Cálculo Integral I-2025 301-302

Johan Sebastián Posada Beltrán

February 10, 2025

1 Actividad I Introducción

Fecha de Entrega: Aula Virtual.

A continuación, encontrará una serie de actividades que sirven para reforzar, analizar y evaluar los aprendizajes mínimos para iniciar el curso de Cálculo Integral. Esta actividad se debe subir en formato pdf generado por un editor de textos científicos.

2 Repaso

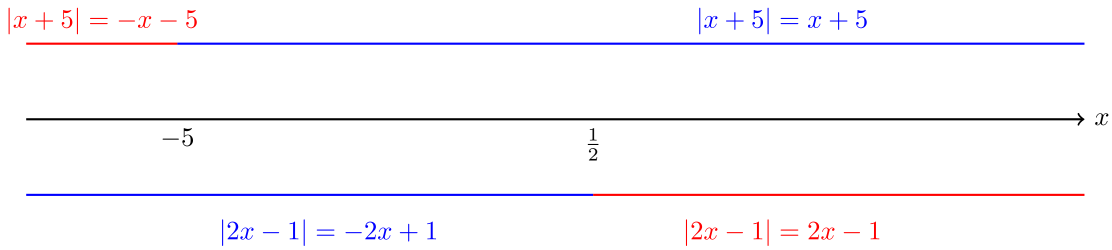
La intención de las siguientes preguntas es repasar y recordar algunos conceptos básicos que debe tener en cuenta para desarrollar esta tarea e iniciar el curso de cálculo integral.

- *Pregunta 1* ¿Qué es una función real, el dominio, el rango y la gráfica de una función real?
- *Pregunta 2* ¿Cuál es la definición de valor absoluto?
- *Pregunta 3* ¿Qué relación existe entre el concepto de límite de una sucesión o una función con el concepto de valor absoluto?
- *Pregunta 4* ¿Qué significa que exista y calcular, el límite de una función real en un punto de su dominio?
- *Pregunta 5* ¿Qué es la derivada de una función real en un punto de su dominio? Explique en sus palabras el significado de tasa de cambio instantáneo, qué es la recta tangente a la gráfica de una función en un punto de su dominio, si todas las funciones reales son diferenciables y si el concepto de derivada es global o local en el dominio.
- *Pregunta 6* ¿Cuál es la relación entre el concepto de límite y el de derivada?
- *Pregunta 7* Resolver e interpretar (es decir, traducir su significado) las siguientes ecuaciones o desigualdades (sugerencia: repasar propiedades del valor absoluto):

  $|2x-1| - |x+5| = 3$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2}, \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$
$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & x \geq -5, \\ -(x+5), & x < -5. \end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos:

Caso 1: $x < -5$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - \big[-(x+5)\big] &= 3, \\ -2x+1+x+5 &= 3, \\ -x+6 &= 3, \\ -x &= -3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Conclusión: $3 \notin (-\infty, -5)$ **(No es solución)**

Caso 2: $-5 \leq x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} -(2x-1) - (x+5) &= 3, \\ -2x+1-x-5 &= 3, \\ -3x-4 &= 3, \\ -3x &= 7, \\ x &= -\frac{7}{3} \approx -2.33. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{7}{3} \in \left[-5, \frac{1}{2}\right)$ **(Solución válida)**

Caso 3: $x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (2x-1) - (x+5) &= 3, \\ 2x-1-x-5 &= 3, \\ x-6 &= 3, \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Conclusión: $9 \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **(Solución válida)**

Solución general

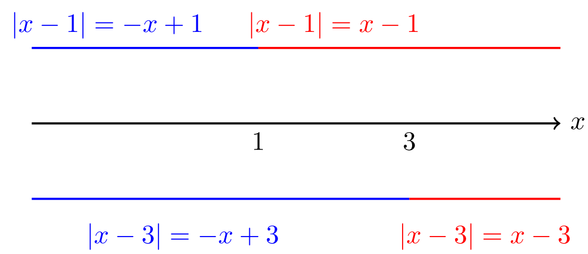
$$x = \frac{-7}{3}, 9$$

$|x-1| - |x-3| \geq 5$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -(x-1), & x < 1. \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ -(x-3), & x < 3. \end{cases}$$

