PIKOMAT MFF UK

Milí přátelé!

Rádi bychom vás přivítali u 38. ročníku matematického korespondenčního semináře *Pikomat MFF UK.* V tomto úvodním letáku najdete nejen zadání první série úloh pro tento ročník, ale také informace o fungování semináře, což může být přínosné pro nové řešitele. Novinkou letošního ročníku jsou Průvodní povídání, ve kterých se zaměříme vždy na jednu matematickou problematiku. V prvním díle, který najdete na konci tohoto letáku, se podíváme na Thaletovu kružnici a Pythagorovu větu.

O Pikomatu

Pikomat je matematický korespondenční seminář, který má v Česku tradici již od roku 1986. V průběhu celého školního roku vydáme šest sérií, ve kterých je vždy sedm různě náročných úloh. Jednotlivé úlohy jsou zasazeny do příběhu, který letos vymyslela Magdaléna Mišinová. Vy nám zašlete vyřešené úlohy a my je následně opravíme. Každou úlohu obodujeme a pošleme řešiteli zpět spolu s komentářem.

Seminář je určen primárně pro žáky šestých až devátých tříd (a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií), ale mohou se ho zúčastnit i mladší žáci. Výsledné pořadí řešitelů sestavujeme nejen celkově, ale i pro jednotlivé ročníky, takže se můžete porovnat se stejně starými řešiteli.

Úlohy i celý Pikomat připravují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a přátelé Pikomatu pod záštitou Oddělení propagace a mediální komunikace.

Přihlášení

Pokud vás Pikomat zaujal, neváhejte se přihlásit pomocí elektronické přihlášky na našich stránkách https://pikomat.mff.cuni.cz/. **Tuto přihlášku je potřeba vyplnit, i když budete posílat svá řešení poštou.** Při vyplnění přihlášky dáváte souhlas se zpracováním osobních údajů. Pokud jste řešili Pikomat už v loňském roce, je třeba přihlášku poslat znovu. Když se ale před jejím vyplňováním na stránkách přihlásíte, většina polí přihlášky se vám automaticky předvyplní podle údajů z loňska.

Přihláška

Jak řešit a posílat svá řešení?

U úloh nás hlavně zajímá váš postup řešení, proto si všechny myšlenky pečlivě zapisujte. Pokud bude váš výsledek správný, ale bez postupu řešení, nedostanete za něj plný počet bodů. Naopak i neúplné řešení s dobrými nápady může být ohodnoceno vysokým počtem bodů. Podrobný návod, jak sepisovat řešení, naleznete na našich stránkách https://pikomat.mff.cuni.cz/jak_sepisovat. Doporučujeme si ho pečlivě přečíst, ať zbytečně nepřijdete o body u jinak správného řešení. Najdete tam rovněž i návodné video.

Pravidla Jak řešit

Upozorňujeme, že Pikomat je individuální soutěž. Pokud dostaneme výrazně podobná řešení, hrozí vám bodový postih.

Řešení každé úlohy sepište na samostatný papír A4, nezapomeňte na každý papír napsat svoje jméno, příjmení a číslo úlohy. Výsledná řešení nahrajte do odevzdávacího systému na našich stránkách nebo pošlete poštou. Řešení poslaná e-mailem nepřijímáme. Elektronicky můžete odesílat řešení vytvořená v textovém editoru nebo naskenovaná ručně psaná čitelná řešení. Každá úloha musí mít vlastní soubor. Soubory, které nahráváte elektronicky, musí být ve formátu PDF a jejich velikost nesmí překročit 20 MB. Pokud posíláte řešení poštou, pohlídejte si, aby datum odeslání řešení nebylo pozdější než termín odeslání série. Opravená řešení najdete pod položkou Moje řešení, tak se na ně nezapomeňte podívat.

Bodování

Za každou úlohu můžete dostat 0 – 5 bodů. V každé sérii se pak počítají body nejlepších šesti úloh, maximálně tedy můžete z každé série dostat 30 bodů.

Soustředění a tábor

Pro nejlepší řešitele pořádáme dvakrát ročně (na jaře a na podzim) matematické soustředění. Proto se určitě vyplatí vyřešit co nejvíce úloh. V létě také pořádáme dvoutýdenní tábor, na který se můžete přihlásit vy i kamarádi, kteří třeba Pikomat neřeší, ale baví je matematika. Na soustředěních a táborech můžete rozšířit své matematické znalosti, zahrát si zábavné hry a poznat nové přátele. Kromě těchto několikadenních akcí pořádáme i Vánoční besídku. Více informací o akcích včetně fotek najdete na stránkách.

