```
s[i_, j_] = Piecewise[{{0, i < j}}, σ[i, j]]; r[i_, j_] = Piecewise[{{1, i == j}}, ρ[i, j]];

na = 3;

MatrixForm[
 Solve[Flatten[Table[Sum[s[i, j] s[k, j], {j, na}] == r[i, k], {i, na}, {k, i}]],
   Flatten[Table[s[i, j], {i, na}, {j, i}]]][[8]]]
```

$$\begin{pmatrix} \sigma[3,3] \to \sqrt{1-\rho[3,1]^2 - \frac{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}{-1+\rho[2,1]^2}} \\ \sigma[1,1] \to 1 \\ \sigma[2,2] \to \frac{\sqrt{-1+\rho[2,1]^2}\,\sqrt{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}}{\rho[2,1]\,\rho[3,1]-\rho[3,2]} \\ \sigma[3,2] \to \frac{\sqrt{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}}{\sqrt{-1+\rho[2,1]^2}} \\ \sigma[2,1] \to \rho[2,1] \\ \sigma[3,1] \to \rho[3,1] \end{pmatrix}$$

```
$Assumptions =
  dt ^ 2 == 0 && dt * dW1 == 0 && dt * dW2 == 0 && dt * dW3 == 0 && dW1 ^ 2 == dt && dW2 ^ 2 == dt &&
   dW3 ^ 2 == dt && dW1 dW2 == 0 && dW3 dW2 == 0 && dW3 dW1 == 0 && S > 0 && M > 0 && s > 0 ;
dB1 = dW1; dB2 = r12 dW1 + Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW2;
dB3 = r13 dW1 + (r23 - r12 r13) / Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW2 +
  Sqrt[1 - r12 ^ 2 - r13 ^ 2 - r23 ^ 2 + 2 r12 r13 r23] / Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW3;

dS1 = r S1 dt + s1 dB1;
dS2 = r S2 dt + s2 dB2;
dS3 = r S3 dt + s3 dB3;
dP = q1 P / S1 dS1 + q2 P  / S2 dS2 + q3 P / S3 dS3;
 dDX = Δ1 dS1  +  Δ2 dS2 + Δ3 dS3  - r  (Δ1 S1  + Δ3 S3  +  Δ2 S2) dt;

dDV = Expand[Simplify[
    Normal[Series[V[a, b], {a, t, 1}, {b, P, 2}] - V[t, P]
        - r  V[t, P] dt] /. a → t + dt /. b → P + dP
   ]];

Simplify /@ # & /@ Flatten[Solve[{dDX == dDV /. dt → 0 /. dW1 → 0 /. dW2 → 0 /. dW1 → 1,
    dDX == dDV /. dt → 0 /. dW1 → 0 /. dW2 → 1 /. dW3 → 0,
    dDX == dDV /. dt → 0 /. dW1 → 1 /. dW2 → 0 /. dW3 → 0}, {Δ1, Δ2, Δ3}]]

HR = #[[2]] & /@
   FKE = Expand[dDV - dDX /. dW1 → 0 /. dW2 → 0 /. dt → 1]
```

$$\left\{\Delta 1 \to \frac{P\ q1\ V^{(0,1)}[t,P]}{S1},\ \Delta 2 \to \frac{P\ q2\ V^{(0,1)}[t,P]}{S2},\ \Delta 3 \to \frac{P\ q3\ V^{(0,1)}[t,P]}{S3}\right\}$$

$$\left\{\frac{P\ q1\ V^{(0,1)}[t,P]}{S1},\frac{P\ q2\ V^{(0,1)}[t,P]}{S2}\right\}$$

$$-r\ V[t,P]+P\ q1\ r\ V^{(0,1)}[t,P]+P\ q2\ r\ V^{(0,1)}[t,P]+\frac{1}{2}P^2\ q1^2\ s1^2\ V^{(0,2)}[t,P]+\frac{1}{2}P^2\ q2^2\ s2^2\ V^{(0,2)}[t,P]+P^2\ q1\ q2\ s1\ s2\ \rho\ V^{(0,2)}[t,P]+V^{(1,0)}[t,P]$$

Passport Options

```
ToMaximise = Simplify[FKE - (FKE /. q1 → 0 /. q2 → 0)]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\ (q1+q2)\ r\ V^{(0,1)}[t,P]+P\left(q1^2\ s1^2+q2^2\ s2^2+2\ q1\ q2\ s1\ s2\ \rho\right)V^{(0,2)}[t,P]\right)$$

```
Exit[]
```

```
Maximize[{(q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ) /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -.1,
  Abs[q1] + Abs[q2] == 1}, {q1, q2}]
```

$\{0.64, \{q1 \to -5.2365\times 10^{-9}, q2 \to -1.\}\}$

```
q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -1 /. q1 → 1 /. q2 → 0
```

0.49

Also das q für die größte Vola muss eins sein. und der Preis entspricht einem Put auf ein unterlaying mit dieser vola und einem kurs vom portfoliowert und stirke gewinnstrike.

- **ALSO: q = 1**

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q (a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b / 2 / a] < Abs[d + b / 2 / a]}}, c]
```

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases}\frac{M+P}{S} & \mathrm{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]<\mathrm{Abs}\left[\frac{M+P}{S}+\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right]\\ 0 & \mathrm{True}\end{cases}$$

Für Long- und Short Positionen, Anfangskapital M und aufs Kapital limitierte Short

positionen und Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

oq2 = Simplify[A[e ^ 2 s^2 H^(2,0)[e, t], 2 r H^(1,0)[e, t] e, -1, 1]]

$$\begin{cases} 1 & \text{Abs}\left[-1 + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[1 + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -1 & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

Für -1<= q <= 1

Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]

e

StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s ^ 2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]

$$q\,(-2\,e + q)\,H^{(2,0)}[e, t]$$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]$>0 angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e + M] < \text{Abs}[e - M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

$$\textbf{oq3'} = \begin{cases} 1 & e < 0 \\ -1 & \text{True} \end{cases};$$

Gewinn durch nicht optimales Verhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]

$$\frac{1}{2}\, dt\, (oq - q)\, s^2\, S^2 \left((oq + q)\, V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\, V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

Boundary conditions

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^{+}$
$v(0, P, t) = P^{+}$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(S > P, P, t) = P^{+}$

Für -1<= q <= 1

$v(S, P, T) = P^{+}$
$v(0, P, t) = P^{+}$
v(S,-∞,t)=0
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(\infty, P, t) = P^{+}$