Cálculo Integral I-2025 301-302

Johan Sebastián Posada Beltrán

February 16, 2025

1 Repaso

La intención de las siguientes preguntas es repasar y recordar algunos conceptos básicos que debe tener en cuenta para desarrollar esta tarea e iniciar el curso de cálculo integral.

- *Pregunta 1* ¿Qué es una función real, el dominio, el rango y la gráfica de una función real?

Una función real es una relación entre dos conjuntos de números reales, donde a la variable independiente solamente le puede corresponder un valor de la variable independiente (imagen), para comprobar esto en una gráfica se puede realizar la prueba de la recta vertical, si esta toca en más de un punto a la gráfica, entonces no hay una función porque la variable independiente no puede tener más de una imagen.

El **dominio** de una función es el conjunto de números reales que puede tomar la variable independiente x, mientras que el **rango** $f(x)$ es el conjunto de números reales que toma la variable independiente o imagen de x

- *Pregunta 2* ¿Cuál es la definición de valor absoluto?

El valor absoluto $|x|$ se define como una función a trozos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

Esto significa que x va a conservar su valor si es positivo o igual a cero, y que va a cambiar su signo (se multiplica por negativo) si la x es negativa. Se puede decir que:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

El valor absoluto es una distancia, si se tiene $|x - b|$, este mide la distancia de x hasta b o desde b hasta x, puesto que $|x - b| = |b - x|$

- *Pregunta 3* ¿Qué relación existe entre el concepto de límite de una sucesión o una función con el concepto de valor absoluto?

La definición formal de Límite es: Para todo $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ y $0 < |f(x) - L| < \epsilon$.

Esto se puede entender mediante la gráfica:

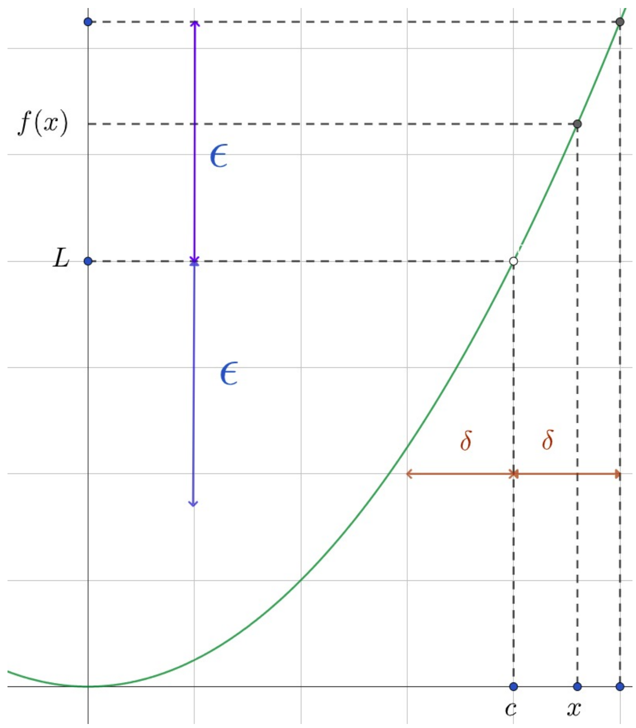


Figure 1: Definición de límite

Aquí se aprecia que $|x-c|$ es una distancia entre x y c, si esta distancia es menor a δ, entonces $|f(x)-L|$, es decir la distancia entre $f(x)$ y L es menor a ϵ, es decir, si x se acerca lo suficiente a c, entonces $f(x)$ se acerca lo suficiente a L, lo que es ideal, pues cuando se calcula un límite por tabulación, se hallan valores al límite bastante cerca a c, por ejemplo $c \pm 0.001$

- *Pregunta 4* ¿Qué significa que exista y calcular, el límite de una función real en un punto de su dominio?

El límite es el valor L que la función $f(x)$ me tiende a arrojar cuando la variable independiente x se acerca lo suficiente a un determinado punto c, el límite de la función existe cuando los límites laterales (por derecha e izquierda) son iguales. L puede ser la imagen de x $f(x)$ o puede ser un punto no definido en f.

- *Pregunta 5* ¿Qué es la derivada de una función real en un punto de su dominio? Explique en sus palabras el significado de tasa de cambio instantáneo, qué es la recta tangente a la gráfica de una función en un punto de su dominio, si todas las funciones reales son diferenciables y si el concepto de derivada es global o local en el dominio.

