Cálculo Integral I-2025 301-302

Johan Sebastián Posada Beltrán

March 8, 2025

1 Repositorio

En el siguiente enlace se encuentra el repositorio de GitHub con el código LATEXy Python que se usó para realizar la tarea:

2 Repaso

1. Defina la integral definida y explique su interpretacion geométrica

   La integral definida se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Donde $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, que se divide en n subintervalos de igual longitud Δx, y x_i^* es el punto medio entre x_{i-1} y x_i. La integral significa el área bajo la curva de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Cuando n tiende a infinito, la suma de Riemann se convierte en el área exacta bajo la curva, ya que los rectángulos se hacen más pequeños y se ajustan mejor a la gráfica de la función.

2. Calcule la suma de Riemann izquierda para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ con $n = 4$.

$$\Delta x = \frac{1}{4}$$

$$x_i = a + i\,\Delta x = 0 + i \cdot \frac{1}{4}$$

$$x_i = \frac{i}{4}$$

$$f(x_i) = \left(\frac{i}{4}\right)^2 = \frac{i^2}{16}$$

   Si la sumatoria es por la izquierda, entonces i empieza en 0 y termina en $n - 1$.

   Si es por la derecha, entonces empieza en $i = 1$ y termina en n.

$$k\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{16} i^2$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{3} i^2 = \frac{12 \cdot 7}{6} = 14$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{3} i^2 = \frac{1}{61} \cdot 14 = \frac{7}{32}$$

Comprobación sin fórmula de Gauss:

$$k(f(0k) + f(1k) + f(2k) + f(3k))$$

$$k[0^2 + k^2 + (2k)^2 + (3k)^2]$$

$$k[k^2 + 4k^2 + 9k^2]$$

$$k[14k^2] = 14k^3$$

$$= 14 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

3. Explique la diferencia entre una integral definida y una antiderivada

La integral definida da como resultado un número correspondiente al área bajo la curva o función, La antiderivada podría considerarse el proceso contrario a la derivada, ya que la antiderivada de una función derivada da como resultado la función original sin derivar, más una constante K, en otras palabras, la antiderivada encuentra la función que modela el área bajo la curva, por ejemplo, la integral de la velocidad en función del tiempo es la distancia, ya que la primera función es la derivada de la segunda.

3 Ejercicios de Rutina

Sumas de Riemann

1. Calcule la suma de Riemann derecha para $f(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$ con $n = 6$.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$a = 0, \quad b = \pi$$

$$k = \frac{b-a}{n}$$

$$k = \frac{\pi}{6}$$

$$x_i = a + ki$$

$$x_i = \frac{\pi}{6} i$$

$$f(x_i) = \sin\left(\frac{\pi}{6} i\right)$$

Suma de Riemann por derecha:

$$k \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{6} i\right)$$

$$\frac{\pi}{6}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 5\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\right]$$

$$\frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right]$$

$$\frac{\pi}{6}\left[1 + \sqrt{3}\right]$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi(1+\sqrt{3})}{6} \approx 1.954u^2$$

2. Use una partición regular con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_0^2 (3x+1)\,dx$ con sumas de Riemann.

a = 0 b = 2

$$f(x) = 3x + 1$$

$$k = \frac{2}{5}$$

$$x_i = a + ki$$

$$x_i = \frac{2}{5} i$$

$$f(x_i) = 3\left(\frac{2}{5} i\right) + 1$$

$$f(x_i) = \frac{6}{5}i + 1$$

Suma de Riemann por derecha:

$$k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6}{5}i+1\right) = k\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{5}i + \sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= k\left[\frac{6}{5}\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= k\left[\frac{6}{5}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$k\left[\frac{3}{5}\cdot n(n+1) + n\right]$$

$$\frac{2}{5}\left[\frac{3}{5}\cdot 5(5+1) + 5\right]$$

$$\frac{2}{5}\left(3\cdot 6 + 5\right)$$

$$A = \frac{2}{5}(18+5) = \frac{23\cdot 2}{5} = \frac{46}{5} = 9.2u^2$$

4 Ejercicios No Rutinarios

1. Diseñe un algoritmo para calcular la integral definida utilizando sumas de Riemann en Python.
2. ¿Para qué funciones la suma de Riemann da una aproximación exavata de la integral? Justifique su respuesta.

