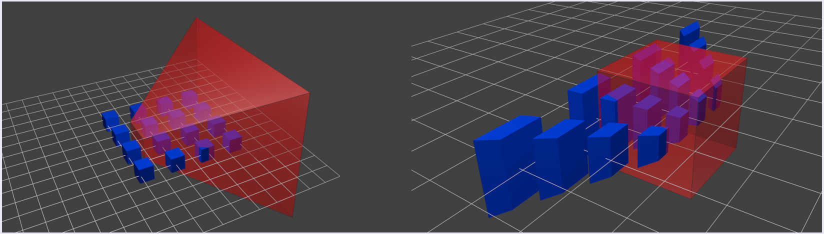
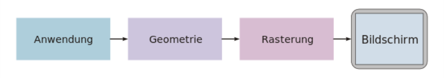
Computergrafik

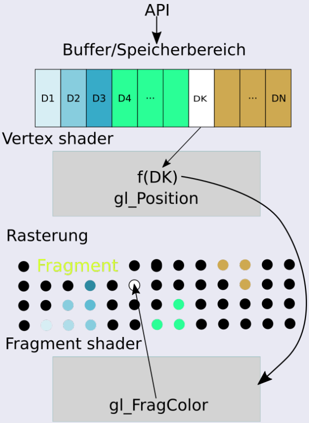
Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Kameraprojektion



Shaderprogramm





OpenGL Pipeline

```
<script id="2d-vertex-shader" type="x-shader/x-vertex">
    attribute vec2 a_position;
    uniform float t;
    varying float T;
    void main() {
    //  gl_Position = vec4(a_position, 0.0, t);
    T = t;
    gl_Position = vec4(a_position[0], a_position[1], 0.0, 1.0);
    }
</script>

<script id="2d-fragment-shader" type="x-shader/x-fragment">
    precision mediump float;
    varying float T;
    void main() {
    gl_FragColor = vec4(0.0 ,1.0,0.0,1.0);
    }
</script>
```

Basis

Basis

Sind b_1, b_2, b_3 einer unabhängig, dann heisst die geordnete Menge $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

Basisdarstellung

Für $v \in \mathbb{R}^3$ heisst

$$\theta_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = v$$

Darstellung von v bezüglich der Basis B.

Basiswechsel

Basiswechsel berechnen

$$\theta_B(v) = M_B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad M_B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{ (column major)}$$

Basiswechsel

Seien $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $B' := \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$ die Basiswechselmatrix von B nach B'. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[d, "I_n"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "M_B^{-1}"'] \arrow[d, "M_B^{B'}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M_{B'}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Skalarprodukt

Skalarproduktt

$\langle v, w\rangle := v^t \cdot w = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot w_i$
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls $< u, v >= 0$ ist.

Norm

$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle} := v^t \cdot w = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$
Ein Vektor v heißt normal, falls $||v|| = 1$ ist. Ist w ein beliebiger Vektor, so heißt $\frac{1}{||w||}w$ die Normalisierung von w, denn er ist normal.

Satz

Für den von zwei Vektoren u, v eingeschlossenen Winkel φ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}$$

Kreuzprodukt

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von u und v. Es gilt

- $< u \times v, u > = < u \times v, v > = 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Orthonormalbasis

Orthonormalbasis

Eine Basis $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$< b_i, b_j >= \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle b_i normal.