Cuando se halla la derivada de una función y dicha derivada $f'(x)$ la evalúo en un valor de x,entonces estoy calculando la recta tangente a dicho x o la razón de cambio.

La tasa de cambio instantáneo o pendiente de la función indica qué tanto cambia la variable dependiente respecto a independiente, es decir una pendiente de $\frac{Ax}{By}$ indica que por cada A unidades que la gráfica se mueve en la variable independiente (x), la imagen $f(x)$ aumenta en B unidades. Esto se puede entender desde la física con el ejemplo de la función de la posición respecto al tiempo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

Se sabe que la velocidad en un instante de tiempo t se define como el cambio de desplazamiento x en un tiempo exacto, si la velocidad fuera $\frac{dx}{dt} = 2\frac{m}{s}$ significa que el móvil o la función avanza dos unidades de distancia (metros) por cada unidad de tiempo transcurrido (medido en segundos en este caso).

- *Pregunta 6* ¿Cuál es la relación entre el concepto de límite y el de derivada?

La derivada de una función $f(x)$ por definición es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

En la figura 2 se puede apreciar la recta secante a dos puntos X_0 y X_f de la función, la pendiente de esta tecta secante es:

$$m = \frac{f(x_f) - f(x_0)}{x_f - x_0} \tag{3}$$

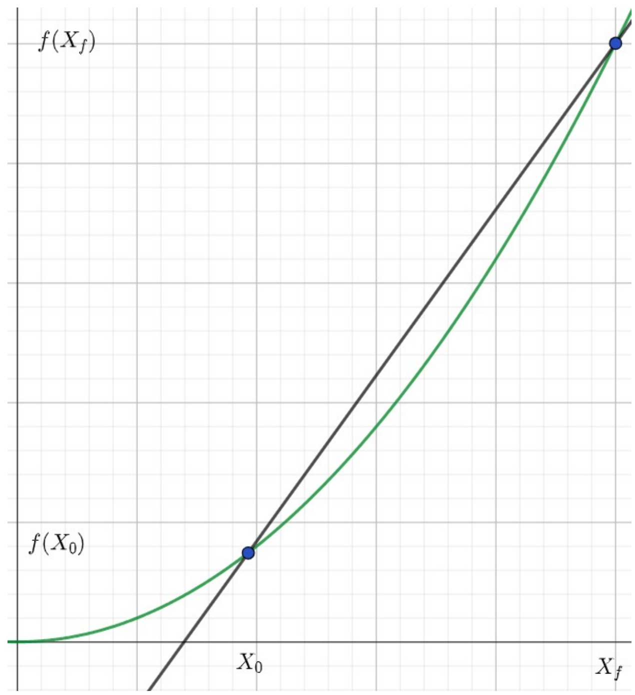


Figure 2: Recta secante a dos puntos de la función

Si se hace un cambio de variable, entonces $x_0 = x$ y $x_f = x + h$, donde h es la distancia entre X y $X + h$, entonces la pendiente de la recta secante se puede reescribir como:

$$m = \frac{f(x+h) - f(X)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

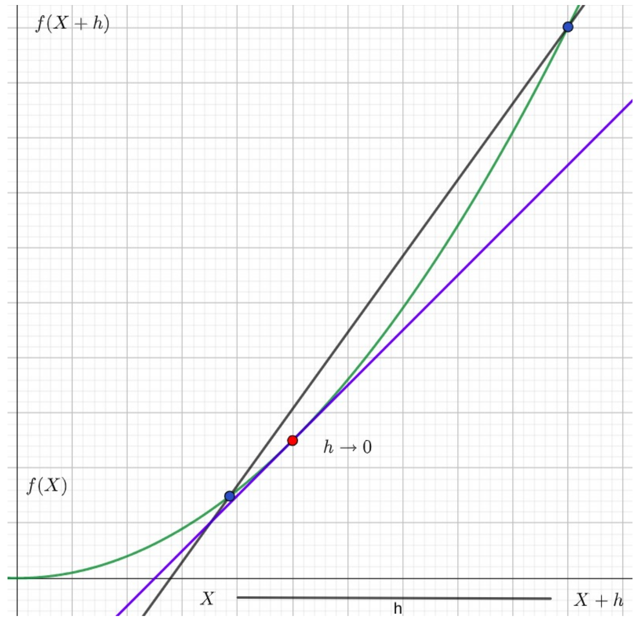


Figure 3: Recta tangente a la función en un punto

Como se ve en la figura 3, si se hace que h tienda a cero, entonces la recta secante se convierte en la recta tangente a la función en un punto x, es decir, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Se debe tener en cuenta que no es cero, pero se acerca bastante, por eso se puede hallar el límite de la pendiente m y se obtiene la definición de la derivada como se mostró en la ecuación [2].

