Johannes Riesterer
Donnerstag, 22. Oktober 2015 10:15

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ lin. unabh.

Eine Basis ist eine geordnete Menge

$\{v_1, v_2, v_3\}$.

geordnet bedeutet $\{v_2, v_3, v_1\} \underset{\text{Menge}}{\overset{\text{geord.}}{\neq}} \{v_1, v_2, v_3\}$

Allg. Eine geordnete Menge

$M = \{b_1, \dots, b_n\}$ von n lin. Vektoren

heißt Basis, falls $b_1, \dots, b_n$ lin. unab. sind

$(\emptyset = \{\})$

Ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$

und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es also

Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$\underline{v = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\lambda_i} \cdot b_i} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Theta_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Basisdarstellung von v bzgl. der Basis B

Bsp. $\mathbb{R}^2$:

$B := \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}\}$ $= S_2$ $\qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\Theta_B(v)} = ? = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{3}_{\lambda_1} \cdot e_1 + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cdot e_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Def. $S_n = \{e_1, \dots, e_n\}$

$B' := \{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}\}$ $\qquad \Theta_{B'}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = ? \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$$\underbrace{2}_{\lambda_1} \cdot b_1 + \underbrace{3}_{\lambda_2} \cdot b_2 = \underbrace{2}_{\lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{3}_{\lambda_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Seien $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ und

$B' := \{b_1', \dots, b_n'\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$

und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es die zwei

Darstellungen $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{B'}(v)$

und $v \in \mathbb{R}^n$: Dann ist es die zwei Darstellungen $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{B'}(v)$

Frage: Eg Sei B Basis und S Standardbasis

Geg $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Was ist v?

Angenommen $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

d.h. $v = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$ weil dann $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$v = b_1$ denn dann $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\vdots$, $\lambda_n = 0$

genauso

$\Theta_B(v) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v = b_2$

$\Theta_B(v) = e_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow v = b_i = M \cdot e_i$

Column-Major

$M = \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \right)$

Was ist $M \cdot e_i = (b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i-te

$= b_i$

Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ lässt sich bzgl. B als Summe von Standardbasisvektoren schreiben

$\Theta_B(v) = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w_1 \cdot e_1 + w_2 \cdot e_2 + \dots + w_n e_n$

Wir wissen auch

$$(*) \begin{cases} A \cdot (v + w) = Av + Aw \\ A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot A \cdot v, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D.h. $M \cdot \Theta_B(v) = M \cdot (w_1 \cdot e_1 + \dots w_n \cdot e_n)$

D.h. $M \cdot \Theta_B(v) = M \cdot (\underbrace{w_1 \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot e_n}_{= w})$ $\in \mathbb{R}$

$\overset{(*)}{=} w_1 \cdot \underbrace{M \cdot e_1}_{b_1} + \dots + w_n \cdot \underbrace{M \cdot e_n}_{b_n}$

$= w_1 \cdot b_1 + \dots + w_n \cdot b_n$

Somit ist $M \, \Theta_B(v) = M \cdot w = v$

weil $\Theta_B(w_1 b_1 + \dots + w_n \cdot b_n) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w$

---

d.h. M rechnet um von der Darstellung bzgl. B in die Standardbasis.

Also $v = M \cdot w$ wobei $w = \Theta_B(v)$

Um v bzgl. B darzustellen, wollen wir nach w „auflösen"

Wie kriegen wir M weg?

$$\underline{\underline{M^{-1}}} \cdot M = I_n$$

Angenommen es gibt M^{-1} dann

$M^{-1} \cdot v = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I_n} \cdot w$

$M^{-1} \cdot v = I_n \cdot w$

$M^{-1} \cdot v = \underline{\underline{w}}$

<u>Satz</u>: $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis

$\Rightarrow$ $b_1, \dots, b_n$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ $M = (b_1 | \dots | b_n)$ ist mit Gauß auf I_n umformen

Mitprot.

