```
s[i_, j_] = Piecewise[{{0, i < j}}, σ[i, j]]; r[i_, j_] = Piecewise[{{1, i == j}}, ρ[i, j]];
```

```
Exit[]
```

```
na = 3;
```

```
MatrixForm[
 Solve[Flatten[Table[Sum[s[i, j] s[k, j], {j, na}] == r[i, k], {i, na}, {k, i}]],
   Flatten[Table[s[i, j], {i, na}, {j, i}]]][[8]]]
```

$$
\begin{pmatrix}
\sigma[3,3] \to \sqrt{1-\rho[3,1]^2-\dfrac{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}{-1+\rho[2,1]^2}} \\
\sigma[1,1] \to 1 \\
\sigma[2,2] \to \dfrac{\sqrt{-1+\rho[2,1]^2}\,\sqrt{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}}{\rho[2,1]\,\rho[3,1]-\rho[3,2]} \\
\sigma[3,2] \to \dfrac{\sqrt{-\rho[2,1]^2\,\rho[3,1]^2+2\,\rho[2,1]\,\rho[3,1]\,\rho[3,2]-\rho[3,2]^2}}{\sqrt{-1+\rho[2,1]^2}} \\
\sigma[2,1] \to \rho[2,1] \\
\sigma[3,1] \to \rho[3,1]
\end{pmatrix}
$$

```
$Assumptions =
  dt ^ 2 == 0 && dt * dW1 == 0 && dt * dW2 == 0 && dt * dW3 == 0 && dW1 ^ 2 == dt && dW2 ^ 2 == dt &&
   dW3 ^ 2 == dt && dW1 dW2 == 0 && dW3 dW2 == 0 && dW3 dW1 == 0 && S > 0 && M > 0 && s > 0 ;
dB1 = dW1; dB2 = r12 dW1 + Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW2;
dB3 = r13 dW1 + (r23 - r12 r13) / Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW2 +
  Sqrt[1 - r12 ^ 2 - r13 ^ 2 - r23 ^ 2 + 2 r12 r13 r23] / Sqrt[1 - r12 ^ 2] dW3;

dS1 = r S1 dt + s1 dB1;
dS2 = r S2 dt + s2 dB2;
dP = q1 P / S1 dS1 + q2 P / S2 dS2 + r dt P (1 - q1 - q2);
 dDX = Δ1 dS1 + Δ2 dS2 - r (Δ1 S1 + Δ2 S2) dt;
```

```
dDV = Expand[Simplify[
    Normal[Series[V[a, b, c, d],
         {a, t, 1}, {b, P, 2}, {c, S1, 2}, {d, S2, 2}] - V[t, P, S1, S2]
        - r V[t, P, S1, S2] dt] /. a → t + dt /. b → P + dP /. c → S1 + dS1 /. d → S2 + dS2
   ]];
```

```
$Aborted
```

```
dDV = Simplify[
  Expand[Normal[Series[V[a, b, c, d], {a, t, 1}, {b, P, 2}, {c, S1, 2}, {d, S2, 2}] -
       V[t, P, S1, S2] - r V[t, P, S1, S2] dt] /.
     a → t + dt /. b → P + dP /. c → S1 + dS1 /. d → S2 + dS2]]
```

$$-dt\ r\ V[t, P, S1, S2] + \left(dW1\ r12\ s2 + dW2\sqrt{1 - r12^2}\ s2 + dt\ r\ S2\right) V^{(0,0,0,1)}[t, P, S1, S2] + \frac{1}{2}\ dt\ s2^2\ V^{(0,0,0,2)}[t, P, S1, S2] + dW1\ s1\ V^{(0,0,1,0)}[t, P, S1, S2] + dt\ r\ S1\ V^{(0,0,1,0)}[t, P, S1, S2] + dt\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,0,1,1)}[t, P, S1, S2] + \frac{1}{2}\ dt\ s1^2\ V^{(0,0,2,0)}[t, P, S1, S2] + dt\ P\ r\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2] + \frac{dW1\ P\ q1\ s1\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S1} + \frac{dW1\ P\ q2\ r12\ s2\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S2} + \frac{dW2\ P\ q2\sqrt{1 - r12^2}\ s2\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S2} + \frac{dt\ P\ q1\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,1,0,1)}[t, P, S1, S2]}{S1} + \frac{dt\ P\ q2\ s2^2\ V^{(0,1,0,1)}[t, P, S1, S2]}{S2} + \frac{dt\ P\ q1\ s1^2\ V^{(0,1,1,0)}[t, P, S1, S2]}{S1} + \frac{dt\ P\ q2\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,1,1,0)}[t, P, S1, S2]}{S2} + \frac{dt\ P^2\ q1^2\ s1^2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{2\ S1^2} + \frac{dt\ P^2\ q2^2\ s2^2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{2\ S2^2} + \frac{dt\ P^2\ q1\ q2\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S1\ S2} + dt\ V^{(1,0,0,0)}[t, P, S1, S2]$$

```
Simplify /@ # & /@ Flatten[Solve[{dDX == dDV /. dt → 0 /. dW1 → 1 /. dW2 → 0,
    dDX == dDV /. dt → 0 /. dW1 → 0 /. dW2 → 1}, {Δ1, Δ2}]]
FKE = Expand[dDV - dDX /. dW1 → 0 /. dW2 → 0 /. dt → 1]
```

