Ejercicios de Repaso

Johan Posada

Conceptos Básicos

1. Defina qué es una serie de potencias y proporcione tres ejemplos.

Una serie puede definirse informalmente como una suma infinita. Una serie de potencias es una suma infinita de términos con variable x, entonces se podría definir como un polinomio infinito.

Forma de una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots,$$

donde: x es la variable y los coeficientes C_n son constantes.

Ejemplos:

Serie Geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Función Exponencial: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$\operatorname{Sen}(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{Sen}(x)$

2. Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

$\boxed{n \in \mathbb{N} \Rightarrow |n| = n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Criterio del Cociente: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}} \right| \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n} \right| \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x}{(n+2)} \right| \quad |x| \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{n+1}{n+2}}^{\frac{n/n + 1/n \to 0}{n/n + 2/n \to 0} = \frac{1}{1}} \quad |x| \lim_{n\to\infty} 1 < 1 \quad |x| < 1$$

3. Encuentre los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de e^x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e$$

$$f(x) = e^x$$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$ Serie de McLaurin

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}$ Serie de Taylor con centro en $x=a$

Demostración usando Serie de McLaurin: $\boxed{C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

n	$f^{(n)}(0)$	C_n	$C_n \cdot x^n$
0	$e^0=1$	$\frac{1}{0!}$	$\frac{1}{0!}x^0$
1	$e^0=1$	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{1!}\cdot x^1$
2	$e^0=1$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{2!}\cdot x^2$
3	$e^0=1$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{3!}\cdot x^3$
4	$e^0=1$	$\frac{1}{4!}$	$\frac{1}{4!}\cdot x^4$

Serie:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

Ejercicios de Rutina

Radio y Dominio de Convergencia

1. Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Convergencia de una serie de potencias

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. La serie satisface exactamente una de las siguientes propiedades:

i. La serie converge en $x = a$ y diverge para todo $x \neq a$.
ii. La serie converge para todos los números reales x.
iii. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. En los valores x donde $|x-a| = R$, la serie puede converger o divergir.

https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/6-1-series-y-funciones-de-potencia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 x^n} = \frac{n^2 x}{(n+1)^2}$$

$a=0 \to |x|<R$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2n+1}} < 1 \qquad |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} \qquad |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{n^2/n^2+2n/n^2+1/n^2} < 1 \qquad |x|\cdot 1 < 1 \qquad |x|<1 \;;\; R=1$$

Analizando los extremos:

• $x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ Converge si $p>1 \to$ Converge en $x=1$

• $x=-1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Teorema. (Criterio de Leibniz o criterio de la serie alternante)

Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge.

https://blog.nekomath.com/calculo-diferencial-e-integral-ii-series-alternantes-y-el-criterio-de-leibniz/

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \;;\; a_n = \frac{1}{n^2}$

• Una sucesión a_n es decreciente si: $f(n) \geq f(n+1)$ $\quad \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} \to f(n)\searrow$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\to$ La Serie converge en $x=-1$

Intervalo de convergencia: $[-1,1]$

2. Determine para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, x^n} = \frac{\cancel{x^n}\cdot x \cdot \cancel{n!}}{\cancel{x^n}\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| < 1 \qquad |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{} 0 < 1 \qquad \underbrace{0<1}_{\text{verdadero}}$$

Converge para $x=(-\infty,\infty)$; $R=\infty$

3. Pruebe que la serie de Maclaurin de $\frac{1}{1-x}$ converge para $|x|<1$.

Serie Geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n = \frac{a_n}{1-r} \qquad \text{Converge: } |r|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Criterio de la Raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n} < 1 = \lim_{n\to\infty} |x| < 1 = \boxed{|x|<1}$$

Ejercicios No Rutinarios

1. Encuentre una función cuya serie de potencias asociada tenga un radio de convergencia infinito.

Anteriormente se demostró: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ y converge en $x=[-\infty,\infty] \to R=\infty$

2. Analice el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{\overset{\text{Par}}{2n}} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ Converge si $p > 1$; en este caso $p = 1$

En $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Diverge ; $p = 1$

En $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = f(n)$

Criterio de Leibniz:
- $f(n) \geq f(n+1)$ $\qquad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ ✓
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Converge

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \; ; \; a_n = \frac{1}{n}$$

Intervalo de convergencia: $x = (-1, 1]$

Ejercicios de Aplicación en Ingeniería

1. En mecánica cuántica, las soluciones de la ecuación de Schrödinger pueden expresarse en términos de series de potencias. Describa cómo se aplica este concepto.

