```
Exit[];

na = 1;
s[i_, j_] = Piecewise[{{0, i < j}}, σ[i, j]];
r[i_, j_] = Piecewise[{{1, i == j}}, ρ[i, j]];
Repla =
  Solve[Flatten[Table[Sum[s[i, j] s[k, j], {j, na}] == r[k, i], {i, na}, {k, i}]],
    Flatten[Table[s[i, j], {i, na}, {j, i}]]][[2^na]];

$Assumptions =
  dt^2 == 0 && S > 0 && M > 0 && s > 0 && And @@ Join[Table[dW[i]^2 == dt, {i, na}],
     Table[dW[i] dt == 0, {i, na}], Flatten[Table[dW[i] dW[j] == 0, {i, na}, {j, i - 1}]]];
dB[i_] = Sum[s[i, j] dW[j], {j, na}];
dS[i_] = r S[i] dt + σ[i] S[i] dB[i];
dP = P Sum[q[i] / S[i] dS[i], {i, na}] + r P (1 - Sum[q[i], {i, na}]) dt;
 dDX = Sum[Δ[i] dS[i]  - r Δ[i] S[i] dt, {i, na}];

dDV = Simplify[Expand[
    Normal[Series[V[a, b, c, d], {a, t, 1},
           {b, P, 2}, {c, S[1], 2}, {d, S[2], 2}] - V[t, P, S[1], S[2]]
          - r V[t, P, S[1], S[2]] dt] /. a → t + dt /. b → P + dP /. c → S[1] + dS[1] /.
     d → S[2] + dS[2]
   ]];
dDV = Simplify[Expand[
    Normal[Series[V[a, b, c / b], {a, t, 1}, {b, P, 2}, {c, S[1], 2}] - V[t, P, S[1]]
        - r V[t, P, S[1]] dt] /. a → t + dt /. b → P + dP /. c → S[1] + dS[1]
   ]];

Eqn = Simplify[
   0 == Table[dDX - dDV /. dt → 0 /. dW[i] → 1, {i, na}] /. Table[dW[i] → 0, {i, na}]];
HR = #[[2]] & /@ Solve[Eqn, Table[Δ[i], {i, na}]][[1]]
FKE = Expand[dDV - dDX /. Table[dW[i] → 0, {i, na}] /. dt → 1]
```

$$\left\{\frac{1}{P\,S[1]\,\sigma[1]\,\sigma[1,1]}\left(-P\,V[t,P,S[1]]+P\,V\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]+S[1]\,\sigma[1]\,\sigma[1,1]\,V^{(0,0,1)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]-q[1]\,S[1]\,\sigma[1]\,\sigma[1,1]\,V^{(0,0,1)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]+P^2\,q[1]\,\sigma[1]\,\sigma[1,1]\,V^{(0,1,0)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]\right)\right\}$$

$$-V[t, P, S[1]] - r\, V[t, P, S[1]] + V\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right] - \frac{q[1]\, S[1]\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,0,1)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]}{P} + \frac{q[1]^2\, S[1]\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,0,1)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]}{P} + \frac{S[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,0,2)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]}{2 P^2} - \frac{q[1]\, S[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,0,2)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]}{P^2} + \frac{q[1]^2\, S[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,0,2)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]}{2 P^2} + P\, r\, V^{(0,1,0)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right] + q[1]\, S[1]\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,1,1)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right] - q[1]^2\, S[1]\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,1,1)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right] + \frac{1}{2} P^2\, q[1]^2\, \sigma[1]^2\, \sigma[1, 1]^2\, V^{(0,2,0)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right] + V^{(1,0,0)}\left[t, P, \frac{S[1]}{P}\right]$$

**MatrixForm[Repla]**

$$\begin{pmatrix} \sigma[3, 3] \to \sqrt{1 - \rho[1, 3]^2 - \frac{-\rho[1,2]^2\, \rho[1,3]^2 + 2\, \rho[1,2]\, \rho[1,3]\, \rho[2,3] - \rho[2,3]^2}{-1 + \rho[1,2]^2}} \\ \sigma[1, 1] \to 1 \\ \sigma[2, 2] \to \frac{\sqrt{-1 + \rho[1,2]^2}\, \sqrt{-\rho[1,2]^2\, \rho[1,3]^2 + 2\, \rho[1,2]\, \rho[1,3]\, \rho[2,3] - \rho[2,3]^2}}{\rho[1,2]\, \rho[1,3] - \rho[2,3]} \\ \sigma[3, 2] \to \frac{\sqrt{-\rho[1,2]^2\, \rho[1,3]^2 + 2\, \rho[1,2]\, \rho[1,3]\, \rho[2,3] - \rho[2,3]^2}}{\sqrt{-1 + \rho[1,2]^2}} \\ \sigma[2, 1] \to \rho[1, 2] \\ \sigma[3, 1] \to \rho[1, 3] \end{pmatrix}$$