$\rightsquigarrow$ erhalte M^{-1}

$M = (b_1 | \dots | b_n)$

$M' = (b_1' | \dots | b_n')$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Theta_B(v) = M^{-1} \cdot v} \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{M\cdot w = \Theta_B^{-1}(w)} \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "\Theta_{B'}(v) = (M')^{-1}\cdot v"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, shift left, "\Theta_{B'}^{-1}(v) = M'"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\Theta_B(v)^{-1} = M\cdot v"'] \arrow[d, dotted] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, leftarrow, "I_n"'] \arrow[r, "\Theta_{B'}(v) = (M')^{-1}\cdot v"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

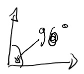
$$\underline{M_B^{B'} = (M')^{-1} M}$$

z.B. $B' = S = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow M' = I_n$

Was bedeutet senkrecht bzw. orthogonal

in Zeichen $v \perp w$ (senkrecht)

Intuition:



Aber wie soll man Winkel ausrechnen?

Skalarprodukt:

$$\underset{\sim}{\langle \cdot , \cdot \rangle} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t \cdot v$$

$$u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u^t \in M^{1\times n}$$

manchmal auch $\boxed{u \cdot v = \text{Dotproduct}}$

$$\Rightarrow \underbrace{u^t}_{\in M^{1\times n}} \cdot \underbrace{v}_{\in M^{n\times 1}} \in \mathbb{R} = M^{1\times 1}$$

Bsp.

$$v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle = (1\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0$
$= 0$

$\langle v, u \rangle = (1\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1$
$= 0$

Def $v \perp w$ (v senkrecht/orthogonal zu/auf w)
$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Bsp: $S_3 := \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \}$

$\langle e_1, e_2 \rangle = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle e_1, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

$\langle e_2, e_2 \rangle = 1 \quad \langle e_3, e_3 \rangle = 1$

$\Rightarrow e_1 \perp e_2 \quad e_2 \perp e_3$

$e_1 \perp e_3$

Gibt es noch andere solche Basen und was soll "solche" bedeuten.

Def Eine Basis $B = \{ b_1, \dots, b_n \}$ heißt Orthonormalbasis (kurz: ONB) falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Standardbasis ist eine ONB!
Gibt es noch andere?

Bsp. $B = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$\langle b_1, b_2 \rangle = (\dots)(1)$

$\ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$\langle b_1, b_1 \rangle = (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = \underline{2}$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$

B ist eine ONB, die nicht die Standardbasis ist..

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \langle b_1, b_1 \rangle$

$= \frac{1}{2} \cdot 2$

$= \frac{2}{2} = 1$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat folgende Eigenschaften:

- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle = (v_1 \cdots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{v_i \cdot w_i}_{\text{Zahlen darf man „drehen"}} = \sum w_i \cdot v_i$

$= (w_1 \cdots w_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$= \langle w, v \rangle$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $\langle \lambda \cdot v, \mu \cdot w \rangle = \lambda \cdot \mu \cdot \langle v, w \rangle$

da $\sum \lambda \cdot v_i \cdot \mu \cdot w_i$

$= \lambda \cdot \mu \cdot \sum v_i \cdot w_i$

$(3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$

$= 3 \cdot (1 + 2 + 3)$

„ausklammern"

1) $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

2) „ausklammern"

$\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$

Achtung: $\langle v+w, \underbrace{u+\ell}\rangle$

1) $= \underbrace{\langle v, u+\ell\rangle} + \underbrace{\langle w, u+\ell\rangle}$

2) $= \langle v, u\rangle + \langle u, \ell\rangle \quad \langle w, u\rangle + \langle u, \ell\rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2$

$= 8$

Skalieren damit $= 1$?

Suchen also eine Zahl λ mit

$\lambda \cdot \lambda = \frac{1}{8}$

$\lambda^2 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=8}$

$\frac{1}{8} \cdot 8 = \underline{1}$

Definition: Norm:

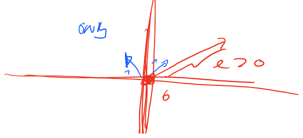
$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

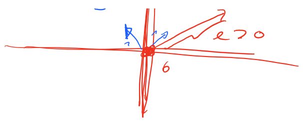
$\| v \| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\geq 0 ?}}$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\sum v_i \cdot v_i = \sum \underbrace{(v_i)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eine Art Länge ...





