1. Defina la integral definida y explique su interpretación geométrica.

2. Calcule la suma de Riemann izquierda para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ con $n = 4$.

$f(x) = x^2$

$K = \frac{1}{4}$

$x_i = a + iK$

$x_i = \frac{1}{4} i$

$f(x_i) = K^2 i^2 \qquad f(x_i) = \frac{1}{16} i^2$

Si la Sumatoria es por izquierda, entonces i empieza en 0 y termina en n-1

Si es por derecha, entonces empieza en i=1 y termina en n

$$K \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{16} i^2$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{3} i^2 = \frac{12 \cdot 7}{6} = 14$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{3} i^2 = \frac{1}{64} \cdot 14 = \boxed{\frac{7}{32}}$$

Comprobacion sin formula de Gauss:

$K(f(0K) + f(K) + f(2K) + f(3K)) \qquad K = \frac{1}{4}$

$K[0^2 + K^2 + (2K)^2 + (3K)^2]$

$K[K^2 + 4K^2 + 9K^2]$

$K[14K^2] = 14K^3 = 14 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{14}{64} = \boxed{\frac{7}{32}}$

3. Explique la diferencia entre una integral definida y una antiderivada.

La integral definida da como resultado un número correspondiente al área bajo la curva o función,
La antiderivada podría considerarse el proceso contrario a la derivada, ya que la antiderivada de una función derivada da como resultado la función original sin derivar, más una constante K, en otras palabras, la antiderivada encuentra la función que modela el área bajo la curva, por ejemplo, la integral de la velocidad en función del tiempo es la distancia, ya que la primera función es la derivada de la segunda.

Ejercicios de Rutina

Sumas de Riemann

1. Calcule la suma de Riemann derecha para $f(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$ con $n = 6$.

$f(x) = \text{Sen}(x)$

$a = 0 \quad b = \pi$

$K = \frac{b-a}{n}$

$K = \frac{\pi}{6}$

$x_i = a + Ki$

$x_i = \frac{\pi}{6} i$

$f(x_i) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6} i\right)$

Suma de Riemann por derecha:

$$K \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\frac{\pi}{6} \sum_{i=1}^{n} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6} i\right)$$

$$\frac{\pi}{6}\left[\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 1\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 5\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\right]$$

$$\frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right]$$

$$\frac{\pi}{6}\left[1 + 1 + \sqrt{3}\right]$$

$$\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$$\frac{(2+\sqrt{3})\pi}{6} \approx \boxed{1.9541 u^2}$$

2. Use una partición regular con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_0^2 (3x+1)dx$ con sumas de Riemann.

$a=0 \quad b=2$

$f(x) = 3x+1$

$K = \frac{2}{5}$

$X_i = a + iK$

$X_i = \frac{2}{5} i$

$f(X_i) = 3\left(\frac{2}{5}\right) i + 1$

$f(X_i) = \frac{6}{5} i + 1$

Suma de Riemann por derecha:

$K \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$

$$K \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{5} i + 1 = K\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{5} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] = K\left[\frac{6}{5} \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] = K\left[\frac{6}{5} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$K\left[\frac{3}{5} \cdot n(n+1) + n\right]$$

$$\frac{2}{5}\left[\frac{3}{5} \cdot 5(5+1) + 5\right]$$

$$\frac{2}{5}(3 \cdot 6 + 5)$$

$$A = \frac{2}{5}(18+5) = \frac{23 \cdot 2}{5} = \frac{46}{5} = \boxed{9.2u^2}$$

Ejercicios No Rutinarios

1. Diseñe un algoritmo para calcular la integral definida utilizando sumas de Riemann en Python.

link:

2. ¿Para qué funciones la suma de Riemann da una aproximación exacta de la integral? Justifique su respuesta.

La suma de Riemman da una aproximacimación exacta de la integral para las funciones constantes con n arbitrario, es decir si divido a dicho tipo de función en 1 o n intervalos de rectángulos, el area va a ser la misma, puesto que debajo de una linea recta puedo dibujar rectángulos perfectos. Si tomo otro tipo de función y la divido en n intervalo, entonces puedo hallar el limite cuando n tiende a infitito y esto me va a dar una aproximación exacta de la integral, pues los rectángulos dibujados debajo de la curva son muy pequeños y esto le da exactitud, pues cuando n no es lo suficientemente grande, existen rectángulos que quedan o muy por encima o muy por debajo de la curva.

