Formelsammlung Methodenlehre

Download der aktuellen Version unter https://johannes-titz.github.io/formelsammlung/main.pdf

Diese Formelsammlung wurde für Studierende der Psychologie entwickelt, ist aber vermutlich auch für Studierende anderer Sozialwissenschaften hilfreich. Die Formelsammlung basiert auf einer alten Sammlung der Professur für Forschungsmethoden und Evaluation in der Psychologie an der TU Chemnitz, die weder Autoren noch Lizenz enhielt. Für eine sinnvolle Nutzung und Weiterentwicklung ist eine Lizenz notwendig, weshalb wir das vorliegende Dokument unter CC BY-SA 4.0 veröffentlichen. Die Formelsammlung orientiert sich am Lehrbuch von Sedlmeier und Renkewitz (2018). Die Autoren der Formelsammlung sind: Johannes Titz, Nils Heimhuber, Feline Baumgärtel. Weitere Mitwirkende: Vivien Lungwitz, Annika Sternkopf. Für wertvolle Hinweise bedanken wir uns bei: Lea Haase.

Einige Hinweise vorab: Lateinische Buchstaben ($\overline{x}, s^2, s$) werden für die Stichprobe verwendet, griechische Buchstaben (μ, σ^2, σ) für die Population. Ein Dach über einer Statistik ($\hat{\sigma}$) steht für eine Schätzung des Parameters. Abkürzungen:

MWU: Mittelwertsunterschied US: Unabhängige Stichproben AS: Abhängige Stichproben

Lagemaße

Modalwert

Der Modalwert ist der häufigste Wert aller Messwerte. Es kann mehrere Modal-Werte geben.

Mittelwert

Auch bezeichnet als arithmetisches Mittel, für den Mittelwert der Population wird der Buchstabe μ verwendet.

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Median

Der Median ist der Wert in der Mitte aller in einer Rangreihe geordneten Messwerte.

$$\text{Tiefe}_{\text{Med}} = \frac{n+1}{2}$$

Quartile

Die Werte müssen in eine Rangreihe gebracht werden. Für das untere Quartil wird die Tiefe von unten gezählt, fürs obere Quartil von oben. Quartile werden manchmal auch als die Quantile Q_{25}, Q_{75} bezeichnet.

$$\text{Tiefe}_{\text{Quartil}} = \frac{\lfloor \text{Tiefe}_{\text{Med}} \rfloor + 1}{2}$$

Zäune bei Boxplots

Die Zäune werden benötigt um die Whiskers zu bestimmen. Die Whiskers sind durch tatsächlich vorkommende Werte repräsentiert. Von den Zäunen aus geht man in Richtung Box, bis man den ersten vorkommenden Wert findet.

$$\text{Zaun}_{\text{unten}} = Q_{25} - 1{,}5 \cdot \text{IQA}$$
$$\text{Zaun}_{\text{oben}} = Q_{75} + 1{,}5 \cdot \text{IQA}$$

Streuungsmaße

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2}$$

Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Schätzung für Populationsvarianz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

Hinweis: In der mathematischen Statistik wird die *Stichprobenvarianz* üblicherweise mit dem Nenner $n-1$ definiert, da dieser Schätzer erwartungstreu für die Populationsvarianz ist. In den Sozialwissenschaften wird hingegen oft die Variante mit n als *Varianz der Stichprobe* bezeichnet. Hat man dagegen die gesamte Population, so wird auch die *Populationsvarianz* mit n im Nenner berechnet.

Spannweite (Range)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Mittlerer absoluter Abstand

$$\text{MAD} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|$$

Interquartilsabstand

$$\text{IQA} = Q_{75} - Q_{25}$$

Transformation

z-Standardisierung

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}$$
$$\overline{z} = 0$$
$$s_z = 1$$

Zentrierung

$c_i = x_i - \overline{x}$

IQ-Standardisierung

$\mathrm{IQ_i} = z_i \cdot 15 + 100$

Standardfehler für Stichprobenverteilungen

Binomialverteilung

$$\sigma_{\text{Anzahl}} = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\sigma_{\text{Anteil}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Mittelwerte

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

MWU für AS

$$\hat{\sigma}_{\overline{d}} = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{n}}$$