Ein Vektor v mit $\langle v,v\rangle = 1$

$\Leftrightarrow \|v\| = 1$ da $\sqrt{1} = 1$

ONB Vektoren haben (Länge / Norm) 1

Eigenschaften

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$|a+b| \neq \|a\| + \|b\|$

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v,v\rangle}$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle v,v\rangle}$$
$$|\lambda| \cdot \sqrt{\langle v,v\rangle}$$
$$|\lambda| \cdot \|v\|$$

$|\sigma| = 1$

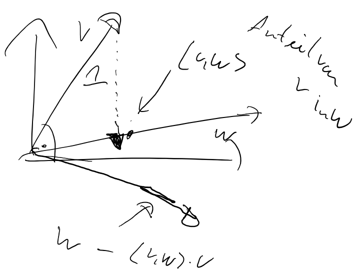
$\operatorname{sgn}(-1) = -1$

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$\langle w - \langle v,w\rangle \cdot v, v\rangle$ Anteil rausrechnen

wenn $\|v\| = 1$

$$\langle w,v\rangle - \langle v,w\rangle \cdot \langle v,v\rangle$$
$$= \langle w,v\rangle \cdot \underbrace{(1 - \underbrace{\langle v,v\rangle}_{=1})}_{=0}$$
$$= 0$$



Algo: Gram-Schmidt

Gram-Schmidt

$\{ b_1, \ldots, b_n \}$

Rekursiv Anteile rausziehen und normieren

$b_1' := \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1$ Normieren

Da $\|b_1'\| = \|\frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1\|$

$\underbrace{\left|\frac{1}{\|b_1\|}\right|}_{>0} \cdot \|b_1\|$

$= \frac{\|b_1\|}{\|b_1\|} = 1$

$b_2'' := \underbrace{b_2 - \langle b_1', b_2 \rangle \cdot b_1'}$

Anteil von b_1' rausziehen

$b_2' := \frac{1}{\|b_2''\|} \cdot b_2''$ Normieren

$\vdots$

$b_n'' := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_n, b_i' \rangle \cdot b_i'$

$b_n' := \frac{1}{\|b_n''\|} \cdot b_n''$ ziehe alle vorigen Anteile raus

---

$B = \{ b_1, \ldots, b_n \}$

ONB

$\Theta_B := (b_1 | \ldots | b_n)^{-1}$

Aber:

$(b_1 | \ldots | b_n)^t \cdot (b_1 | \ldots | b_n)$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \\ \vdots \\ \hline b_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 | \ldots | b_n)$

$= (a_{ij})_{ij} = b_i^t \cdot b_j$

$= \langle b_i, b_j \rangle$

$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{i=j} = I_n$

$\Rightarrow \partial_B := (b_1 | \dots | b_n)^t$

Bsp

$n = 2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

normieren $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$

$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} = \sqrt{-1(-1) + 1 \cdot 1}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}$

$\langle b_1, b_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$\frac{1}{2} \cdot (-1 + 1) = 0$

$\Rightarrow b_1 \perp b_2$

$\| b_1 \| = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$

$= 1$

d.h. $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

u.a. $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ist eine ONB!

$$\Theta_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overset{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\overset{=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$2\cdot\cancel{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1} + (-\sqrt{2}) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

05.11.2015

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$u_1 \quad v_1$

$u_2 \quad v_2$

$-1 \cos(s) \cdot$ [illegible]

$$O_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in SO(2)\,?$$

$$O_2(\varphi) \in SO(2) \Leftrightarrow \det(O_2(\varphi)) = 1$$

$$\det(O_2(\varphi)) = \cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - (\sin(\varphi)\cdot(-\sin(\varphi)))$$
$$= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)$$

Formel $= 1$

z. B.