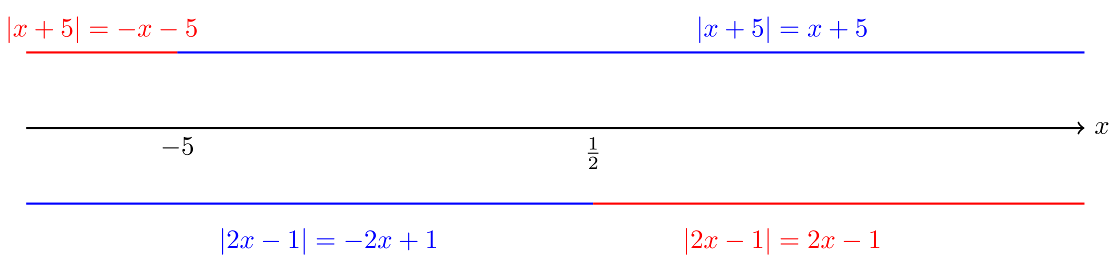
2 Inecuaciones

$|2x-1|-|x+5|=3$

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & x\geq \frac{1}{2},\\ -(2x-1), & x<\frac{1}{2},\end{cases}$$

$$|x+5|=\begin{cases}x+5, & x\geq -5,\\ -(x+5), & x<-5.\end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos:

Caso 1: $x < -5$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - \big[-(x+5)\big] &= 3, \\ -2x + 1 + x + 5 &= 3, \\ -x + 6 &= 3, \\ -x &= -3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Conclusión: $3 \notin (-\infty, -5)$ **(No es solución)**

Caso 2: $-5 \leq x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - (x+5) &= 3, \\ -2x + 1 - x - 5 &= 3, \\ -3x - 4 &= 3, \\ -3x &= 7, \\ x &= -\frac{7}{3} \approx -2.33. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{7}{3} \in \left[-5, \frac{1}{2}\right)$ **(Solución válida)**

Caso 3: $x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (2x-1) - (x+5) &= 3, \\ 2x - 1 - x - 5 &= 3, \\ x - 6 &= 3, \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Conclusión: $9 \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **(Solución válida)**

Solución general

$$x = \frac{-7}{3}, x = 9$$

Interpretación

La ecuación $|2x-1| - |x+5| = 3$ indica que, para ciertas posiciones de x, la primera distancia $|x - \frac{1}{2}|$ (multiplicada por 2) excede a la segunda distancia en 3 unidades.

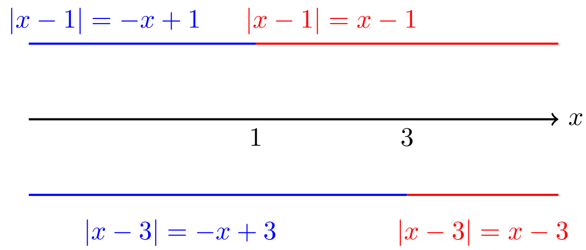
Por se hallan los dos puntos específicos: $\frac{7}{3}$ y 9 como soluciones.

$|x-1| - |x-3| \geq 5$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -(x-1), & x < 1. \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ -(x-3), & x < 3. \end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos

Caso 1: $x < 1$

$$\begin{aligned} (-x+1) - (-x+3) &\geq 5, \\ -x+1+x-3 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)

Caso 2: $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} (-x+3) - (x-1) &\geq 5, \\ -x+3-x+1 &\geq 5, \\ -2x+4 &\geq 5, \\ -2x &\geq 1, \\ x &\leq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{1}{2} \notin [1, 3)$ (**No hay solución**)

Caso 3: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} (x-3) - (x-1) &\geq 5, \\ x-3-x+1 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)

Solución general

No hay soluciones reales.

