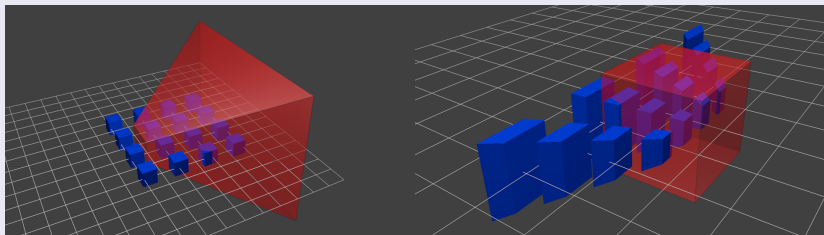


# Computergrafik

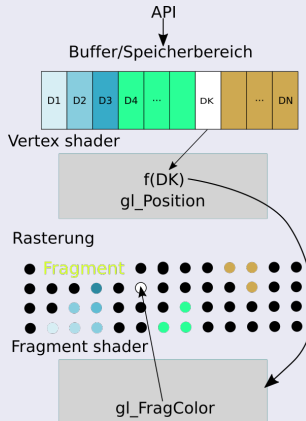
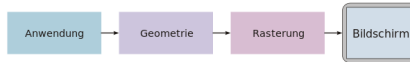


Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

# Kameraprojektion



# Shaderprogramm



```
<script id="2d-vertex-shader" type="x-shader/x-vertex">
    attribute vec2 a_position;
    uniform float t;
    varying float T;
    void main() {
        // gl_Position = vec4(a_position, 0.0, t);
        T = t;
        gl_Position = vec4(a_position[0], a_position[1], 0.0, 1.0);
    }
</script>

<script id="2d-fragment-shader" type="x-shader/x-fragment">
    precision mediump float;
    varying float T;
    void main() {
        gl_FragColor = vec4(0.0 ,1.0,0.0,1.0);
    }
</script>
```

## Basis

Sind  $b_1, b_2, b_3$  linear unabhängig, dann heisst die geordnete Menge  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

## Basisdarstellung

Für  $v \in \mathbb{R}^3$  heisst

$$\theta_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = v$$

Darstellung von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ .

## Basiswechsel berechnen

$$\theta_B(v) = M_B \cdot v, \quad M_B := (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^{-1} \text{ (column major)}$$

## Basiswechsel

Seien  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$  zwei Basen des  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$  die Basiswechselmatrix von  $B$  nach  $B'$ . Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{M_B^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow I_n & & \downarrow M_B^{B'} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{B'}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

# Skalarprodukt

## Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := v^t \cdot w = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot w_i$$

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^n$  heißen orthogonal, falls  $\langle u, v \rangle = 0$  ist.

## Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}$$

Ein Vektor  $v$  heißt normal, falls  $\|v\| = 1$  ist. Ist  $w$  ein beliebiger Vektor, so heißt  $\frac{1}{\|w\|} w$  die Normalisierung von  $w$ , denn er ist normal.

## Satz

Für den von zwei Vektoren  $u, v$  eingeschlossenen Winkel  $\varphi$  gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

## Kreuzprodukt

Für  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  und  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von  $u$  und  $v$ . Es gilt

- $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear abhängig sind.



## Orthonormalbasis

Eine Basis  $B := \{b_1, b_2, b_3\}$  heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle  $b_i$  normal.

## Basis-Wechsel-Matrix

Ist  $B := \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

## Drehungen

Eine Matrix  $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$  heißt orthogonal, falls  $O^{-1} = O^t$  ist. Sie ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\}.$$

Ist  $\det(O) = 1$ , so nennen wir  $O$  eine Drehung und  $SO(n) := \{O \in \mathbb{M}^{n \times n} \mid \det(O) = 1\}$  die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

## Basis-Wechsel-Matrix

Sei  $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix, dann gilt für alles  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle O \cdot v, O \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

und somit insbesondere

$$\|O \cdot v\| = \|v\|.$$

## Eulerwinkel

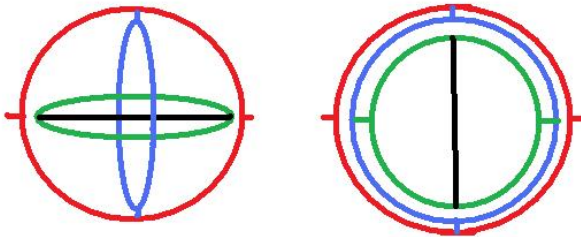
Jede Drehung  $O \in SO(3)$  lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \pm \sin(\phi) \\ 0 & \mp \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel  $\phi, \psi, \xi$  heißen Eulerwinkel.

