Ejercicios de Repaso

Conceptos Básicos

1. Defina el método de integración por sustitución y explique su fundamento teórico.

Resuelto por:
Johan Sebastián Posada Beltrán

La integral por sustitución es el método opuesto a la regla de la cadena en la derivación, por esto se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\text{Si } h(x) = f(g(x)) \rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \longrightarrow \text{Regla de la Cadena}$$

$$\int h'(x)\,dx = h(x) + C \rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) \quad \text{Teorema Fundamental del Cálculo}$$

$$\text{Si } u = g(x) \longrightarrow \frac{du}{dx} = u' = g'(x) \longrightarrow \int f'(u) \cdot \frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int f'(u) \cdot du = \boxed{f(u) + C}$$

2. Encuentre la integral $\int (3x+2)^5 dx$ utilizando sustitución.

$$\int (3x+2)^5\,dx$$

$$\boxed{u = 3x+2 \qquad du = 3dx \qquad dx = \frac{du}{3}}$$

$$= \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^5\,du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \boxed{\frac{(3x+2)^6}{18} + C}$$

Ejercicios de Rutina

Cálculo de Integrales

1. Calcule $\int xe^{x^2} dx$ usando sustitución.

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

$$u = e^{x^2} \qquad du = 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$du = 2x \cdot u\,dx$$

$$dx = \frac{du}{2x \cdot u}$$

$$= \int \cancel{x} \cdot \cancel{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{x} \cdot \cancel{u}}$$

$$= \int \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot u + C \; ; \quad u = e^{x^2}$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$\rightarrow \int xe^{x^2}\,dx = \boxed{\frac{e^{x^2}}{2} + C}$$

2. Resuelva $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ mediante sustitución.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \qquad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \qquad = \int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$= \ln|u| + C \;; \quad u = \ln x \qquad \log_e|\log_e x|$$

$$= \ln|\ln x| + C$$

Ejercicios No Rutinarios

1. Encuentre una transformación adecuada para evaluar $\int \cos(\ln x) dx$.

$$\int \cos(\ln x) dx \qquad \boxed{u = \ln x}$$

$$= \int \cos(u) \cdot e^u du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si: } \log_a x = y \\ \rightarrow a^y = x \end{array}}$$

$$u = \ln x$$

$$u = \log_e x$$

$$\boxed{e^u = x}$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dx = x\,du \;; \quad x = e^u$$

$$\boxed{dx = e^u du}$$

Integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Como u ya existe en la sustitución → En la integración por partes:

$u = v \qquad v = w$

→ Integración por partes:

$$\int v\,dw = vw - \int w\,dv$$

$$\int \cos(u) \cdot e^u du$$

$v = \cos(u) \qquad w = e^u$

$dv = -\text{Sen}(u) du \qquad dw = e^u du$

Orden integración por partes:
Inversas
Logarítmica
Algebráicas
Trigonométricas
Exponenciales

$$\rightarrow \int \cos(u) \cdot e^u du = \cos(u) \cdot e^u - \int e^u \cdot (-\text{Sen}(u)) du \qquad \text{(Ecuación i)}$$

$$\rightarrow \underbrace{\int \cos(u)\cdot e^u du}_{\mathrm{I}} = \cos(u)\cdot e^u + \underbrace{\int \operatorname{sen}(u)\, e^u du}_{\mathrm{J}} \quad \text{(Ecuación i)}$$

$$\mathrm{I} = \cos(u)\cdot e^u + \mathrm{J}$$

$$\mathrm{J} = \int e^u \cdot \operatorname{sen}(u)\, du$$

→ Integración por partes para J

$$\int v\,dw = vw - \int w\,dv \qquad v = \operatorname{sen}(u) \qquad w = e^u$$

$$dv = \cos(u)\,du \qquad dw = e^u du$$

$$\mathrm{J} = \int \operatorname{sen}(u)\, e^u du$$

$$\rightarrow \mathrm{J} = \int v\,dw$$

$$\rightarrow \int v\,dw = vw - \int w\,dv$$

$$\mathrm{J} = \operatorname{sen}(u)\cdot e^u - \int e^u \cos(u)\, du$$

Remplazando J en la (Ecuación i):