MWU für US

wenn $n_A = n_B$:

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}_\mathrm{A} - \overline{x}_\mathrm{B}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\overline{x}_\mathrm{A}} + \hat{\sigma}^2_{\overline{x}_\mathrm{B}}}$$

wenn $n_A \neq n_B$

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}_\mathrm{A} - \overline{x}_\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{(n_A - 1) \cdot \hat{\sigma}^2_\mathrm{A} + (n_\mathrm{B} - 1) \cdot \hat{\sigma}^2_\mathrm{B}}{(n_\mathrm{A} - 1) + (n_\mathrm{B} - 1)} (\frac{1}{n_\mathrm{A}} + \frac{1}{n_\mathrm{B}})}$$

Bei Ungleichheit der Varianzen in der Population

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}_A - \overline{x}_B} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_A}{n_A} + \frac{\hat{\sigma}^2_B}{n_B}}$$

Zusammenhangsmaße

Kovarianz

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Korrelation

Pearson-Korrelationskoeffizient
(Produkt-Moment-Korrelation)

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x s_y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{x_i} \cdot z_{y_i}$$

Partialkorrelation

$$r_{xy.z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{1 - r^2_{xz}} \cdot \sqrt{1 - r^2_{yz}}}$$

Phi-Koeffizient (für dichotome Variablen)

$$\Phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

	nein	ja
nein	a	b
ja	c	d

Interrater-Reliabilität (Kappa)

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e}$$
$$p_e = \sum_{i=1}^{k} p_{i\cdot}\, p_{\cdot i}$$

p_o:	beobachtete Übereinstimmung
p_e:	erwartete Übereinstimmung unter Zufall
$p_{i\cdot}$:	die Randwahrscheinlichkeit der Zeile i
$p_{\cdot i}$:	die Randwahrscheinlichkeit der Spalte i
k:	die Anzahl der Kategorien

Einfache lineare Regression

Regressionsgleichung

$$\hat{y}_i = a + b \cdot x_i$$
$$b = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x^2} = r\frac{s_y}{s_x}$$
$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$
$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

Determinationskoeffizient

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$$

Standardschätzfehler

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} = s_y \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

Multiple Regression

In den folgenden Formeln wird zur Veranschaulichung der Fall mit zwei Prädiktoren dargestellt. Für mehr als zwei Prädiktoren lassen sich die Regressionsgleichung, die Beziehung zwischen b und β, die Berechnung von b_0 sowie die Formeln für den Standardschätzfehler analog erweitern. Die Berechnung der β-Gewichte und von R^2 erfordert jedoch eine Matrixschreibweise, die nicht überall unterichtet wird.

Regressionsgleichung

für Originalwerte:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i}$$

wobei:

$$b_1 = \beta_1 \cdot \frac{s_y}{s_{x_1}}$$
$$b_2 = \beta_2 \cdot \frac{s_y}{s_{x_2}}$$
$$b_0 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x}_1 - b_2 \cdot \overline{x}_2$$

für z-standardisierte Werte:

$$\hat{z}_{y_i} = \beta_1 \cdot z_{x_{1i}} + \beta_2 \cdot z_{x_{2i}}$$

wobei:

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}$$
$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}$$

Gütemaße

Multipler Determinationskoeffizient

$$R^2 = \beta_1 \cdot r_{yx_1} + \beta_2 \cdot r_{yx_2}$$

Multipler Korrelationskoeffizient

$$R = \sqrt{R^2}$$

Standardschätzfehler für Originalwerte

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} = s_y\sqrt{1 - R^2}$$

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k-1}}$$

k ist die Anzahl der Prädiktoren

Standardschätzfehler für z-standardisierte Werte

$$s_e = \sqrt{1 - R^2}$$

Konfidenzintervalle

Binomialverteilung (Approximation)

