

## 2. Gleichstrommaschine

### 2.1 Modellbildung eines ankergesteuerten Gleichstrommotors

Für die Modellbildung des ankergesteuerten Gleichstrommotors ist es zunächst notwendig die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems zu betrachten, Bild 2.1. Eine elektrische Leistung in Form von Strom und Spannung wird in eine mechanische Leistung umgewandelt, welche in Form von Drehzahl und Drehmoment definiert ist. Die Eingangsgröße ist somit eine Spannungsdifferenz und die Drehung der Welle die Ausgangsgröße.

Bei der Gleichstrommaschine betrachten wir zuerst das Beispiel des **ankergesteuerten Gleichstrommotors**. D.h. dass der Erregerstrom  $I_E$  konstant gehalten wird und der Motor durch die Ankerspannung  $U_a$  gesteuert wird. Der Erregerstrom erzeugt mit seinen Spulen, die um den Anker bzw. Rotor angeordnet sind, Magnetfelder. Der Anker, auch wiederum mit Spulen versehen erzeugt ebenfalls ein Magnetfeld.

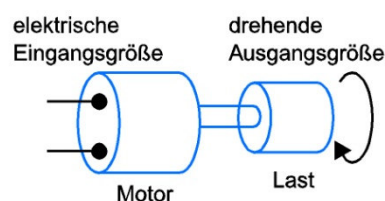


Bild. 2.1. Eingangsgröße und Ausgangsgröße eines Elektromotors nach [1]

Der Erregerstromkreis und der Ankerstromkreis wird in Bild 2.2. dargestellt. Das Bild zeigt die Ersatzschaltbilder für die zu betrachtende Gleichstrommaschine.

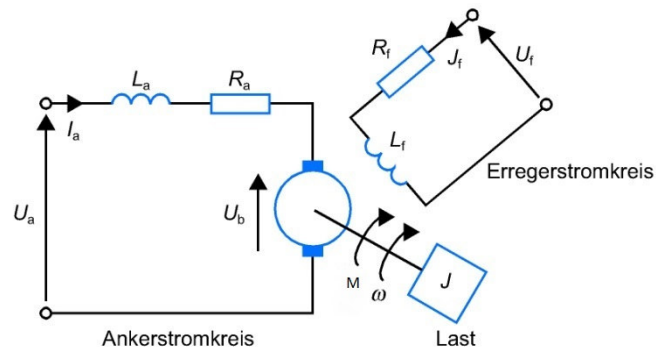


Bild. 2.2. Ersatzschaltbilder für Anker und Erregerstromkreis und die daraus resultierende mechanische Leistung nach [1]

Das Ankermagnetfeld stößt sich vom Statormagnetfeld aufgrund der gleichen Pole ab. Da der Anker gelagert ist, greift die Umfangskomponente der Kraft aus den abstoßenden Polen am Rotor an und verdreht diesen. Bild 2.3. zeigt die stark vereinfachte Ankerspule mit den zu betrachtenden Größen.

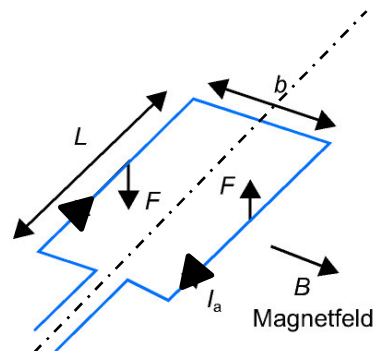


Bild. 2.3. Kräfte an der Ankerspule aufgrund eines Stroms und einem Magnetfeld nach [1]

Die Kraft im Magnetfeld ergibt sich durch:

$$F = B \cdot I_a \cdot L$$

Bei Berücksichtigung von N Drähten erhöht sich die Kraft um den Faktor N

$$F = B \cdot I_a \cdot L \cdot N$$

Die Kraft greift außen am Leiter an und es ergibt sich aufgrund der Drehachse und der halben Leiterbreite ein Drehmoment das wie folgt definiert ist.

$$M = 2 \cdot F \cdot \frac{b}{2} = F \cdot b = B \cdot I_a \cdot L \cdot N \cdot b$$