Sociální sítě
Najdete nás na Facebooku (Pikomat MFF UK) i na Instagramu (*pikomat_mff_uk*). Na našem účtu naleznete zadání úloh, pozoruhodnosti ze světa matematiky, zajímavosti o organizátorech a mnoho dalšího. Určitě se nás vyplatí sledovat.

Řekni o nás kamarádům!
Baví Tě Pikomat? Řekni o něm i svým kamarádům! Pokud vyplní do přihlášky, že jsi jim o Pikomatu řekl/a Ty, a zapojí se alespoň ve dvou sériích, dostaneš od nás odměnu. Čím víc kamarádů, tím víc odměn.

Adresa a kontakty
Pokud byste se chtěli na cokoliv zeptat, napište nám na naši e-mailovou adresu pikomat@mff.cuni.cz. Poštovní adresa Pikomatu je:

Pikomat
KPMS MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8.

Přejeme vám hodně štěstí v novém ročníku Pikomatu a těšíme se na vaše řešení.

Vaši organizátoři

Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Zadání úloh 1. série 38. ročníku

Termín odeslání: 10. 10. 2022

Zaklapnout knihu, strčit ji pod stůl a otevřít knihu zaříkadel, co leží hned vedle. Tuhle věc si Terka nacvičila až moc dobře, protože měla moc ráda všelijakou dobrodružnou literaturu, bába Ryklová by řekla smetí. Zato učení se nazpaměť vůbec ráda neměla. Jenže přesně to po ní ta stará čarodějnice Ryklová chtěla. Ono magie a zaříkání zní tak tajemně a zvláštně, dokud o nich člověk nic neví. Jenže když se má každý týden naučit dvacet nových zaříkadel, je to najednou docela obyčejná dřina.

Úloha č. 1: *Například během odříkávání jednoho zaříkadla bylo potřeba si všemi možnými způsoby obléct černou, šedou, bílou a červenou rukavici, modrý, zelený a žlutý prsten a* 4 *různé čepice, aby na sobě měl člověk vždy právě jednu rukavici, jeden prsten a jednu čepici. Nesmí na sobě ale mít naráz šedou rukavici a zelený prsten. Kolik způsobů oblečení je potřeba během zaříkání vystřídat?*

Ozvaly se šoupavé kroky a během chvilky už se bába dívala svýma pronikavýma očima na Terku, jak předstírá ponoření do textu před sebou.

„To je zajímavé, že jsi ještě nedočetla stránku,“ zakrákorala.

„Já se to snažím opravdu pochopit, ne jen se to nabiflovat nazpaměť,“ odsekla pohrdavě Terka.

„No, tak už těch zaříkadel pro dnešek nech, snad se od nich zvládneš odtrhnout,“ ušklíbla se Ryklová. O knížkách pod stolem toho možná věděla dost, ale nechávala si to pro sebe. Snad ji Terčino předstírání i bavilo. „Dneska jsem tě chtěla naučit ještě něco jiného.“

„Tak jo,“ řekla Terka, ale nebylo v tom ani za mák nadšení. Oproti „něčemu jinému“ byla zaříkadla ještě dobrá. Posledně se ji stará čarodejnice snažila naučit péct. Kdo by to byl řekl, že k magii patří taková věc jako pečení?

Úloha č. 2: *Terka s bábinou pomocí upekla kruhový koláč o průměru* 40 *centimetrů. Pak se ale ukázalo, že je potřeba ho dát na obdélníkový plech o rozměrech* 30×50 *centimetrů. Terka musela část koláče sníst, aby se na plech vešel. Sníst z něj mohla jen nějakou kruhovou výseč, protože se jí ale do jezení vlastního výtvoru moc nechtělo, snědla z něj nejmenší možnou část. Jaký byl úhel této výseče?*

„Tak začneme,“ přitáhla si bába židli, „budeme dělat lapač.“

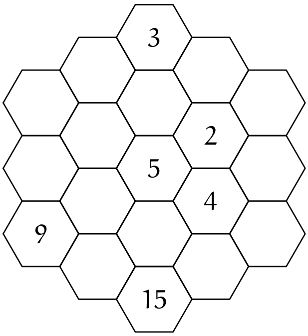
„Lapač čeho jako?“

„Kdybys mi neskákala do řeči, už to víš. Budeme dělat lapač magického chvění. Spíš by se tomu mělo říkat detektor, ale to je moc moderní.“

„Mně to teda přijde docela dobrý.“

„Tobě možná, protože tomu nerozumíš. Nejdřív je potřeba vyplnit tyhle šestiúhelníky.“

Úloha č. 3: *Bába vytáhla papír se šestiúhelníky a několika čísly jako na obrázku 1. Mají se vyplnit čísly od* 1 *do* 19 *tak, aby v každém sloupci a na každé diagonále byl součet 38. Jak to má Terka udělat?*



Obr. 1

„Už to mám,“ zahlásila hrdě Terka. Lapače zatím vypadaly zábavněji než dorty.

