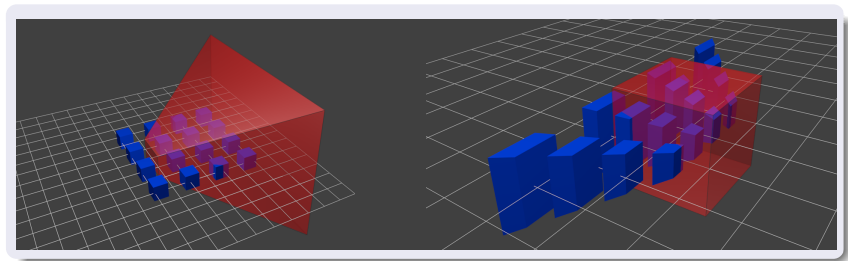


# Computergrafik

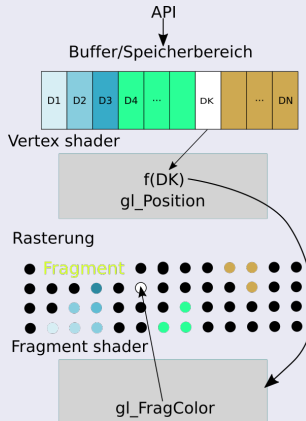
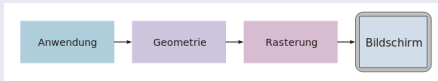


Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

# Kameraprojektion



# Shaderprogramm



```
<script id="2d-vertex-shader" type="x-shader/x-vertex">
    attribute vec2 a_position;
    uniform float t;
    varying float T;
    void main() {
        // gl_Position = vec4(a_position, 0.0, t);
        T = t;
        gl_Position = vec4(a_position[0], a_position[1], 0.0, 1.0);
    }
</script>

<script id="2d-fragment-shader" type="x-shader/x-fragment">
    precision mediump float;
    varying float T;
    void main() {
        gl_FragColor = vec4(0.0 ,1.0,0.0,1.0);
    }
</script>
```

## Basis

Sind  $b_1, b_2, b_3$  linear unabhängig, dann heisst die geordnete Menge  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

## Basisdarstellung

Für  $v \in \mathbb{R}^3$  heisst

$$\theta_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = v$$

Darstellung von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ .

## Basiswechsel berechnen

$$\theta_B(v) = M_B \cdot v, \quad M_B := (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^{-1} \text{ (column major)}$$

## Basiswechsel

Seien  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$  zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$  die Basiswechselmatrix von  $B$  nach  $B'$ . Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{M_B^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow I_n & & \downarrow M_B^{B'} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{B'}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

# Skalarprodukt

## Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := v^t \cdot w = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot w_i$$

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  heißen orthogonal, falls  $\langle u, v \rangle = 0$  ist.

## Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} := \sqrt{v^t \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}$$

Ein Vektor  $v$  heißt normal, falls  $\|v\| = 1$  ist. Ist  $w$  ein beliebiger Vektor, so heißt  $\frac{1}{\|w\|} w$  die Normalisierung von  $w$ , denn er ist normal.

## Satz

Für den von zwei Vektoren  $u, v$  eingeschlossenen Winkel  $\varphi$  gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

## Kreuzprodukt

Für  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von  $u$  und  $v$ . Es gilt

- $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear abhängig sind.



## Orthonormalbasis

Eine Basis  $B := \{b_1, b_2, b_3\}$  heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle  $b_i$  normal.

## Basis-Wechsel-Matrix

Ist  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

## Drehungen

Eine Matrix  $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$  heißt orthogonal, falls  $O^{-1} = O^t$  ist. Sie ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\}.$$

Ist  $\det(O) = 1$ , so nennen wir  $O$  eine Drehung und  $SO(n) := \{O \in \mathbb{M}^{n \times n} \mid \det(O) = 1\}$  die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

## Basis-Wechsel-Matrix

Sei  $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix, dann gilt für alles  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle O \cdot v, O \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

und somit insbesondere

$$\|O \cdot v\| = \|v\|.$$

## Eulerwinkel

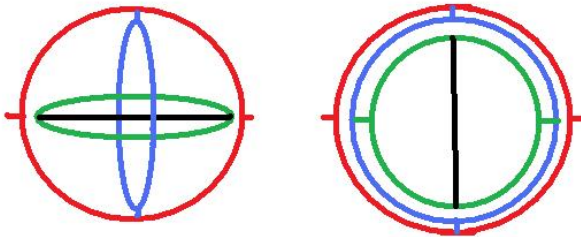
Jede Drehung  $O \in SO(3)$  lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \pm \sin(\phi) \\ 0 & \mp \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel  $\phi, \psi, \xi$  heißen Eulerwinkel.