Interpretación

Esta inecuación indica que no hay valores de x que cumplan con la condición de que la diferencia de que la distancia entre x y 1 sea mayor o igual a la distancia entre x y 3 en 5 unidades.

$|x^2 - 1| \leq \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

Primera desigualdad

$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1$$

$$-\frac{1}{2} + 1 \leq x^2$$

$$\frac{1}{2} \leq x^2$$

$$|x| \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Segunda desigualdad

$$x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

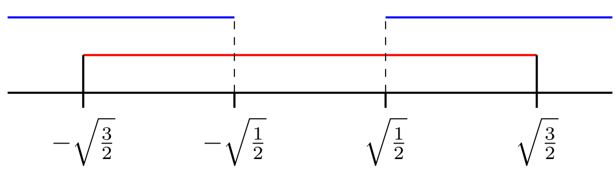
$$x^2 \leq \frac{1}{2} + 1$$

$$x^2 \leq \frac{3}{2}$$

$$|x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Gráfica de los intervalos



Solución:

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Interpretación

Esta inecuacion indica que los valores de x que cumplen con la condición de que la distancia entre x^2 y 1 sea menor o igual a $\frac{1}{2}$ son aquellos que se encuentran en el intervalo $[-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$.

3 Límites y Derivadas

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   Caso: Diferencia de Cuadrados

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

   Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   Para los casos $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+5}{2x^2-7}$

   Se divide todo por el mayor exponente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{K}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Cálculo de Derivadas

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 - 4x + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

2. $g(x) = e^x \sin x$

$$g'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$g'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

3. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

   Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

4 Problemas Rutinarios

- Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 3x - 5$ en $x = 1$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(1) = 5 = m$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = 4$$

Ecuación de la recta:

$$y = 5(x - 1) + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos como máximos, mínimos o puntos de silla para la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Los puntos criticos son aquellos donde la derivada vale cero

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = 1$$

$$f(3) = 2 \quad \text{y} \quad f(1) = 6$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Conclusión	Crece	Decrece	Crece

- $P(3, 2)$ es un máximo de la función.
- $P(1, 6)$ es un mínimo de la función.

Análisis de la continuidad de la función

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 3x - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Condiciones de continuidad

1. $f(a)$ existe:

$$f(2) = 3(2) - 5 = 1 \quad \checkmark$$

2. Verificamos si el límite lateral izquierdo y derecho son iguales:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Calculamos los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} (3x - 5) = 1$$

Dado que:

$$3 \neq 1$$

Se concluye que el límite de $f(x)$ no existe, por lo tanto, **la función no es continua en** $x = 2$.

Análisis de funciones

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Puntos de corte

El punto de corte con el eje y:

$$f(0) = \frac{0}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje y es:

$$y = 0, \quad x = 0$$

Dominio

El denominador no debe ser igual a cero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

Asíntotas Verticales

x	-1.0	-1.001
$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	$-\infty$	$-\infty$

x	-0.999	0.999
$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	∞	∞

x	-10	-1001
$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	$-\infty$	$-\infty$

x	0.99	0.999
$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	-499.7	-499.9

x	1.01	1.001
$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	500.2	∞

Asíntotas Horizontales

Calculamos el límite cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

Por lo tanto, existe una asíntota horizontal en:

$$y = 0$$

Criterio de la Primera Derivada

La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{x^2-1-[x\cdot 2x]}{(x^2-1)^2}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$-x^2-1=0$$

$$x^2=-1$$

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

Dado que $\sqrt{-1}$ no pertenece a los números reales ($\mathbb{R}$), concluimos que:

$$X \text{ no es un punto crítico}; X \notin \mathbb{R}$$

Por otro lado, la condición de discontinuidad se da cuando:

$$x^2-1\neq 0$$

$$x\neq \pm 1$$

Por lo tanto, $x=\pm 1$ son puntos de discontinuidad.

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Valor de Prueba	$x=-2$	$x=0$	$x=2$
$f'(x)$	-	-	-
Conclusión	Decrece	Decrece	Decrece

Criterio de la Segunda Derivada

La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - \left[(x+1)\cdot 2(x^2-1)2x\right]}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - 4x(x^4-1)}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+2x-3)}{(x^2-1)^4}$$

Factorizamos:

$$x^4 + 2x^2 - 3$$

Sea $z = x^2$, entonces:

$$z^2 + 2z - 3 = (z+3)(z-1)$$

Sustituyendo:

$$(x^2+3)(x^2-1)$$

Por lo tanto, la segunda derivada queda:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Puntos de inflexión y cambio de concavidad

Para encontrar los puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a cero:

$$2x(x^2+3) = 0$$

Resolviendo:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Punto de inflexión}$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \text{No es punto de inflexión}$$

Ahora, analizamos los puntos donde el denominador de la segunda derivada se anula:

$$(x^2-1)^3 \neq 0$$

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Estos corresponden a **puntos de cambio de concavidad**.