Ejercicios de Aplicación en Ingeniería

1. Un sensor mide la velocidad de un vehículo cada 5 segundos. Aproximar la distancia recorrida con sumas de Riemann.

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{v(t) = v_0 + at}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \boxed{a}$$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad t_f$

$v(t_0) \quad v(t_1) \quad v(t_2) \quad v(t_3) \quad \dots \quad v(t_f)$

$K = 5 \qquad v(t_i) = v_0 + a t_i$

$t_i = a + K_i = 5_i$

$$\int_{t_0}^{t_f} v(t) \cdot dt = x(t) = \lim_{n \to \infty} K \sum_{i=1}^{n} v(t_i)$$

$$= \lim_{n \to \infty} 5 \sum_{i=1}^{n} v_0 + a t_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[5 v_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 5a \sum_{i=1}^{n} 5_i \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[5 n v_0 + 25 a \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[5 n v_0 + 25 a \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \infty + \infty = \infty$$

Conclusión: La distancia recorrida por el carro tiende al infinito, pues si el sensor toma la velocidad cada 5 segundos durante un tiempo indefinido, entonces las distancias se suman y cada vez se hacen más grandes.

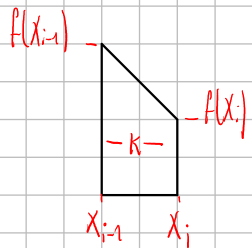
2. En un sistema de enfriamiento, la temperatura varía con el tiempo según $T(t) = e^{-t}$. Calcule la cantidad total de calor disipado en 10 segundos usando el método del trapecio.

$$\int_0^{10} e^{-t}\, dt$$

$$f(t) = e^{-t}$$

Método del trapecio:

$$\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + f(x_i) \quad ; n \text{ es par}$$



$$A = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} k$$

$$\frac{k}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\frac{k}{2} f(x_0) + k\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{k}{2} f(x_n)$$

$$k = \frac{b-a}{n}$$

Cuando $n = 20$

$$k = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$t_i = a + k_i$$

$$t_i = \frac{1}{2} i$$

$$f(t_i) = f(x_i) = e^{-\left(\frac{1}{2} i\right)}$$

Area con trapecios $= A$

$$A = \frac{k}{2} f(x_0) + k \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{k}{2} f(x_n)$$

$$A = \frac{k}{2} e^{-\left(\frac{1}{2} \cdot 0\right)} + k \sum_{i=1}^{19} e^{-\left(\frac{1}{2} i\right)} + \frac{k}{2} e^{-\left(\frac{1}{2} \cdot 20\right)}$$

Propiedad: $x^{b \cdot c} = (x^b)^c$

$$A = \frac{k}{2} \cdot 1 + k \sum_{i=1}^{19} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^i + \frac{k}{2} e^{-10}$$

Propiedad: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

Si $i = j \rightarrow \sum_{i=j}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{j-1} x^i$

$$\rightarrow \sum_{i=j}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1 - x^{(j-1)+1}}{1-x}$$

$$j - 1 + 1 = j = i$$

$$\rightarrow \sum_{i=j}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1 - x^i}{1-x} \quad (1)$$

Si: $(e^{-\frac{1}{2}}) = x \to (e^{-\frac{1}{2}})^i = x^i$

$$\sum_{i=1}^{19} (e^{-\frac{1}{2}})^i = \frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{20}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})} - \frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{1}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})}$$

$$\sum_{i=1}^{19} (e^{-\frac{1}{2}})^i = \frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{20}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})} - 1$$

$$A = \frac{K}{2}\cdot 1 + K\sum_{i=1}^{19}(e^{-\frac{1}{2}})^i + \frac{K}{2}e^{-10}$$

$$A = \frac{K}{2} + K\cdot \frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{20}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})} - 1 + \frac{K}{2}e^{-10}$$

$$A = K\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{20}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})} - 1\right) + \frac{1}{2}e^{-10}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^{20}}{1-(e^{-\frac{1}{2}})} - 1\right) + \frac{1}{2}e^{-10}\right]$$

$\boxed{A = 1.020700699 u^2}$; Para $n = 20$

Ejercicios de clase

Libro:

9–12 ■ Use the Midpoint Rule with the given value of n to approximate the integral. Round each answer to four decimal places.

