```
$Assumptions = dt ^ 2 == 0 && dt * dW == 0 && dW ^ 2 == dt && S > 0 && M > 0 && s > 0;

dS = r S dt + s S dW;
dP = r (P - q * P) dt + q P / S dS;
 dDX = Δ dS - r Δ S dt;

dDV = Expand[Simplify[
    Normal[Series[V[a, b, c], {a, S, 2}, {b, P, 2}, {c, t, 1}]] - V[S, P, t]
        - r V[S, P, t] dt /. a → S + dS /. b → P + dP /. c → t + dt
   ]];

HR = Δ /. Solve[dDX == dDV /. dt → 0, Δ][[1, 1]]
FKE = Expand[dDV - dDX /. dW → 0 /. dt → 1]
```

$$\frac{P\, q\, V^{(0,1,0)}[S,P,t] + S\, V^{(1,0,0)}[S,P,t]}{S}$$

$$-r\, V[S,P,t] + V^{(0,0,1)}[S,P,t] + P\, r\, V^{(0,1,0)}[S,P,t] + \frac{1}{2} P^2 q^2 s^2 V^{(0,2,0)}[S,P,t] + r\, S\, V^{(1,0,0)}[S,P,t] + P\, q\, s^2 S\, V^{(1,1,0)}[S,P,t] + \frac{1}{2} s^2 S^2 V^{(2,0,0)}[S,P,t]$$

```
Simplify[dP / P + dP ^ 2 / P ^ 2 / 2]
```

$$dW\, q\, s + dt\left(r + \frac{q^2 s^2}{2}\right)$$

## Simularity reduction

```
Vr[S_, P_, t_] := M H[P / M, t];(*P=e M*)
Simplify[(FKE /. V → Vr /. P → e M) == 0]
```

$$2\, r\, H[e,t] == 2\, H^{(0,1)}[e,t] + 2\, e\, r\, H^{(1,0)}[e,t] + e^2 q^2 s^2 H^{(2,0)}[e,t]$$

```
FKE2 = H^(0,1)[e, t] + e r H^(1,0)[e, t] + e^2 q^2 s^2 H^(2,0)[e, t] / 2 - r H[e, t];
```

### End Condition

V(S,P,T)=M $H\ (P / M, t) = (P - M)^{+} \Rightarrow H(e) = (-e - 1)^{+}$

# Passport Options

für konvexe payoffs und also $H^{(2,0)}[e, t]$>0 ist die optimale strategie q' das q, welches diesen ausdruck maximiert:

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE2 - (FKE2 /. q → 0))]
```

$$\frac{1}{2} e^2 q^2 s^2 H^{(2,0)}[e,t]$$

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q(a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b / 2 / a] < Abs[d + b / 2 / a]}}, c]
```

## Für ausschließich Long-Positionenmit AnfangskapitalM und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

## Für Long- und Short Positionen,AnfangskapitalM und aufs Kapital limitierteShort positionenund Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -(P + M) / S, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

## Für -1< = q < = 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
```

e

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s ^ 2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
```

$q\ (-2\ e + q)\ H^{(2,0)}[e,\ t]$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]$>0 angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e + M] < \text{Abs}[e - M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

$$\text{oq3'} = \begin{cases} 1 & e < 0 \\ -1 & \text{True} \end{cases};$$

## Gewinn durch nicht optimalesVerhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) − dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\,dt\,(oq - q)\,s^2\,S^2\,\left((oq + q)\,V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\,V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

# Boundary conditions

## Für ausschließlich Long-Positionenmit AnfangskapitalM und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^{+}$
$v(0, P, t) = P^{+}$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$
$v(S > P, P, t) = P^{+}$

## Für -1< = q < = 1

$v(S, P, T) = P^{+}$
$v(0, P, t) = P^{+}$
$v(S,-\infty,t)=0$
$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$
$v(\infty, P, t) = P^{+}$