Die folgende Approximation über die Normalverteilung ist nur nutzbar, wenn $\sigma^2_{\text{Anzahl}} = n \cdot p \cdot (1-p) > 9$

für Anteile

$$\hat{p} \pm \sigma_{\text{Anteil}} \cdot z_{\text{Konfidenz}}$$

für Anzahlen/Objekte

$$\hat{p} \cdot n \pm \sigma_{\text{Anzahl}} \cdot z_{\text{Konfidenz}}$$

Mittelwert

$$\overline{x} \pm \hat{\sigma}_{\overline{x}} \cdot t_{\text{df,Konfidenz}}$$

MWU, US

$$(\overline{x}_{\text{A}} - \overline{x}_{\text{B}}) \pm \hat{\sigma}_{\overline{x}_{\text{A}} - \overline{x}_{\text{B}}} \cdot t_{\text{df,Konfidenz}}$$

MWU, AS

$$\overline{d} \pm \hat{\sigma}_{\overline{d}} \cdot t_{\text{df,Konfidenz}}$$

t-Test

Mittelwert gegen Konstante

wobei c (constant) vorgegeben

$$t = \frac{\overline{x} - c}{\hat{\sigma}_{\overline{x}}}$$

$$\text{df} = n - 1$$

MWU, US

$$t = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\hat{\sigma}_{\overline{x}_A - \overline{x}_B}}$$

$$\text{df} = (n_A - 1) + (n_B - 1)$$

Hinweis: Berechnung der df gilt nur bei Gleichheit der Populationsvarianzen.

MWU, AS

$$t_{\text{AS}} = \frac{\overline{d}}{\hat{\sigma}_{\overline{d}}}$$

$$\text{df}_{\text{AS}} = n - 1$$

ANOVA US

F-Wert

$$F(\text{df}_{\text{zw}},\text{df}_{\text{inn}}) = \frac{\hat{\sigma}^2_{\text{zw}}}{\hat{\sigma}^2_{\text{inn}}}$$

Schätzer der Populationsvarianzen

$$\hat{\sigma}^2_{\text{zw}} = \frac{\text{QS}_{\text{zw}}}{\text{df}_{\text{zw}}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{inn}} = \frac{\text{QS}_{\text{inn}}}{\text{df}_{\text{inn}}}$$

Hinweis: diese werden auch oft als Mean Squares (MS) bezeichnet.

Quadratsummenzerlegung

$$\text{QS}_{\text{ges}} = \text{QS}_{\text{zw}} + \text{QS}_{\text{inn}}$$

Quadratsummen

$$\text{QS}_{\text{zw}} = \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$

$$\text{QS}_{\text{inn}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2$$

Freiheitsgrade

$$\text{df}_{\text{zw}} = k - 1$$

$$\text{df}_{\text{inn}} = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) = N - k$$

Notation

k: Anzahl der Bedingungen

n_j: Anzahl der Messwerte pro Bedingung j

N: Gesamtzahl der Messwerte

$\overline{\overline{x}}$: Gesamtmittelwert

Hinweis: Gilt für balanciertes Design.

F-Wert

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{UV}}}{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{res}}}$$

Schätzer der Populationsvarianzen

$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{UV}} = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{UV}}}{\mathrm{df}_{\mathrm{UV}}}$$
$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{res}} = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{res}}}{\mathrm{df}_{\mathrm{res}}}$$

Hinweis: diese werden auch oft als Mean Squares (MS) bezeichnet.

Quadratsummen

$$\mathrm{QS}_{\mathrm{ges}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji} - \overline{\overline{x}})^2$$
$$\mathrm{QS}_{\mathrm{UV}} = \sum_{j=1}^{k} n \cdot (\overline{x}_j - \overline{\overline{x}})^2$$
$$\mathrm{QS}_{\mathrm{Person}} = \sum_{i=1}^{n} k \cdot (\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2$$
$$\mathrm{QS}_{\mathrm{res}} = \mathrm{QS}_{\mathrm{ges}} - \mathrm{QS}_{\mathrm{UV}} - \mathrm{QS}_{\mathrm{Person}}$$

Quadratsummenzerlegung

$$\mathrm{QS}_{\mathrm{ges}} = \mathrm{QS}_{\mathrm{UV}} + \mathrm{QS}_{\mathrm{Person}} + \mathrm{QS}_{\mathrm{res}}$$

