

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ lin. unabh.

Eine Basis ist eine geordnete Menge

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

geordnet bedeutet $\{v_1, v_3, v_2\} \neq \{v_1, v_2, v_3\}$

Def.: Eine geordnete Menge

$$M = \{b_1, \dots, b_n\} \text{ von } n \text{-lin. unabh. Vektoren}$$

haupt Basis, falls b_1, \dots, b_n lin.-unab. sind

$$(\emptyset \neq \{\})$$

lgt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n

und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt es also

$$\text{Skalare } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ mit } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$$

$$\Theta_B : (\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)$$

$$v \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Basisdarstellung von } v \text{ bzgl der Basis } B$$

Bsp.: \mathbb{R}^2 :

$$B := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_v = \underbrace{\mathbb{R}}_{\lambda_1} \underbrace{\mathbb{R}}_{\lambda_2} \quad \underline{\Theta_B(v)} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1} + \frac{2}{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def.: $S_n = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$B' := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b'_2} \right\} \quad \underline{\Theta_{B'}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)} = ? \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b'_1} + \frac{3}{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b'_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Seien $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ und

$B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$ zweite Basis des \mathbb{R}^n

und $v \in \mathbb{R}^n$ dann ist es die zwei Darstellungen $\Theta_B(v)$ und $\Theta_{B'}(v)$

und $\nu \in \mathbb{R}^n$.
 dann ist es die zweite
 Darstellung $\Theta_g(v)$ und $\Theta_{g'}(v)$

Frage: Wie ist Basis und Scharakterbasis?

$$g(v) \oplus_{\mu}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{Was ist } v?$$

$$\text{Angenommen } \Theta_a(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\text{d.h. } b = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad b = b_n \quad \text{da}n \quad b_n = 1$$

weil dan $b_3 n = \binom{n}{3}$

$$b_3 = 0 \quad b_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$b_1 = 0$$

permaneo.

$$= D \quad V = b,$$

$$\theta_{\alpha}(v) = v_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\tilde{D} \cdot v = b_i \approx M \cdot e_i$$

$$M = \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \right)$$

Column Major

$$\text{Was ist } m_{\varepsilon_i} = (b_1/b_2 \dots b_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{?}$$

Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ lässt sich bzgl. δ als
Summe von δ linear abhängigen
Silben schreiben

$$\phi_{k_1}(v) = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w_1 \cdot e_1 + w_2 \cdot e_2 + \dots + w_n \cdot e_n$$

$$\begin{aligned} \text{We will see and} \\ (\times) \quad A \cdot (v+w) &= Av + Aw \\ A \cdot (\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot Av \end{aligned}$$

$$\text{D.h. } \mu \cdot \varphi_D(x) = \mu \cdot (\underbrace{w_1 \cdot e_1 + \dots + w_m \cdot e_m}_\text{...})$$

d.h. $M \cdot \vartheta_B(v) = M \cdot (\underbrace{w_1 \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot e_n}_w)$

$$\stackrel{(x)}{=} w_1 \cdot M \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot M \cdot e_n$$

$$= \underbrace{w_1 \cdot b_1}_b + \dots + \underbrace{w_n \cdot b_n}_b$$

Somit ist $M \vartheta_B(v) = M \cdot w = v$

Wert $\vartheta_B(w_1 \cdot b_1 + \dots + w_n \cdot b_n) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \cdot a$

d.h. M kennt nun von der Darstellung bez. B in die Standardsbasis.