$$\rightarrow \underbrace{\int \cos(u)\cdot e^u du}_{\mathrm{I}} = \cos(u)\cdot e^u + \underbrace{\int \operatorname{sen}(u)\, e^u du}_{\mathrm{J}} \quad \text{(Ecuación i)}$$

$$\int \cos(u)\cdot e^u du = \cos(u)\cdot e^u + \operatorname{sen}(u)\cdot e^u - \int e^u \cos(u)\, du$$

$$\int \cos(u)\cdot e^u du = \cos(u)\cdot e^u + \operatorname{sen}(u)\cdot e^u - \int \cos(u)\cdot e^u du$$

$$2\int \cos(u)\cdot e^u du = e^u(\cos(u) + \operatorname{sen}(u))$$

$$\int \cos(u)\cdot e^{u}du = \frac{e^{u}(\cos(u)+\operatorname{Sen}(u))}{2}$$

$$\boxed{\text{Si } u=\ln x \; ; \; du=\frac{1}{x}dx}$$

$$\int \cos(\ln x)\cdot \cancel{e^{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{\cancel{e^{\ln x}}(\cos(\ln x)+\operatorname{Sen}(\ln x))}{2}$$

$$\int \cos(\ln x)\cdot \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot dx = \frac{x(\cos(\ln x)+\operatorname{Sen}(\ln x))}{2}$$

$$\int \cos(\ln x)\cdot dx = \frac{x(\cos(\ln x)+\operatorname{Sen}(\ln x))}{2}$$

2. Explore el uso de sustitución en la integral $\int \sqrt{x+1}dx$.

$$\int (x+1)^{1/2}dx \qquad u=x+1 \qquad du=dx$$

$$\int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}+C$$

$$= \frac{2\sqrt{u^3}}{3}+C = \boxed{\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}+C}$$

Ejercicios de Aplicación en Ingeniería

1. En un sistema de refrigeración, la temperatura en función del tiempo se modela como $T(t) = \frac{5}{t+1}$. Calcule la cantidad total de calor liberado en el intervalo $[0,5]$ mediante integración por sustitución.

$$T(t)=5(t+1)^{-1} \qquad u=t+1 \qquad du=dt$$

$$5\int_0^5 (t+1)^{-1}dt$$

$$5\int_0^5 u^{-1}du = 5\int \frac{1}{u}du = 5\left[\ln|u|\right]_0^5$$

$$= 5\left[\ln|t+1|\right]_0^5$$

$$= 5\left[\ln|6| - \ln|1|\right] = 5\ln|6|$$

$$= 8.959 \quad \text{(Calor liberado)}$$

2. En un circuito eléctrico, la corriente varía con el tiempo según $I(t) = e^{-t^2}$. Calcule la carga total transferida en $[0, 2]$.

