Cálculo Integral I-2025 301-302

Johan Sebastián Posada Beltrán

February 10, 2025

1 Actividad I Introducción

Fecha de Entrega: Aula Virtual.

A continuación, encontrará una serie de actividades que sirven para reforzar, analizar y evaluar los aprendizajes mínimos para iniciar el curso de Cálculo Integral. Esta actividad se debe subir en formato pdf generado por un editor de textos científicos.

2 Repaso

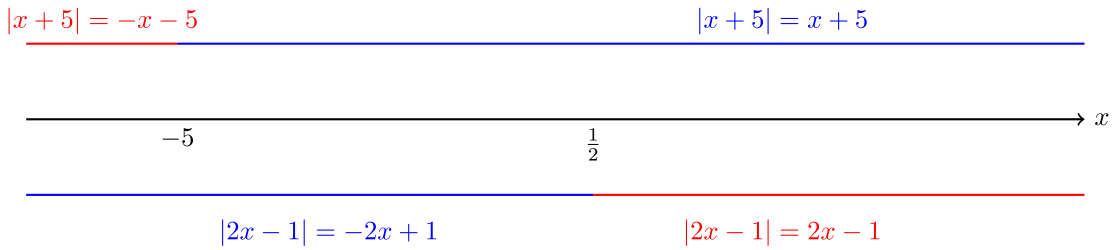
La intención de las siguientes preguntas es repasar y recordar algunos conceptos básicos que debe tener en cuenta para desarrollar esta tarea e iniciar el curso de cálculo integral.

- *Pregunta 1* ¿Qué es una función real, el dominio, el rango y la gráfica de una función real?
- *Pregunta 2* ¿Cuál es la definición de valor absoluto?
- *Pregunta 3* ¿Qué relación existe entre el concepto de límite de una sucesión o una función con el concepto de valor absoluto?
- *Pregunta 4* ¿Qué significa que exista y calcular, el límite de una función real en un punto de su dominio?
- *Pregunta 5* ¿Qué es la derivada de una función real en un punto de su dominio? Explique en sus palabras el significado de tasa de cambio instantáneo, qué es la recta tangente a la gráfica de una función en un punto de su dominio, si todas las funciones reales son diferenciables y si el concepto de derivada es global o local en el dominio.
- *Pregunta 6* ¿Cuál es la relación entre el concepto de límite y el de derivada?
- *Pregunta 7* Resolver e interpretar (es decir, traducir su significado) las siguientes ecuaciones o desigualdades (sugerencia: repasar propiedades del valor absoluto):

  $|2x-1|-|x+5|=3$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2}, \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$
$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & x \geq -5, \\ -(x+5), & x < -5. \end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos:

Caso 1: $x < -5$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - \big[-(x+5)\big] &= 3, \\ -2x+1+x+5 &= 3, \\ -x+6 &= 3, \\ -x &= -3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Conclusión: $3 \notin (-\infty, -5)$ (**No es solución**)

Caso 2: $-5 \leq x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - (x+5) &= 3, \\ -2x+1-x-5 &= 3, \\ -3x-4 &= 3, \\ -3x &= 7, \\ x &= -\frac{7}{3} \approx -2.33. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{7}{3} \in \left[-5, \frac{1}{2}\right)$ (**Solución válida**)

Caso 3: $x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (2x-1) - (x+5) &= 3, \\ 2x-1-x-5 &= 3, \\ x-6 &= 3, \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Conclusión: $9 \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (**Solución válida**)

Solución general

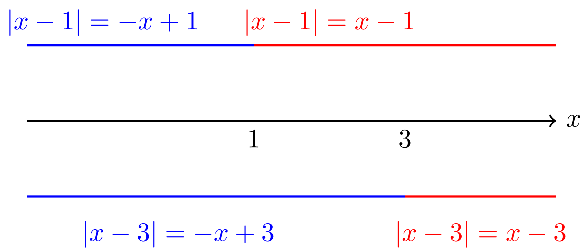
$$x = \frac{-7}{3}, 9$$

$|x-1| - |x-3| \geq 5$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -(x-1), & x < 1. \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ -(x-3), & x < 3. \end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos

Caso 1: $x < 1$

$$\begin{aligned} (-x+1) - (-x+3) &\geq 5, \\ -x+1+x-3 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)
Caso 2: $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} (-x+3) - (x-1) &\geq 5, \\ -x+3-x+1 &\geq 5, \\ -2x+4 &\geq 5, \\ -2x &\geq 1, \\ x &\leq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{1}{2} \notin [1,3)$ (**No hay solución**)
Caso 3: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} (x-3) - (x-1) &\geq 5, \\ x-3-x+1 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)

Solución general

No hay soluciones reales.