$$\left\{\triangle 1 \to V^{(0,0,1,0)}[t, P, S1, S2] + \frac{P\ q1\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S1},\right.$$
$$\left.\triangle 2 \to V^{(0,0,0,1)}[t, P, S1, S2] + \frac{P\ q2\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S2}\right\}$$

$$-r\ V[t, P, S1, S2] + r\ S2\ V^{(0,0,0,1)}[t, P, S1, S2] + \frac{1}{2}\ s2^2\ V^{(0,0,0,2)}[t, P, S1, S2] +$$
$$r\ S1\ V^{(0,0,1,0)}[t, P, S1, S2] + r12\ s1\ s2\ V^{(0,0,1,1)}[t, P, S1, S2] +$$
$$\frac{1}{2}\ s1^2\ V^{(0,0,2,0)}[t, P, S1, S2] + P\ r\ V^{(0,1,0,0)}[t, P, S1, S2] +$$
$$\frac{P\ q1\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,1,0,1)}[t, P, S1, S2]}{S1} + \frac{P\ q2\ s2^2\ V^{(0,1,0,1)}[t, P, S1, S2]}{S2} +$$
$$\frac{P\ q1\ s1^2\ V^{(0,1,1,0)}[t, P, S1, S2]}{S1} + \frac{P\ q2\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,1,1,0)}[t, P, S1, S2]}{S2} +$$
$$\frac{P^2\ q1^2\ s1^2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{2\ S1^2} + \frac{P^2\ q2^2\ s2^2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{2\ S2^2} +$$
$$\frac{P^2\ q1\ q2\ r12\ s1\ s2\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]}{S1\ S2} + V^{(1,0,0,0)}[t, P, S1, S2]$$

Passport Options

```
ToMaximise = Simplify[2 / P S1 ^ 2 * S2 ^ 2 (FKE - (FKE /. q1 → 0 /. q2 → 0))]
```

$$2\ S1\ s2\ S2\ (q2\ S1\ s2 + q1\ r12\ s1\ S2)\ V^{(0,1,0,1)}[t, P, S1, S2] +$$
$$2\ s1\ S1\ S2\ (q2\ r12\ S1\ s2 + q1\ s1\ S2)\ V^{(0,1,1,0)}[t, P, S1, S2] +$$
$$P\ \left(q2^2\ S1^2\ s2^2 + 2\ q1\ q2\ r12\ s1\ S1\ s2\ S2 + q1^2\ s1^2\ S2^2\right)\ V^{(0,2,0,0)}[t, P, S1, S2]$$

```
Exit[]
```

```
Maximize[{(q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ) /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -.1,
   Abs[q1] + Abs[q2] == 1}, {q1, q2}]
```

$\{0.64, \{q1 \to -5.2365 \times 10^{-9}, q2 \to -1.\}\}$

```
q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -1 /. q1 → 1 /. q2 → 0
```

0.49

Also das q für die größte Vola muss eins sein. und der Preis entspricht einem Put auf ein unterlaying mit dieser vola und einem kurs vom portfoliowert und stirke gewinnstrike.

■ ALSO: q= 1

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q (a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b / 2 / a] < Abs[d + b / 2 / a]}}, c]
```

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Für Long- und Short Positionen, Anfangskapital M und aufs Kapital limitierte Short positionen und Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[e^2 s^2 H^(2,0)[e, t], 2 r H^(1,0)[e, t] e, -1, 1]]
```

$$\begin{cases} 1 & \text{Abs}\left[-1 + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[1 + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -1 & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

Für -1<= q <= 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
```

e

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s^2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
```

$q\,(-2\,e + q)\,H^{(2,0)}[e, t]$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]>0$ angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e + M] < \text{Abs}[e - M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

```
oq3' = { 1    e < 0
       { -1   True   ;
```

Gewinn durch nicht optimales Verhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\,dt\,(oq - q)\,s^2\,S^2\,\left((oq + q)\,V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\,V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

Boundary conditions

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(S > P, P, t) = P^+$

Für -1<= q <= 1

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
v(S,-∞,t)=0
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(\infty, P, t) = P^+$