Freiheitsgrade

$$\mathrm{df}_{\mathrm{gesamt}} = N - 1$$
$$\mathrm{df}_{\mathrm{UV}} = k - 1$$
$$\mathrm{df}_{\mathrm{Person}} = n - 1$$
$$\mathrm{df}_{\mathrm{res}} = (k-1)(n-1)$$

Notation

- k: Anzahl der Bedingungen
- n: Anzahl der Personen
- N: Gesamtzahl der Messwerte
- $\overline{\overline{x}}$: Gesamtmittelwert

Zweifaktorielle Varianzanalyse

Hinweis: gilt nur bei balancierten Designs (gleiche Stichprobengröße)

F-Werte

$$F_A = \frac{\hat{\sigma}^2_A}{\hat{\sigma}^2_{\text{inn}}}$$

$$F_B = \frac{\hat{\sigma}^2_B}{\hat{\sigma}^2_{\text{inn}}}$$

$$F_{A\times B} = \frac{\hat{\sigma}^2_{A\times B}}{\hat{\sigma}^2_{\text{inn}}}$$

Populationsvarianzen

$$\hat{\sigma}^2_A = \frac{\text{QS}_A}{\text{df}_A}$$

$$\hat{\sigma}^2_B = \frac{\text{QS}_B}{\text{df}_B}$$

$$\hat{\sigma}^2_{A\times B} = \frac{\text{QS}_{A\times B}}{\text{df}_{A\times B}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{inn}} = \frac{\text{QS}_{\text{inn}}}{\text{df}_{\text{inn}}}$$

Freiheitsgrade

$$\text{df}_{\text{inn}} = \sum_j^k \sum_l^m (n_{jl} - 1) = N - km$$

$$\text{df}_{\text{A}} = k - 1$$

$$\text{df}_{\text{B}} = m - 1$$

$$\text{df}_{\text{AxB}} = (k-1)(m-1)$$

Quadratsummen

$$\text{QS}_{\text{ges}} = \text{QS}_A + \text{QS}_B + \text{QS}_{A\times B} + \text{QS}_{\text{inn}}$$

$$\text{QS}_{\text{ges}} = \sum_j^k \sum_l^m \sum_i^n (x_{ijl} - \overline{\overline{x}})^2$$

$$\text{QS}_{\text{inn}} = \sum_j^k \sum_l^m \sum_i^n (x_{ijl} - \overline{x}_{jl})^2$$

$$\text{QS}_A = n \cdot m \sum_j^k (\overline{x}_{j\cdot} - \overline{\overline{x}})^2$$

$$\text{QS}_B = n \cdot k \sum_l^m (\overline{x}_{\cdot l} - \overline{\overline{x}})^2$$

$$\text{QS}_{A\times B} = n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \left(\overline{x}_{jl} - \overline{x}_{j\cdot} - \overline{x}_{\cdot l} + \overline{\overline{x}}\right)^2$$

$$\text{QS}_{A\times B} = \text{QS}_{\text{ges}} - \text{QS}_{\text{A}} - \text{QS}_{\text{B}} - \text{QS}_{\text{inn}}$$

Notation

- N: Gesamtzahl der Messwerte der Untersuchung
- n: Anzahl der Messwerte pro Bedingung
- k: Anzahl der Stufen des Faktors A
- m: Anzahl der Stufen des Faktors B
- $\overline{\overline{x}}$: Gesamtmittelwert
- $\overline{x}_{j\cdot}$: Mittelwert für Faktor A, Bedingung j
- $\overline{x}_{\cdot l}$: Mittelwert für Faktor B, Bedingung l

Kontrastanalyse US

$$F_{\text{Kontrast}} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\text{Kontrast}}}{\hat{\sigma}^2_{\text{inn}}}$$

oder

$$F = t^2$$

$$|t_{\text{Kontrast}}| = \sqrt{F_{\text{Kontrast}}}$$

Geschätzte Populationsvarianz

$$\hat{\sigma}^2_{\text{Kontrast}} = \frac{\text{QS}_{\text{Kontrast}}}{\text{df}_{\text{Kontrast}}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{inn}} = \frac{\text{QS}_{\text{inn}}}{\text{df}_{\text{inn}}}$$

Siehe auch ANOVA US.