Gráfica de los intervalos



Resolución por casos

Caso 1: $x < 1$

$$\begin{aligned} (-x+1) - (-x+3) &\geq 5, \\ -x+1+x-3 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)
Caso 2: $1 \leq x < 3$

$$\begin{aligned} (-x+3) - (x-1) &\geq 5, \\ -x+3-x+1 &\geq 5, \\ -2x+4 &\geq 5, \\ -2x &\geq 1, \\ x &\leq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión: $-\frac{1}{2} \notin [1,3)$ (**No hay solución**)
Caso 3: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} (x-3) - (x-1) &\geq 5, \\ x-3-x+1 &\geq 5, \\ -2 &\geq 5. \end{aligned}$$

Conclusión: Falso (**No hay solución**)

Solución general

No hay soluciones reales.

$|x^2-1| \leq \frac{1}{2}$

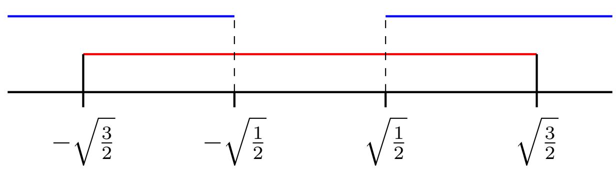
$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

Primera desigualdad

$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 1$$
$$-\frac{1}{2} + 1 \leq x^2$$
$$\frac{1}{2} \leq x^2$$
$$|x| \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Segunda desigualdad

$$x^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$
$$x^2 \leq \frac{1}{2} + 1$$
$$x^2 \leq \frac{3}{2}$$
$$|x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$



Solución:

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Pregunta 8. Evalúe los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   Caso: Diferencia de Cuadrados

   $$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

   Regla de L'Hôpital

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   Para los casos $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{2x^2-7}$
   Se divide todo por el mayor exponente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{K}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Cálculo de Derivadas

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 - 4x + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

2. $g(x) = e^x \sin x$

$$g'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$g'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

3. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
   Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

3 Problemas Rutinarios

Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 3x - 5$ en $x = 1$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(1) = 5 = m$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = 4$$

Ecuación de la recta:

$$y = 5(x-1) + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos como máximos, mínimos o puntos de silla para la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Los puntos criticos son aquellos donde la derivada vale cero

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{ó} \quad x = 1$$

$$f(3) = 2 \qquad f(1) = 6$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Conclusión	Crece	Decrece	Crece

- $P(3, 2)$ es un máximo de la función.
- $P(1, 6)$ es un mínimo de la función.

Análisis de la continuidad de la función

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 3x - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Condiciones de continuidad

i). $f(a)$ existe:

$$f(2) = 3(2) - 5 = 1 \quad \checkmark$$

ii). Verificamos si el límite lateral izquierdo y derecho son iguales:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Calculamos los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} (3x - 5) = 1$$

Dado que:

$$3 \neq 1$$

Se concluye que el límite de $f(x)$ no existe, por lo tanto, **la función no es continua en** $x = 2$.

Análisis de la función

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Puntos de corte

El punto de corte con el eje y:

$$f(0) = \frac{0}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por lo tanto, el punto de corte con el eje y es:

$$y = 0, \quad x = 0$$

Dominio

El denominador no debe ser igual a cero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

Asíntotas Verticales

x	-1.0	-1.001
$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	$-\infty$	$-\infty$

x	-0.999	0.999
$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	∞	∞

x	-10	-1001
$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	$-\infty$	$-\infty$

x	0.99	0.999
$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	-499.7	-499.9

x	1.01	1.001
$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x+1)(x-1)}$	500.2	∞

Asíntotas Horizontales

Calculamos el límite cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Por lo tanto, existe una asíntota horizontal en:

$$y = 0$$

Criterio de la Primera Derivada

La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - [x \cdot 2x]}{(x^2-1)^2}$$

Simplificamos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$-x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Dado que $\sqrt{-1}$ no pertenece a los números reales ($\mathbb{R}$), concluimos que:

$$X \text{ no es un punto crítico}; X \notin \mathbb{R}$$

Por otro lado, la condición de discontinuidad se da cuando:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

Por lo tanto, $x = \pm 1$ son puntos de discontinuidad.

