```
$Assumptions = dt ^ 2 == 0 && dt * dW == 0 && dW ^ 2 == dt && S > 0 && M > 0 && s > 0;

dS = r S dt + s S dW;
dP1 = q1 P1 / S dS;
dP2 = q2 P2 / S dS;
 dDX = Δ dS - r Δ S dt;

dDV = Expand[Simplify[
    Normal[Series[V[a, b, c], {a, t, 1}, {b, P1, 2}, {c, P2, 2}]] - V[t, P1, P2]
        - r V[t, P1, P2] dt /. a → t + dt /. b → P1 + dP1 /. c → P2 + dP2
   ]];

HR = Δ /. Solve[dDX == dDV /. dt → 0, Δ][[1, 1]]
FKE = Expand[dDV - dDX /. dW → 0 /. dt → 1]
```

$$\frac{P2\ q2\ V^{(0,0,1)}[t,\ P1,\ P2] + P1\ q1\ V^{(0,1,0)}[t,\ P1,\ P2]}{S}$$

$$-r\ V[t,\ P1,\ P2] + P2\ q2\ r\ V^{(0,0,1)}[t,\ P1,\ P2] + \frac{1}{2}\ P2^2\ q2^2\ s^2\ V^{(0,0,2)}[t,\ P1,\ P2] + P1\ q1\ r\ V^{(0,1,0)}[t,\ P1,\ P2] + P1\ P2\ q1\ q2\ s^2\ V^{(0,1,1)}[t,\ P1,\ P2] + \frac{1}{2}\ P1^2\ q1^2\ s^2\ V^{(0,2,0)}[t,\ P1,\ P2] + V^{(1,0,0)}[t,\ P1,\ P2]$$

Simularity reduction

```
Vr[t_, P1_, P2_] := H[t, (P1 + P2) / 2, (P1 - P2) / 2];(*P=e M*)

Expand[Simplify[(FKE /. V → Vr /. P1 → Pq + Pd /. P2 → Pq - Pd) == 0]];
```

$$FKE2 = e\ (q1 - q2)\ \left(r - q2\ s^2\right)\ H^{(0,1)}[t,\ e] + \frac{1}{2}\ \left(e^2\ (q1 - q2)^2\ s^2\ H^{(0,2)}[t,\ e] + 2\ H^{(1,0)}[t,\ e]\right) - r\ H[t,\ e]$$

$$-r\ H[t,\ e] + e\ (q1 - q2)\ \left(r - q2\ s^2\right)\ H^{(0,1)}[t,\ e] + \frac{1}{2}\ \left(e^2\ (q1 - q2)^2\ s^2\ H^{(0,2)}[t,\ e] + 2\ H^{(1,0)}[t,\ e]\right)$$

End Condition

V(S,P,T)=M $H\ (P / M,\ t) = (P - M)^+ \Rightarrow H(e) = (-e - 1)^+$

Passport Options

```
ToMaximise = Factor[(FKE - (FKE /. q1 → 0 /. q2 → 0)), Extension -> Automatic]
```

$$\frac{1}{2}\left(2\,P2\,q2\,r\,V^{(0,0,1)}[t,P1,P2]+P2^2\,q2^2\,s^2\,V^{(0,0,2)}[t,P1,P2]+2\,P1\,q1\,r\,V^{(0,1,0)}[t,P1,P2]+2\,P1\,P2\,q1\,q2\,s^2\,V^{(0,1,1)}[t,P1,P2]+P1^2\,q1^2\,s^2\,V^{(0,2,0)}[t,P1,P2]\right)$$

```
Simplify[
 (2 r H^(0,1)[t, e] - 2 q2 s^2 H^(0,1)[t, e] + e q1 s^2 H^(0,2)[t, e] - e q2 s^2 H^(0,2)[t, e]) /
  (e s^2 H^(0,2)[t, e])]
```

$$\frac{2\left(r-q2\,s^2\right)H^{(0,1)}[t,e]+e\,(q1-q2)\,s^2\,H^{(0,2)}[t,e]}{e\,s^2\,H^{(0,2)}[t,e]}$$

- **ALSO: q=1**

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q(a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b / 2 / a] < Abs[d + b / 2 / a]}}, c]
```

Für ausschließich Long-Positionenmit AnfangskapitalM und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases}\frac{M+P}{S} & \mathrm{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}+\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]\\ 0 & \mathrm{True}\end{cases}$$

Für Long- und Short Positionen,AnfangskapitalM und aufs Kapital limitierteShort positionenund Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[e^2 s^2 H^(2,0)[e, t], 2 r H^(1,0)[e, t] e, -1, 1]]
```

$$\begin{cases}1 & \mathrm{Abs}\left[-1+\frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[1+\frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right]\\ -1 & \mathrm{True}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{M+P}{S} & \mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}-\frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}+\frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right]\\ -\frac{M+P}{S} & \mathrm{True}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{M+P}{S} & \mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}-\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}+\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]\\ -\frac{M+P}{S} & \mathrm{True}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{M+P}{S} & \mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}-\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}+\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]\\ -\frac{M+P}{S} & \mathrm{True}\end{cases}$$

Für -1< = q < = 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
```

e

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s ^ 2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
```

$q\ (-2\ e + q)\ H^{(2,0)}[e,\ t]$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]>0$ angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$\begin{cases} M & \text{Abs}[e+M] < \text{Abs}[e-M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$

$\text{oq3}' = \begin{cases} 1 & e < 0 \\ -1 & \text{True} \end{cases};$

Gewinn durch nicht optimalesVerhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\ dt\ (oq - q)\ s^2\ S^2\ \left((oq + q)\ V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\ V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

Boundary conditions

Für ausschließich Long-Positionenmit AnfangskapitalM und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v\ (S > P,\ P,\ t)\ = P^+$

Für -1< = q < = 1

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
v(S,-∞,t)=0
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v\ (\infty,\ P,\ t)\ = P^+$