## Eulerwinkel

Die Zerlegung  $O \in SO(3)$  einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock".  $SO(3)$  ist also nicht das Produkt von drei Intervallen sondern es ist  $SO(3) = S^3/\{\pm 1\}$ .



## Affiner Raum

Der Affine Raum  $\mathbb{A}^3$  ist ein Tupel  $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, +, \cdot))$  zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ \overline{PQ} &:= Q - P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^3, +, \cdot) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_3 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_3 + v_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

## Affiner Raum

Die Elemente (Vektoren) aus  $\mathbb{R}^3$  nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ . Für Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  ist also  $\overline{PQ}$  ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

## Affine basis

Ist  $B := \{b_1, b_2, b_3\}$  eine Basis des Vektorraums  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  und  $P \in \mathbb{A}$  ein Punkt, so nennen wir das Tupel  $(P, B)$  eine affine Basis. Für jeden Punkt  $Q$  gibt es dann also Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot b_i .$$

Der Punkt  $\theta_{(P,B)}(Q) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$  heißt die Darstellung von  $Q$  bezüglich der affinen Basis  $(P, B)$ .



## Affine Abbildung

Abbildungen der Form

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(P) &:= A \cdot P + t\end{aligned}$$

mit  $A \in M^{3 \times 3}$  und  $t \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit  $A = I_3$  und  $t \neq 0$  Translation.

## Abstand

Der Abstand von  $P, Q \in \mathbb{A}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned}d : \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(P, Q) &:= \|\overline{PQ}\|.\end{aligned}$$

## Affiner Basiswechsel

Sind  $(P, B := \{b_1, \dots, b_n\})$  und  $(P', B' := \{b'_1, \dots, b'_n\})$  zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\theta_{(P,B)}(Q) := M_B \cdot Q - M_B \cdot P = M_B(Q - P),$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xleftarrow{\theta_{(P,B)}^{-1}} & \mathbb{A}^n \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta_{(P,B)}^{(P',B')} \\ \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\theta_{(P',B')}} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

$$\text{mit } \theta_{(P,B)}^{(P',B')}(Q) := \theta_{(P',B')} \left( \theta_{(P,B)}^{-1}(Q) \right).$$

## Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^3 := \mathbb{R}^4 - \{0\} / \sim$$
$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} .$$

## Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

## Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mid p_4 \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{A}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

## Ferne Punkte

Die Menge der Punkte  $F_3 := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mid p_4 = 0 \right\}$  heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

## Identifikation der fernen Punkte

Es ist  $F_3 \cong \mathbb{P}^2$

## Zerlegung des projektiven Raum

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten". Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^3 &= \mathbb{A}^3 \cup F_3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup F_2 \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\} \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1\end{aligned}$$

## Projektive Abbildungen

### Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$v \mapsto A \cdot v$$

setzt sich wegen der Eigenschaft  $A \cdot (\lambda v) = \lambda A \cdot v$  zu einer Abbildung

$$\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$p \mapsto A \cdot p$$

fort.



## Projektive Abbildungen

Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(v) &:= A \cdot v + t\end{aligned}$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

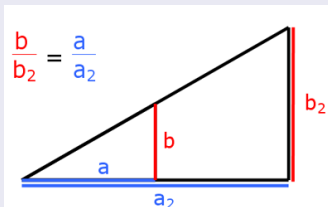
$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} .$$

## Zentralprojektion

### Die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

realisieren die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur  $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz  $d$  in homogenen Koordinaten.



## Zentralprojektion

Die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur  $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz  $d$  durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

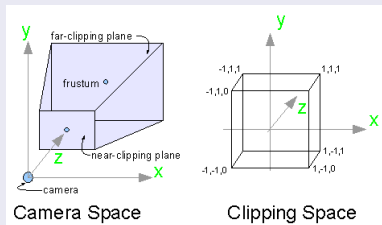
$$\text{persp}_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K_{\text{persp}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

$$\mapsto K_{\text{orth}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Clipping Koordinaten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f-n}{f-n} & \frac{-2 \cdot f \cdot n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$