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
$f'(x)$	-	-	-
Conclusión	Decrece	Decrece	Decrece

Criterio de la Segunda Derivada

La primera derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - \left[(x+1) \cdot 2(x^2-1)2x\right]}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - 4x(x^4-1)}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+2x-3)}{(x^2-1)^4}$$

Factorizamos:

$$x^4 + 2x^2 - 3$$

Sea $z = x^2$, entonces:

$$z^2 + 2z - 3 = (z+3)(z-1)$$

Sustituyendo:

$$(x^2+3)(x^2-1)$$

Por lo tanto, la segunda derivada queda:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Puntos de inflexión y cambio de concavidad

Para encontrar los puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a cero:

$$2x(x^2+3) = 0$$

Resolviendo:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Punto de inflexión}$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \text{No es punto de inflexión}$$

Ahora, analizamos los puntos donde el denominador de la segunda derivada se anula:

$$(x^2-1)^3 \neq 0$$

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Estos corresponden a **puntos de cambio de concavidad**.

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Valor de Prueba	$x=-2$	$x=-0.5$	$x=0.5$	$x=2$
$f''(x)$	-	+	-	+
Conclusión	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)

Puntos de Corte:

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

$$y = 0.33$$

$$X = \text{No Existe} \quad (1 \neq 0)$$

Dominio:

$$(x-1) \neq 0 \quad \vee \quad (x-3) \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1,3\}$$

Asíntotas Verticales:

x	0.9	0.99	$\cdots$
$\lim_{x\to 1^-}$	5	50	∞

x	1.01	1.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 1^+}$	-50	-500	$-\infty$

x	2.9	2.99	$\cdots$
$\lim_{x\to 3^-}$	-5	-50	$-\infty$

x	3.01	3.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 3^+}$	50	500	∞

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = 0$$

$$\therefore \text{ Hay una asíntota en } y = 0$$

...

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$f''(x)$	+	-	+
Conclusión	Cóncava arriba ($\cup$)	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)

Criterio de la Primera Derivada:

$$f(x) = [(x-1)(x-3)]^{-1}$$

La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = -[(x-1)(x-3)]^{-2} \cdot [(x-3) + (x-1)]$$

Simplificando:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}$$

Resolviendo $-2x + 4 = 0$:

$$x = 2 \implies f(2) = -1 \quad \text{Punto Crítico}$$

Restricciones del dominio:

$$(x-1) \neq 0 \implies x \neq 1 \quad \text{Pto. de Discontinuidad}$$

$$(x-3) \neq 0 \implies x \neq 3 \quad \text{Pto. de Discontinuidad}$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de Prueba	$x = 0$	$x = 1.5$	$x = 2.5$	$x = 4$
$f'(x)$	+	+	$-$	$-$
Conclusión	Crece	Crece	Decrece	Decrece

Criterio de la 2da Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3)^2 - [(-2x+4) \cdot 2(x^2-4x+3)(2x-4)]}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3)^2-(-2x+4)(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4x+3)\left[-2(x^2-4x+3)-(-4x+8)(2x-4)\right]}{(x^2-4x+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+3)+(4x-8)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+8x-6+8x^2-16x-16x+32}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2-24x+26}{(x^2-4x+3)^3}$$

$$6x^2-24x+26=0$$

$$3x^2-12x+13=0$$

$$\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\sqrt{144-156}$$

$$3x^2-12x+13=0$$
$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0$$

Pts. de Cambio de Concavidad

$$x=3 \quad x=1$$

Intervalos	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Valor de Prueba	$x=0$	$x=2$	$x=4$
$f''(x)$	+	-	+
Conclusión	Cóncava arriba ($\cup$)	Cóncava abajo ($\cap$)	Cóncava arriba ($\cup$)