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -2$	$x = -0.5$	$x = 0.5$	$x = 2$
$f''(x)$	-	+	-	+
Conclusión	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

Puntos de Corte:

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

$$y = 0.33$$

$$X = \text{No Existe} \quad (1 \neq 0)$$

Dominio:

$$(x-1) \neq 0 \quad \vee \quad (x-3) \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

Asíntotas Verticales:

x	0.9	0.99	$\cdots$
$\lim_{x \to 1^-}$	5	50	∞

x	1.01	1.001	$\cdots$
$\lim_{x \to 1^+}$	-50	-500	$-\infty$

x	2.9	2.99	$\cdots$
$\lim_{x \to 3^-}$	-5	-50	$-\infty$

x	3.01	3.001	$\cdots$
$\lim_{x \to 3^+}$	50	500	∞

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = 0$$

$$\therefore \text{ Hay una asíntota en } y = 0$$

Criterio de la Primera Derivada:

$$f(x) = [(x-1)(x-3)]^{-1}$$

La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = -[(x-1)(x-3)]^{-2} \cdot [(x-3) + (x-1)]$$

Simplificando:

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{[(x-1)(x-3)]^2}$$

Resolviendo $-2x+4=0$:

$$x = 2 \implies f(2) = -1 \quad \textbf{Punto Crítico}$$

Restricciones del dominio:

$$(x-1) \neq 0 \implies x \neq 1 \quad \textbf{Pto. de Discontinuidad}$$

$$(x-3) \neq 0 \implies x \neq 3 \quad \textbf{Pto. de Discontinuidad}$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 1.5$	$x = 2.5$	$x = 4$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
Conclusión	Crece	Crece	Decrece	Decrece

Criterio de la 2da Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3)^2 - [(-2x+4) \cdot 2(x^2-4x+3)(2x-4)]}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3)^2 - (-2x+4)(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4x+3)\left[-2(x^2-4x+3) - (-4x+8)(2x-4)\right]}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3) + (4x-8)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+8x-6+8x^2-16x-16x+32}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2-24x+26}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$6x^2-24x+26=0$$

$$3x^2-12x+13=0$$

$$\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\sqrt{144-156}$$

$$3x^2-12x+13=0$$
$$x^2-4x+3=0$$

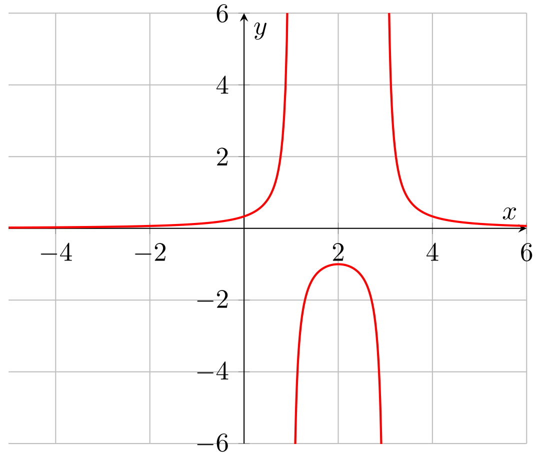
$$(x-3)(x-1)=0$$

Pts. de Cambio de Concavidad

$$x = 3 \quad x = 1$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$f''(x)$	+	-	+
Conclusión	Cóncava arriba ($\cup$)	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)

$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$



$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

Puntos de Corte:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

y no existe

Dominio:

$$x \neq 0 \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntotas Verticales:

x	-0.01	-0.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 0^-}$	9999.9	999999	∞

x	0.01	0.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 0^+}$	10^4	10^6	∞

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty$$

Hay 2 asíntotas oblicuas.