La suma de Riemman da una aproximacimación exacta de la integral para las funciones constantes con n arbitrario, es decir si divido a dicho tipo de función en 1 o n intervalos de rectángulos, el area va a ser la misma, puesto que debajo de una linea recta puedo dibujar rectángulos perfectos.

Si tomo otro tipo de función y la divido en n intervalos, entonces puedo hallar el limite cuando n tiende a infitito y esto me va a dar una aproximación exacta de la integral, pues los rectángulos dibujados debajo de la curva son muy pequeños y esto le da exactitud, pues cuando n no es lo suficientemente grande, existen rectángulos que quedan o muy por encima (aproximacimación por derecha) o muy por debajo de la curva (aproximacimación por izquierda).

5 Ejercicios de aplicacion en ingeniería

1. Un sensor mide la velocidad de un vehículo cada 5 segundos. Aproximar la distancia recorrida con sumas de Riemann.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = V(t) = v_0 + at$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = a$$

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \ldots \quad t_f$$

$$V(t_0) \quad V(t_1) \quad V(t_2) \quad V(t_3) \quad \ldots \quad V(t_f)$$

$$K = 5 \quad V(t_i) = v_0 + at_i$$

$$t_i = a + ki = 5i$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(t)\, dt = x(t) = \lim_{n\to\infty} k \sum_{i=1}^{n} V(t_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5 \sum_{i=1}^{n} (v_0 + at_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[5v_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 5a \sum_{i=1}^{n} 5i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[5nv_0 + 25a \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[5nv_0 + 25a \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \infty + \infty = \infty$$

Conclusión: La distancia recorrida por el carro tiende al infinito, pues si el sensor toma la velocidad cada 5 segundos durante un tiempo indefinido, entonces las distancias se suman y cada vez se hacen más grandes.

2. En un sistema de enfriamiento, la temperatura varía con el tiempo según $T(t) = e^{-t}$. Calcule la cantidad total de calor disipado en 10 segundos usando el método del trapecio.

$$\int_0^{10} e^{-t}\, dt$$

$$f(t) = e^{-t}$$

Método del trapecio:

$$\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right) \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$\frac{k}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$\frac{k}{2}f(x_0)+k\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{k}{2}f(x_n)$$

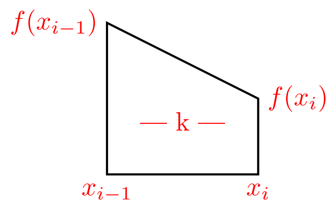


Figure 1: Área del trapecio

$$A=\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}k$$

Solución:

$$k=\frac{b-a}{n}$$

Cuando n = 20

$$k=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$t_i=a+ki$$

$$t_i=\frac{1}{2}i$$

$$f(t_i)=f(x_i)=e^{-\left(\frac{1}{2}i\right)}$$

Área con trapecios = A

$$A=\frac{k}{2}f(x_0)+k\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{k}{2}f(x_n)$$

$$A=\frac{k}{2}e^{-\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right)}+k\sum_{i=1}^{19}e^{-\left(\frac{1}{2}i\right)}+\frac{k}{2}e^{-\left(\frac{1}{2}\cdot 20\right)}$$

Propiedad: $x^{b\cdot c}=(x^b)^c$

$$A = \frac{k}{2} \cdot 1 + k \sum_{i=1}^{19} \left(e^{-\frac{1}{2}i} \right) + \frac{k}{2} e^{-10}$$

Propiedad:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si $i = j \Rightarrow$ y $j > 1$

$$\sum_{i=j}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{j-1} x^i$$

$$\sum_{i=j}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1 - x^j}{1 - x}$$