Aber $v = M \cdot u$ woher $u = \vartheta_B(v)$

Um v bzgl. B darzustellen, müssen wir nach w "auflösen"

Wie lösen wir M auf?

$$\underline{M^{-1}} \cdot M = I_n$$

Angenommen es gibt M^{-1} dann

$$M^{-1} \cdot v = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I_n} \cdot w$$

$$M^{-1} \cdot v = I_n \cdot w$$

$$\underline{M^{-1} \cdot v = w}$$

Satz 2: $B(b_1, \dots, b_n)$ Basis

$\Rightarrow b_1, \dots, b_n$ lin. unabh.

$$\Rightarrow u = (b_1 | \dots | b_n) \text{ ist mit}$$

Junkt auf I_n umkehrbar

M. knot.
nD welche M^{-1}



$$u = (b_1 | \dots | b_n)$$

$$u' = (b'_1 | \dots | b'_n)$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vartheta_B(v) = u' \cdot v} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{\quad \mu \cdot w = \varphi_B^{-1}(w) \quad} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad \varphi_B(w) = (M')^{-1} \cdot v \quad} \mathbb{R}^n$$

\downarrow

$$\varphi_B'(v) = M'$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\quad \varphi_B(v) = \mu \cdot v \quad} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_n & & M'^{-1} = (M)^T \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad \varphi_B(v) = (M')^{-1} \cdot v \quad} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\therefore b' = s = \{e_1, \dots, e_m\} = u' = I_n$

Was bedeutet Senkrecht bzw. orthogonal
insbesondere $v \perp w$
Intuition:



Aber wie soll man Winkel ausrechnen?

Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t \cdot v$$

$$u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

manchmal auch

$\boxed{u \cdot v \text{ oder } \text{dot product}} \Rightarrow u^t \cdot v \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^{1 \times 1}$
 $\in \mathbb{R}^{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Bsp.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= (1 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ &= 2 + 0 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\langle v, u \rangle = (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Def $v \perp w$ (v senkrecht/orthogonal zu w auf w)

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

Bsp: $\mathcal{B}_3 := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\}$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle e_2, e_3 \rangle &= (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 0 \\ &\quad \langle e_1, e_1 \rangle = 1 \\ &\quad \langle e_2, e_2 \rangle = 1 \\ &\quad \langle e_3, e_3 \rangle = 1 \\ \Rightarrow e_1 &\perp e_2 \quad e_1 \perp e_3 \\ &\quad e_2 \perp e_3 \\ &\quad e_1 \perp e_3 \end{aligned}$$

Sieht es nach anderen solche Basis
und was soll "solche" bedeuten.

Def Eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
heißt orthonormalsbasis

(kurz: ONB) falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Standardsbasis ist eine ONB!

Sieht es nach anderen?

Bsp: $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mid \langle b_i, b_j \rangle = 1 \dots, 1 \mid$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)$$

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_2 \rangle &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 = 1 \\ \underbrace{\langle b_1^T \cdot b_1, b_2^T \cdot b_2 \rangle}_{B \text{ ist eine ONB, die nicht die Standardbasis ist...}} &= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \\ \langle b_1^T \cdot b_1, b_2^T \cdot b_2 \rangle &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat folgende Eigenschaften:

$$-\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^n w_i \cdot v_i \\ &\quad \text{Zahlen darf man „drehen“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \langle w, v \rangle \end{aligned}$$

$$-\langle \lambda \cdot v, \mu \cdot w \rangle = \lambda \cdot \mu \cdot \langle v, w \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{da } \sum \lambda \cdot v_i \cdot \mu \cdot w_i &= \lambda \cdot \mu \cdot \sum v_i \cdot w_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3) &= 3 \cdot (1 + 2 + 3) \\ &\quad \text{„ausklammern“} \end{aligned}$$