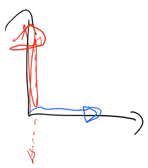
$$\sin(\varphi) = \sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$$

$$O_2(\varphi)^t = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

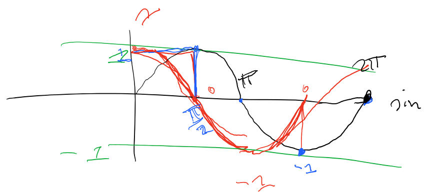
$$O_2(\varphi)\cdot O_2(\varphi)^t = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) & \\ \cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi) & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \sim 90^\circ$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

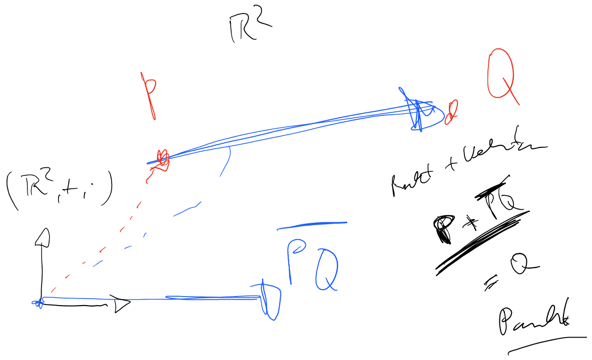


$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$O_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Johannes Riesterer
Donnerstag, 22. Oktober 2015
10:15

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ lin. unabh.

Eine Basis ist eine geordnete Menge

$\{v_1, v_2, v_3\}$.

Geordnet bedeutet $\{v_2, v_3, v_1\} \underset{\text{Menge}}{\overset{\text{geord.}}{\neq}} \{v_1, v_2, v_3\}$

Allg. Eine geordnete Menge

$M = \{b_1, \dots, b_n\}$ von n lin. Vektoren

heißt Basis, falls $b_1, \dots, b_n$ lin. unab. sind

$(\emptyset = \{ \})$

Ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es also Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$\underline{v = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\lambda_i} \cdot b_i} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Theta_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Basisdarstellung von v bzgl. der Basis B

Bsp. $\mathbb{R}^2$:

$$B := \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{e_2} \} \qquad v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\Theta_B(v) = ? = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3}_{\lambda_1} \cdot e_1 + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cdot e_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

S_2

Def. $S_n = \{ e_1, \dots, e_n \}$

$$B' := \{ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{b_2} \} \qquad \Theta_{B'}\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) = ? \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2}_{\lambda_1} \cdot b_1 + \underbrace{3}_{\lambda_2} \cdot b_2 = \underbrace{2}_{\lambda_1} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \underbrace{3}_{\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Seien $B := \{ b_1, \dots, b_n \}$ und $B' := \{ b_1', \dots, b_n' \}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es die zwei Darstellungen $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{B'}(v)$

Frage: Sei B Basis und S Standardbasis

Geg $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Was ist v?

Angenommen $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

d.h. $v = \underline{1} \cdot b_1 + \underline{0} \cdot b_2 + \dots + \underline{0} \cdot b_n$

weil dann $\Theta_B(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v = b_1$ denn dann $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

$\vdots$

$\lambda_n = 0$

genauso

$\Theta_B(v) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v = b_2$

$\Theta_B(v) = e_i \qquad i \in \{1, \dots n\}$

$\Rightarrow v = b_i = M \cdot e_i$

Column-Major

$M = \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \right)$

Was ist $M \cdot e_i = (b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i-te

$= b_i$

Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ lässt sich bzgl. B als Summe von Standardbasisvektoren schreiben

$\Theta_B(v) = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w_1 \cdot e_1 + w_2 \cdot e_2 + \dots + w_n \cdot e_n$

Wir wissen auch

$$(*) \begin{cases} A \cdot (v + w) = Av + Aw \\ A \cdot (\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \cdot v) = \lambda \cdot A \cdot v \end{cases}$$

D.h. $M \cdot \dots$

Wir wissen auch

$$(*)\begin{cases} A\cdot(v+w) = Av + Aw \\ A\cdot(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{Q}}\cdot v) = \lambda\cdot A\cdot v \end{cases}$$

D.h. $M\cdot \Theta_B(v) = M\cdot(\underbrace{w_1\cdot e_1 + \dots w_n\cdot e_n}_{=w})$

$\overset{(*)}{=} w_1\cdot \underbrace{M\cdot e_1}_{b_1} + \dots + w_n\cdot \underbrace{M\cdot e_n}_{b_n}$

$= w_1\cdot b_1 + \dots + w_n\cdot b_n$

Somit ist $M\,\Theta_B(v) = M\cdot w = v$

weil $\Theta_B(w_1 b_1 + \dots w_n\cdot b_n) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n\end{pmatrix} = w$

---

d.h. M rechnet um von der Darstellung bezgl. B in die Standardbasis.