„Dobře. Tak se dáme konečně do práce. Co víš o magickém chvění?“

„Tohle nebyla práce?“ poklesla Terce nálada.

„To bylo úplně k ničemu, jen jsem potřebovala, aby ses přestala tvářit tak kysele.“

„Že to říkáte zrovna vy,“ utrousila Terka.

„Tak co to chvění?“

„Magické chvění je přírodní zdroj magie. Jeho využití může být mocné, avšak zrádné, neboť se může chovat nevypočitatelně a jeho výkyvy můžou v prováděném kouzlu způsobit značné škody. V roce…“

„Stačí,“ zastavila bába Terčinu monotónní recitaci, „takže, jak jistě chápeš, když ho chceš používat, musíš nejdřív poznat, kolik ho kolem tebe je. Takže jdeme na ten lapač. Je to trochu složitější, bude se skládat ze záchytného pláště a jádra.“

Úloha č. 4: *Záchytný plášť lapače má tvar pyramidy se čtvercovou podstavou, jejíž zbylé stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Každá hrana pyramidy má délku* 20 cm*. Do pyramidy je vloženo jádro ve tvaru krychle tak, aby jedna jeho stěna ležela na podstavě pyramidy a vrcholy protější stěny ležely na hranách bočních stěn pyramidy. Zjistěte objem krychle, aby ho mohly bába s Terkou vyrobit.*

Následovala značně pracná a nudná část vyrábění jádra, zpestřená jen bábiným popichováním a hodnocením, jak kterou část Terka zvládla.

Úloha č. 5: *Bába u každé části výroby určí, kolik nejvýše bodů za ni Terce dá. Terka je se sebou spokojená, když dostane od báby aspoň* 80 % *z celkového počtu bodů. Zatím udělala čtyři části jádra, za každou mohla dostat* 30 *bodů. Získala z nich ale celkem jen* 75 *bodů. Ještě zbývá dát všechno dohromady, výsledný výtvor pak bába ohodnotí nejvýše* 45 *body. Kolik nejméně bodů za výsledný výtvor Terka musí získat, aby se sebou byla spokojená?*

„A teď plášť," prohlásila energicky stařena. Terka si tiše povzdychla. Tohle bude ještě dlouhé odpoledne…

Když si druhý den Terka prohlížela svůj výtvor, musela uznat, že vypadá spíš jako stavba pětiletého dítěte než magický předmět. Ryklová byla zrovna pryč, a tak by si mohla číst, na druhou stranu dostala za úkol si párkrát lapač vyzkoušet. A to se na rozdíl od zaříkadel neokecá. Tak dobře, tohle trochu stlačí, pootočí… Ale ne, to mělo být doprava. Tak znova. Stlačí, pootočí, zamumlá zaříkadlo. „Tak už funguj," řekla otráveně Terka. A pak už zůstala jen bezhlesně zírat. Po chvíli se vzpamatovala dost na to, aby zašeptala: „Tak to byl teda výkyv."

Jindra se loudal lesem v hovoru s přáteli. Teda, musel uznat, že se spíš loudal lesem a poslouchal, jak se mezi sebou jeho známí baví. Bylo by divné nemít za kým jít ve škole o přestávce, a tak si udržoval alespoň vlažné vztahy s některými svými spolužáky, ač o to moc nestál ani on, ani oni. Vůbec, mluvit s lidmi bylo pro Jindru vždycky složité, radši se toulal sám ve svých myšlenkách.

Úloha č. 6: *Jindra přemýšlí o třech přirozených číslech. Největší z nich je* 38*. Zbylá dvě jsou taková, že nejmenší společný násobek všech tří čísel je největší možný. O kterých číslech Jindra přemýšlí?*

Zrovna když už to Jindra skoro měl, strčil ho Sam do žeber: „Posloucháš nás ty vůbec?"

„Hm? Cože? Ne," byla zcela upřímná odpověď.

