

Einführung in die Computergrafik

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Matrizen.

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A \in M^{n \times m}$, alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^m$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $A(v + w) = Av + Aw$.
- (b) $A(\lambda v) = \lambda Av$.

Aufgabe 1 alternativ. Kreuzprodukt.

(4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

- (a) $x \times y = -y \times x$.
- (b) x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$ ist.
- (a) $\langle x, x \times y \rangle = \langle y, x \times y \rangle = 0$.

Aufgabe 2. Basisdarstellung und Basiswechsel.

(4 Punkte)

Gegeben seien die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B_2 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des \mathbb{R}^3 und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Orthonormalbasis ist.
- (b) Berechnen Sie $\theta_{B_1}(v)$ und $\theta_{B_2}(v)$.
- (c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{B_1}^{B_2}$.

Aufgabe 3. Affine Basis und affiner Basiswechsel.

(4 Punkte)

Gegeben seien die affine Basen (p_1, B_1) und (p_2, B_2) des \mathbb{A}^3 mit B_1, B_2 aus Aufgabe 2,

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie $\theta_{(p_1, B_1)}(v)$ und $\theta_{(p_2, B_2)}(v)$.
- (b) Es sei $\theta_{(p_1, B_1)}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\theta_{(p_2, B_2)}(w)$.