En mecánica cuántica, las soluciones de la ecuación de Schrödinger a veces no se pueden obtener con funciones conocidas. Por eso, se busca una solución como una serie de potencias, del tipo:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Esto permite resolver ecuaciones difíciles de manera aproximada o construir soluciones paso a paso. Además, al usar series de potencias, se pueden encontrar condiciones que deben cumplir los coeficientes para que la solución tenga sentido físico (por ejemplo, que no se haga infinita).

2. En circuitos eléctricos, la función de respuesta de un filtro puede aproximarse por una serie de potencias. Explique un caso práctico.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 - (-j\omega RC)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-j\omega RC)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (j\omega RC)^n$$

Análisis Numérico usando Python

1. Escriba un código en Python para calcular la suma parcial de la serie $\sum_{n=0}^{50} \frac{x^n}{n!}$ para diferentes valores de x.

2. Compare la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{50} \frac{x^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{50} \frac{x^n}{n^2}$ mediante programación en Python.

```python
import math
def serie_exponencial(x):
    suma_parcial = 0
    for n in range(0, 50 + 1):
        suma_parcial += (x**n)/(math.factorial(n))
    return suma_parcial

x = float(input("Inserte el valor de x para e^x: "))

suma_parcial = serie_exponencial(x)
exponencial_math = math.exp(x)

print(f"\nAproximación con series de potencias para e^{x}:\n Suma parcial: {suma_parcial}\n Valor real con math.exp(): {exponencial_math}")
```

✓ 2.8s Python

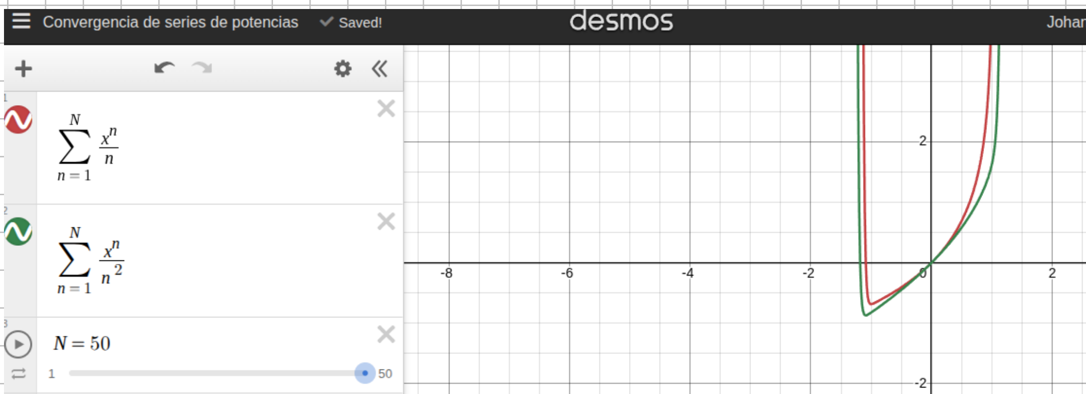
```
Aproximación con series de potencias para e^20.0:
 Suma parcial: 485165193.0670548
 Valor real con math.exp(): 485165195.4097903
```

```python
def serie_1(x):
    suma_parcial = 0
    for n in range(1, 50 + 1):
        suma_parcial += (x**n)/(n)
    return suma_parcial

def serie_2(x):
    suma_parcial = 0
    for n in range(1, 50 + 1):
        suma_parcial += (x**n)/(n**2)
    return suma_parcial

x = float(input("Inserte el valor de x: "))

primera_serie = serie_1(x)
segunda_serie = serie_2(x)

print(f"\nAproximación con series de potencias para x = {x}:\n Serie 1: {primera_serie}\n Serie 2: {segunda_serie}")
```

✓ 2.4s

```
Aproximación con series de potencias para x = 20.0:
 Serie 1: 2.3728671843270553e+63
 Serie 2: 4.750953408603895e+61
```

https://github.com/johanP051/series-de-potencias



https://www.desmos.com/calculator/0uvlfrnfyh