Criterio de la Primera Derivada:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{2}{x^3} = 1 \implies x = \sqrt[3]{2}$$

$$x \approx 1.26 \quad f(\sqrt[3]{2}) \approx 1.89$$

Punto Crítico: $x \approx 1.26$

$$x^2 \neq 0 \implies x \neq 0$$

Punto de Discontinuidad: $x = 0$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
$f'(x)$	+	-	+
Conclusión	Crece	Decrece	Crece

Criterio de la Segunda Derivada:

$$f'(x) = 1 - 2x^{-3}$$

$$f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$0 \neq 6$$

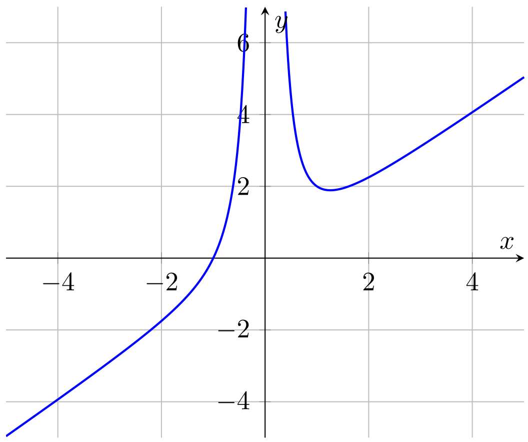
No hay puntos de inflexión

$$x^4 \neq 0 \implies x \neq 0$$

Punto de Cambio de Concavidad: $x \neq 0$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -1$	$x = 1$
$f''(x)$	+	+
Conclusión	Cóncava hacia arriba ($\cup$)	Cóncava hacia arriba ($\cup$)

$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$



5 Geometría Cartesiana

En las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 del libro [4] se encuentran los conceptos básicos sobre plano Cartesiano y funciones:

Ideas básicas

- La geometría cartesiana es fundamental para el desarrollo del cálculo integral, ya que permite representar puntos en el plano mediante coordenadas numéricas.
- EL plano Cartesiano es un sistema de referencia, es decir, permite ubicar puntos mediante coordenadas, fue introducido por René Descartes (1596-1650) y se basa en el uso de un sistema de ejes perpendiculares.

Para el sistema de coordenadas cartesianas:

- Se utilizan dos rectas perpendiculares: una horizontal (**eje x**) y otra vertical (**eje y**).
- El punto de intersección de los ejes es el **origen (O)**.
- Cada punto en el plano se representa mediante un par ordenado (x, y), donde:
  - x es la **abscisa** (distancia al eje y).
  - y es la **ordenada** (distancia al eje x).
- Los signos de las coordenadas determinan el cuadrante en el que se encuentra el punto:
  - **Primer cuadrante**: $x > 0, y > 0$
  - **Segundo cuadrante**: $x < 0, y > 0$
  - **Tercer cuadrante**: $x < 0, y < 0$
  - **Cuarto cuadrante**: $x > 0, y < 0$

Espacio tridimensional

- En el espacio, se utilizan tres ejes perpendiculares (x, y, z) que se cortan en el origen.
- Cada punto en el espacio se describe mediante tres coordenadas (x, y, z).

Aplicaciones geométricas

- La ecuación de la circunferencia $r^2 = x^2 + y^2$, representa un punto (x, y) que está a una distancia $|x|$ unidades desde el origen haste el eje vertical y una distancia $|y|$ desde el origen hasta el eje horizontal.

Funciones. Ideas generales y ejemplos

De manera informal se puede decir que asigna a cada elemento x de un conjunto X (dominio) un único elemento y de otro conjunto Y (imagen).

Las funciones pueden representarse de varias maneras:

- **Gráficas**: Los puntos $(x, f(x))$ forman la gráfica de la función en el plano cartesiano.
- **Tablas**: Muestran pares (x, y) de manera explícita.
- **Fórmulas**: Expresan la relación entre x y y mediante ecuaciones algebráicas.

Ejemplos de funciones

- **Función identidad**: $f(x) = x$. Su gráfica es una recta que pasa por el origen y forma ángulos iguales con los ejes.
- **Función número primo**: $\pi(x)$, que cuenta los números primos menores o iguales a x. Su gráfica consiste en segmentos horizontales con saltos en los números primos.
- **Función factorial**: $f(n) = n!$, que calcula el producto de todos los enteros positivos hasta n.
- **Función valor absoluto**: $\phi(x) = |x|$. Asigna a cada número real x su valor absoluto.