Fasst man die zeitkonstanten Anteile der o.g. Gleichung zu der Konstanten  $k_1$  zusammen, so lautet die Gleichung:

$$M = k_1 \cdot B \cdot I_a$$

Als weiteren Effekt müssen wir beachten, dass das Statormagnetfeld auf den stromdurchflossenen Leiter (der Spule) des Rotors eine Spannung induziert. Da die Spannung entgegengesetzt der Richtung des erzeugten Stroms fließt, spricht man von der Gegenspannung  $U_b$ . Da die Induktion proportional zu der Drehung des Rotors (d.h. Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ) und dem Magnetfeld  $B$  ist, lässt sich folgender Zusammenhang definieren:

$$U_b = k_2 \cdot B \cdot \omega$$

Für den am Anfang definierten ankergesteuerten Motor mit konstanter Erregerspannung bedeutet es, dass das Magnetfeld  $B$  aufgrund der konstanten Erregerspannung konstant ist. Damit lässt sich die Gleichung weiter zusammenfassen.

$$U_b = k_2 \cdot B \cdot \omega = k_3 \cdot \omega$$

Betrachten wir das Ersatzschaltbild für den Anker nach Bild 2.2., so besteht der Anker aus einer Spule  $L$  und einem Widerstand  $R_a$ , die in Reihe geschaltet sind.

Zusammen mit Berücksichtigung der Gegenspannung ergibt sich dann beim Maschenumlauf durch den Anker folgende Gleichung für die Spannung:

$$U_a - U_b = L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + R_a \cdot I_a$$

Die induzierte Gegenspannung hängt vom Betriebspunkt ab und beeinflusst das mögliche Drehmoment. Somit kann das Verhalten in ein Blockdiagramm nach Bild 2.4. dargestellt werden, bei dem die induzierte Gegenspannung eine Rückkopplungsschleife erzeugt, die wiederum auf die drehmomenterzeugende Spannung wirkt.

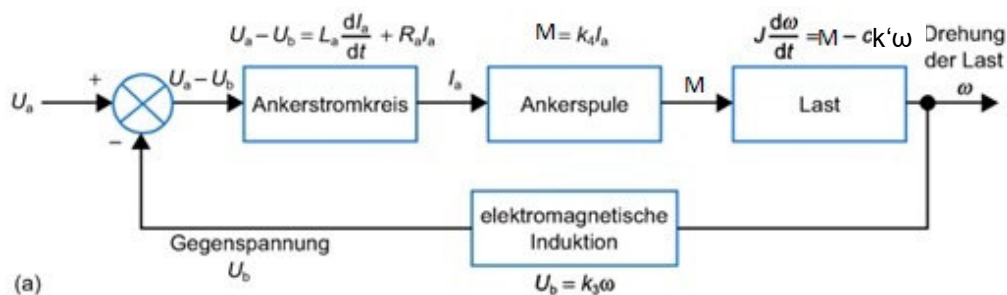


Bild. 2.4. Blockschaltbild der ankergesteuerten Gleichstrommaschine nach [1]

Setzt man die hergeleiteten Gleichungen ineinander, d.h. ersetzt  $U_b$  durch die vorherige Gleichung, so ergibt sich:

$$U_a - k_3 \cdot \omega = L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + R_a \cdot I_a$$

Für das durch den Rotor erzeugte Drehmoment können wir für den ankergesteuerten Motor eine Vereinfachung einführen, da das Magnetfeld durch die konstanten Statorbetriebsbedingungen sich nicht ändert.

$$M_{el} = k_1 \cdot B \cdot I_a = k_4 \cdot I_a$$

Als nächstes betrachten wir den mechanischen Ast nach Bild 2.2. Unser abgegebendes Drehmoment  $M_{ab}$  ergibt sich durch das vom Anker erzeugte Drehmoment minus Dämpfungsmoment (was z.B. eine viskose Reibung oder durch Reibung bedingt sein kann). Bei dem System gehen wir davon aus, dass die Welle unendlich steif ist, d.h. wir brauchen keine Drehelastizität der Welle berücksichtigen. In der Annahme, dass wir aufgrund von ögelagerten Lagerungselementen eine viskose Reibung haben und ein Drehmoment von  $M_{Ri}$  sich einstellt, lässt sich die Drehmomentbilanz wie folgt darstellen.

$$M_{ab} = M_{el} - M_{Ri} = k_4 \cdot I_a - k' \cdot \omega$$

Wie in Bild 2.2. dargestellt, betrachten wir zunächst den Fall, dass wir nur eine Drehmasse mit dem Trägheitsmoment  $J$  beschleunigen wollen. Das vom Motor abgegebene Abtriebsdrehmoment steht komplett zur Beschleunigung zur Verfügung.