Also $v = M\cdot w$ wobei $w = \Theta_B(v)$

Um v bzgl. B darzustellen, wollen wir nach w „auflösen"

Wie kriegen wir M weg?

$$M^{-1}\cdot M = I_n$$

Angenommen es gibt M^{-1} dann

$M^{-1}\cdot v = \underbrace{M^{-1}\cdot M}_{I_n}\cdot w$

$M^{-1}\cdot v = I_n\cdot w$

$M^{-1}\cdot v = w$

Satz: $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis

$\Rightarrow b_1, \dots b_n$ lin unabh.

$\Rightarrow M = (b_1 | \dots | b_n)$ ist inv

Gauß auf I_n umformen

Mitmot.
$\rightsquigarrow$ erhalte M^{-1}

$$M = (b_1 | \dots | b_n)$$
$$M' = (b_1' | \dots | b_n')$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Theta_B(v) = M^{-1} v} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{M \cdot w = \Theta_B^{-1}(w)} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Theta_{B'}(v) = (M')^{-1} \cdot v} \mathbb{R}^n$$

$$\xleftarrow[\Theta_{B'}^{-1}(v) = M']{}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[d, "I_n"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\Theta_B(v)^{-1} = M \cdot v"'] \arrow[d, dotted] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\Theta_{B'}(v) = (M')^{-1} \cdot v"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$M_B^{B'} = (M')^{-1} M$$

z.B. $B' = S = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow M' = I_n$

Was bedeutet Senkrecht bzw. orthogonal

in Zeichen $v \perp w$
↑ senkrecht

Intuition:

Aber wie soll man Winkel ausrechnen?

Skalarprodukt:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t \cdot v \qquad ($$

$u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u^t \in M^{1\times n}$

manchmal auch

$\boxed{u \cdot v = \text{Dotproduct}} \Rightarrow \underbrace{u^t \cdot v}_{} \in \mathbb{R} = M^{1\times 1}$

$\in M^{1\times n} \quad \in M^{n\times 1}$

Bsp.

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle = (1 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2$

$= 2 + 4 = 4$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle = (1 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0$

$= 0$

$\langle v, u \rangle = (1 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1$

$= 0$

Def $\quad v \perp w \quad$ (v senkrecht/orthogonal zu/auf w)

$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Bsp. $\quad S_3 := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\}$

$\langle e_1, e_2 \rangle = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\langle e_1, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

$\langle e_2, e_2 \rangle = 1 \quad \langle e_3, e_3 \rangle = 1$

$\Rightarrow e_1 \perp e_2 \quad e_2 \perp e_3$

$e_1 \perp e_3$

Gibt es noch andere solche Basen und was soll "solche" bedeuten

<u>Def</u> Eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ heißt <u>Orthonormalbasis</u>

(kurz: ONB) falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Standardbasis ist eine ONB!

Gibt es noch andere?

<u>Bsp.</u> $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\langle b_1, b_1 \rangle = (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$

B ist eine ONB, die nicht die Standardbasis ist..

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \langle b_1, b_1 \rangle$

$= \frac{1}{2} \cdot 2$

$= 1$

2

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ hat folgende Eigenschaften:

- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (v_1 \cdots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{v_i \cdot w_i}_{\text{Zahlen darf man „drehen"}} = \sum w_i \cdot v_i$$

$$= (w_1 \cdots w_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \langle w, v \rangle$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $\langle \lambda \cdot v, \mu \cdot w \rangle = \lambda \cdot \mu \cdot \langle v, w \rangle$

da $\sum \underline{\lambda} \cdot v_i \cdot \underline{\mu} \cdot w_i$

$$= \lambda \cdot \mu \cdot \sum v_i \cdot w_i$$

$$(3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$$
$$= 3 \cdot (1 + 2 + 3)$$

„ausklammern"

1) $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

2) „ausklammern"

$\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$

Achtung: $\langle v + w, \underbrace{u + l}_{} \rangle$

1)

$= \langle v \ldots$

2) „aufteilen"
$\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$

Achtung: $\langle v+w, u+\ell\rangle$

1) $= \langle v, u+\ell\rangle + \langle w, u+\ell\rangle$

2) $= \langle v, u\rangle + \langle u, \ell\rangle \quad \langle w, u\rangle + \langle u, \ell\rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2$
$= 8$

⇝ Skalieren damit $= 1$?