Quadratsummen

$$\text{QS}_{\text{Kontrast}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{x}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i^2}{n_i}}$$

Freiheitsgrade

$$\text{df}_{\text{Kontrast}} = 1$$

$$\text{df}_{\text{inn}} = N - k$$

Notation

- N: Gesamtzahl der Messwerte
- k: Anzahl der Gruppen
- n_i: Anzahl der Messwerte pro Bedingung i

Kontrastanalyse für AS

Hinweis: Gilt für den Fall ohne Subgruppen.

$$t_{\text{Kontrast}} = \frac{\overline{L}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_L^2}{n}}}$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{k}(x_{ij} \cdot \lambda_j)$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i - \overline{L})^2$$

$$\text{df}_{\text{Kontrast}} = n - 1$$

Notation

$\overline{L}$:	Mittelwert $L-$Werte
$\hat{\sigma}_L^2$:	geschätzte Populationsvarianz der L-Werte
n:	Anzahl der Objekte/Personen, für die mehrere Messungen durchgeführt wurden

Nonparametrische Verfahren

χ^2-Anpassungstests

für eine Variable

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k}\frac{(f_{b,i} - f_{e,i})^2}{f_{e,i}}$$

$$f_{e,i} = N \cdot P_i$$

$$\text{df} = k - 1$$

für zwei Variablen

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{m}\frac{(f_{b,ij} - f_{e,ij})^2}{f_{e,ij}}$$

$$f_{e,ij} = N \cdot P_{ij}$$

$$\text{df} = k \cdot m - 1$$

χ^2-Unabhängigkeitstest

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{m}\frac{(f_{b,ij} - f_{e,ij})^2}{f_{e,ij}}$$

$$f_{e,ij} = \frac{Z_i \cdot S_j}{N}$$

$$\text{df} = (k-1) \cdot (m-1)$$

Bei 2 dichotomen Variablen: $\chi^2 = \phi^2 \cdot N$

U-Test nach Mann und Whitney (Wilcoxon Rangsummen-Test)

1. Messwerte insgesamt in Rangreihe bringen und jedem Messwert einen Rangplatz zuweisen
2. T_1: Summe der Rangplätze der Gruppe 1 T_2: Summe der Rangplätze der Gruppe 2
3. $U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1+1)}{2} - T_1$
   $U' = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2+1)}{2} - T2 = n_1 \cdot n_2 - U$
4. Prüfgröße für die bei uns verwendete Tabelle ist der kleinere der beiden U-Werte

Wilcoxon-Test für AS (Vorzeichenrangtest)

1. Differenzen der Messwertpaare bilden
2. den Beträgen der Differenzen Rangplatz zuweisen (beim kleinsten Betrag mit Rangplatz 1 beginnen)
3. T_-: Summe der Rangplätze der negativen Differenzen T_+: Summe der Rangplätze der positiven Differenzen
4. Prüfgröße für die Tabelle ist der kleinere der beiden T-Werte

Notation

$f_{b,i}$:	beobachtete Häufigkeit
$f_{e,i}$:	erwartete Häufigkeit
P_i:	in Merkmalsausprägung erwarteter Anteil
N:	Anzahl der Untersuchungsteilnehmer
k ; m:	Anzahl der Merkmalsausprägungen beider Merkmale
Z_i:	Zeilenhäufigkeit
S_j:	Spaltenhäufigkeit
ϕ:	Phi-Koeffizient

Faktorenanalyse

1. Faktorladung: $a_{mk} = r(m,k)$
2. Eigenwert: $\lambda_k = \sum_{m=1}^{M} a_{mk}^2$
3. Kommunalität: $h_m^2 = \sum_{k=1}^{f} a_{mk}^2$
4. durch Faktor aufgeklärter Varianzanteil: $\frac{\lambda_k}{M}$

Notation

m: Variable,
k: Anzahl der Faktoren,
i: Person/Objekt,
M: Anzahl der Variablen = Gesamtvarianz
r: Korrelation
f: Anzahl der ausgewählten Faktoren

