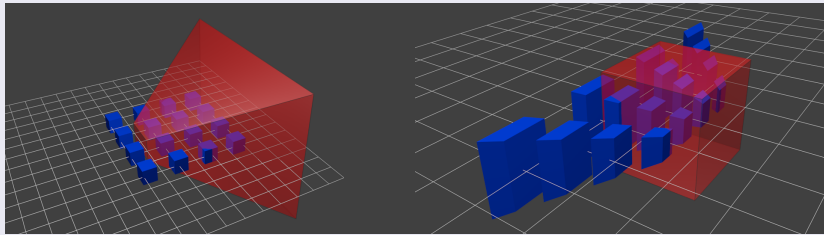


Computergrafik

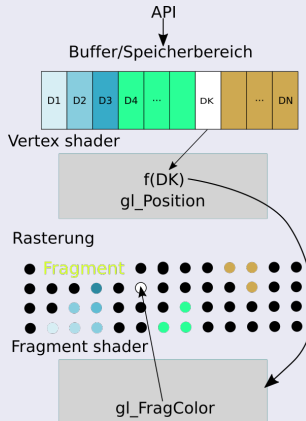
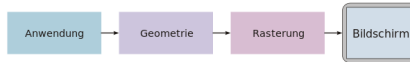


Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Kameraprojektion



Shaderprogramm



```
<script id="2d-vertex-shader" type="x-shader/x-vertex">
    attribute vec2 a_position;
    uniform float t;
    varying float T;
    void main() {
        // gl_Position = vec4(a_position, 0.0, t);
        T = t;
        gl_Position = vec4(a_position[0], a_position[1], 0.0, 1.0);
    }
</script>

<script id="2d-fragment-shader" type="x-shader/x-fragment">
    precision mediump float;
    varying float T;
    void main() {
        gl_FragColor = vec4(0.0 ,1.0,0.0,1.0);
    }
</script>
```

Basis

Sind b_1, b_2, b_3 linear unabhängig, dann heisst die geordnete Menge $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ Basis des \mathbb{R}^3 .

Basisdarstellung

Für $v \in \mathbb{R}^3$ heisst

$$\theta_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = v$$

Darstellung von v bezüglich der Basis B .

Basiswechsel berechnen

$$\theta_B(v) = M_B \cdot v, \quad M_B := (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^{-1} \text{ (column major)}$$

Basiswechsel

Seien $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ und $B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$ zwei Basen des \mathbb{R}^n . Dann heißt $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$ die Basiswechselmatrix von B nach B' . Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{M_B^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow I_n & & \downarrow M_B^{B'} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{B'}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Skalarprodukt

Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := v^t \cdot w = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot w_i$$

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$ ist.

Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} := \sqrt{v^t \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}$$

Ein Vektor v heißt normal, falls $\|v\| = 1$ ist. Ist w ein beliebiger Vektor, so heißt $\frac{1}{\|w\|} w$ die Normalisierung von w , denn er ist normal.

Satz

Für den von zwei Vektoren u, v eingeschlossenen Winkel φ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Kreuzprodukt

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von u und v . Es gilt

- $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Orthonormalbasis

Eine Basis $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle b_i normal.

Basis-Wechsel-Matrix

Ist $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

Drehungen

Eine Matrix $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls $O^{-1} = O^t$ ist. Sie ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\}.$$

Ist $\det(O) = 1$, so nennen wir O eine Drehung und $SO(n) := \{O \in \mathbb{M}^{n \times n} \mid \det(O) = 1\}$ die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

Basis-Wechsel-Matrix

Sei $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt für alles $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle O \cdot v, O \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

und somit insbesondere

$$\|O \cdot v\| = \|v\|.$$

Eulerwinkel

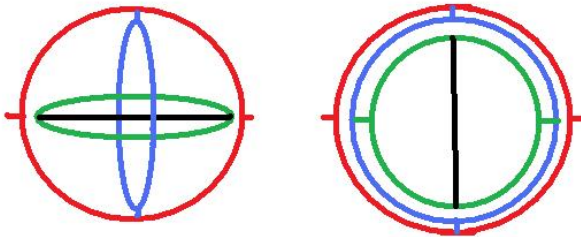
Jede Drehung $O \in SO(3)$ lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \pm \sin(\phi) \\ 0 & \mp \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel ϕ, ψ, ξ heißen Eulerwinkel.