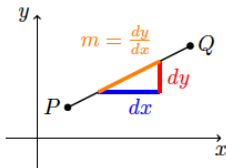
$MVP := ModelViewProjectionMatrix$

## Bresenham

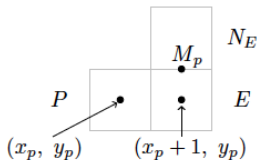
Die Strecke  $S = \overline{PQ} \in \mathbb{R}^n$  soll auf ein ( $n$ -dimensionales Pixel-) Raster abgebildet werden

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$$M_p = \left( x_p + 1, y_p + \frac{1}{2} \right)$$



(a) Steigungsdreieck



(b) Pixelraster

## Bresenham

$$M_p \begin{cases} \text{oberhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } E \\ \text{unterhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } N_E \end{cases}$$

$$F(x, y) := dy \cdot x - dx \cdot y + dx \cdot b$$

$$(x, y) \in y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = 0$$

bzw.

$$F(x, y) \quad \begin{cases} = 0 & (x, y) \text{ liegt auf } S \\ > 0 & (x, y) \text{ liegt unterhalb von } S \\ < 0 & (x, y) \text{ liegt oberhalb von } S \end{cases}$$

## Bresenham

$$D_p := 2 \cdot F(M_p)$$

1. Fall:  $D_p < 0 \Rightarrow$  Nachfolgepixel ist  $E$

$$\begin{aligned} D_E &= 2 \cdot F(M_E) \\ &= 2 \cdot F\left(x_p + 2, y_p + \frac{1}{2}\right) \\ &= dy \cdot (2x_p + 4) - dx \cdot (2y_p + 1) + 2 \cdot b \cdot dx \\ &= D_p + \Delta_E \\ \text{mit } \Delta_E &:= 2 \cdot dy \end{aligned}$$

2. Fall:  $D_p \geq 0 \Rightarrow$  Nachfolgepixel ist  $NE$

$$\begin{aligned} D_{NE} &= 2 \cdot F(M_{NE}) \\ &= D_p + \Delta_{NE} \\ \text{mit } \Delta_{NE} &:= 2dy - 2dx \end{aligned}$$

## Anti Aliasing

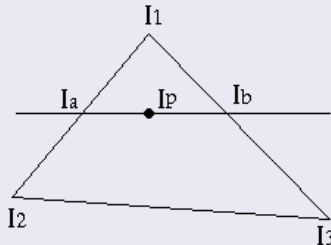


Kantenglättung z.B. mit Gaußfilter.



## Interpolation

GLSL interpoliert Werte innerhalb eines Fragmentes linear zwischen den im Vertex-Shader gesetzten Werten. Dies kann zum Beispiel mit Hilfe eines Sweepline-Algorithmus realisiert werden.



## Fläche

Ein Fläche (Parametrisierung) ist eine Abbildung

$$s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

bei der die Abbildungen  $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Sie heißt differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \end{pmatrix}$$

existieren.

## Tangentialraum

Die Ebene

$$T_s(u, v) := \left\{ s(u, v) + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt Tangentialebene am Punkt  $(u, v)$  und der Vektor

$$n(u, v) := \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v),$$

welcher Senkrecht auf dieser Ebene steht, die Normale.

## Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral ist definiert durch

$$\int_S d\omega := \int_U \|n(u, v)\| dU .$$

und analog

$$\int_S f d\omega := \int_U f(s(u, v)) \cdot \|n(u, v)\| dU .$$

für eine Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Man nennt  $d\omega$  beziehungsweise  $\|n(u, v)\|$  das infinitessimale Flächenelement.

## Fubini

Ist  $U = U_1 \times U_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_U f \, d(U_1 \times U_2) = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_2 dU_1 = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_1 dU_2 .$$

## Die Sphäre $S^2$

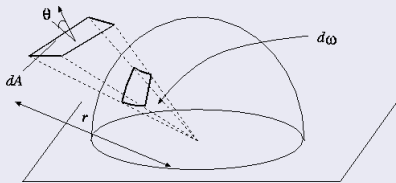
$$s : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(u, v) := \begin{pmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \sin(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \right\| = \sin(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d\omega &= \int_{[0, \pi) \times [0, 2\pi)} \sin(u) d(u \times v) = \int_{[0, 2\pi)} \int_{[0, \pi)} \sin(u) du dv \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

## Transformationsformel



$$d\omega = \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) dA, \quad \pi(x) := \frac{x}{||x||} \quad (1)$$

$$V(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{xy} \cap (A - \{x, y\}) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{\pi(A)} f \cdot d\omega = \int_A f \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) \cdot V(a, 0) dA, \quad (3)$$