Clusteranalyse

Nominalskalierte Variablen

		Fall x	
		+	−
Fall y	+	a	c
	−	b	d

Tanimoto-Koeffizient

$$T = \frac{a}{a+b+c}$$

M-Koeffizient

$$M = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Intervallskalierte Variablen

a,b: Fälle
J: Anzahl der Variablen (Dimensionen)
r: Minkowski-Konstante

Minkowski-Metrik

$$d_{a,b} = \left[\sum_{j=1}^{J} |x_{aj} - x_{bj}|^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Euklidische Distanz

$$d_{a,b} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J} |X_{aj} - X_{bj}|^2}$$

Manhatten-Distanz / City-Block-Metrik

$$d_{a,b} = \sum_{j=1}^{J} |X_{aj} - X_{bj}|$$

Konventionen nach Cohen

"These values are necessarily somewhat arbitrary, but were chosen so as to seem reasonable. The reader can render his own judgment as to their reasonableness." (Cohen, 1962)

	d/g	r/w/ϕ	η^2
klein	± 0.2	± 0.1	0.01
mittel	± 0.5	± 0.3	0.06
groß	± 0.8	± 0.5	0.14

***t*-Test: Einstichprobenfall**

$$g = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

$$d = \frac{t}{\sqrt{\mathrm{df}}}$$

***t*-Test: US**

$$g = t_{\mathrm{US}} \cdot \sqrt{\frac{n_{\mathrm{A}} + n_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{A}} \cdot n_{\mathrm{B}}}}$$

$$d = t_{\mathrm{US}} \cdot \frac{n_{\mathrm{A}} + n_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{df}} \cdot \sqrt{n_{\mathrm{A}} \cdot n_{\mathrm{B}}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{t_{\mathrm{US}}^2}{t_{\mathrm{US}}^2 + \mathrm{df}}}$$

Letzteres gilt auch für F, wenn $\mathrm{df}_{\mathrm{zw}}$ 1 sind, da in diesem Fall $F = t^2$.

Vereinfachung, wenn $n_{\mathrm{A}} = n_{\mathrm{B}}$:

$$d = \frac{2 \cdot t_{\mathrm{US}}}{\sqrt{\mathrm{df}}}$$

$$g = \frac{2 \cdot t_{\mathrm{US}}}{\sqrt{n}}$$

***t*-Test: AS**

$$g = \frac{t_{\mathrm{AS}}}{\sqrt{n}}$$

$$d = \frac{t_{\mathrm{AS}}}{\sqrt{\mathrm{df}}}$$

Kontrastanalyse US

aus F-Test

$$r_{\mathrm{effectsize}} = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{Kontrast}}}{F_{\mathrm{zw}} \cdot \mathrm{df}_{\mathrm{zw}} + \mathrm{df}_{\mathrm{inn}}}}$$

$$r_{\mathrm{contrast}} = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{Kontrast}}}{F_{\mathrm{Kontrast}} + \mathrm{df}_{\mathrm{inn}}}} = \sqrt{\frac{t_{\mathrm{Kontrast}}^2}{t_{\mathrm{Kontrast}}^2 + \mathrm{df}}}$$

Kontrastanalyse AS

aus t-Test

$$g = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

χ^2-Tests

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{(P_{b,i} - P_{e,\,i})^2}{P_{e,i}}}$$

aus Ergebnis χ^2-Test:

$$w = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

aus 2 dichotomen Variablen

$$w = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} = \phi$$

ANOVA

US

$$\eta^2 = \frac{F \cdot \mathrm{df}_{\mathrm{zw}}}{F \cdot \mathrm{df}_{\mathrm{zw}} + \mathrm{df}_{inn}}$$

$$\eta^2 = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{zw}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{ges}}}$$

AS

$$\eta^2 = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{UV}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{ges}}}$$

$$\eta_p^2 = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{UV}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{UV}} + \mathrm{QS}_{\mathrm{res}}}$$

mehrfaktoriell

$$\eta^2 = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{Effekt}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{ges}}}$$

$$\eta_p^2 = \frac{\mathrm{QS}_{\mathrm{Effekt}}}{\mathrm{QS}_{\mathrm{Effekt}} + \mathrm{QS}_{\mathrm{inn}}}$$

