1. Mathematische Grundlagen

1.1. komplexe Zahlen
1.2. Dezibelrechnung
1.3. Additionstheoreme
1.4. Partialbruchzerlegung
1.5. MNF / pq-Formel
1.6. Polynomdivision
1.7. Nullstellen

- Ein Polynom der Ordnung n hat n Nullstellen.
- Sind die Koeffizienten reell, so sind die Nullstellen entweder reell oder komplex konjugiert.

2. Physikalische Grundlagen

Newtonsche Gesetze:

- 1. Newtonsches Gesetz: $F = m \cdot a$
- 2. Newtonsches Gesetz: $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$
- 3. Newtonsches Gesetz: $F = -F_{Gegenseite}$

3. Formelzeichen

Cosinusdarstellung: $a\cos(x) + b\sin(x) = R\cos(x - \phi)$

4. Differentialgleichungen

Auftereten von Nullstellen bei Polynom mit konstanten Koeffizienten:

- reelle Nullstellen: $s_1, s_2, \ldots, s_n$
  $P(s) = (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)$
- komplexe Nullstellen: $s_{n+1} = a + jb$
  $P(s) = (s - s_{n+1})(s - s_{n+2})\ldots(s - s_{n+m})$

Allgemeine Form

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1\frac{du(t)}{dt} + \ldots + b_q\frac{d^q u(t)}{dt^q}$$

- n = Ordnung der DGL ($q \leq n$)
- a_i = Koeffizienten der DGL
- b_i = Koeffizienten der Eingangsgröße
- $y(t)$ = Ausgangsgröße
- $u(t)$ = Eingangsgröße

Die Homogene Lösung ist die Lösung der DGL ohne Eingangsgröße:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Durch Einsetzen der Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$ erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind die Eigenwerte des Systems. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des Übertragungsfunktionsnenners/Polstellen der Übertragungsfunktion.

Meistens sind inhhomogene DGLs höherer Ordnung gegeben. Diese können gelöst werden durch:

- Variation der Konstanten
- Ansatz der rechten Seite
- Laplace-Transformation

5. Systemeigenschaften

5.1. Linearität

- Superposition: $S\{u_1(t) + u_2(t)\} = S\{u_1(t)\} + S\{u_2(t)\}$
- Homogenität: $S\{k \cdot u(t)\} = k \cdot S\{u(t)\}$

5.2. Zeitinvarianz

- Ein System S ist zeitinvariant, wenn für jede beliebige Zeitverschiebung τ gilt: $y(t - \tau) = S\{u(t - \tau)\}$

5.3. Kausalität

- Ein System S ist kausal, wenn der Wert des Eingangs $u(\bar{t})$ zum Zeitpunkt $\bar{t}$ keinen Einfluß auf den Ausgang $y(t)$ für $t < \bar{t}$ hat.
  Bzw, wenn im Eingang höhere Ableitungen als im Ausgang vorkommen.

6. Güteanforderungen

6.1. Stabilität

- asymptotisch stabil: alle Lösungen der charakteristischen Gleichung haben negative Realteile
- stabil: alle Lösungen der charakteristischen Gleichung haben Realteile ≤ 0
- instabil: mindestens eine Lösung der charakteristischen Gleichung hat einen positiven Realteil

6.2. Stationäre Genauigkeit

- $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$
- $e_{ss} = 0$ für alle stationären Eingangsgrößen

6.3. Dynamisches Verhalten

- Überschwingen: $e_{max} = \max_{t\geq 0} e(t)$
- Einschwingzeit: $t_e = t_{max} - t_{ss}$
- Anstiegszeit: $t_a = t_{ss} - t_0$
- Regelzeit: $t_r = t_{ss} - t_{min}$

6.4. Robustheit

Forderungen 1 - 3 werden trotz Unsicherheiten erfüllt!

- Unsicherheiten bewegen sich innerhalb vorgegebener Grenzen
- Unsicherheiten → Unterschiede zwischen Modell u. Wirklichkeit
- Ursache von Unsicherheiten:
  - Modell beschreibt Wirklichkeit nur annähernd und vereinfacht
  - Regelstrecke verändert sich (Toleranzen, Alterung, Verschleiß, ...)

6.5. Modell des Standardregelkreises

Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und Störgrößenübertragungsfunktion $G_Z(s)$ müssen zusammen 1 ergeben:

$$G_W(s) + G_Z(s) = 1$$

6.6. Stationäres Verhalten

Bleibende Regelabweichung: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$
Lässt sich im Nenner von $G(s)$ mindestens ein s ausklammern, ist die Bleibende Regelabweichung 0.

Stabilitäts-/Beiwertbedingungen:

- **Vorzeichenbedingung** (notwendig): System ist asymptotisch stabil ⇒ alle Koeffizienten a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ besitzen gleiches Vorzeichen. Für Systeme mit $n \leq 2$ auch hinreichend.
- **Beiwertbedingungen** (hinreichend) für Systeme mit $n > 2$: Determinante der $n \times n$ Hurwitz-Matrix muss $|\Delta_n| > 0$ sein. Für $|\Delta_n| = 0$ grenzstabil.

Hurwitz-Matrix:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

6.7. PID-Regler

$$u(t) = K_R\{e(t)\} = k_p e(t) + k_i \int_0^{\tau} e(t)d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}$$

- k_p = Proportionalbeiwert
- k_i = Integralbeiwert
- k_d = Differentialbeiwert

7. Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{V}{s^\lambda}\frac{p(s)}{q(s)}$$

- V ... statischer Verstärkungsfaktor
- λ ... ganzzahlig (+ zählt Polstellen, − Nullstellen)
- $p(s), q(s)$ sind die Polynome in s. $p(0) = q(0) = 1$

Betragsverlauf:

$$|G(j\omega)| = |V|_{dB} - |(j\omega)^\lambda|_{dB} + |p(j\omega)|_{dB} - |q(j\omega)|_{dB}$$

Phasenverlauf:

$$\arg G(j\omega) = \arg V - \lambda \arg(j\omega) + \arg p(j\omega) - \arg q(j\omega)$$

4 elementare Bestandteile:

1. **Verstärkungsfaktor** V (reell).
2. **Potenzfaktor** $(j\omega)^\lambda$
   $$\rightarrow \pm 20\lambda \text{ dB/Dek} \quad \text{und} \quad \pm 90\lambda^\circ.$$
3. **Linearfaktor** $\left(1 + \frac{s}{\omega_k}\right)^{\pm 1}$
   $$\rightarrow \text{Knick bei } \omega_k, \text{ Steigung } \pm 20 \text{ dB/Dek.}$$
4. **Quadratischer Faktor** $\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_k} + \left(\frac{s}{\omega_k}\right)^2\right)^{\pm 1}$
   $$\rightarrow \text{Steigung } \pm 40 \text{ dB/Dek, Phase } 0 \rightarrow \pm 180^\circ.$$