## Eulerwinkel

Die Zerlegung  $O \in SO(3)$  einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock".  $SO(3)$  ist also nicht das Produkt von drei Intervallen sondern es ist  $SO(3) = S^3/\{\pm 1\}$ .



## Affiner Raum

Der Affine Raum  $\mathbb{A}^3$  ist ein Tupel  $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, +, \cdot))$  zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ \overline{PQ} &:= Q - P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^3, +, \cdot) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_3 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_3 + v_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

## Affiner Raum

Die Elemente (Vektoren) aus  $\mathbb{R}^3$  nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ . Für Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  ist also  $\overline{PQ}$  ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

## Affine basis

Ist  $B := \{b_1, b_2, b_3\}$  eine Basis des Vektorraums  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  und  $P \in \mathbb{A}$  ein Punkt, so nennen wir das Tupel  $(P, B)$  eine affine Basis. Für jeden Punkt  $Q$  gibt es dann also Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot b_i .$$

Der Punkt  $\theta_{(P,B)}(Q) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$  heißt die Darstellung von  $Q$  bezüglich der affinen Basis  $(P, B)$ .



## Affine Abbildung

Abbildungen der Form

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(P) &:= A \cdot P + t\end{aligned}$$

mit  $A \in M^{3 \times 3}$  und  $t \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit  $A = I_3$  und  $t \neq 0$  Translation.

## Abstand

Der Abstand von  $P, Q \in \mathbb{A}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned}d : \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(P, Q) &:= \|\overline{PQ}\|.\end{aligned}$$

## Affiner Basiswechsel

Sind  $(P, B := \{b_1, \dots, b_n\})$  und  $(P', B' := \{b'_1, \dots, b'_n\})$  zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\theta_{(P,B)}(Q) := M_B \cdot Q - M_B \cdot P = M_B(Q - P),$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xleftarrow{\theta_{(P,B)}^{-1}} & \mathbb{A}^n \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta_{(P,B)}^{(P',B')} \\ \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\theta_{(P',B')}} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

$$\text{mit } \theta_{(P,B)}^{(P',B')}(Q) := \theta_{(P',B')} \left( \theta_{(P,B)}^{-1}(Q) \right).$$

## Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^3 := \mathbb{R}^4 - \{0\} / \sim$$
$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} .$$

## Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

## Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mid p_4 \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{A}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

## Ferne Punkte

Die Menge der Punkte  $F_3 := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mid p_4 = 0 \right\}$  heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

## Identifikation der fernen Punkte

Es ist  $F_3 \cong \mathbb{P}^2$

## Zerlegung des projektiven Raum

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten". Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^3 &= \mathbb{A}^3 \cup F_3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup F_2 \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\} \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1\end{aligned}$$

## Projektive Abbildungen

### Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$v \mapsto A \cdot v$$

setzt sich wegen der Eigenschaft  $A \cdot (\lambda v) = \lambda A \cdot v$  zu einer Abbildung

$$\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$p \mapsto A \cdot p$$

fort.



## Projektive Abbildungen

Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(v) &:= A \cdot v + t\end{aligned}$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

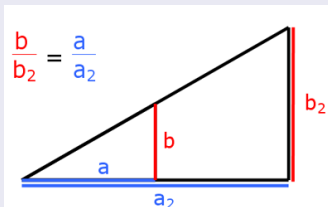
$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} .$$

## Zentralprojektion

### Die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

realisieren die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur  $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz  $d$  in homogenen Koordinaten.



## Zentralprojektion

Die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur  $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz  $d$  durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

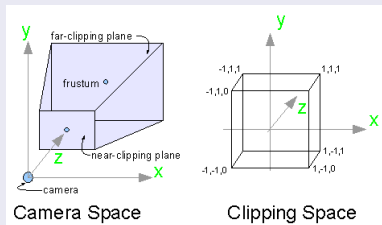
$$\text{persp}_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K_{\text{persp}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

$$\mapsto K_{\text{orth}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \\ \frac{\frac{z}{d}}{\frac{z}{d}} \end{pmatrix}$$

## Clipping Koordinaten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f-n}{f-n} & \frac{-2 \cdot f \cdot n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$



$MVP := ModelViewProjectionMatrix$

## Bresenham

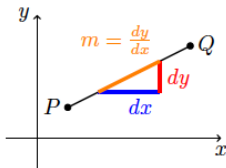
- Der Algorithmus wurde 1962 von Jack Bresenham, damals Programmierer bei IBM, entwickelt.
- Rundungsfehler, die durch die Diskretisierung von kontinuierlichen Koordinaten entstehen, werden minimiert.
- Einfach implementierbar.
- Kommt mit der Addition von ganzen Zahlen als komplexeste Operation, und somit ohne Multiplikation, Division und Gleitkommazahlen.
- Durch eine geringfügige Erweiterung lässt sich der ursprüngliche Algorithmus, der für Geraden entworfen wurde, auch für die Rasterung von Kreisen verwenden. Sogar die Quadrattermen, die beim Kreis vorkommen, lassen sich rekursiv ohne jede Multiplikation aus dem jeweils vorhergehenden Term ableiten nach.

