```
Exit[];

na = 1;
s[i_, j_] = Piecewise[{{0, i < j}}, σ[i, j]];
r[i_, j_] = Piecewise[{{1, i == j}}, ρ[i, j]];
Repla =
  Solve[Flatten[Table[Sum[s[i, j] s[k, j], {j, na}] == r[k, i], {i, na}, {k, i}]],
    Flatten[Table[s[i, j], {i, na}, {j, i}]]][[2^na]];

$Assumptions =
  dt^2 == 0 && S > 0 && M > 0 && s > 0 && And @@ Join[Table[dW[i]^2 == dt, {i, na}],
     Table[dW[i] dt == 0, {i, na}], Flatten[Table[dW[i] dW[j] == 0, {i, na}, {j, i - 1}]]];
dB[i_] := Sum[s[i, j] dW[j], {j, na}];
dS[i_] := r S[i] dt + σ[i] S[i] dB[i];
dP = P Sum[q[i] / S[i] dS[i], {i, na}] + P (1 - Sum[q[i] , {i, na}]) r dt;
 dDX = Sum[Δ[i] dS[i]  - r Δ[i] S[i] dt, {i, na}];

dDV = Simplify[Expand[
    Normal[Series[V[a, b, c], {a, t, 1}, {b, P, 2}, {c, S[1], 2}] - V[t, P, S[1]]
        - r V[t, P, S[1]] dt] /. a → t + dt /. b → P + dP /. c → S[1] + dS[1]
   ]];

Eqn = Simplify[
   0 == Table[dDX - dDV /. dt → 0 /. dW[i] → 1, {i, na}] /. Table[dW[i] → 0, {i, na}]];
HR = #[[2]] & /@ Solve[Eqn, Table[Δ[i], {i, na}]][[1]]
FKE = Expand[dDV - dDX /. Table[dW[i] → 0, {i, na}] /. dt → 1]
```

$$\left\{\frac{S[1]\, V^{(0,0,1)}[t,P,S[1]] + P\, q[1]\, V^{(0,1,0)}[t,P,S[1]]}{S[1]}\right\}$$

$$-r\, V[t,P,S[1]] + r\, S[1]\, V^{(0,0,1)}[t,P,S[1]] + \frac{1}{2} S[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1,1]^2\, V^{(0,0,2)}[t,P,S[1]] + P\, r\, V^{(0,1,0)}[t,P,S[1]] + P\, q[1]\, S[1]\, \sigma[1]^2\, \sigma[1,1]^2\, V^{(0,1,1)}[t,P,S[1]] + \frac{1}{2} P^2\, q[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1,1]^2\, V^{(0,2,0)}[t,P,S[1]] + V^{(1,0,0)}[t,P,S[1]]$$

Passport Options

```
ToMaximise = Collect[
  Simplify[FKE - (FKE /. Table[q[i] → 0, {i, na}]) /. Repla], {V^(0,1)[t, P], V^(0,2)[t, P]}]
```

$$\frac{1}{2} P\, q[1]\, \sigma[1]^2 \left(2\, S[1]\, V^{(0,1,1)}[t,P,S[1]] + P\, q[1]\, V^{(0,2,0)}[t,P,S[1]]\right)$$

```
Maximize[{(q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ) /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -.1,
  Abs[q1] + Abs[q2] == 1}, {q1, q2}]
```

$\{0.64, \{q1 \to -5.2365 \times 10^{-9}, q2 \to -1.\}\}$

```
q1^2 s1^2 + q2^2 s2^2 + 2 q1 q2 s1 s2 ρ /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -1 /. q1 → 1 /. q2 → 0
```

0.49

```
FKE /. {q[1] → 1, q[2] → 0, q[3] → 0}
```

$$-r\,V[t, P] + r\,V^{(0,1)}[t, P] + \frac{1}{2}\,\sigma[1]^2\,\sigma[1, 1]^2\,V^{(0,2)}[t, P] + V^{(1,0)}[t, P]$$

Also das q für die größte Vola muss eins sein. und der Preis entspricht einem Put auf ein unterlaying mit dieser vola und einem kurs vom portfoliowert und stirke gewinnstrike.

- **ALSO: q=1**

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q(a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b/2/a] < Abs[d + b/2/a]}}, c]
```

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Für Long- und Short Positionen, Anfangskapital M und aufs Kapital limitierte Short positionen und Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[e^2 s^2 H^(2,0)[e, t], 2 r H^(1,0)[e, t] e, -1, 1]]
```

$$\begin{cases} 1 & \text{Abs}\left[-1 + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[1 + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -1 & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{r\,H^{(1,0)}[e,t]}{e\,s^2\,H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

Für -1<= q <= 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
e
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s ^ 2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
q (-2 e + q) H^(2,0)[e, t]
```

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]>0$ angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e+M] < \text{Abs}[e-M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

$$\text{oq3}' = \begin{cases} 1 & e < 0 \\ -1 & \text{True} \end{cases};$$

Gewinn durch nicht optimales Verhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\,dt\,(oq - q)\,s^2 S^2 \left((oq + q)\,V^{(0,2,0)}[S, P, t] + 2\,V^{(1,1,0)}[S, P, t]\right)$$

Boundary conditions

Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$
$v(S > P, P, t) = P^+$

Für -1<= q <= 1

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
$v(S,-\infty,t)=0$
$\lim_{P \to \infty} v(S,P,t)/P=1$
$v(\infty, P, t) = P^+$