Eulerwinkel

Die Zerlegung $O \in SO(3)$ einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock". $SO(3)$ ist also nicht das Produkt von drei Intervallen sondern es ist $SO(3) = S^3/\{\pm 1\}$.



Affiner Raum

Der Affine Raum \mathbb{A}^3 ist ein Tupel $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, +, \cdot))$ zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ \overline{PQ} &:= Q - P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^3, +, \cdot) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_3 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_3 + v_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Affiner Raum

Die Elemente (Vektoren) aus \mathbb{R}^3 nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ ist also \overline{PQ} ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

Affine basis

Ist $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ und $P \in \mathbb{A}$ ein Punkt, so nennen wir das Tupel (P, B) eine affine Basis. Für jeden Punkt Q gibt es dann also Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot b_i .$$

Der Punkt $\theta_{(P,B)}(Q) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ heißt die Darstellung von Q bezüglich der affinen Basis (P, B) .

Affine Abbildung

Abbildungen der Form

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(P) &:= A \cdot P + t\end{aligned}$$

mit $A \in M^{3 \times 3}$ und $t \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit $A = I_3$ und $t \neq 0$ Translation.

Abstand

Der Abstand von $P, Q \in \mathbb{A}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}d : \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(P, Q) &:= \|\overline{PQ}\|.\end{aligned}$$

Affiner Basiswechsel

Sind $(P, B := \{b_1, \dots, b_n\})$ und $(P', B' := \{b'_1, \dots, b'_n\})$ zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\theta_{(P,B)}(Q) := M_B \cdot Q - M_B \cdot P = M_B(Q - P),$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xleftarrow{\theta_{(P,B)}^{-1}} & \mathbb{A}^n \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta_{(P,B)}^{(P',B')} \\ \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\theta_{(P',B')}} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

$$\text{mit } \theta_{(P,B)}^{(P',B')}(Q) := \theta_{(P',B')} \left(\theta_{(P,B)}^{-1}(Q) \right).$$

Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^3 := \mathbb{R}^4 - \{0\} / \sim$$
$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} .$$

Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mid p_4 \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{A}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

Ferne Punkte

Die Menge der Punkte $F_3 := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cong \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Identifikation der fernen Punkte

Es ist $F_3 \cong \mathbb{P}^2$

Zerlegung des projektiven Raum

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten". Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^3 &= \mathbb{A}^3 \cup F_3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup F_2 \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\} \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1\end{aligned}$$

Projektive Abbildungen

Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$v \mapsto A \cdot v$$

setzt sich wegen der Eigenschaft $A \cdot (\lambda v) = \lambda A \cdot v$ zu einer Abbildung

$$\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$p \mapsto A \cdot p$$

fort.

Projektive Abbildungen

Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ \phi(v) &:= A \cdot v + t\end{aligned}$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

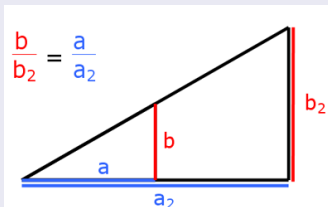
$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Zentralprojektion

Die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

realisieren die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d in homogenen Koordinaten.



Zentralprojektion

Die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X - Y$ -Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

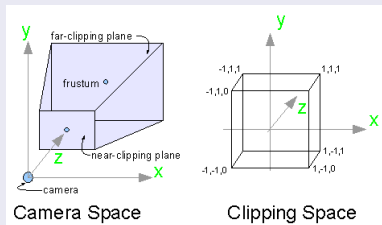
$$\text{persp}_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K_{\text{persp}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

$$\mapsto K_{\text{orth}_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

Clipping Koordinaten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f-n}{f-n} & \frac{-2 \cdot f \cdot n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$



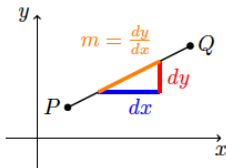
$MVP := ModelViewProjectionMatrix$

Bresenham

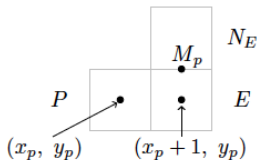
Die Strecke $S = \overline{PQ} \in \mathbb{R}^n$ soll auf ein (n -dimensionales Pixel-) Raster abgebildet werden