„Zrovna jsem říkal," řekl Petr nahlas, jako by byl Jindra nahluchlý, „že by bylo fakt hodně blbý, kdybych dostal z úkolu už šestou pětku za sebou. Tak bys mi s tím mohl trochu helfnout, hm?“

„No dobře.“ Snažit se, aby Petr se Samem uznali, že úkoly by se neměly opisovat, bylo jako přesvědčovat skálu, aby se zvedla a uhnula z cesty. Třeba támhle jeden takový tvrdohlavě se tvářící kus čediče čouhá, napadlo Jindru.

„Jé, co to je za kámen?“ vyjekl najednou a seběhl kousek z cesty. Mezi černošedými skalami a jejich ostrými úlomky ležel docela oblý a hladký kámen, několik desítek centimetrů široký. Zatímco okolní kameny byly zašlé, hrubé a zapadané podzimním listím, tenhle se černě leskl na slunci. „Takhle přece čedič nevypadá!“

„Ale simtě, vždyť to je jenom kámen, tak nemusíš taky dělat takový povyk,“ zatvářil se pohrdavě Sam a kopl do kamene. „Au! Ten kámen je horký!“

„Mně přijde docela normální, nepálí,“ sáhl si na něj Jindra.

„No to dává smysl, že je horký, když ležel na slunci,“ ignoroval ho Petr.

„Není to divné, jak je ten kámen hladký? Takhle přece normálně kameny nevypadají,“ nenechal se odradit Jindra.

„Tak ho sem třeba někdo dal, no, to je toho. Pojďte už,“ řekl Petr a zatáhl Sama, který se pořád ještě držel za spálenou nohu, na cestu. „Klidně si tady zůstaň se svým kamenem, jen mi pak dones ten úkol, simtě, fakt bych to potřeboval.“

A byli pryč. Jindra byl vlastně rád, že odešli. Ten klid. Když si znovu prohlížel kámen, přišlo mu, že pod jeho povrchem vystupují jakési oblouky a čáry.

Úloha č. 7: *Jedna z čar byla kružnice s poloměrem* 6 cm*. Její střed si Jindra označil* S*. Na této kružnici byly dva body, které si označil* A *a* B*. Těmi totiž procházela jiná kružnice, která procházela i* S *a zároveň úsečka* AB *byl její průměr. Jak dlouhá je úsečka* AB*?*

A jak tak Jindra seděl a přemýšlel, čáry vystupovaly víc a víc. „Možná bych o tom mohl někomu říct,“ zamumlal. Rád by, aby o kameni věděl ještě někdo jiný. Možná měli Petr a Sam pravdu a jen si to představuje, ale stejně… Tak moc chtěl mít někoho, koho by to aspoň zaujalo. „Jestli v tom je nějaká magie, tak je jasné, kam jít,“ oznámil lesu a rozhodným krokem zamířil do vesnice.

Průvodní povídání 1
Thaletova kružnice a Pythagorova věta

Milí pikomaťáci,

vítáme vás u prvního průvodního povídání, ve kterém si představíme Pythagorovu větu a Thaletovu kružnici. Nově nabyté poznatky se vám budou hodit nejenom k řešení jedné z úloh této série, ale bezesporu i k řešení jiných geometrických problémů a také k výpočtům délek stran trojúhelníků. Přejeme Vám spoustu zábavy při čtení tohoto textu a hodně zdaru při řešení příkladů.

Definice: Pravoúhlý trojúhelník *je trojúhelník, který má jeden vnitřní úhel pravý. Stranu naproti pravému úhlu budeme nazývat* přepona *a zbývající dvě strany* odvěsny.

Pythagorova věta
Označme délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku a a b a délku přepony označme c. Potom vždy platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

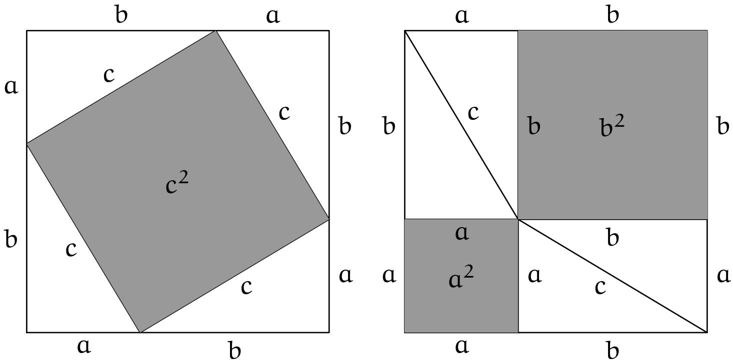
Důkaz: Na obrázku 2 vidíme dva čtverce o straně $a + b$, ze kterého jsou různými způsoby odstřiženy 4 stejné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a a b a přeponou c. V prvním případě je zbytkem čtverec o ploše c^2, v druhém případě zbydou dva čtverce o ploše a^2 a b^2. Šedá plocha v prvním náčrtku je tedy stejná jako plocha na druhém. Tedy $c^2 = a^2 + b^2$.