$|x^2-1| \leq \frac{1}{2}$

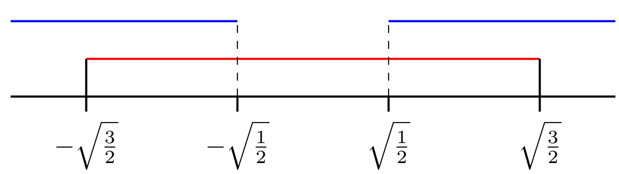
$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

Primera desigualdad

$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1$$
$$-\frac{1}{2} + 1 \leq x^2$$
$$\frac{1}{2} \leq x^2$$
$$|x| \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Segunda desigualdad

$$x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$
$$x^2 \leq \frac{1}{2} + 1$$
$$x^2 \leq \frac{3}{2}$$
$$|x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$



Solución:

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Pregunta 8. Evalúe los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   Caso: Diferencia de Cuadrados

   $$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

   Regla de L'Hôpital

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   Para los casos $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{2x^2-7}$

   Se divide todo por el mayor exponente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{K}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

3 Problemas Rutinarios

Se espera que las siguientes actividades le permitan comprender, repasar y utilizar propiedades y métodos analíticos que aprendió en el curso de Cálculo Diferencial:

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 3x - 5$ en $x = 1$.
2. Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos como máximos, mínimos o puntos de silla para la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
3. Analice la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ 3x - 5, & x \geq 2. \end{cases}$$

4. Use herramientas de cálculo para hacer un *sketch* de la gráfica de las siguientes funciones, además, describa el paso a paso para llegar a su *sketch*:
   (a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,
   (b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$,
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

4 Lectura, Escritura y Exposición

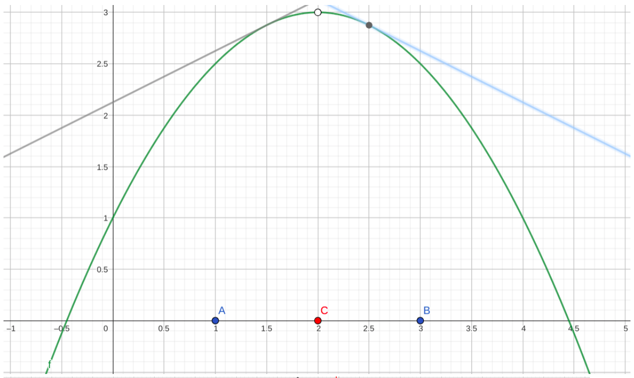
Leer y hacer un resumen conciso de las sesiones 1.1, 1.2 y 1.3 de [4].

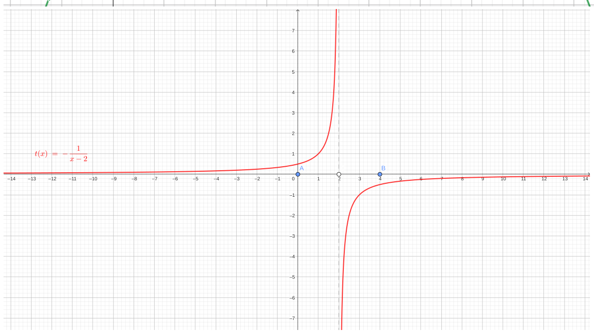
5 Problemas No Rutinarios

Se espera que las siguientes actividades les permitan examinar, manipular y aplicar apropiadamente los conceptos que aprendió en el curso de Cálculo Diferencial, identificando las razones y causas matemáticas para resolverlas.

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, excepto quizás en un punto $c \in [a, b]$, determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados (justifique su respuesta):

1. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y $f'(x)$ es negativa para todo $x > c$, en el punto c hay un máximo relativo de f.
2. Si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y $f'(x)$ es positiva para todo $x > c$, en el punto c hay un mínimo relativo de f.





6 Análisis Numérico o Computacional

1. Use el método de la bisección para encontrar una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$ con una tolerancia de 10^{-3}.

2. Aproxime la derivada de $f(x) = e^x$ en $x = 1$ usando diferencias finitas progresivas con $h = 0.1$.

References

[1] Stewart J. – *Calculus Concepts and Contexts*, 2ª ed., Thomson (2004).

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. – *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (2021).

[3] Marsden, J.; Tromba, A. – *Cálculo Vectorial*, (1991).

[4] Apostol, T. – *Calculus Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, 2ª ed., Reverte (2001).