```
$Assumptions = dt ^ 2 == 0 && dt * dW == 0 && dW ^ 2 == dt && S > 0 && M > 0 && s > 0;

dS = r S dt + s S dW;
dP = r (P - q S) dt + q dS;
 dDX = Δ dS - r Δ S dt;

dDV = Expand [Simplify [
    Normal[Series [V [a, b, c], {a, S, 2}, {b, P, 2}, {c, t, 1}]] - V [S, P, t]
        - r V [S, P, t] dt /. a → S + dS /. b → P + dP /. c → t + dt
   ]];

HR = Δ /. Solve [dDX == dDV /. dt → 0, Δ] [[1, 1]]
FKE = Expand [dDV - dDX /. dW → 0 /. dt → 1]
```

$$q V^{(0,1,0)}[S, P, t] + V^{(1,0,0)}[S, P, t]$$

$$-r V[S, P, t] + V^{(0,0,1)}[S, P, t] + P r V^{(0,1,0)}[S, P, t] + \frac{1}{2} q^2 s^2 S^2 V^{(0,2,0)}[S, P, t] + r S V^{(1,0,0)}[S, P, t] + q s^2 S^2 V^{(1,1,0)}[S, P, t] + \frac{1}{2} s^2 S^2 V^{(2,0,0)}[S, P, t]$$

Simularity reduction

```
Vr [S_, P_, t_] := S H[P / S, t];(*P=e*S*)

FKE2 = Simplify [Simplify [(FKE /. V → Vr /. P → e * S) == 0] [[1]] / 2]
```

$$\frac{1}{2} \left(2 H^{(0,1)}[e, t] + (e - q)^2 s^2 H^{(2,0)}[e, t]\right)$$

Passport Options

für konvexe payoffs und also $H^{(2,0)}[e, t]$>0 ist die optimale strategie q' das q, welches diesen ausdruck maximiert:

```
StrategiePayoff = Simplify [(FKE - (FKE /. q → 0)) / S^2 / s ^ 2 * 2]

(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax [q (a q+b)] gleich A*)
A [a_, b_, c_, d_] := Piecewise [{{d, Abs [c + b / 2 / a] < Abs [d + b / 2 / a]}}, c]
```

Für ausschließich Long-Positionenmit AnfangskapitalM und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify [A [V^(0,2,0) [S, P, t], 2 V^(1,1,0) [S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Für Long- und Short Positionen, Anfangskapital M und aufs Kapital limitierte Short positionen und Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -(P + M) / S, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

Für -1< = q < = 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
```

e

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s ^ 2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
```

$q\,(-2\,e + q)\,H^{(2,0)}[e, t]$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]$>0 angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e + M] < \text{Abs}[e - M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

$$\text{oq3'} = \begin{cases} 1 & e < 0 \\ -1 & \text{True} \end{cases};$$

Gewinn durch nicht optimales Verhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\,dt\,(oq - q)\,s^2\,S^2\,\left((oq + q)\,V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\,V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

Boundary conditions

Für ausschließich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$

$v(S, -M, t) = 0$

$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$

$v(S > P, P, t) = P^+$

Für -1<= q <= 1

$v(S, P, T) = P^+$

$v(0, P, t) = P^+$

$v(S,-\infty,t)=0$

$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$

$v(\infty, P, t) = P^+$