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = k_4 \cdot I_a - k' \cdot \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot (k_4 \cdot I_a - k' \cdot \omega)$$

Die Gleichung der Spannungsdifferenz lösen wir nach der Stromänderung auf:

$$U_a - U_b = L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + R_a \cdot I_a$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{1}{L_a} (U_a - U_b - R_a \cdot I_a)$$

Ebenfalls ist die Gleichung für die induzierte Spannung von der Winkelgeschwindigkeit abhängig.

$$U_b = k_3 \cdot \omega$$

Das hergeleitete Modell berücksichtigt nur das Beschleunigen einer trägen Masse. Wenn wir in unserem konkreten Anwendungsfall das Modell benutzen, dann wollen wir neben der trägen Masse auch noch ein Lastdrehmoment überwinden. Somit erweitert sich die Gleichung auf:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = k_4 \cdot I_a - k' \cdot \omega - M_L$$

Die letzten drei gezeigten Gleichungen beschreiben somit das zeitabhängige Verhalten der Gleichstrommaschine.

Im Rahmen der Aufgabenstellung wird der Term für die viskose Reibung nicht verwendet ( $k' = 0$ ), da die Reibung im mechanischen Modell bereits berücksichtigt ist.

## 2.2 Mechanische Anforderungen

Nach den statischen Berechnungen aus Kapitel 1 liegen folgende Anforderungen vor:

$$n_{\text{Antrieb}} = 36,167 \frac{1}{\text{min}}$$

$$M_{\text{Antrieb}} = 0,690 \text{ Nm}$$

Weiterhin wird ein Netz von 24 V festgelegt, wobei bei laufendem Motor in der Regel eine Ladespannung von  $24 \text{ V} \pm 1 \text{ V}$  zu messen ist.

Um die geforderte Drehzahl mit einem baulich kleinen Motor zu erreichen, muss mit einem Zwischengetriebe gearbeitet werden. Das Getriebe muss aufgrund der hohen Drehzahl des Motors eine hohe Übersetzung aufweisen, gleichzeitig darf es nur einen kleinen Bauraum in Anspruch. Es bieten sich dafür mehrstufige Planetengetriebe an. Eine Internetrecherche ergibt unzählige Möglichkeiten. Neben den Elektromotoren werden die passenden Getriebe in verschiedenen Übersetzungsstufen angeboten. Als Motor bietet sich die Bauform EMG49 an, der bei 24 V betrieben werden kann. Kombiniert mit dem Getriebe welches integriert ist erhält man die gewünschten Drehzahlen bzw. Drehmomente. In Abschnitt Elektrische Anforderungen ist das Kennfeld eines Elektromotors der Bauform EMG49 beschrieben.

### 2.1.1 Elektrische Anforderungen

Für die elektrischen Werte des Motors wird das Kennfeld zur Hilfe genommen. Leider stehen nicht alle Kennwerte wie in Kap. 2.1 benötigt zur Verfügung. Aus diesem Grund werden Ansätze aufgezeigt, wie man aus dem gegebenen Graphen die Motorkonstanten ermitteln kann. Bild 2.1 zeigt das Kennfeld für den Motor EMG49

