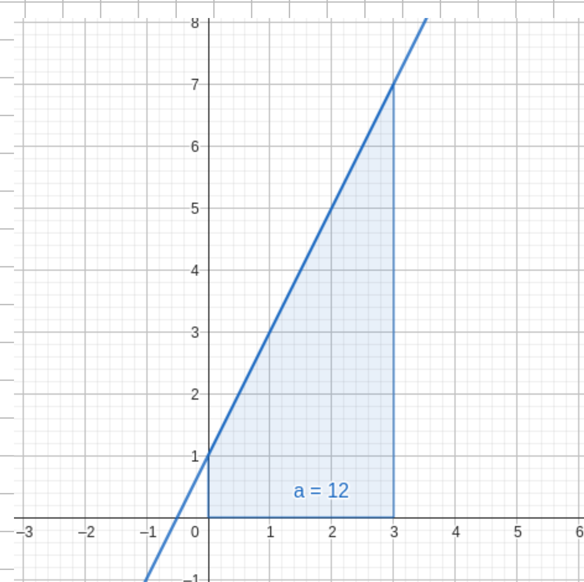
En los siguientes ejercicios se puede ver el gráfico en Geogebra.

2. Calcule $\int_0^3 (2x+1)dx$ y explique su significado.

$$2\int_0^3 x\,dx + \int_0^3 dx = \left[\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + x\right]\Big|_0^3 = (3^2+3) = 12u^2$$

Significa que el área bajo la curva $f(x) = 2x+1$ es $12u^2$,

Si me dieran un contexto podría dar una mejor definición; por ejemplo si el contexto fuera un evento probabilístico, entonces diría que es la probabilidad de que el evento esté en el intervalo $[x_1, x_2]$



3. Explique la diferencia entre integral definida e indefinida.

La integral definida calcula el área bajo la curva o función $f(x)$, la integral indefinida calcula la antiderivada o primitiva de $f(x)$ que es $F(x)+C$.

Donde $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

$$\int dF(x) \approx \int f(x)\,dx$$

$F(x) = F(x)+C$ Donde la primitiva es la familia de funciones $F(x)$ que difieren de la constante C.

Ejercicios de Rutina

Cálculo de Áreas y Volúmenes

1. Determine el área bajo la curva $y = x^3 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\int_0^2 x^3\,dx - 2\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + x\right]\Big|_0^2$$

$$\frac{1}{4}(2^4) - 4 + 2$$

$$\frac{16}{4} - 4 + 2 = 2$$

2. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región delimitada por $y = x^2$ y $x = 2$ alrededor del eje x.

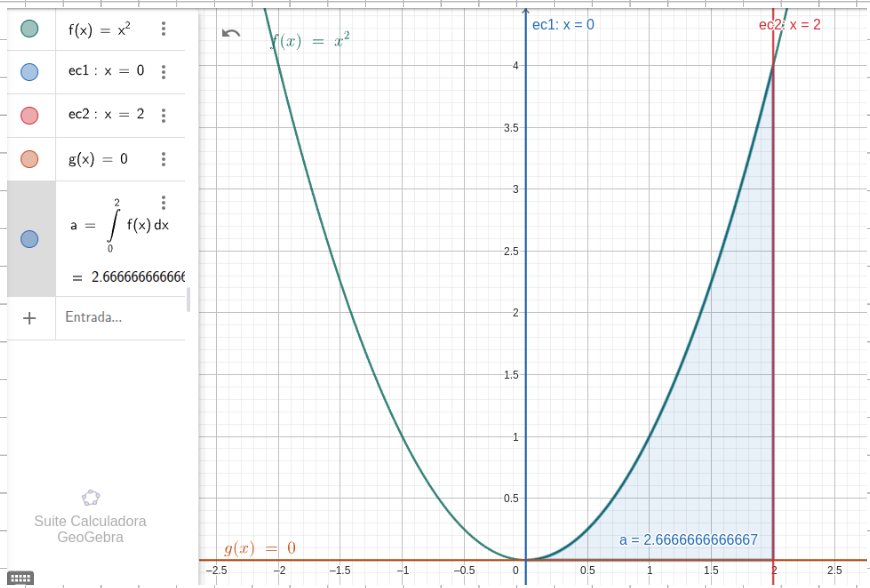
Región: $\{(x,y): 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