Propiedades del valor absoluto

(1)
$$|x| = \sqrt{x^2}$$

(2)
$$|x|^2 = x^2$$

(3)
$$x + b \leq |x + b|$$

(4)
$$|x - b| = |b - x|$$

(5)
$$|x| \geq 0$$

(6)
$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

(7)
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (\text{con } y \neq 0)$$

(8)
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(9)
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

(10)
$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a \quad (\text{para } a > 0)$$

(11)
$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a \quad (\text{para } a > 0)$$

(12)
$$|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \text{ o } x > a \quad (\text{para } a > 0)$$

(13)
$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \text{ o } x \geq a \quad (\text{para } a > 0)$$

Propiedades de las funciones

- Para cada x en el dominio X, existe un único y en el recorrido Y.
- Dos pares (x, y) y (x, z) no pueden existir con el mismo x y valores distintos de y.

Funciones. Definición formal como conjunto de pares ordenados

Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y), donde:

- Cada x en el dominio X tiene exactamente un y asociado.
- Dos pares (x, y) y (x, z) no pueden existir con el mismo x y valores distintos de y.
- La imagen de x se denota como $f(x)$.

Dominio y recorrido

- El **dominio** de f es el conjunto de todos los x que aparecen como primeros elementos en los pares (x, y).
- El **recorrido** de f es el conjunto de todos los y que aparecen como segundos elementos en los pares (x, y).

Representación de funciones

- Una función puede imaginarse como una tabla con dos columnas: una para los valores de x (dominio) y otra para los valores de y (recorrido).
- Para todo x en el dominio de f, existe exactamente un y tal que $(x, y) \in f$.

Teorema sobre la igualdad de funciones

- Tienen el mismo dominio.
- $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio.

6 Problemas No Rutinarios

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, excepto quizás en un punto $c \in [a, b]$, determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados (justifique su respuesta):

- Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y $f'(x)$ es negativa para todo $x > c$, en el punto c hay un máximo relativo de f.

El enunciado en pocas palabras establece que si que a la izquierda de c la función es creciente ($f'(x) > 0$ para $x < c$) y a la derecha de c es decreciente ($f'(x) < 0$ para $x > c$) , entonces hay un máximo relativo. Esto no es cierto porque la función debe ser continua en todo el intervalo $[a, b]$, si $c \in [a, b]$ entonces la función no tiene un punto crítico. El criterio de la primera derivada dice que para analizar el crecimiento de una función es necesario calcular en qué casos dicha derivada vale cero o no existe. Hay que tener en cuenta de que si una función crece a la izquierda y decrece a la derecha de c o viceversa, no significa siempre que exista un máximo o un mínimo relativo en $[a, b]$ de f, pues puede darse el caso de que en c existan asíntotas como se aprecia en la función racional de la figura 4. Un punto crítico es donde la derivada de la función es cero, sin embargo puede existir un punto de discontinuidad, allí la derivada no existe, pero puede crecer o decrecer sin necesidad de ser un máximo o un mínimo.
En cambio, en la función cuadrática de la figura 5 no hay una asíntota y aparentemente es un máximo, pero no lo es porque allí la derivada no existe. **Por lo tanto el enunciado es falso**.

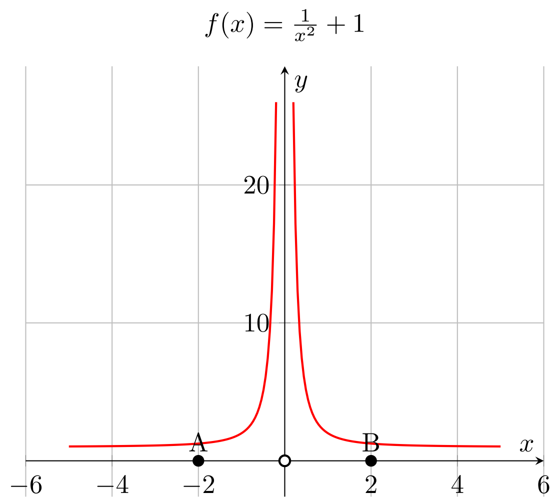


Figure 4: Función racional decreciente y creciente antes y después de c respectivamente.