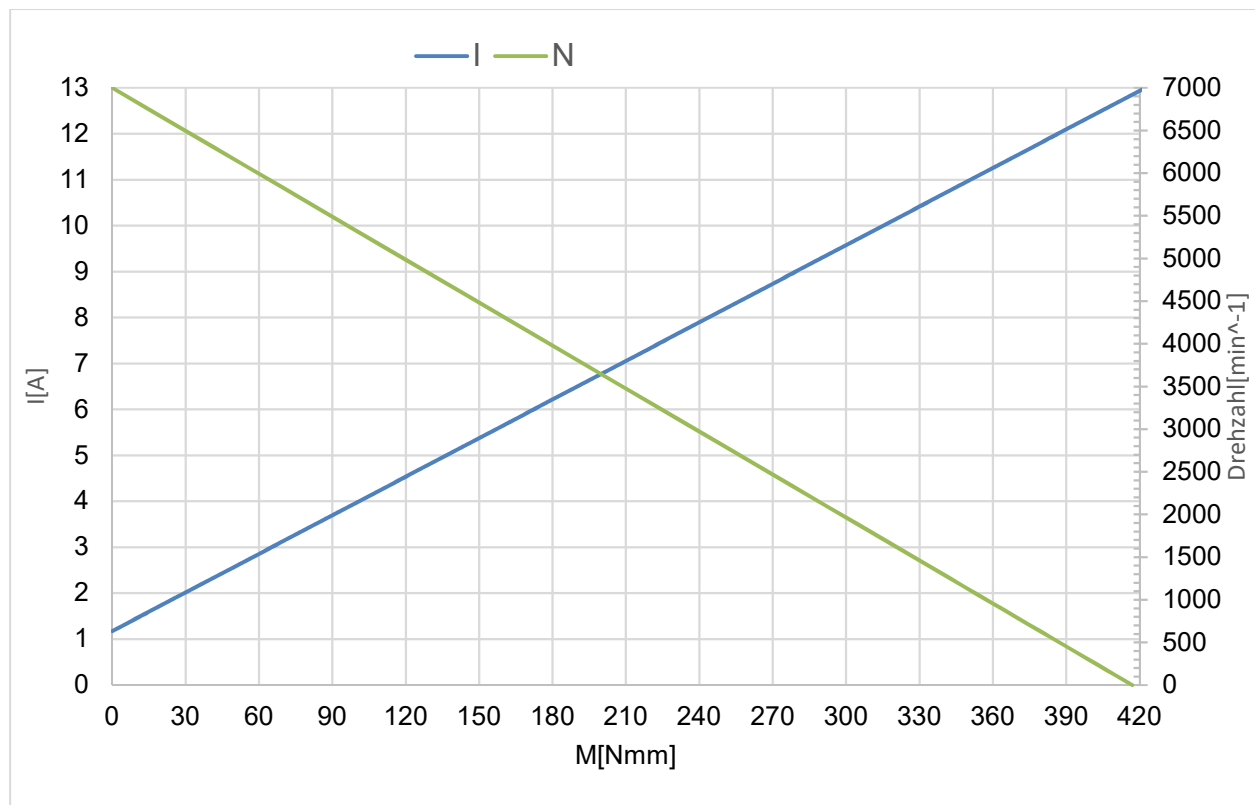


Bild. 2.1. Bürsten-Gleichstrommotor EMG49 in 24 V der Firma Robot Electronics

Trägheitsmoment:  $J = 1,8 \text{ gcm}^2$

Zeitkonstante Motor:  $T_A = 8,88 \cdot 10^{-1} \text{ ms}$

Betriebsdrehzahl des Motors:  $n_n = 1772 \text{ min}^{-1}$



Aus dem Kennfeld können alle Werte für die Berechnung der Maschinenkonstanten bestimmt werden:

### 2.1.2 Maschinenkonstante $k_4$ :

$$M = k_4 \cdot I_a \quad \text{also} \quad k_4 = \frac{M}{I_a}$$

Mit Hilfe von Bild 3.1. ergibt sich  $k_4$ .

$$k_4 = \frac{M}{I_a} = \frac{0.317 \text{ Nm}}{10.052 \text{ A}} = 0,031536 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$$

### 2.1.3 Induktionskonstante $k_3$ :

$$U_b = k_3 \cdot \omega \quad \text{also} \quad k_3 = \frac{U_b}{\omega}$$

Mit der Definition der elektrischen und mechanischen Leistung ergibt sich:

$$P_{\text{mech}} = P_{\text{elek}}$$

$$M \cdot \omega = U_b \cdot I_a$$

$$k_4 \cdot I_a \cdot \omega = k_3 \cdot \omega \cdot I_a$$

$$k_4 = k_3$$

### 2.1.4 Innenwiderstand $R_a$ vom Motor

Über den Innenwiderstand  $R_a$  ergibt sich für eine stationäre Drehzahl ein Spannungsabfall zwischen der von außen anliegenden Ankerspannung  $U_a$  und der inneren Spannung  $U_b$ . Also gilt unter Nutzung des Bildes 2.1:

$$\text{mit } U_b = k_3 \cdot \omega \text{ im Nennpunkt gilt: } U_{bN} = k_3 \cdot \frac{1772 \text{ 1/min}}{60 \text{ s/min}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\text{Nm}}{\text{A}} = 5,85 \text{ V}$$

$$R_a = \frac{U_a - U_{bN}}{I_a}$$

$$R_a = \frac{U_{aN} - U_{bN}}{I_{aN}} = \frac{24V - 5,85V}{10.052 A} = 1,8 \Omega$$