Effektgrößen aus Rohwerten

$$d = \frac{\overline{x} - c}{s}$$
$$d = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_{\text{AB}}}$$
$$g = \frac{\overline{x} - c}{\hat{\sigma}}$$
$$g = \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\hat{\sigma}_{\text{AB}}}$$

$$s_{\text{AB}} = \sqrt{\frac{s_A^2 n_A + s_B^2 n_B}{n_A + n_B}}$$
$$\hat{\sigma}_{\text{AB}} = \sqrt{\frac{(n_A - 1) \cdot \hat{\sigma}_A^2 + (n_B - 1) \cdot \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$
$$r_{\text{effectsize}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i^n (x_i - \overline{x}) \cdot (\lambda_i - \overline{\lambda})}{s_x \cdot s_\lambda}$$

$$r_{\text{contrast}} = \frac{\text{QS}_{\text{Kontrast}}}{\text{QS}_{\text{Kontrast}} + \text{QS}_{\text{Nicht-Kontrast}}}$$
$$r^2_{\text{alerting}} = \frac{\text{QS}_{\text{Kontrast}}}{\text{QS}_{\text{zw}}}$$
$$g = \frac{\overline{L}}{\hat{\sigma}_L}$$

Odds Ratio (OR)

$$\text{OR} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

	Risikofaktor	ohne Risikofaktor
Krankheit	a	b
Keine Krankheit	c	d

Effektgrößen aus Effektgrößen

Abstandsmaße aus Abstandsmaßen

$$d = g \cdot \sqrt{\frac{n}{\text{df}}}$$
$$g = d \cdot \sqrt{\frac{df}{n}}$$

Korrelationen aus Abstandsmaßen

$$r = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \frac{1}{p \cdot q}}}$$
$$r = \sqrt{\frac{g^2(n_A \cdot n_B)}{g^2(n_A \cdot n_B) + (n_A + n_B)\text{df}}}$$

Abstandsmaße aus Korrelationen

$$d = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{p \cdot q}}$$
$$g = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{\frac{(n_A + n_B) \cdot df}{n_A \cdot n_B}}$$

wobei

$$p = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

und

$$q = \frac{n_B}{n_A + n_B}$$

Meta-Analyse

Mittlere, an der Stichprobe gewichtete, Effektgröße: $\overline{r} = \frac{\sum_i^n (N_i r_i)}{\sum_i^n N_i}$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B wird notiert als $P(A|B)$ und berechnet sich durch:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hierbei ist $P(A \cap B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintreten.

Produktregel

Die Produktregel beschreibt die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens von zwei Ereignissen A und B:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Alternativ kann die Produktregel auch in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Summenregel

Die Summenregel gibt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mindestens eines von zwei disjunkten Ereignissen an:

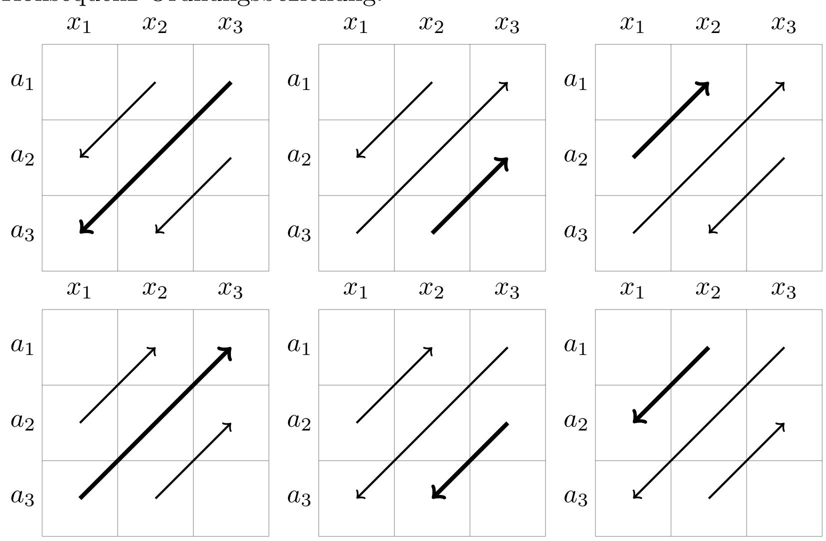
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wahrscheinlichkeitsrevision (Bayes)