Dado que j-1+1 = j = i, entonces:

$$\sum_{i=j}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1 - x^i}{1 - x} \tag{1}$$

$$\text{Si } \left(e^{\frac{1}{2}} \right) = x \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^i = x^i$$

$$\sum_{i=1}^{19} \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^i = \frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^{20}}{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)}$$

$$\sum_{i=1}^{19} \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^i = \frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^{20}}{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)} - 1$$

$$A = \frac{k}{2} \cdot 1 + k \sum_{i=1}^{19} \left(e^{-\frac{1}{2}i} \right) + \frac{k}{2} e^{-10}$$

$$A = \frac{k}{2} + k \cdot \frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^{20}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} - 1 + \frac{k}{2} e^{-10}$$

$$A = k \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^{20}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{2} e^{-10} \right]$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^{20}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{2} e^{-10} \right]$$

$$A = 1.020700699 u^2 \quad \text{para } n = 20$$

6 Análisis Numérico usando Python

1. Escriba un código en Python que aproxime $\int_0^1 e^x dx$ usando el método del trapecio con $n = 10$.
2. Compare la precisión del método del trapecio y el método de Simpson para $\int_0^\pi \sin x dx$.
3. Encuentre la integral definida de x^3 en $[1, 2]$.
4. Estime el área bajo la curva $y = \cos x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ con el método de Simpson.

7 Ejercicios del libro

Ejercicio 11

Use la Regla del Punto Medio con el valor dado de n para aproximar la integral. Redondee cada respuesta a cuatro decimales.

$$9. \quad \int_0^{10} \sin\sqrt{x}\, dx, \quad n = 5$$

$$x_i = a + \Delta x \cdot i$$

$$x_{i-1} = a + \Delta x(i - 1)$$

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$x_i^* = \frac{a + \Delta x \cdot i + a + \Delta x(i - 1)}{2}$$

$$x_i^* = \frac{2a + (2i - 1)\Delta x}{2}$$

$$x_i^* = a + \frac{2i - 1}{2}\Delta x$$

$$x_i^* = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_i^* = \left(i - \frac{1}{2}\right)2 = 2i - 1$$

$$f(x_i^*) = \sin\sqrt{2i - 1}$$

$$A = k\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

$$A = 2\sum_{i=1}^{10} \sin\sqrt{2i-1}$$

$$A = 2\left[\sin\sqrt{1} + \sin\sqrt{3} + \sin\sqrt{5} + \sin\sqrt{7} + \sin\sqrt{9}\right]$$

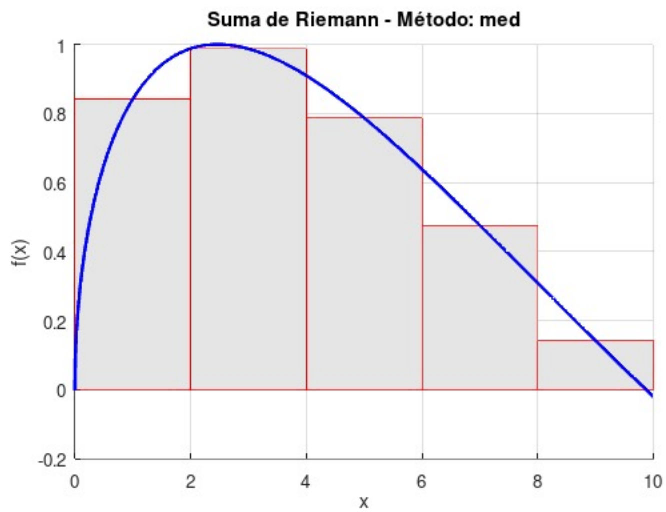
$$A = 6.4643\, u^2$$

Ejercicio 13

Si tiene un sistema algebraico computacional (CAS) que evalúa aproximaciones por punto medio y grafica los rectángulos correspondientes (use los comandos `middlesum` y `middlebox` en Maple), verifique la respuesta del Ejercicio 11 e ilustre con un gráfico. Luego, repita con $n = 20$ y $n = 30$.