Orthonormalbasis

Basis-Wechsel-Matrix

Ist $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

Drehungen

Eine Matrix $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls $O^{-1} = O^t$ ist. Sie ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\} \ .$$

Ist $\det(O) = 1$, so nennen wir O eine Drehung und $SO(n) := \{O \in \mathbb{M}^{n \times n} | \det(O) = 1\}$ die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

Basis-Wechsel-Matrix

Sei $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt für alles $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$< O \cdot v \ , \ O \cdot w > = < v \ , \ w >$$

und somit insbesondere

$$||O \cdot v|| = ||v|| \ .$$

Orthonormalbasis

Eulerwinkel

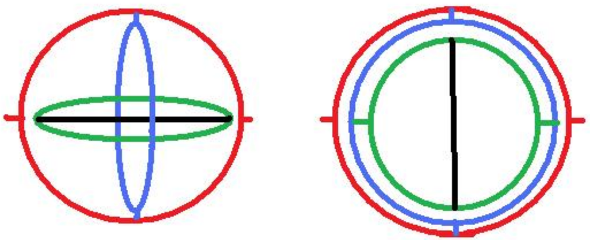
Jede Drehung $O \in SO(3)$ lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \pm\sin(\phi) \\ 0 & \mp\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel ϕ, ψ, ξ heißen Eulerwinkel.

Eulerwinkel

Die Zerlegung $O \in SO(3)$ einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock". $SO(3)$ ist also nicht das Produkt von drei Intervallen sondern es ist $SO(3) = S^3/\{\pm 1\}$.



Affiner Raum

Der Affine Raum $\mathbb{A}^n$ ist ein Tupel $\big(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, +, \cdot)\big)$ zusammen mit den Abbildung

$$
\begin{aligned}
\overline{} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to (\mathbb{R}^n, +, \cdot) \\
\overline{PQ} &:= Q - P
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n, +, \cdot) &\to \mathbb{R}^n \\
\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_n + v_n \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Affiner Raum

Die Elemente (Vektoren) aus $\mathbb{R}^n$ nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ ist also $\overline{PQ}$ ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

Affine basis

Ist $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ und $P \in \mathbb{A}$ ein Punkt, so nennen wir das Tupel (P, B) eine affine Basis. Für jeden Punkt Q gibt es dann also Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot b_i \ .$$

Der Punkt $\theta_{(P,B)}(Q) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ heißt die Darstellung von Q bezüglich der affinen Basis (P, B).

Affiner Raum

Affine Abbildung

Abbildungen der Form

$$\phi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$$
$$\phi(P) := A \cdot P + t$$

mit $A \in M^{3\times 3}$ und $t \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit $A = I_3$ und $t \neq 0$ Translation.

Abstand

Der Abstand von $P, Q \in \mathbb{A}$ ist definiert durch

$$d : \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3 \to \mathbb{R}$$
$$d(P, Q) := ||\overline{PQ}||\ .$$

Affiner Basiswechsel

Sind $(P, B := \{b_1, \ldots, b_n\})$ und $(P', B' := \{b'_1, \ldots, b'_n\})$ zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$
$$\theta_{(P,B)}(Q) := M_B \cdot Q - M_B \cdot P \ ,$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbb{A}^n \arrow[l, "\theta^{-1}_{(P,B)}"'] \arrow[d, "\theta^{(P',B')}_{(P,B)}"] \\ \mathbb{A}^n \arrow[r, "\theta_{(P',B')}"] & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

mit $\theta^{(P',B')}_{(P,B)}(Q) := \theta_{(P',B')}\left(\theta^{-1}_{(P,B)}(Q)\right)$.

Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$$

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}\,.$$

Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \middle| \; p_4 = 0 \right\} \to \mathbb{A}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

Homogene Koordinaten

Die Punkte $\left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cong \lim_{n \to \infty} n \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Zerlegung des projektiven Raum

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten".

Projektive Abbildungen

Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$v \mapsto A \cdot v$$

setzt sich wegen der Eigenschaft $A \cdot (\lambda v) = \lambda A \cdot v$ zu einer Abbildung

$$\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$$
$$p \mapsto A \cdot p$$

fort.

Projektive Abbildungen

Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\phi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$$
$$\phi(v) := A \cdot v + t$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Definieren wir die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so können wir die Zentralprojektion auf die $X - Y$-Ebene mit Augendistanz d durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

$$persp_{xy} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K_{persp_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto K_{orth_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} + 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}+1} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}+1} \end{pmatrix}$$