**Simplify[dDV /. Repla]**

$$\Big(2\,\mathrm{dW}[3]\,q[3]\,\sqrt{-1+\rho[1,2]^2}\,(\rho[1,2]\,\rho[1,3]-\rho[2,3])\,\sqrt{\left(\left(-1+\rho[1,2]^2+\rho[1,3]^2-2\,\rho[1,2]\,\rho[1,3]\,\rho[2,3]+\rho[2,3]^2\right)/\left(-1+\rho[1,2]^2\right)\right)}\,\sigma[3]\,V^{(0,1)}[t,P]+2\,\mathrm{dW}[1]\,\sqrt{-1+\rho[1,2]^2}\,(\rho[1,2]\,\rho[1,3]-\rho[2,3])\,(q[1]\,\sigma[1]+q[2]\,\rho[1,2]\,\sigma[2]+q[3]\,\rho[1,3]\,\sigma[3])\,V^{(0,1)}[t,P]+2\,\mathrm{dW}[2]\,\sqrt{-(-\rho[1,2]\,\rho[1,3]+\rho[2,3])^2}\,\left(q[2]\left(-1+\rho[1,2]^2\right)\sigma[2]+q[3]\,(\rho[1,2]\,\rho[1,3]-\rho[2,3])\,\sigma[3]\right)V^{(0,1)}[t,P]+\mathrm{dt}\,\sqrt{-1+\rho[1,2]^2}\,(\rho[1,2]\,\rho[1,3]-\rho[2,3])\,\Big(-2\,r\,V[t,P]+2\,r\,(q[1]+q[2]+q[3])\,V^{(0,1)}[t,P]+q[1]^2\,\sigma[1]^2\,V^{(0,2)}[t,P]+2\,q[1]\,q[2]\,\rho[1,2]\,\sigma[1]\,\sigma[2]\,V^{(0,2)}[t,P]+q[2]^2\,\sigma[2]^2\,V^{(0,2)}[t,P]+2\,q[1]\,q[3]\,\rho[1,3]\,\sigma[1]\,\sigma[3]\,V^{(0,2)}[t,P]+2\,q[2]\,q[3]\,\rho[2,3]\,\sigma[2]\,\sigma[3]\,V^{(0,2)}[t,P]+q[3]^2\,\sigma[3]^2\,V^{(0,2)}[t,P]+2\,V^{(1,0)}[t,P]\Big)\Big)\Big/\left(2\,\sqrt{-1+\rho[1,2]^2}\,(\rho[1,2]\,\rho[1,3]-\rho[2,3])\right)$$

# Passport Options

**ToMaximise = Collect[Simplify[FKE - (FKE /. Table[q[i] → 0, {i, na}]) /. Repla], {V^(0,1,1)[t, P, S[1]], V^(0,2,0)[t, P, S[1]]}]**

$$\frac{1}{2\,P^2}\,q[1]\,\sigma[1]^2\left(2\,P\,(-1+q[1])\,S[1]\,V^{(0,0,1)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]+(-2+q[1])\,S[1]^2\,V^{(0,0,2)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]+P^2\left(-2\,(-1+q[1])\,S[1]\,V^{(0,1,1)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]+P^2\,q[1]\,V^{(0,2,0)}\left[t,P,\frac{S[1]}{P}\right]\right)\right)$$

**Maximize[{(q1² s1² + q2² s2² + 2 q1 q2 s1 s2 ρ) /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -.1, Abs[q1] + Abs[q2] == 1}, {q1, q2}]**