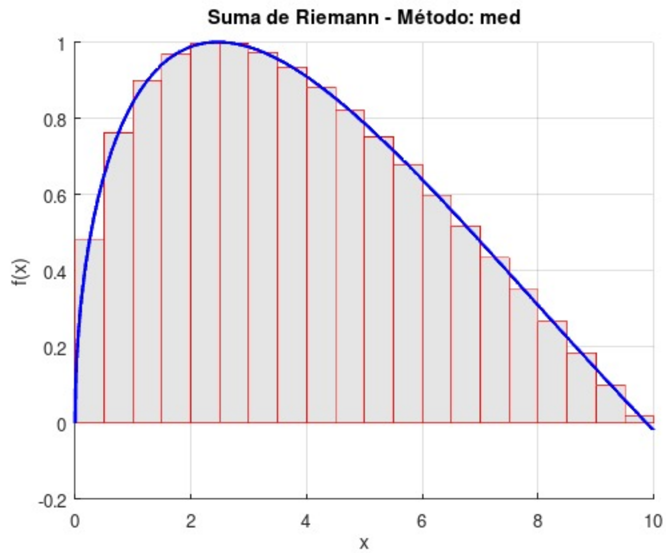
Usando MATLAB, se obtienen las siguientes gráficas:

$$\text{Para } n = 5; \quad f(x) = \sin(\sqrt{x})$$



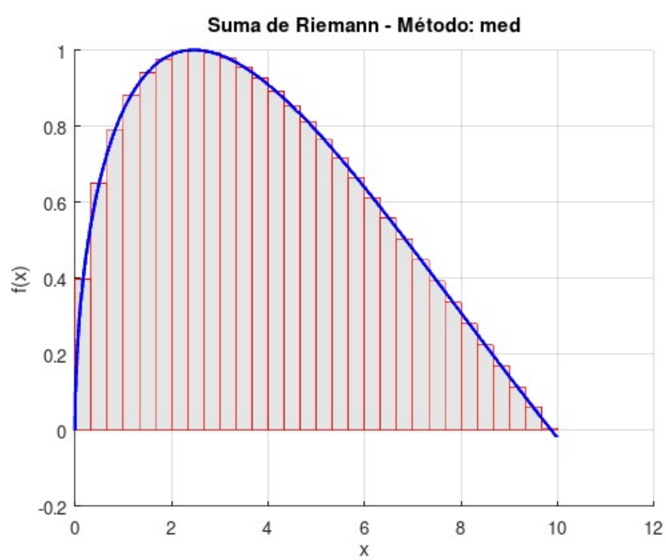
Aproximación de la integral (med): 6.464277

$$\text{Para } n = 20; \quad f(x) = \sin(\sqrt{x})$$



Aproximación de la integral (med): 6.304519

Para $n = 30$; $\quad f(x) = \sin(\sqrt{x})$



Aproximación de la integral (med): 6.294108

Puede acceder al script de MATLAB en el siguiente enlace: ...

Ejercicio 17

Expresar el límite como una integral definida en el intervalo dado.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i \sin x_i \Delta x, \quad [0,\pi]$$

$$= \int_0^{\pi} (x \sin x)\, dx$$

Usando integración por partes:

$$\int x \sin x \, dx$$

$$\text{Sea } u = x, \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = dx, \quad v = -\cos x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

Evaluamos en los límites de integración:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi}$$

$$= (-\pi \cos \pi + \sin \pi) - (-0 \cos 0 + \sin 0)$$

$$= (-\pi(-1) + 0) - (0 + 0)$$

$$= \pi$$

Ejercicio 19

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[2(x_i^*)^2 - 5x_i^*\right] \Delta x, \quad [0,1]$$

$$= \int_0^{1} (5x^2 - 5x)\, dx$$

$$= \int_0^{1} 5x(x-1)\, dx$$

Ejercicio 21

$$\int_{-1}^{5} (1+3x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{5} dx + \int_{-1}^{5} 3x\,dx$$

$$= [x]_{-1}^{5} + \left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{5}$$

$$= (5-(-1)) + \frac{3}{2}\left(5^2-(-1)^2\right)$$

$$= 6 + \frac{3}{2}\cdot 24$$

$$= 6 + 36$$

$$= 42$$

Ejercicio 23

$$\int_{0}^{2} (2-x^2)\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$

$$= 2(2) - \frac{1}{3}(2^3)$$

$$= 4 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Ejercicio 25

$$\int_{1}^{2} x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[2^4 - 1^4\right]$$

$$= \frac{1}{4}[16-1]$$

$$= \frac{15}{4}$$

Ejercicio 27

$$\int_0^{\pi} \sin 5x \, dx$$

$$x_i = \frac{\pi}{n} i$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{5\pi}{n} i\right)$$