$$1) \langle v + w, v \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle$$

$$2) \langle v, w + v \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle$$

Definition: $\langle v + w, u + l \rangle$

$$\begin{aligned} 1) &= \underbrace{\langle v, u + l \rangle}_{\text{!}} + \underbrace{\langle w, u + l \rangle}_{\text{!}} \\ L &= \underbrace{(v, u) + (w, u)}_{(v, u) + (w, u)} + \underbrace{(v, l) + (w, l)}_{(w, l) + (w, l)} \end{aligned}$$

~~~~~

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 8$$

$\xrightarrow{\text{!}}$  keinem damit = 1 ?

Sagen also eine Zahl  $\lambda$  mit

$$\lambda \cdot \lambda = \frac{1}{8}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{8}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \underbrace{\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}_{=8} = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

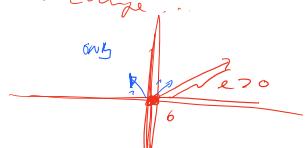
Definition: Norm:

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

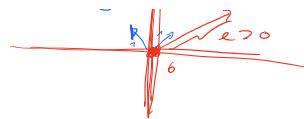
$$\|v\| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0}}$$

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \sum v_i \cdot v_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i^2}_{\geq 0} \geq 0 \\ &\Rightarrow \|v\| \geq 0 \quad \|v\|=0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Art Länge







Ein Vektor  $v$  mit  $\|v\|_2 = 2$

$$\cancel{\text{FD}} \quad \|v\|_2 = 2 \quad \text{da } \sqrt{4} = 2$$

Drei Vektoren haben  $\|v\|_2 = 1$

Eigenschaften

$$\|a+b\| \neq \sqrt{a^2 + b^2}$$

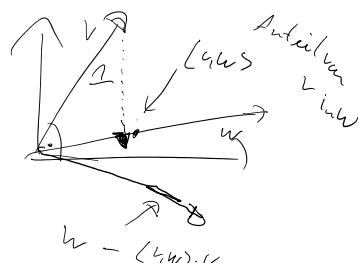
$$\|a+b\| \cancel{\neq} \|a\| + \|b\|$$

$$\begin{aligned} \| \lambda \cdot v \| &= \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

$$|\lambda| \cdot \|v\|$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda|=2 \\ \operatorname{sgn}(-7)=-1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} v, w &\in \mathbb{R}^n \\ \langle w - \langle v, w \rangle \cdot v, v \rangle &\quad \text{Anteil von } v \\ \langle w, v \rangle - \langle v, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle &= \|v\|_2^2 \\ &= \langle v, v \rangle \cdot (1 - \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\frac{1}{2}}) \\ &= 0 \end{aligned} \right\} = 0$$



$\left\{ \text{Also: fram-Id} \right.$



$$\{ b_1, \dots, b_n \} \quad \text{gram-Schmidt}$$

Rechnung unterteilt Raum in  
und normieren

$$b_1' := \left( \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1 \right) \text{ Normieren } \quad \|b_1'\| = \left\| \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1 \right\|$$

$$b_2'' := \underbrace{\left( b_2 - \langle b_1', b_2 \rangle \cdot b_1' \right)}_{\text{Anteil von } b_2 \text{ kausal}} \quad \begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\|b_2\|} \cdot b_2'' \right\| \\ &= \frac{\|b_2\|}{\|b_2\|} = 2 \end{aligned}$$

Anteil von  $b_2'$  kausal

$$b_2' := \frac{1}{\|b_2'\|} \cdot b_2'' \quad \text{Normieren}$$

⋮

$$b_n''' := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_n, b_i' \rangle \cdot b_i' \quad \cancel{\text{zur nächsten Kausal}}$$

$$b_n' := \frac{1}{\|b_n'\|} \cdot b_n''' \quad \text{zur alle kausal auf}$$

$$b = \{ b_1, \dots, b_n \} \quad \text{DNB}$$

$$\Theta_B := \left( b_1 | \dots | b_n \right)^{-1}$$

Aber:

$$(b_1 | \dots | b_n)^t \cdot (b_1 | \dots | b_n)$$

$$\left( \begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \\ \vdots \\ \hline b_n \end{array} \right) \cdot (b_1 | \dots | b_n)$$



$$= \left( a_{ij} \right)_{ij} = b_i^t \cdot b_j$$

$$= (b_i^t \cdot b_j)$$

$$\subseteq \{ \overset{\circ}{\sigma} \}_{\sigma \text{ anis}}$$

$$\geq \pi_n$$

$$\Rightarrow \partial_B := (b_1 | \dots | b_n)^t$$

Bsp

n = 2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$$

$$\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2} = \sqrt{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}$$

$$(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot -1 + 1 \cdot 1) = 0$$

$$\Rightarrow b_1 \perp b_2$$