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$$M_p = \left(x_p + 1, y_p + \frac{1}{2} \right)$$



(a) Steigungsdreieck



(b) Pixelraster

Bresenham

$$M_p \begin{cases} \text{oberhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } E \\ \text{unterhalb } \overline{PQ} & \Rightarrow \text{ wähle } N_E \end{cases}$$

$$F(x, y) := dy \cdot x - dx \cdot y + dx \cdot b$$

$$(x, y) \in y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = 0$$

bzw.

$$F(x, y) \quad \begin{cases} = 0 & (x, y) \text{ liegt auf } S \\ > 0 & (x, y) \text{ liegt unterhalb von } S \\ < 0 & (x, y) \text{ liegt oberhalb von } S \end{cases}$$

Bresenham

$$D_p := 2 \cdot F(M_p)$$

1. Fall: $D_p < 0 \Rightarrow$ Nachfolgepixel ist E

$$\begin{aligned} D_E &= 2 \cdot F(M_E) \\ &= 2 \cdot F\left(x_p + 2, y_p + \frac{1}{2}\right) \\ &= dy \cdot (2x_p + 4) - dx \cdot (2y_p + 1) + 2 \cdot b \cdot dx \\ &= D_p + \Delta_E \\ \text{mit } \Delta_E &:= 2 \cdot dy \end{aligned}$$

2. Fall: $D_p \geq 0 \Rightarrow$ Nachfolgepixel ist NE

$$\begin{aligned} D_{NE} &= 2 \cdot F(M_{NE}) \\ &= D_p + \Delta_{NE} \\ \text{mit } \Delta_{NE} &:= 2dy - 2dx \end{aligned}$$

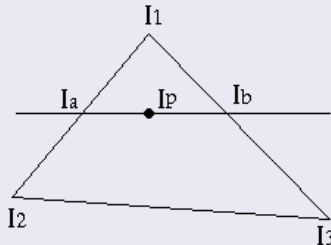
Anti Aliasing



Kantenglättung z.B. mit Gaußfilter.

Interpolation

GLSL interpoliert Werte innerhalb eines Fragmentes linear zwischen den im Vertex-Shader gesetzten Werten. Dies kann zum Beispiel mit Hilfe eines Sweepline-Algorithmus realisiert werden.



Fläche

Ein Fläche (Parametrisierung) ist eine Abbildung

$$s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

bei der die Abbildungen $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Sie heißt differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \end{pmatrix}$$

existieren.

Tangentialraum

Die Ebene

$$T_s(u, v) := \left\{ s(u, v) + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt Tangentialebene am Punkt (u, v) und der Vektor

$$n(u, v) := \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v),$$

welcher Senkrecht auf dieser Ebene steht, die Normale.

Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral ist definiert durch

$$\int_S d\omega := \int_U \|n(u, v)\| dU .$$

und analog

$$\int_S f d\omega := \int_U f(s(u, v)) \cdot \|n(u, v)\| dU .$$

für eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Man nennt $d\omega$ beziehungsweise $\|n(u, v)\|$ das infinitessimale Flächenelement.

Fubini

Ist $U = U_1 \times U_2 \in \mathbb{R}^2$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_U f \, d(U_1 \times U_2) = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_2 dU_1 = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_1 dU_2 .$$

Die Sphäre S^2

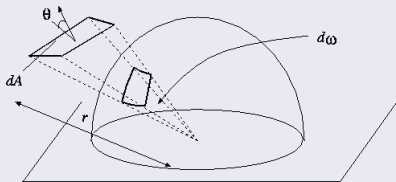
$$s : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(u, v) := \begin{pmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \sin(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \right\| = \sin(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d\omega &= \int_{[0, \pi) \times [0, 2\pi)} \sin(u) d(u \times v) = \int_{[0, 2\pi)} \int_{[0, \pi)} \sin(u) du dv \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Transformationsformel



$$d\omega = \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) dA, \quad \pi(x) := \frac{x}{||x||} \quad (1)$$

$$V(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{xy} \cap (A - \{x, y\}) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{\pi(A)} f \cdot d\omega = \int_A f \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) \cdot V(a, 0) dA, \quad (3)$$