Resolviendo la integral:

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$$

Por lo que:

$$\int -a \sin(ax) \, dx = a \int -\sin(ax) \, dx$$

$$= a \frac{\cos(ax)}{a}$$

$$= \cos(ax)$$

Aplicamos esta propiedad a la integral dada:

$$\int_0^{\pi} \sin(5x) \, dx = \left[\frac{-\cos(5x)}{5}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\cos(5\pi)}{5} - \frac{-\cos(0)}{5}$$

$$= \frac{-(-1)}{5} - \frac{-1}{5}$$

$$= \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0.2$$

Ejercicio 29

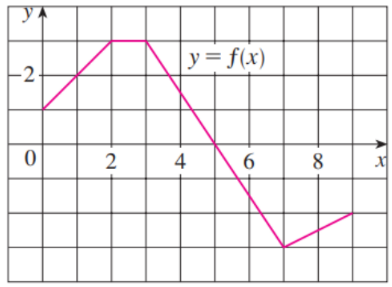
Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

(a) $\int_0^2 f(x) \, dx$

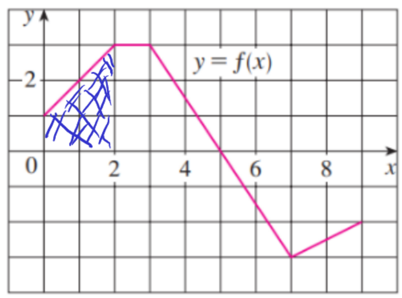
(b) $\int_0^5 f(x) \, dx$

(c) $\int_5^7 f(x) \, dx$

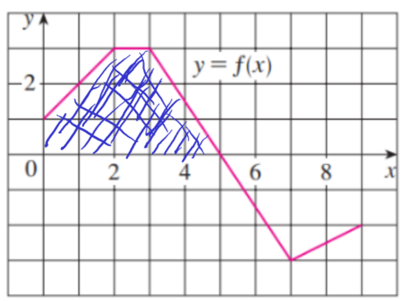
(d) $\int_0^9 f(x) \, dx$



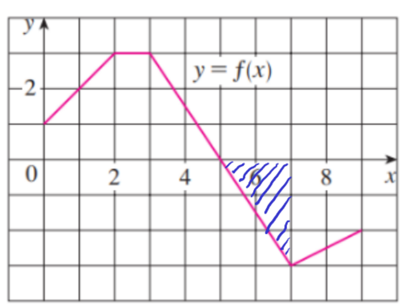
(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3+1}{2}\cdot 2 = 4$



(b) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx \; + \; \int_2^5 f(x)\,dx = 4 \; + \; \frac{3+1}{2}\cdot 3 = 10$



(c) $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,dx = \frac{2(-3)}{2} - 3$

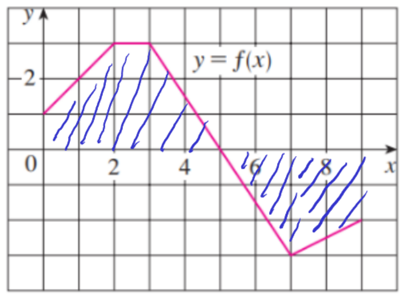


(d) $$\int_0^9 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx + \int_7^9 f(x)\,dx$$

$$= 10 - 3 - \frac{3+2}{2} \cdot 2$$

$$= 10 - 3 - 5$$

$$= 2$$



31. $$\int_1^3 (1+2x)\,dx$$

$$= \int_1^3 1\,dx + \int_1^3 2x\,dx$$

$$= [x]_1^3 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= (3-1) + \left(3^2 - 1^2\right)$$

$$= 2 + 8$$

$$= 10$$

8 Ejercicios de clase

Demostraciones usando diferencias finitas

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sea a_n un polinomio, si la K-ésima diferencia finita de a_n, $\Delta^K a_n$, es constante, entonces a_n es un polinomio de grado K.