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

Puntos de Corte:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

$$x^3+1=0$$

$$x=\sqrt[3]{-1}$$

$$x=-1$$

y no existe

Dominio:

$$x \neq 0 \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntotas Verticales:

x	-0.01	-0.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 0^-}$	9999.9	999999	∞

x	0.01	0.001	$\cdots$
$\lim_{x\to 0^+}$	10^4	10^6	∞

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty$$

Hay 2 asíntotas oblicuas.
Criterio de la Primera Derivada:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{2}{x^3} = 1 \implies x = \sqrt[3]{2}$$

$$x \approx 1.26 \quad f(\sqrt[3]{2}) \approx 1.89$$

Punto Crítico: $x \approx 1.26$

$$x^2 \neq 0 \implies x \neq 0$$

Punto de Discontinuidad: $x = 0$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
$f'(x)$	+	-	+
Conclusión	Crece	Decrece	Crece

Criterio de la Segunda Derivada:

$$f'(x) = 1 - 2x^{-3}$$

$$f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$0 \neq 6$$

No hay puntos de inflexión.

$$x^4 \neq 0 \implies x \neq 0$$

Punto de Cambio de Concavidad: $x \neq 0$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de Prueba	$x = -1$	$x = 1$
$f''(x)$	$+$	$+$
Conclusión	Cóncava hacia arriba $(\cup)$	Cóncava hacia arriba $(\cup)$

4 Lectura, Escritura y Exposición

Leer y hacer un resumen conciso de las sesiones 1.1, 1.2 y 1.3 de [4].

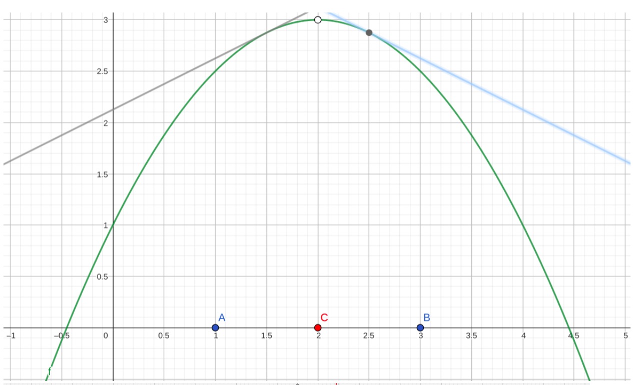
5 Problemas No Rutinarios

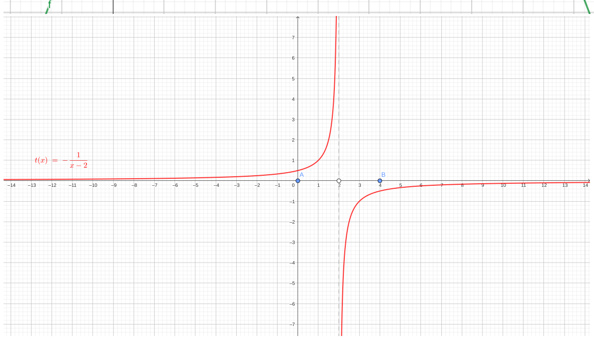
Se espera que las siguientes actividades les permitan examinar, manipular y aplicar apropiadamente los conceptos que aprendió en el curso de Cálculo Diferencial, identificando las razones y causas matemáticas para resolverlas.

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, excepto quizás en un punto $c \in [a, b]$, determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados (justifique su respuesta):

1. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y $f'(x)$ es negativa para todo $x > c$, en el punto c hay un máximo relativo de f.

2. Si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$, y $f'(x)$ es positiva para todo $x > c$, en el punto c hay un mínimo relativo de f.





6 Análisis Numérico o Computacional

1. Use el método de la bisección para encontrar una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 2$ en el intervalo $[1, 2]$ con una tolerancia de 10^{-3}.

2. Aproxime la derivada de $f(x) = e^x$ en $x = 1$ usando diferencias finitas progresivas con $h = 0.1$.

References

[1] Stewart J. – *Calculus Concepts and Contexts*, 2ª ed., Thomson (2004).

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. – *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (2021).

[3] Marsden, J.; Tromba, A. – *Cálculo Vectorial*, (1991).

[4] Apostol, T. – *Calculus Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, 2ª ed., Reverte (2001).