$$\begin{aligned} \| b_1 \| &= \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d.h.

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist end ONB !

$$\Theta_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Theta_B(v) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 \cdot \sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{Prob. : } \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{2 \cdot \sqrt{2}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{(-\sqrt{2})}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

05.11.2015

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

~~$u_1$~~   ~~$v_1$~~   
 ~~$u_2$~~   ~~$v_2$~~   
 ~~$u_3$~~   ~~$v_3$~~

$\rightarrow \cos(\alpha)$ ,  $\alpha = 10^\circ$



$\hookrightarrow \rightsquigarrow$

$$Q_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \in SO(2).$$

$$Q_2(\vartheta) \in SO(2) \Leftrightarrow \det(Q_2(\vartheta)) = 1$$

$$\begin{aligned} \det(Q_2(\vartheta)) &= \cos(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) - (\sin(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta)) \\ &= \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \end{aligned}$$

Found  $= 1$

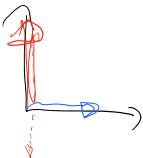
$$\sin(\vartheta) = \sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}$$

$$Q_2(\vartheta)^T = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

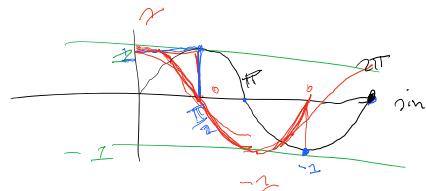
$$Q_2(\vartheta) \cdot Q_2(\vartheta)^T = \begin{pmatrix} \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \approx 90^\circ$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



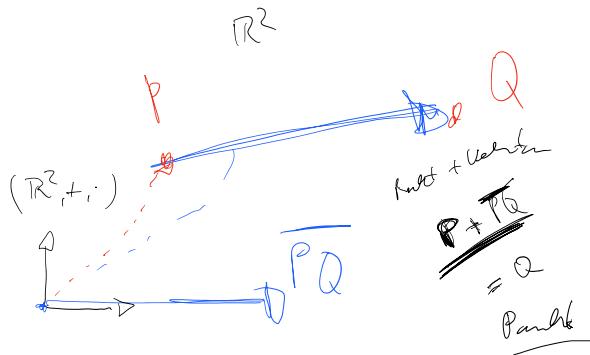
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$Q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





Johannes Riesterer  
Donnerstag, 22. Oktober 2015  
10:15

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  lin. unabh.

Eine Basis ist eine geordnete Menge

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

geordnet bedeutet  $\{v_1, v_2, v_3\} \neq_{\text{ord.}} \{v_3, v_1, v_2\}$

Def.: Eine geordnete Menge

$M = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $n$ -dim. Vektoren

heißt Basis, falls  $b_1, \dots, b_n$  lin.-unab. sind

$$(\emptyset \neq \{\})$$

Ist  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$

und  $v \in \mathbb{R}^n$ , dann gibt es also

Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$



$$\Theta_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Basisdarstellung  
von  $v$  bezgl der  
Basis  $B$

Bsp.  $\mathbb{R}^2$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_n} \quad \underbrace{\Theta_B(v)}_{= ?} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{\lambda_1} \cdot \underbrace{e_1}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \frac{2}{\lambda_2} \cdot \underbrace{e_2}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S_n$

Def.

$$S_n = \{e_1, \dots, e_n\}$$


---

$$B' := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$$

$$\Theta_{B'} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = ? \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{\lambda_1} \cdot b_1 + \frac{3}{\lambda_2} \cdot b_2 = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\lambda_1} + 3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\lambda_2}$$

$$= (0) + (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Seien  $B'_n := \{b_1, \dots, b_n\}$  und

$B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$  zweit Basis  
des  $\mathbb{R}^n$

und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist es die zwei  
Darstellungen  $\Theta_B(v)$  und  $\Theta_{B'}(v)$

Frage: Sei  $B$  Basis und  $S$  Standardbasis



$$g) \quad \Theta_b(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{Was ist } v?$$

$$\text{Angenommen } \Theta_b(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\text{d.h. } v = b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n \quad \text{ist dann } \lambda_1 = 1$$