Suchen also eine Zahl λ mit
$\lambda\cdot\lambda = \frac{1}{8}$
$\lambda^2 = \frac{1}{8}$
$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle}_{=8}$

$\frac{1}{8}\cdot 8 = \underline{1}$

Definition: Norm:

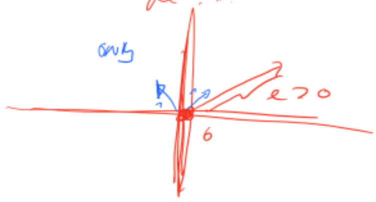
$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\|v\| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\geq 0 ?}}$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \sum v_i \cdot v_i = \underbrace{\sum \underbrace{(v_i)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

$=0 \quad \|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \overset{\Leftarrow 0}{} \; v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Eine Art Länge ...



Ein Vektor v mit $\langle v, v\rangle = 1$

$\Leftrightarrow \|v\| = 1$ da $\sqrt{1} = 1$

ONB Vektoren haben $\overset{\text{Norm}}{(\text{Länge})}$ 1

Eigenschaften

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\|a+b\| \neq \|a\| + \|b\|$

$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v, v\rangle}$

$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle}$

$|\lambda| \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle}$

$|\lambda| \cdot \|v\|$

$(|-1| = 1$

$\operatorname{sgn}(-1) = -1)$

$v, w \in \mathbb{R}^n$

Anteil von ...

$v, w \in \mathbb{R}^n$

Anteil raus rechn

$\langle w - \langle v,w \rangle \cdot v, v \rangle$

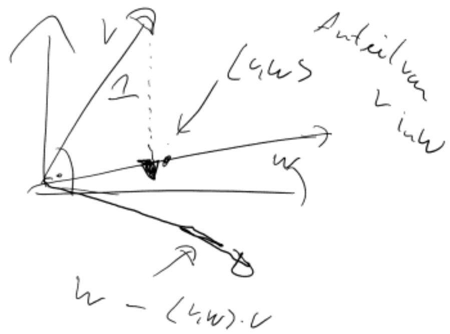
wenn $\|v\|=1$

$\langle w,v \rangle - \langle v,w \rangle \cdot \langle v,v \rangle$

$= \langle w,v \rangle \cdot (1 - \underbrace{\langle v,v \rangle}_{=1})$

$= 0$

$= 0$



Algo

b_1

b_n

Schmidt

Rekursiv Anteile rausziehen und normieren

$$b_1' := \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1$$ Normieren

Da
$\|b_1'\| = \|\frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1\| = \underbrace{\left|\frac{1}{\|b_1\|}\right|}_{>0} \cdot \|b_1\| = \frac{\|b_1\|}{\|b_1\|} = 1$

$$b_2'' := b_2 - \langle b_1', b_2 \rangle \cdot b_1'$$

Anteil von b_1' rausziehen

$$b_2' := \frac{1}{\|b_2''\|} \cdot b_2''$$ Normieren

$\vdots$

$$b_n'' := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_n, b_i' \rangle \cdot b_i'$$

$$b_n' := \frac{1}{\|b_n''\|} \cdot b_n''$$ ziehe alle vorigen Anteile raus

---

$$B = \{ b_1, \ldots, b_n \}$$
ONB

$$\Theta_B := (b_1 | \ldots | b_n)^{-1}$$

Aber:

$$\left(b_1 \mid \dots \mid b_n\right)^t \cdot \left(b_1 \mid \dots \mid b_n\right)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \\ \vdots \\ \hline b_n \end{pmatrix} \cdot \left(b_1 \mid \dots \mid b_n\right)$$

$$= (a_{ij})_{ij} = b_i^t \cdot b_j$$

$$= \langle b_i, b_j \rangle$$

$$= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \; i=j \quad = I_n$$

$$\Rightarrow \quad \partial_B := \left(b_1 \mid \dots \mid b_n\right)^t$$

Bsp

$n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normieren $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$