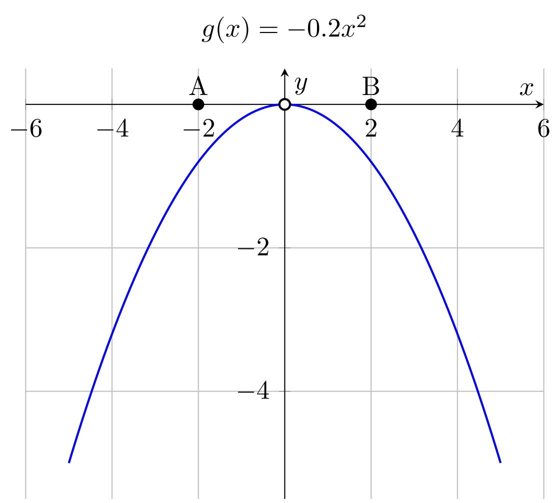


Figure 5: Función cuadrática decreciente y creciente antes y después de c respectivamente.

- Si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y $f'(x)$ es positiva para todo $x > c$, en el punto c hay un mínimo relativo de f.

En este enunciado se podría aplicar la misma lógica que en el primero, pero abordaré en este el criterio de la segunda derivada. Una vez se hallan los puntos críticos igualando la primera derivada a cero, entonces se evavlúa la segunda derivada en dichos puntos y si $f''(x) > 0$ entonces la función es cóncava hacia arriba y si $f''(x) < 0$ entonces la función es cóncava hacia abajo. Si la función es cóncava hacia arriba en un punto crítico, entonces es un mínimo relativo y si es cóncava hacia abajo, entonces es un máximo relativo. Sin mebargo, en este caso no existen puntos críticos, ya que al igualar $f'(x) = 0$ no se obtiene ninguna solución. **Por lo tanto, el enunciado es falso**.
En las siguientes gráficas se puede apreciar lo que plantea el enunciado:

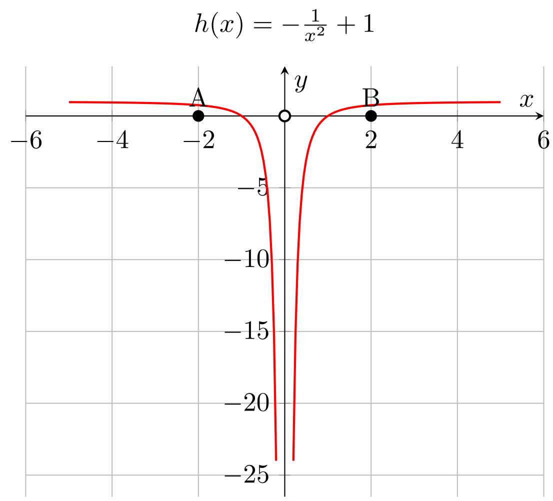


Figure 6: Función racional creciente y decreciente antes y después de c respectivamente.

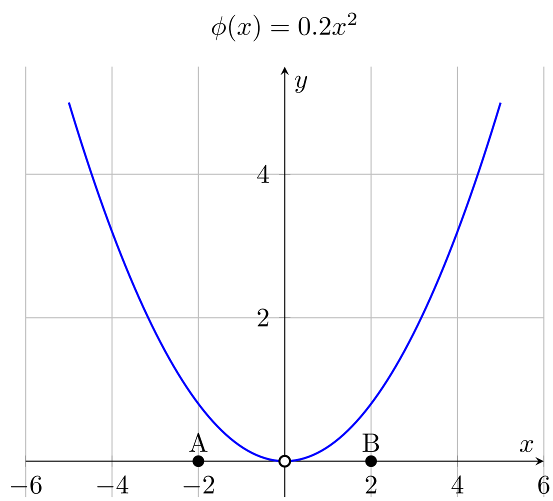


Figure 7: Función cuadrática creciente y decreciente antes y después de c respectivamente.

7 Análisis Numérico o Computacional

1. Use el método de la bisección para encontrar una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$ con una tolerancia de 10^{-3}.

2. Aproxime la derivada de $f(x) = e^x$ en $x = 1$ usando diferencias finitas progresivas con $h = 0.1$.

Función racional creciente y decreciente antes y después de c respectivamente.

References

[1] Stewart J. – *Calculus Concepts and Contexts*, 2ª ed., Thomson (2004).

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. – *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (2021).

[3] Marsden, J.; Tromba, A. – *Cálculo Vectorial*, (1991).

[4] Apostol, T. – *Calculus Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, 2ª ed., Reverte (2001).