weil dann  $\Theta_b(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0 \quad \vdots \quad \lambda_n = 0$$

Zum Aus.

$$\Theta_b(v) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = b_2$$

$$\Theta_b(v) = e_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow v = b_i = M \cdot e_i$$

$$M = \begin{pmatrix} b_1 | b_2 | \dots | b_n \end{pmatrix}$$

(column major)

$$\text{Was ist } M \cdot e_i = (b_1 | b_2 | \dots | b_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\text{iter}} \\ = b_i$$

Jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  lässt sich als

Summe von Standardbasisvektoren

schreiben

$$\Theta_b(v) = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w_1 \cdot e_1 + w_2 \cdot e_2 + \dots + w_n \cdot e_n$$

Wir wollen auch

$$(x) \left\{ \begin{array}{l} A \cdot (v+w) = Av + Aw \\ \cancel{A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot Av} \end{array} \right.$$

d.h.  $A \cdot \dots$



Wir wissen auch

$$\left( \begin{array}{l} A \cdot (v+w) = Av + Aw \\ A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot Av \end{array} \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned} u \cdot \vartheta_B(v) &= u \cdot \underbrace{(w_1 \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot e_n)}_{= w} \\ &= w_1 \cdot u \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot u \cdot e_n \\ &\quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\in b_1} \quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\in b_n} \\ &= w_1 \cdot b_1 + \dots + w_n \cdot b_n \end{aligned}$$

Somit ist  $u \cdot \vartheta_B(v) = u \cdot w = v$

Wert

$$\vartheta_B(w_1 \cdot b_1 + \dots + w_n \cdot b_n) = \underbrace{(w_1 \dots w_n)}_{= w} \cdot u$$

d.h.  $M$  redet uns von der Darstellung bez.  $B$  in die Standardbasis.

Aberso  $v = u \cdot w$  woher  $w = \vartheta_B(v)$

Um  $v$  bzgl.  $B$  darzustellen, wollen wir nach  $w$  "auflösen"

Wie lösen wir  $M$  weg?

$$\underline{M^{-1}} \cdot M = I_n$$

Angenommen es gibt  $M^{-1}$  dann

$$M^{-1} \cdot v = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I_n} \cdot w$$

$$M^{-1} \cdot v = I_n \cdot w$$

$$M^{-1} \cdot v = w$$

Satz 2:  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  Basis

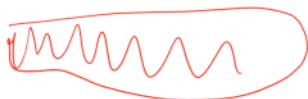
$\Rightarrow b_1, \dots, b_n$  lin. unabh.

$$\Rightarrow u = (b_1 | \dots | b_n) \text{ ist a.w.}$$



Dann auf  $\mathbb{R}^n$  umfragen

Motiv.  
nD schalle  $\mu^{-1}$



$$u = (b_1 | \dots | b_n)$$

$$\mu' = (b'_1 | \dots | b'_n)$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\theta_B(v) = \mu \cdot v} D \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[u \in \mathbb{R}^n]{\mu \cdot u = \theta_B^{-1}(u)}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\theta_B'(v) = (\mu')^{-1} \cdot v} \mathbb{R}^n$$

+

$$\theta_B'^{-1}(\mu') = \mu'$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\theta_B(v)^{-1} = \mu \cdot v} \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} I_n & \downarrow & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\theta_B(v) = (\mu')^{-1} \cdot v} & \mathbb{R}^n \\ & \nearrow & \downarrow \\ & M_{b'}^{b'} = (\mu')^{-1} M & \end{array}$$

$$\text{z.B. } b' = s - \{e_1, \dots, e_m\} = u' = I_n$$

Was bedeutet Senkrecht bzw. orthogonal

bedeutet  $v \perp w$

Senkrecht

Definition:



Aber wie soll man Winkel ausrechnen?

Skalarprodukt:

$$\underbrace{\langle \cdot, \cdot \rangle}_{\text{Skalarprodukt}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle u, v \rangle := u^t \cdot v \quad ($$



$$u, v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u^t \in M^{1 \times n}$$

handbuch und

$$\underbrace{[u \cdot v \text{ or dot product}]}_{\in M^{1 \times n}} \Rightarrow \underbrace{u^t \cdot v}_{\in M^{1 \times 1}} \in \mathbb{R} = M^{1 \times 1}$$

$$\in M^{1 \times n} \in M^{1 \times 1}$$

Bsp.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ = 2 + 4 = 6$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ = 0$$

$$\langle v, u \rangle = (1 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 \\ = 0$$