9. $\int_0^{10} \sin\sqrt{x}\,dx, \quad n = 5$

$$x_i = a+\Delta x i$$

$$x_{i-1} = a+\Delta x(i-1)$$

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$x_i^* = \frac{a+\Delta x i + a + \Delta x(i-1)}{2}$$

$$x_i^* = \frac{2a+(2i-1)\Delta x}{2}$$

$$x_i^* = a+\frac{2i-1}{2}\Delta x$$

$$x_i^* = a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_i^* = \left(i-\frac{1}{2}\right)2 = 2i-1$$

$$f(x_i^*) = \operatorname{Sen}\sqrt{2i-1}$$

$$A = K\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

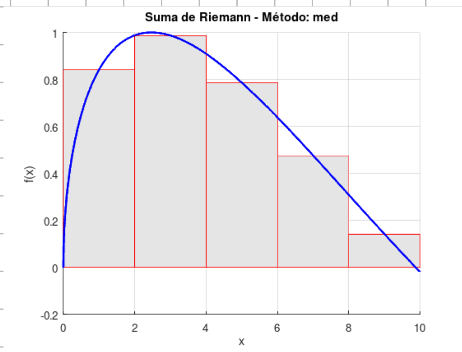
$$A = 2\sum_{i=1}^{10} \operatorname{Sen}\sqrt{2i-1}$$

$$A = 2\left[\operatorname{Sen}\sqrt{1}+\operatorname{Sen}\sqrt{3}+\operatorname{Sen}\sqrt{5}+\operatorname{Sen}\sqrt{7}+\operatorname{Sen}\sqrt{9}\right]$$

$$\boxed{A = 6.4643\, u^2}$$

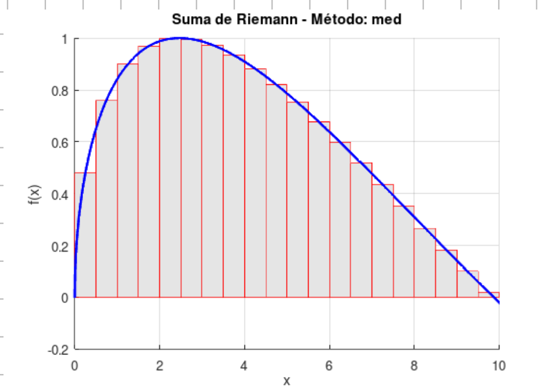
13. If you have a CAS that evaluates midpoint approximations and graphs the corresponding rectangles (use middlesum and middlebox commands in Maple), check the answer to Exercise 11 and illustrate with a graph. Then repeat with $n = 20$ and $n = 30$.

Para n = 5; f(x) = sin(sqrt(x))



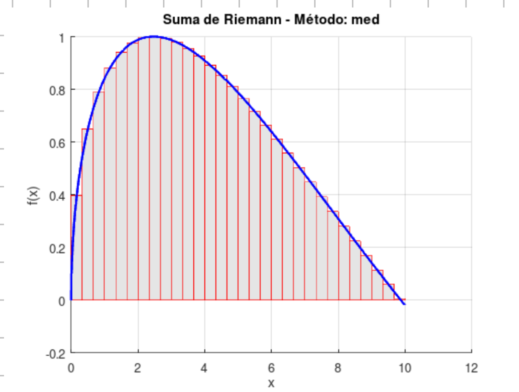
Aproximación de la integral (med): 6.464277

Para n = 20; f(x) = sin(sqrt(x))



Aproximación de la integral (med): 6.304519

Para n = 30; f(x) = sin(sqrt(x))



Aproximación de la integral (med): 6.294108

17–20 ■ Express the limit as a definite integral on the given interval.