Příklad: *Jakou délku má přepona pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku* 6 *a* 8*?*

Příklad: *Vypočítejte obsah rovnostranného trojúhelníku s délkou strany* 2.

Řešení: Abychom spočítali obsah, musíme znát délku výšky. Jelikož je trojúhelník rovnostranný, pata výšky půlí stranu. Můžeme si proto vzít polovinu trojúhelníku (rovnostranný trojúhelník přepůlený výškou) o kterém víme, že je pravoúhlý s přeponou délky 2, odvěsnou délky 1 a druhou odvěsnou délky v jako výška. Z Pythagorovy věty vyplývá rovnost

$$2^2 = 1^2 + v^2.$$



Obr. 2

Z ní vypočítáme hodnotu v a poté obsah onoho rovnostranného trojúhelníku:

$$v^2 = 4 - 1,$$
$$v = \sqrt{3},$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

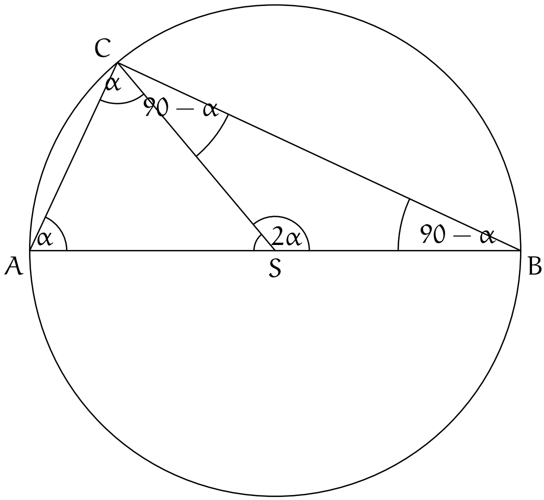
Thaletova kružnice

Mějme kružnici k a její průměr AB. Pak pro každý bod C různý od A, B na kružnici k platí, že úhel ACB je pravý (obr. 3).

Důkaz: Střed kružnice k označme S, velikost úhlu CAS označme α. Trojúhelník ASC je rovnoramenný, protože délky AS a CS jsou rovny poloměru kružnice. Z toho vyplývá, že velikost úhlu ACS je také α. Velikost úhlu CSA musí být $180° - 2\alpha$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku je $180°$), velikost úhlu CSB tedy je 2α (doplněk do $180°$ pro přímý úhel ASB). Jelikož je trojúhelník CSB také rovnoramenný, bude velikost úhlu SCB rovna $\frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Velikost úhlu ACB spočítáme jako součet velikostí úhlů ACS a SCB a vyjde nám $\alpha + 90° - \alpha = 90°$.

Příklad: *Je dána úsečka* AB. *Sestrojte trojúhelník* ABC*, pokud víte, že* $|AB| = 6\,\text{cm}, |BC| = 7\,\text{cm}, v_a = 3\,\text{cm}$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme úsečku AB, potom sestrojíme kružnici k nad průměrem AB. Když označíme P patu výšky z vrcholu A, tak P musí ležet někde na k. Dále sestrojíme kružnici l se středem A a poloměrem 3 cm. Tam, kde l protne



Obr. 3

k, leží P. Sestrojíme přímku q procházející body P a B. Bod C leží na q a je ve vzdálenosti 7 cm od bodu B. Vzniknou celkem 4 řešení, přitom dvě a dvě jsou jen zrcadlově převrácená podle AB.

Příklad: *Mějme kružnici* k *se středem* S *a libovolný bod* P*, který neleží uvnitř nebo na* k*. Sestrojte tečnu* t *ke kružnici* k *procházející bodem* P*.*

Řešení: Bod dotyku tečny s kružnicí k nazveme T. Trojúhelník STP musí být pravoúhlý, protože tečna t je kolmá na poloměr ST. Bod T tedy bude průsečíkem zadané kružnice k s Thaletovou kružnicí nad průměrem SP. Nakonec jen sestrojíme přímku PT. Dostaneme dvě řešení, která jsou zrcadlově převrácená podle SP.