$$I(t) = e^{-t^2} \qquad u = e^{-t^2} \qquad du = -2t \cdot e^{-t^2}\, dt$$

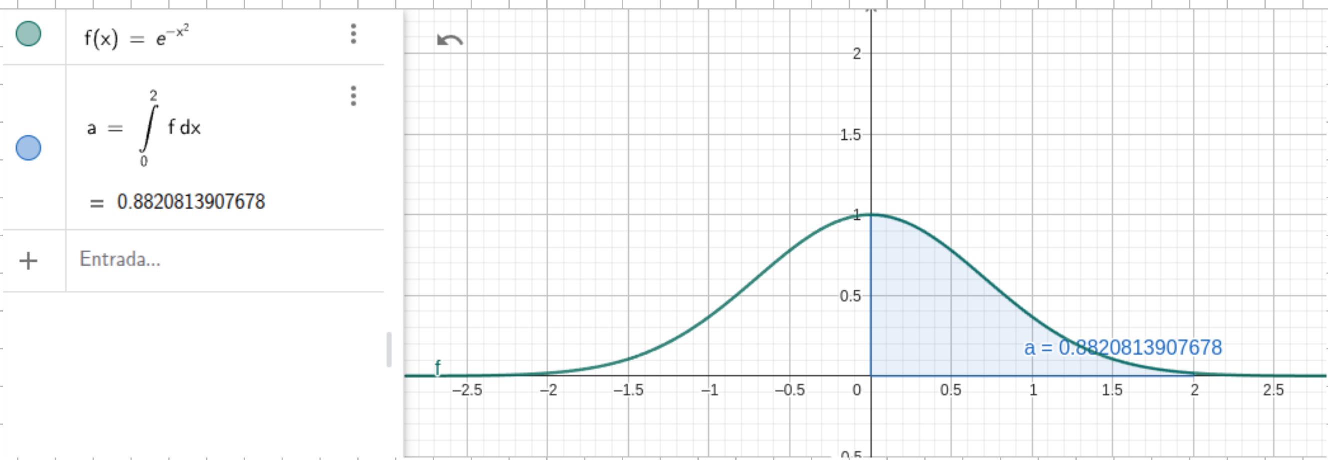
$$\int_0^2 e^{-t^2}\, dt$$

El cálculo de esta integral debería realizarse con métodos numéricos, dado que en el ejercicio de abajo me piden hallar la misma integral por medio del método del trapecio, entonces usaré mi programa de Python para darle solución a este ejercicio.

```
└─$ python3 integrales.py
Inserte el valor de n: 10000000
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 2

Método del Trapecio:
Aproximación: 0.8820813907625112
```

Lo cual coincide con el cálculo de geogebra:



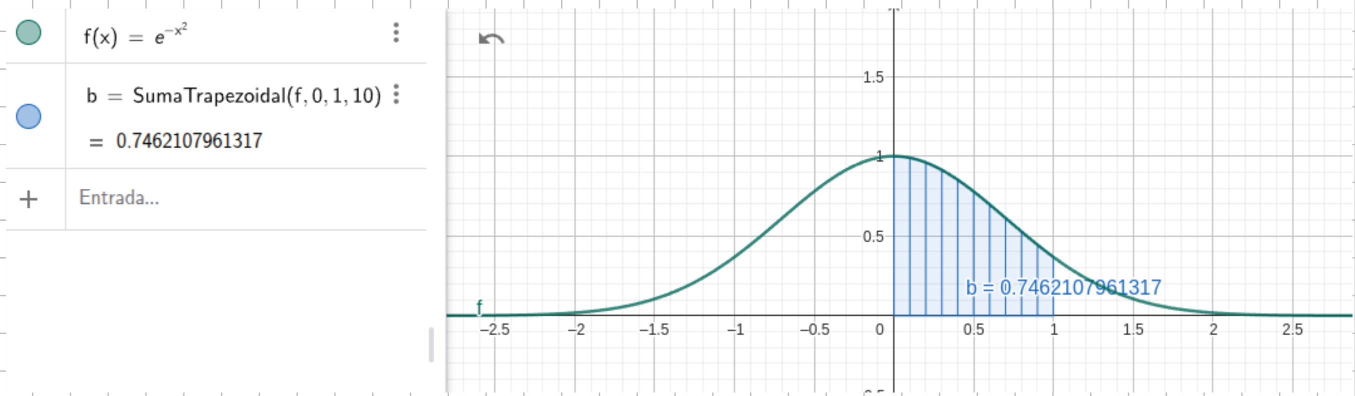
Análisis Numérico usando Python

1. Escriba un código en Python que aproxime $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ usando el método del trapecio con $n = 10$.

```
└─$ python3 integrales.py
Inserte el valor de n: 10
Inserte el valor de a: 0
Inserte el valor de b: 1

Método del Trapecio:
Aproximación: 0.7462107961317495
```

Lo cual coincide con el cálculo de geogebra:



Repositorio:

Puede acceder al código de Python que utilicé para resolver los dos últimos ejercicios, a través del repositorio: https://github.com/johanP051/tareaIVCalculoII/blob/main/analisis_Python/integral_funcion_error.py