Def  $v \perp w$  ( $v$  senkrecht/orthogonal zu  $w$  auf  $w$ )

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

Bsp.:  $S_3 := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\}$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = 0$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = 0 \quad \langle e_1, e_1 \rangle = 1$$

$$\quad \quad \quad \langle e_2, e_2 \rangle = 1 \quad \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow e_1 \perp e_2 \quad e_1 \perp e_3$$



$$e_1 \perp e_3$$

Sieht es noch anders aus  
und was soll "anders" bedeuten.

Def Eine Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$   
heißt orthonormale Basis

(kurz: ONB) falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Standardsbasis ist eine ONB!

Sieht es noch anders aus?

Bsp.  $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\langle b_1, b_1 \rangle = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1 = 2$$

$$\underbrace{\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$B$  ist eine ONB, die nicht die Standardsbasis ist..

$$\underbrace{\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle}_{= \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}_{= \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} = 1$$



$\langle \cdot, \cdot \rangle$  hat folgende Eigenschaften:

-  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= (v_1 \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot \underbrace{w_i}_{\text{Zahlen darf man „drehen“}} = \sum w_i \cdot v_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (w_1 \dots w_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \langle w, v \rangle \end{aligned}$$

-  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

-  $\langle \lambda \cdot v, \mu \cdot w \rangle = \lambda \cdot \mu \cdot \langle v, w \rangle$

da  $\sum \lambda \cdot v_i \cdot \mu \cdot w_i$

$$= \lambda \cdot \mu \cdot \sum v_i \cdot w_i$$

$$\begin{aligned} &(3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot (1 + 2 + 3) \end{aligned}$$

„ausklammern“

1)  $\langle v+w, v \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle$

2)  $\langle v, w+v \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle$   
„ausklammern“

Addition:  $\langle v+w, \underbrace{u+l} \rangle$

1)  $= \langle v, u \rangle + \langle v, l \rangle + \langle w, u \rangle + \langle w, l \rangle$



$$\text{2) } \langle v, w+u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$$

„additiv“

Def:  $\langle v+w, u+l \rangle$

$$\begin{aligned} 1) &= \underbrace{\langle v, u+l \rangle}_{\langle v, u \rangle + \langle v, l \rangle} + \underbrace{\langle w, u+l \rangle}_{\langle w, u \rangle + \langle w, l \rangle} \\ 2) &= \underbrace{(\langle v, u \rangle + \langle v, l \rangle) + (\langle w, u \rangle + \langle w, l \rangle)}_{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle + \langle v, l \rangle + \langle w, l \rangle} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 8$$

$\xrightarrow{\quad}$  Koeffizient damit = 1 ?

Suchen also eine Zahl  $\lambda$  mit

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \lambda &= \frac{1}{8} \\ \lambda^2 &= \frac{1}{8} \\ \Rightarrow \lambda &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \underbrace{\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}_{=8} = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

Definition: Norm:



$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

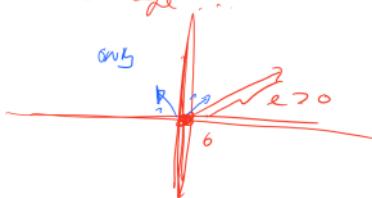
$$\|v\| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0?}}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \sum v_i \cdot v_i = \sum (v_i)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 \geq 0 \quad \text{da } \sum (v_i)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|v\| \geq 0 \quad \text{da } \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Art Länge ...



Ein Vektor  $v$  mit  $\langle v, v \rangle = 7$

