1. Mathematische Grundlagen

1.1. komplexe Zahlen
1.2. Dezibelrechnung
1.3. Additionstheoreme
1.4. Partialbruchzerlegung
1.5. MNF / pq-Formel
1.6. Polynomdivision
1.7. Nullstellen

- Ein Polynom der Ordnung n hat n Nullstellen.
- Sind die Koeffizienten reell, so sind die Nullstellen entweder reell oder komplex konjugiert.

2. Physikalische Grundlagen

Newtonsche Gesetze:

- 1. Newtonsches Gesetz: $F = m \cdot a$
- 2. Newtonsches Gesetz: $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$
- 3. Newtonsches Gesetz: $F = -F_{Gegenseite}$

3. Formelzeichen

Cosinusdarstellung: $a\cos(x) + b\sin(x) = R\cos(x - \phi)$

4. Differentialgleichungen

Auftereten von Nullstellen bei Polynom mit konstanten Koeffizienten:

- reelle Nullstellen: $s_1, s_2, \ldots, s_n$
  $P(s) = (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)$
- komplexe Nullstellen: $s_{n+1} = a + jb$
  $P(s) = (s - s_{n+1})(s - s_{n+2})\ldots(s - s_{n+m})$

Allgemeine Form

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1\frac{du(t)}{dt} + \ldots + b_q\frac{d^q u(t)}{dt^q}$$

- n = Ordnung der DGL ($q \leq n$)
- a_i = Koeffizienten der DGL
- b_i = Koeffizienten der Eingangsgröße
- $y(t)$ = Ausgangsgröße
- $u(t)$ = Eingangsgröße

Die Homogene Lösung ist die Lösung der DGL ohne Eingangsgröße:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Durch Einsetzen der Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$ erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte des Systems. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des Übertragungsfunktionsnenners/Polstellen der Übertragungsfunktion.

Meistens sind inhhomogene DGLs höherer Ordnung gegeben. Diese können gelöst werden durch:

- Variation der Konstanten
- Ansatz der rechten Seite
- Laplace-Transformation

5. Systemeigenschaften

5.1. Linearität

- Superposition: $S\{u_1(t) + u_2(t)\} = S\{u_1(t)\} + S\{u_2(t)\}$
- Homogenität: $S\{k \cdot u(t)\} = k \cdot S\{u(t)\}$

5.2. Zeitinvarianz

- Ein System S ist zeitinvariant, wenn für jede beliebige Zeitverschiebung τ gilt: $y(t - \tau) = S\{u(t - \tau)\}$

5.3. Kausalität

- Ein System S ist kausal, wenn der Wert des Eingangs $u(\bar{t})$ zum Zeitpunkt $\bar{t}$ keinen Einfluß auf den Ausgang $y(t)$ für $t < \bar{t}$ hat.
  Bzw, wenn im Eingang höhere Ableitungen als im Ausgang vorkommen.

5.4. Testsignale

Impulsfunktion $\delta(t)$ mit Gewichtsfunktion $g(t) = S\{\delta(t)\}$:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Sprungfunktion $\sigma(t)$ mit Übergangsfunktion $h(t) = S\{\sigma(t)\}$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta(t)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

Rampenfunktion $r(t)$ mit Anstiegsfunktion $a(t) = S\{r(t)\}$:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}r(t) = \sigma(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)d\tau = t \cdot \sigma(t)$$

6. Güteanforderungen

6.1. Stabilität

- asymptotisch stabil: alle Lösungen der charakteristischen Gleichung haben negative Realteile
- stabil: alle Lösungen der charakteristischen Gleichung haben Realteile ≤ 0
- instabil: mindestens eine Lösung der charakteristischen Gleichung hat einen positiven Realteil, oder es liegt ein Resonanzfall bei $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ vor.

6.2. Stationäre Genauigkeit

- $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$
- $e_{ss} = 0$ für alle stationären Eingangsgrößen

6.3. Dynamisches Verhalten

- Überschwingen: $e_{max} = \max_{t \geq 0} e(t)$
- Einschwingzeit: $t_e = t_{max} - t_{ss}$
- Anstiegszeit: $t_a = t_{ss} - t_0$
- Regelzeit: $t_r = t_{ss} - t_{min}$

6.4. Robustheit

Forderungen 1 - 3 werden trotz Unsicherheiten erfüllt!