$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} = \sqrt{-1(-1) + 1 \cdot 1}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}$$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \overset{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\overset{\parallel}{\frac{1}{2}}} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-1 + 1) = 0$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} = \sqrt{-1(-1)+1\cdot 1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{b_1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{b_2}$$

$$\langle b_1, b_2\rangle = \overset{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}\cdot\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\cdot(-1+1) = 0$$

$\Rightarrow b_1 \perp b_2$

$$\|b_1\| = \sqrt{\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1\cdot 1+1\cdot 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$$

$$= 1$$

d.h. $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

ist eine ONB!

$$\Theta_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Theta_B(v) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}} \overset{\shortparallel}{\ } 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\\ \frac{-2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\overbrace{2\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{b_1} + \overbrace{(-\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}^{b_2}$$

$$= 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1\\2-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

05.11.2015

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2\cdot v_3 - u_3\cdot v_2\\ u_3\cdot v_1 - u_1\cdot v_3\\ u_1\cdot v_2 - u_2\cdot v_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}u_1 & & v_1\\ u_2 & & v_2\end{matrix}$$

$$O_1(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix} \in SO(2)\,?$$

$$O_2(\varphi) \in SO(2) \Leftrightarrow \det(O_2(\varphi)) = 1$$

$$\det(O_2(\varphi)) = \cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - (\sin(\varphi)(-\sin(\varphi)))$$

$$= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)$$

z.B. Formel $= 1$

$$\boxed{\sin(\rho) = \sqrt{1-\cos^2(\rho)}}$$

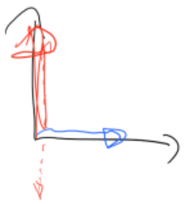
$$D_2(\rho)^t = \begin{pmatrix} \cos(\rho) & \sin(\rho) \\ -\sin(\rho) & \cos(\rho) \end{pmatrix}$$

$$D_2(\rho)\cdot D_2(\rho)^t = \begin{pmatrix} \cos^2(\rho)+\sin^2(\rho) & \\ \cos(\rho)\cdot\sin(\rho) - \cos(\rho)\cdot\sin(\rho) & \end{pmatrix}$$

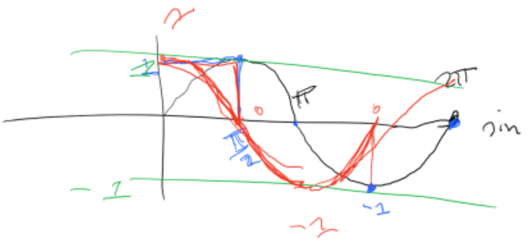
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{\pi}{2} \sim 90^\circ$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

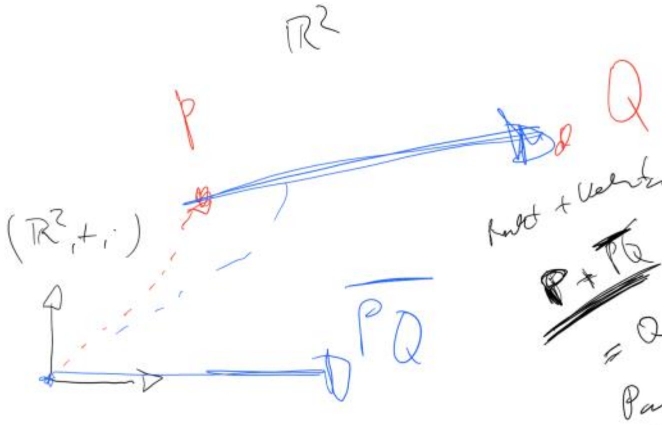


$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$D_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Punkt + Vektor

$P + \overline{PQ}$

$= Q$

Punkt