$$\Leftrightarrow \|v\| = \sqrt{7} \quad \text{da } \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

OBEN Vektoren haben  $\overset{\text{Norm}}{\text{Länge}} = 1$

Erwähnbar

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\|a+b\| \neq \|a\| + \|b\|$$

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v, v \rangle}$$

$$= \sqrt{|\lambda|} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$|\lambda| \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$|\lambda| \cdot \|v\|$$

$$\left( |\lambda| = 1 \right)$$

(z.B.  $-\pi$ )

$$\boxed{v, w \in \mathbb{R}^n}$$

Anteil aus  $\mathbb{R}^n$



$$\begin{aligned}
 & v, w \in \mathbb{R}^n \\
 & \langle w - \langle v, w \rangle \cdot v, v \rangle \quad \text{Anteil parallel zu } v \\
 & \langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle \quad \|v\|=1 \\
 & = \langle v, v \rangle \cdot (1 - \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=1}) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$



$$w - \langle v, w \rangle \cdot v$$

$\alpha$

frame

□

{

b<sub>n</sub>

}

b<sub>n</sub>

lunidt

# Rekurrenz unterteile Raumvektor und normieren

$$b_1' := \left( \frac{1}{\|b_n\|} \cdot b_n \right) \text{ Normieren}$$

$$\|b_n'\| = \left\| \frac{1}{\|b_n\|} \cdot b_n \right\|$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\|b_n\|} \cdot b_n \right\| \\ & \geq \frac{\|b_n\|}{\|b_n\|} = 1 \end{aligned}$$

$$b_2'' := b_2 - (b_1' \cdot b_2) \cdot b_1'$$

Anteil von  $b_1'$  ausschließen

$$b_2' := \frac{1}{\|b_2''\|} \cdot b_2'' \text{ Normieren}$$

:

$$b_n'' := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} (b_i, b_n) \cdot b_i'$$

$$b_n' := \frac{1}{\|b_n''\|} \cdot b_n'' \quad \text{zelle alle Vektoren aus } \mathbb{R}^n$$

$$b = \{ b_1, \dots, b_n \}$$

UNB

$$\Theta_b := \left( b_1 | \dots | b_n \right)^{-1}$$



Aber:

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_{ij})_{ij} = b_i^t \cdot b_j$$

$$= (b_i b_j)$$

$$= I_n$$

$$\begin{pmatrix} \circ & 0 & \dots \\ 0 & \circ & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{i=j} = I_n$$

$$= D \quad \partial_B := (b_1 \dots b_n)^t$$

Bsp

$$\underline{n=2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierung } \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$$

$$\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2} = \sqrt{-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1} \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}$$

$$(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-1 + 1) = 0$$



$$\|(-\gamma)\| = \sqrt{2} = \sqrt{-1(-1)_{1,1,2}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1)}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)}_{b_2}$$

$$(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot ((1), (-1)) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-1 + 1) = 0$$

$\Rightarrow b_1 \perp b_2$

$$\begin{aligned}\|b_2\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1)(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

d.h.  $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) \right\}$   
ist end ONB!

$$\Theta_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Theta_B(v) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

05.11.2015

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \in SO(2) ?$$

$$\Omega(\vartheta) \in SO(2) \Leftrightarrow \det(\Omega(\vartheta)) = 1$$

$$\begin{aligned} \det(\Omega(\vartheta)) &= \cos(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) - (\sin(\vartheta)) \cdot (\sin(\vartheta)) \\ &= \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \end{aligned}$$



$$2. B. \quad \text{Found} = 1$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)}$$

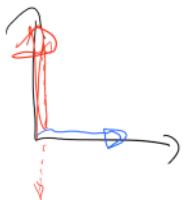
$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ -\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

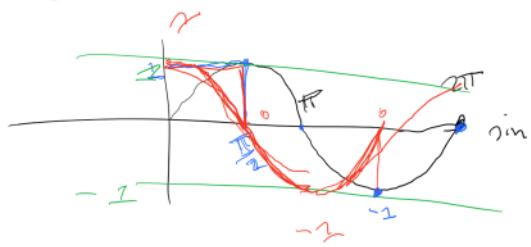
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \approx 90^\circ$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