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = x \quad du = dx$

$v = \operatorname{sen} x \quad dv = -\cos x$

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \sin x_i \,\Delta x, \quad [0, \pi]$

$$= \int_0^{\pi} (x \operatorname{sen} x)\,dx$$

$$-x\cos x = -\int (\operatorname{sen} x \cdot x)\,dx$$

$$x\cos x = \int (x \operatorname{sen} x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} (x \operatorname{sen} x)\,dx = x\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= \pi \cdot \cos \pi$$

$$\boxed{= \pi}$$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [2(x_i^*)^2 - 5x_i^*]\,\Delta x, \quad [0, 1]$

$$\int_0^1 (5x^2 - 5x)\,dx = \int_0^1 5x(x-1)\,dx$$

21–25 ■ Use the form of the definition of the integral given in Equation 3 to evaluate the integral.

21. $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{5} dx + \int_{-1}^{5} 3x\,dx$$

$$= x\Big|_{-1}^{5} + \frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{5}$$

$$= (5+1) + \frac{3}{2}(5^2 - (-1)^2)$$

$$= 6 + \frac{3}{2}\cdot 24$$

$$= 6 + 36$$

$$= 42$$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$

$$= 2(2) - \frac{1}{3}(2^3) = 4 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

$$= \frac{1}{4}\left[2^4 - 1^4\right]$$

$$= \frac{15}{4}$$

CAS **27–28** ■ Express the integral as a limit of sums. Then evaluate, using a computer algebra system to find both the sum and the limit.

27. $\int_0^{\pi} \sin 5x\, dx$ $\qquad x_i = \frac{\pi}{n} i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sen}\left(\frac{5\pi}{n} i\right)$$

Si $\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\operatorname{sen}(ax)$

$$\Rightarrow \int -a\operatorname{sen}(ax)\,dx = a\int -\operatorname{Sen}(ax)\,dx$$

$$= a\frac{\cos(ax)}{a}$$

$$= \cos(ax)$$

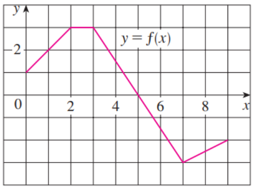
$$\int_0^{\pi} \operatorname{Sen}(5x)\,dx = \left.\frac{-\cos(5x)}{5}\right|_0^{\pi} = \frac{-\cos(5\pi)}{5} = 0.2$$

31–36 ■ Evaluate the integral by interpreting it in terms of areas.

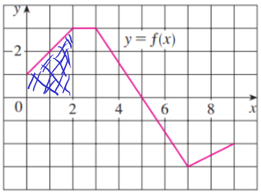
29. The graph of f is shown. Evaluate each integral by interpreting it in terms of areas.

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



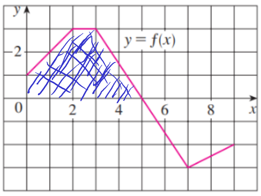
a). $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3+1}{2}\cdot 2 = 4$



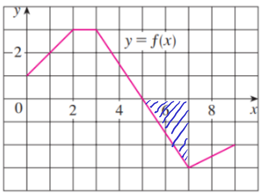
b). $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx$

$= 4 + \frac{3+1}{2}\cdot 3$

$= 10$



c). $\int_5^7 f(x)\,dx = \frac{2(-3)}{2}\ \ -3$

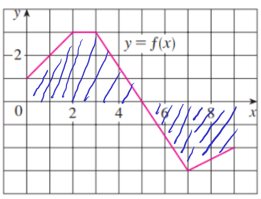


d) $= \int_0^9 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)\,dx$

$= 10 - 3 - \frac{3+2}{2}\cdot 2$

$= 10-3-5$

$= 2$



31. $\int_1^3 (1 + 2x)\,dx$

$$= \int_1^3 dx + \int_1^3 2x\,dx$$

$$= x\Big|_1^3 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^3$$

$$= (3-1) + (3^2-1^2)$$

$$= 2+8$$

$$= 10$$

Tareas de clase

Demostrar:

1). $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$$

$$= 1+4+3+2$$
$$= 5+5$$
$$= 10$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 \dots n-2 & n-1 & n \\ + \; n & n-1 & n-2 \dots 3 & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 \dots n+1 & n+1 & n+1 \end{array} = n(n+1)$$

Como se duplicó la recta de enteros y la suma de $(n+1)$ se realizó n veces, entonces:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración usando Diferencias Finitas:

Sea a_n un polinomio, Si la K-ésima diferencia finita de a_n $\Delta^K a_n$ es constante, entonces a_n es un polinomio de grado K

Primera diferencia finita de a_n: Δa_n

Segunda diferencia finita de a_n: $\Delta(\Delta a_n) = \Delta^2 a_n$

Tercera diferencia finita de a_n: $\Delta(\Delta^2 a_n) = \Delta^3 a_n$

K-ésima diferencia finita de a_n: $\Delta(\Delta^{K-1} a_n) = \Delta^K a_n$

n	0	1	2	3	4
$a_n=\sum_{i=0}^{n} i$	0	1	3	6	10
Δa_n	$1-0=1$	$3-1=2$	$6-3=3$	$10-6=4$	$15-10=5$
$\Delta^2 a_n$	$2-1=1$	$3-2=1$	$4-3=1$	$5-4=1$	

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

$\Delta^2 a_n = 1 \;;\; n \in \mathbb{Z}$

$\Delta^2 a_n$ es constante, entonces $\sum_{i=1}^{n} i$ es un polinomio de grado 2

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i = an^2 + bn + c$$

Si $n=0 \rightarrow$

$a_0 = \sum_{i=0}^{0} i = 0$

$a_0 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 0$

$c = 0$

Si $n=1 \rightarrow$

$a_1 = 1$

$a_1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 0 = 1$

$a_1 = a+b = 1$

Si $n=2$

$a_2 = 3$

$a_2 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 0 = 3$

$a_2 = 4a + 2b = 3$

$a_2 = 4a + 2b = 3$

$$\begin{cases} a+b=1 & (1) \\ 4a+2b=3 & (2) \end{cases}$$

(1) $a = 1-b \;\wedge$ (2) $a = \frac{3-2b}{4} = \frac{3}{4} - \frac{b}{2}$

$a = a$

$1-b = \frac{3}{4} - \frac{b}{2}$

$1 - \frac{3}{4} = b - \frac{b}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{b}{2}$

$b = \frac{1}{2}$

① $a+b=1 \quad \wedge \quad b=\frac{1}{2}$

$a=1-\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$

$a_n = an^2+bn+c \; ; \; a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=0$

$\sum_{i=0}^{n} i = a_n = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$

$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$

//

Demostración suma de los primeros enteros cuadrados

2). $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

n	0	1	2	3	4
$a_n=\sum_{i=0}^{n} i^2$	0	1	5	14	30
Δa_n	1	4	9	16	25
$\Delta^2 a_n$	3	5	7	9	
$\Delta^3 a_n$	2	2	2		

$\Delta^3 a_n = 2 \rightarrow \Delta^3 a_n$ es constante

$a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = an^3+bn^2+cn+d$

Si $n=0$

$a_0 = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 0$

$a_0 = a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=0$

$d=0$

Si $n=1$

$a_1 = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 1$

$a_1 = a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=1$

$a+b+c=1$

Si $n=2$

$$a_2=\sum_{i=1}^{n} i^2=5$$

$$a_2=8a+4b+2c=5$$

Si $n=3$

$$a_3=\sum_{i=1}^{n} i^2=14$$

$$a_3=27a+9b+3c=14$$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 8a+4b+2c=5 \\ 27a+9b+3c=14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ 8F_1-F_2 \\ 27F_1-F_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{18}F_3-\frac{1}{4}F_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 18 & 24 & 13 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{36} \end{array}\right)$$

$$a+b+c=1$$
$$4b+6c=3$$
$$\frac{-1}{6}c=\frac{-1}{36}$$

$$c=\frac{1}{6}$$

$$b=\frac{3-6c}{4}$$

$$b=\frac{3-1}{4}$$

$$b=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a=1-b-c$$

$$a=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$a=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$$

$$a=\frac{1}{3}$$

$$a_n=an^3+bn^2+cn$$

$$a_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$a_n = \frac{2}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$a_n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$2n^2 + 3n + 1$

$n \longrightarrow 1 \quad n$

$2n \longrightarrow 1 \quad \frac{+2n}{3n}$

$$a_n = \frac{n\left[(n+1)(2n+1)\right]}{6}$$

$$\boxed{a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$