## Bresenham

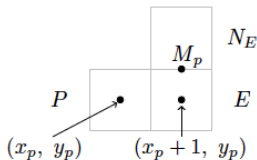
Die Strecke  $S = \overline{PQ} \in \mathbb{R}^n$  soll auf ein ( $n$ -dimensionales Pixel-) Raster abgebildet werden

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$$M_p = \left( x_p + 1, y_p + \frac{1}{2} \right)$$



(a) Steigungsdreieck



(b) Pixelraster

## Bresenham

$$M_p \begin{cases} \text{oberhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } E \\ \text{unterhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } N_E \end{cases}$$

$$F(x, y) := dy \cdot x - dx \cdot y + dx \cdot b$$

$$(x, y) \in y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = 0$$

bzw.

$$F(x, y) \quad \begin{cases} = 0 & (x, y) \text{ liegt auf } S \\ > 0 & (x, y) \text{ liegt unterhalb von } S \\ < 0 & (x, y) \text{ liegt oberhalb von } S \end{cases}$$

## Bresenham

$$D_p := 2 \cdot F(M_p)$$

1. Fall:  $D_p < 0 \Rightarrow$  Nachfolgepixel ist  $E$

$$\begin{aligned} D_E &= 2 \cdot F(M_E) \\ &= 2 \cdot F\left(x_p + 2, y_p + \frac{1}{2}\right) \\ &= dy \cdot (2x_p + 4) - dx \cdot (2y_p + 1) + 2 \cdot b \cdot dx \\ &= D_p + \Delta_E \\ \text{mit } \Delta_E &:= 2 \cdot dy \end{aligned}$$

2. Fall:  $D_p \geq 0 \Rightarrow$  Nachfolgepixel ist  $NE$

$$\begin{aligned} D_{NE} &= 2 \cdot F(M_{NE}) \\ &= D_p + \Delta_{NE} \\ \text{mit } \Delta_{NE} &:= 2dy - 2dx \end{aligned}$$



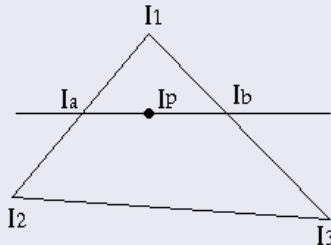
## Anti Aliasing



Kantenglättung z.B. mit Gaußfilter.

## Interpolation

GLSL interpoliert Werte innerhalb eines Fragmentes linear zwischen den im Vertex-Shader gesetzten Werten. Dies kann zum Beispiel mit Hilfe eines Sweepline-Algorithmus realisiert werden.



## Fläche

Ein Fläche (Parametrisierung) ist eine Abbildung

$$s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

bei der die Abbildungen  $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Sie heißt differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \end{pmatrix}$$

existieren.

## Tangentialraum

Die Ebene

$$T_s(u, v) := \left\{ s(u, v) + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt Tangentialebene am Punkt  $(u, v)$  und der Vektor

$$n(u, v) := \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v),$$

welcher Senkrecht auf dieser Ebene steht, die Normale.

## Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral ist definiert durch

$$\int_S d\omega := \int_U \|n(u, v)\| dU .$$

und analog

$$\int_S f d\omega := \int_U f(s(u, v)) \cdot \|n(u, v)\| dU .$$

für eine Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Man nennt  $d\omega$  beziehungsweise  $\|n(u, v)\|$  das infinitesimale Flächenelement.

## Fubini

Ist  $U = U_1 \times U_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_U f \, d(U_1 \times U_2) = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_2 dU_1 = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_1 dU_2 .$$

## Die Sphäre $S^2$

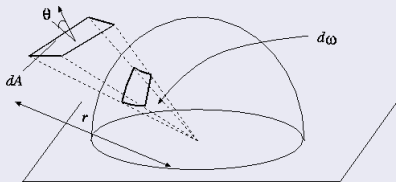
$$s : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(u, v) := \begin{pmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \sin(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \right\| = \sin(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d\omega &= \int_{[0, \pi) \times [0, 2\pi)} \sin(u) d(u \times v) = \int_{[0, 2\pi)} \int_{[0, \pi)} \sin(u) du dv \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

## Transformationsformel



$$d\omega = \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) dA, \quad \pi(x) := \frac{x}{||x||} \quad (1)$$

$$V(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{xy} \cap (A - \{x, y\}) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{\pi(A)} f \cdot d\omega = \int_A f \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) \cdot V(a, 0) dA, \quad (3)$$