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)}$$

Conjoint-Measurement-Theory

Messaxomie fürs Intervallskalenniveau sind teilweise prüfbar über ein Conjoint-Measurement-Experiment. Hierbei geht man davon aus, dass $P = f(A,X)$ wobei f eine non-interaktive Funktion ist. Geprüft werden muss die einfache Aufhebung (single cancellation) und die dopplete Aufhebung (double cancellation). Die einfache Aufhebung besagt, dass alle Zeilen und Spalten der Conjoint-Measurement-Matrix die gleiche Ordnung haben müssen. Die Doppelaufhebung restringiert die möglichen Ordnungen der Matrix. Wenn alle Spalten und Zeilen bereits geordnet sind, lässt sich über folgende Visualisierung die Doppelaufhebung prüfen. Hierbei entsprechen die Pfeile, dem $\leq$-Zeichen. Dünne Pfeile zwischen den Zellen repräsentieren die Antezedenz-Ordnungsbeziehungen, und dicke Pfeile repräsentieren die Konsequenz-Ordnungsbeziehung.



R Verteilungsfunktionen

Funktion	Verteilung	Parameter
`dnorm`	Normalverteilung	`x`, `mean`, `sd`
`pnorm`	Normalverteilung	`q`, `mean`, `sd`, `lower.tail`, `log.p`
`qnorm`	Normalverteilung	`p`, `mean`, `sd`, `lower.tail`, `log.p`
`rnorm`	Normalverteilung	`n`, `mean`, `sd`
`dbinom`	Binomialverteilung	`x`, `size`, `prob`
`pbinom`	Binomialverteilung	`q`, `size`, `prob`, `lower.tail`, `log.p`
`qbinom`	Binomialverteilung	`p`, `size`, `prob`, `lower.tail`, `log.p`
`rbinom`	Binomialverteilung	`n`, `size`, `prob`
`dt`	t-Verteilung	`x`, `df`, `ncp`
`pt`	t-Verteilung	`q`, `df`, `ncp`, `lower.tail`, `log.p`
`qt`	t-Verteilung	`p`, `df`, `ncp`, `lower.tail`, `log.p`
`rt`	t-Verteilung	`n`, `df`, `ncp`
`df`	F-Verteilung	`x`, `df1`, `df2`, `ncp`
`pf`	F-Verteilung	`q`, `df1`, `df2`, `ncp`, `lower.tail`, `log.p`
`qf`	F-Verteilung	`p`, `df1`, `df2`, `ncp`, `lower.tail`, `log.p`
`rf`	F-Verteilung	`n`, `df1`, `df2`, `ncp`

Präfix	Erklärung
`d`	Dichtefunktion: Berechnet die Wahrscheinlichkeitsdichte (z. B. $f(x)$)
`p`	Verteilungsfunktion: Berechnet die kumulierte Wahrscheinlichkeit (z. B. $P(X \leq x)$)
`q`	Quantilfunktion: Berechnet den Wert x, sodass $P(X \leq x) = p$
`r`	Zufallszahlengenerator: Generiert Zufallswerte aus der Verteilung

Parameter	Erklärung
`x`	Werte, an denen die Dichte berechnet wird
`q`	Quantile
`p`	Wahrscheinlichkeiten
`n`	Anzahl der zu generierenden Zufallswerte
`mean`	Mittelwert der Verteilung
`sd`	Standardabweichung
`size`	Anzahl der Versuche
`prob`	Erfolgswahrscheinlichkeit
`df`	Freiheitsgrade
`df1`	Freiheitsgrade des Zählers (F-Verteilung)
`df2`	Freiheitsgrade des Nenners (F-Verteilung)
`ncp`	Nichtzentralitätsparameter (optional)
`lower.tail`	Logisch; wenn TRUE (Standard), werden Wahrscheinlichkeiten $P[X \leq x]$ berechnet
`log.p`	Logisch; wenn TRUE, werden Wahrscheinlichkeiten als Log-Werte ausgegeben

Literatur

Cohen, J. (1962). The statistical power of abnormal-social psychological research: A review. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, 65(3), 146. https://doi.org/10.1037/h0045186

Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2018). Forschungsmethoden und Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler: Pearson