- Primera diferencia finita de a_n:

$$\Delta a_n$$

- Segunda diferencia finita de a_n:
$$\Delta(\Delta a_n) = \Delta^2 a_n$$
- Tercera diferencia finita de a_n:
$$\Delta(\Delta^2 a_n) = \Delta^3 a_n$$
- K-ésima diferencia finita de a_n:
$$\Delta(\Delta^{K-1} a_n) = \Delta^K a_n$$

n	0	1	2	3	4
$a_n = \sum_{i=0}^{n} i$	0	1	3	6	10
Δa_n	$1-0=1$	$3-1=2$	$6-3=3$	$10-6=4$	$15-10=5$
$\Delta^2 a_n$	$2-1=1$	$3-2=1$	$4-3=1$	$5-4=1$	

Table 1: Diferencias finitas de a_n

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$\Delta^2 a_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Como $\Delta^2 a_n$ es constante, entonces $\sum_{j=2}^{n} j$ es un polinomio de grado 2.

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i = an^2 + bn + c$$

Si $n = 0$:

$$a_0 = \sum_{i=0}^{0} i = 0$$

$$a_0 = a(0) + b(0) + c = 0$$

$$c = 0$$

Si $n = 1$:

$$a_1 = 1$$

$$a_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 0 = 1$$

$$a + b = 1$$

Si $n = 2$:

$$a_2 = 3$$

$$a_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 0 = 3$$

$$4a + 2b = 3$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \quad (1) \\ 4a + 2b = 3 \quad (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1):

$$a = 1 - b$$

De la ecuación (2):

$$a = \frac{3 - 2b}{4} = \frac{3}{4} - \frac{b}{2}$$

Igualando ambas expresiones para a:

$$1 - b = \frac{3}{4} - \frac{b}{2}$$

$$1 - \frac{3}{4} = b - \frac{b}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{b}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Usando la ecuación **(1)** $\quad a + b = 1 \quad$ y $\quad b = \frac{1}{2}$

$a = 1 - \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$$a_n = an^2 + bn + c; \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 0$$

Cálculo de la sumatoria:

$$\sum_{i=0}^{n} i = a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Factorizando:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2 + n}{2}$$

Expresión final:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Demostración suma de los primeros enteros cuadrados

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

n	0	1	2	3	4
$a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$	0	1	5	14	30
Δa_n	1	4	9	16	25
$\Delta^2 a_n$	3	5	7	9	
$\Delta^3 a_n$	2	2	2		

Table 2: Diferencias finitas de la suma de cuadrados

$$\Delta^3 a_n = 2 \Rightarrow \Delta^3 a_n \text{ es constante}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Determinación de coeficientes

Caso $n = 0$

$$a_0 = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$$

$$a_0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0$$

Caso $n = 1$

$$a_1 = \sum_{i=0}^{1} i^2 = 1$$

$$a_1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1$$

$$a + b + c = 1$$

Caso $n = 2$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 = 5$$

$$a_2 = 8a + 4b + 2c = 5$$

Caso $n = 3$

$$a_3 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 14$$

$$a_3 = 27a + 9b + 3c = 14$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 8 & 4 & 2 & |5 \\ 27 & 9 & 3 & |14 \end{pmatrix}$$

$$8F_1 - F_2 \to F_2$$

$$27F_1 - F_3 \to F_3$$

Reducción de la matriz

$$\frac{1}{18}F_3 - \frac{1}{4}F_2 \to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 4 & 6 & |3 \\ 0 & 18 & 24 & |13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 4 & 6 & |3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & |-\frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$a + b + c = 1$$

$$4b + 6c = 3$$

$$-\frac{1}{6}c = -\frac{1}{36}$$

$$c = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{3 - 6c}{4}$$

$$b = \frac{3 - 1}{4}$$

$$b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a = 1 - b - c$$

$$a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn$$

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$a_n = \frac{2}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$a_n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$a_n = \frac{n\left((n+1)(2n+1)\right)}{6}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

References

[1] Stewart J. – *Calculus Concepts and Contexts*, 2ª ed., Thomson (2004).

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. – *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (2021).

[3] Marsden, J.; Tromba, A. – *Cálculo Vectorial*, (1991).

[4] Apostol, T. – *Calculus Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, 2ª ed., Reverte (2001).