- Unsicherheiten bewegen sich innerhalb vorgegebener Grenzen
- Unsicherheiten $\rightarrow$ Unterschiede zwischen Modell u. Wirklichkeit
- Ursache von Unsicherheiten:
  - Modell beschreibt Wirklichkeit nur annähernd und vereinfacht
  - Regelstrecke verändert sich (Toleranzen, Alterung, Verschleiß, ...)

6.5. Modell des Standardregelkreises

Standardregelkreis:

$$Y(s) = G_W(s)W(s) + G_Z(s)Z(s)$$

Übertragungsfunktion der offenen Kette:

$$G_0(s) = G(s)K(s) \qquad \text{mit Kreisverstärkung} \qquad k_0 = G_0(0)$$

Führungsübertragungsfunktion (für $Z(s) = 0$):

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Störübertragungsfunktion (für $W(s) = 0$):

$$G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

$$G_W(s) + G_Z(s) = 1$$

Stabilitätsbedingung der offenen Kette:

$$1 + G_0(s) = 0$$

6.6. Stationäres Verhalten

Bleibende Regelabweichung: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$
Lässt sich im Nenner von $G(s)$ mindestens ein s ausklammern, ist die Bleibende Regelabweichung 0.

Führungssprung: ($w(t) = \sigma(t)$, $z(t) = 0$)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G_0(s)}$$

Störsprung: ($w(t) = 0$, $z(t) = \sigma(t)$)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{-1}{\lim_{s\to 0} G_0(s)}$$

Stabilitäts-/Beiwertbedingungen:

- **Vorzeichenbedingung** (notwendig): System ist asymptotisch stabil $\Rightarrow$ alle Koeffizienten a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ besitzen gleiches Vorzeichen. Für Systeme mit $n \leq 2$ auch hinreichend.
- **Beiwertbedingungen** (hinreichend) für Systeme mit $n > 2$: Determinante der $n \times n$ Hurwitz-Matrix muss $|\Delta_n| > 0$ sein. Für $|\Delta_n| = 0$ grenzstabil.

Hurwitz-Matrix:

$$\begin{bmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0
\end{bmatrix}$$

6.7. PID-Regler

$$u(t) = K_R\{e(t)\} = k_p e(t) + k_i\int_0^\tau e(t)d\tau + k_d\frac{de(t)}{dt}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad K_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

- k_p = Proportionalbeiwert
- k_i = Integralbeiwert
- k_d = Differentialbeiwert
- $T_I = \frac{k_p}{k_i}$ = Nachstellzeit
- $T_D = \frac{k_d}{k_p}$ = Vorhaltezeit

Realisierung des Differentialteils (DT-1 Glied):

$$\frac{k_p T_D s}{Ts + 1}$$

7. Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{V}{s^\lambda}\frac{p(s)}{q(s)}$$

- V ... statischer Verstärkungsfaktor
- λ ... ganzzahlig (+ zählt Polstellen, − Nullstellen)
- $p(s), q(s)$ sind die Polynome in s. $p(0) = q(0) = 1$

Betragsverlauf:

$$|G(j\omega)| = |V|_{dB} - |(j\omega)^\lambda|_{dB} + |p(j\omega)|_{dB} - |q(j\omega)|_{dB}$$

Phasenverlauf:

$$\arg G(j\omega) = \arg V - \lambda\arg(j\omega) + \arg p(j\omega) - \arg q(j\omega)$$

4 elementare Bestandteile:

1. **Verstärkungsfaktor** V (reell).
2. **Potenzfaktor** $(j\omega)^\lambda$
   $\rightarrow \pm 20\lambda$ dB/Dek und $\pm 90\lambda°$.
3. **Linearfaktor** $\left(1 + \frac{s}{\omega_k}\right)^{\pm 1}$
   $\rightarrow$ Knick bei ω_k, Steigung ± 20 dB/Dek.
4. **Quadratischer Faktor** $\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_k} + \left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2\right)^{\pm 1}$
   $\rightarrow$ Steigung ± 40 dB/Dek, Phase $0 \rightarrow \pm 180°$.