$f(x) = x^2 \quad g(x) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_x - g_x)\,\overbrace{dx}^{\text{Alrededor de } x}$$

$f(x) :=$ función más alta

$$= \int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2.667\,u^3$$



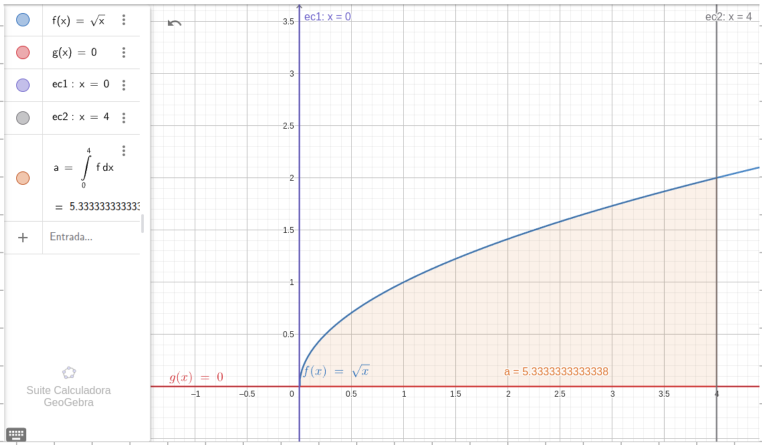
3. Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar $y = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$ alrededor del eje x.

Región: $\{(x,y): 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

$f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

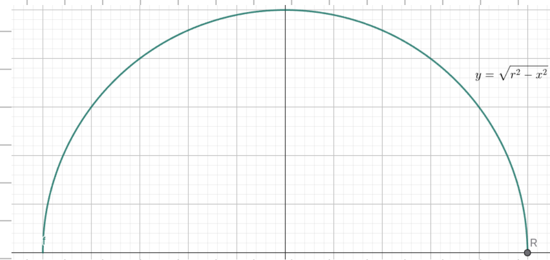
$$\int_{x_1}^{x_2} (f_x - g_x)\,dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]\Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} = 5.33\,u^3$$



Ejercicios No Rutinarios

1. Use integración para demostrar la fórmula del área de un círculo.



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A_0 = 4\int_0^r y$$

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$u = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$x = r\,\text{Sen}(u)$$
$$dx = r\,\text{Cos}(u)\,du$$

$$\text{Sen}^2(x) + \text{Cos}^2(x) = 1$$
$$\text{Cos}^2(x) = 1 - \text{Sen}^2(x) \quad \text{Ambos lados por } r^2$$
$$(r\cos(x))^2 = r^2 - (r\,\text{Sen}(x))^2$$
$$r^2\cos^2(x) = r^2(1 - \text{Sen}^2(x))$$

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2(\underbrace{1 - \text{Sen}^2(u)}_{\cos^2(u)})} \cdot r\,\text{Cos}(u)\,du$$

$$A = 4\int_0^r r\cos(u) \cdot r\cos(u)\,du$$

$$A = 4r^2\int_0^r \cos^2(u)\,du \qquad \cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

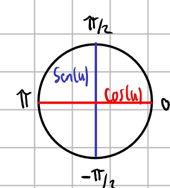
$$A = 4r^2\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^r du + \int_0^r \cos(2u)\,du\right)\right]$$

$$A = 2r^2\left[u + \frac{1}{2}\,\text{Sen}(2u)\right]\Bigg|_{x_1=0}^{x_2=r}$$

$\text{Sen}(\pi) = 0$ y $\text{Sen}(-\pi) = 0$

$x_1 = r\cos(u)$
Si $x_1 = 0$
$0 = \cos(u)$
$u = -\pi/2$ ó $\pi/2$

$x_2 = r\cos(u)$
Si $x_2 = r$
$\cancel{r} = \cancel{r}\cos(u)$
$u = \arccos(1)$
$u = 0$



$$A = 2r^2\left[(0 + \pi/2) + \left(\cancel{\frac{1}{2}\,\text{Sen}(2\cdot 0)}^{\,0} - \frac{1}{2}\,\text{Sen}(2\cdot \pi/2)\right)\right]$$

$$A = 2r^2\left[\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\,\text{Sen}(\pi)}^{\,0}\right]$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