$\{0.64, \{q1 \to -5.2365\times 10^{-9}, q2 \to -1.\}\}$

**q1² s1² + q2² s2² + 2 q1 q2 s1 s2 ρ /. s1 -> 0.7 /. s2 -> 0.8 /. ρ → -1 /. q1 → 1 /. q2 → 0**

0.49

**FKE /. {q[1] → 1, q[2] → 0, q[3] → 0}**

$$-r\,V[t,P]+r\,V^{(0,1)}[t,P]+\frac{1}{2}\,\sigma[1]^2\,\sigma[1,1]^2\,V^{(0,2)}[t,P]+V^{(1,0)}[t,P]$$

**Also das q für die größte Vola muss eins sein. und der Preis entspricht einem Put auf ein unterlaying mit dieser vola und einem kurs vom portfoliowert und stirke gewinnstrike.**

## ■ ALSO: q=1

```
(*sei a>0 c≤q≤d dann ist ArgMax[q(a q+b)] gleich A*)
A[a_, b_, c_, d_] := Piecewise[{{d, Abs[c + b / 2 / a] < Abs[d + b / 2 / a]}}, c]
```

### Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

also 0 <= q <= (P+M)/ S

```
oq1 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], 0, (M + P)/S]]
```

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

### Für Long- und Short Positionen, Anfangskapital M und aufs Kapital limitierte Short positionen und Payoff max(P(t),0)

also -(P+M)/ S <= q <= (P+M)/ S

```
oq2 = Simplify[A[e^2 s^2 H^(2,0)[e, t], 2 r H^(1,0)[e, t] e, -1, 1]]
```

$$\begin{cases} 1 & \text{Abs}\left[-1 + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[1 + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -1 & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{r\, H^{(1,0)}[e,t]}{e\, s^2\, H^{(2,0)}[e,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{M+P}{S} & \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} - \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] < \text{Abs}\left[\frac{M+P}{S} + \frac{V^{(1,1,0)}[S,P,t]}{V^{(0,2,0)}[S,P,t]}\right] \\ -\frac{M+P}{S} & \text{True} \end{cases}$$

### Für -1<= q <= 1

```
Payoff = Simplify[P / S /. V → Vr /. P → e * S]
```

e

```
StrategiePayoff = Simplify[(FKE - (FKE /. q → 0)) / S / s^2 * 2 /. V → Vr /. P → e * S]
```

$q\,(-2\,e + q)\,H^{(2,0)}[e, t]$

Hier kann $H^{(2,0)}[e, t]$>0 angenommen werden, da H(e,T)= max(e,0). Dann gilt:

```
oq3 = Simplify[A[V^(0,2,0)[S, P, t], 2 V^(1,1,0)[S, P, t], -M, M] /. V → Vr /. P → e * S]
```

$$\begin{cases} M & \text{Abs}[e + M] < \text{Abs}[e - M] \\ -M & \text{True} \end{cases}$$

```
oq3' = { 1    e < 0
       { -1   True   ;
```

## Gewinn durch nicht optimales Verhalten des Optionshalters

Hedged man nach der optimalen Formel, so wird pro Zeiteinheit folgender deterministische Gewinn erzielt, wobei oq die optimale und q die tatsächliche Strategie darstellt. Er errechnet sich aus der differenz der discontierten hedging portfolio (mit tatsächlichem q) und dem discontierten options preis (der sich nach Ito auch mit dem tatsächlichen q bewegt. Da bleiben aber nur dt-Terme übrig. Setzt man hier jetzt ein, dass der Optionspreis einer Gleichung genügt, die den optimalen q (oq) enthält ergibt sich:

```
Simplify[(dDV /. q → oq) - dDV /. dW → 0]
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{dt}\,(\mathrm{oq}-\mathrm{q})\,\mathrm{s}^2\,\mathrm{S}^2\,\left((\mathrm{oq}+\mathrm{q})\,\mathrm{V}^{(0,2,0)}[\mathrm{S},\mathrm{P},\mathrm{t}]+2\,\mathrm{V}^{(1,1,0)}[\mathrm{S},\mathrm{P},\mathrm{t}]\right)$$

## Boundary conditions

## Für ausschließlich Long-Positionen mit Anfangskapital M und Payoff max(P(t),0)

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
$v(S, -M, t) = 0$
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(S > P, P, t) = P^+$

## Für -1<= q <= 1

$v(S, P, T) = P^+$
$v(0, P, t) = P^+$
v(S,-∞,t)=0
$\lim_{P\to\infty}$ v(S,P,t)/ P=1
$v(\infty, P, t) = P^+$