3. Determine la convergencia o divergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \cancel{\frac{-1}{b}}^{\,0} + 1 = \boxed{1} \quad \text{Converge}$$

Ejercicios de Aplicación en Ingeniería

1. En un sistema de refrigeración, la tasa de transferencia de calor está dada por $Q(t) = 5t + 3$. Determine el calor total transferido en 10 segundos.

$$5\int_0^{10} t\,dt + 3\int_0^{10} dt \qquad \left[\frac{5}{2}t^2 + 3t\right]\Bigg|_0^{10} = \frac{5}{2}(10^2) + 3(10) = 280$$

2. En mecánica, la distancia recorrida por un objeto con velocidad $v(t) = 2t + 1$ en el intervalo $[0, 5]$.

$$2\int_0^5 t + \int_0^5 dt = \left[t^2 + t\right]\Bigg|_0^5 = 5^2 + 5 = 30$$

3. En probabilidades, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria es $f(x) = e^{-x}$ en $[0, \infty)$. Calcule la probabilidad de que $X \leq 2$.

$$\int_0^2 e^{-x} dx \qquad \begin{array}{l} u = -x \\ du = -dx \quad dx = -du \end{array}$$

$$= -\int_0^2 e^{u} du = \left[-e^{u}\right]_0^2 = \left[-e^{-x}\right]_0^2 = -e^{-2} + e^{0} = 1 - e^{-2} = 0.8647$$

Análisis Numérico usando Python

1. Escriba un código en Python que aproxime $\int_0^1 e^x dx$ usando el método del trapecio con $n = 10$.

```
Inserte el valor de n: 10
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 1

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 3

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 1.6337993999663625
Aproximación por derecha: 1.805627582812267
Aproximación por punto medio: 1.7175660864611277

Método del Trapecio:
Aproximación: 1.7197134913893146

Método de Simpson:
Aproximación: 1.7182827819248236

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 1.745073797194146
```

2. Compare la precisión del método del trapecio y el método de Simpson para $\int_0^\pi \sin x dx$.

```
Inserte el valor de n: 100000
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: pi

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 1

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 1.9999999998354792
Aproximación por derecha: 1.9999999998354792
Aproximación por punto medio: 2.0000000000822573

Método del Trapecio:
Aproximación: 1.9999999998354792

Método de Simpson:
Aproximación: 2.0000000000000138

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 1.9972003861642635
```

3. Use Monte Carlo para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.

```
Inserte el valor de n: 10000000
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 1

Menú de funciones:
{1: 'sinx', 2: 'cosx', 3: 'e^x', 4: 'polinomio', 5: 'Raiz cuadrada'}

Elija la opción que desea del menú de funciones: 5


Suponiendo que la raíz tiene un polimomio dentro

Inserte el grado del polinomio: 2
Inserte el coeficiente de x^2: -1
Inserte el coeficiente de x^1: 0
Inserte el coeficiente de x^0: 1

Sumas de Riemann:
Aproximación por izquierda: 0.785398213388178
Aproximación por derecha: 0.7853981133881781
Aproximación por punto medio: 0.7853981634000865

Método del Trapecio:
Aproximación: 0.7853981633881781

Método de Simpson:
Aproximación: 0.7853981633938383

Método de MonteCarlo:
Aproximación: 0.7853828383917574
```

Puede acceder al repositorio y al código mediante: https://github.com/johanP051/aplicaciones_integral