### 2.1.5 Getriebe

Die Übersetzung des Getriebes wird über den Zusammenhang von Betriebspunkt und Nenndrehzahl bestimmt. Aus der Gleichung

$$|i| = \frac{n_n}{n_{Antrieb}} = \frac{1772 \text{ min}^{-1}}{36.167 \text{ min}^{-1}} = 49$$

wird die Übersetzung bestimmt. Es wird für die Simulation auf die nächste ganze Zahl gerundet. Der Wirkungsgrad des Motors wird auf  $\eta = 0.7$  gesetzt. Der Wirkungsgrad beschreibt den Momenten Verlust der durch das Getriebe entsteht.

### 2.1.6 Induktivität Motor

Die Abschätzung der Induktivität werden wir über die typische Reaktionszeit von elektrischen Gleichstrommotoren vornehmen. Dazu erfolgt ein kurzer Ausflug in die Laplace-Transformation von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

## 2.3 Laplace-Transformation bei Systemen mit Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung lautet in der allgemeinen Form mit den Konstanten  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_0$ , der Eingangsgröße  $y$  und der Ausgangsgröße  $x$ :

$$a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = b_0 \cdot y$$

Wenn die Anfangsbedingungen 0 sind, dann lautet die Laplace-Transformierte Gleichung:

$$a_1 \cdot s \cdot X(s) + a_0 \cdot X(s) = b_0 \cdot Y(s)$$

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1 \cdot s + a_0}$$

Weiterhin setzen wir die Zeitkonstante  $\tau$  ein, die für die DGL 1. Ordnung mit  $\tau = \frac{a_1}{a_0}$  definiert ist. Somit ergibt sich nach der Umlösung:

$$G(s) = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0) \cdot s + 1}$$

Weiterhin können wir die Verstärkung  $G$  mit  $G = b_0/a_0$  einführen. Diese Verstärkung kann bei Systemen im stationären Zustand verwendet werden, d.h. es darf keine Ableitungsfunktion  $\frac{dx}{dt}$  enthalten sein.

$$G(s) = \frac{G}{\tau \cdot s + 1}$$

## 2.4 Laplace-Transformation beim Gleichstrommotor

Das Ersatzschaltbild der Spulen ohne die induzierte Spannung  $U_b$  ergibt sich nach Bild 2.2.

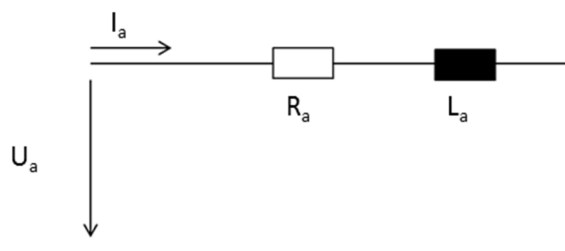


Bild 2.2. Ersatzschaltbild Ankerspule ohne Drehung des Ankers

Unter Verwendung der Herleitung aus Kapitel 2.3 lässt sich die Zeitkonstante definieren.

$$U_a = L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + R_a \cdot I_a$$

Nach der LaPlace-Transformation erhalten wir die Übertragungsfunktion  $G_A(S)$  der Gleichstrommaschine:

$$U_a(S) = R_a \cdot I_a(S) + L_a \cdot S \cdot I_a(S) = I_a(S) \cdot (R_a + L_a \cdot S)$$

$$G_A(S) = \frac{I_a(S)}{U_a(S)} = \frac{1}{L_a \cdot S + R_a} = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_a}{R_a} \cdot S + 1} = \frac{V_A}{T_A \cdot s + 1}$$

Also gilt:

$$T_A = \frac{L_a}{R_a}$$

$$L_a = T_A \cdot R_a$$

Die Zeitkonstante des Motors beträgt  $T_A = 8,88 \cdot 10^{-4} \text{s}$ . Daraus lässt sich die Induktivität  $L_a$  zu 1,6mH bestimmen.

## 2.5 Modellbildung eines ankergesteuerten Gleichstrommotors in Simulink

Für die oben hergeleitete Modellbildung betrachten wir zunächst die Umwandlung eines elektrischen Schaltbildes nach Bild 2.3. in ein Blockschaltbild einer DGL, wie es in Bild 2.4. dargestellt ist.

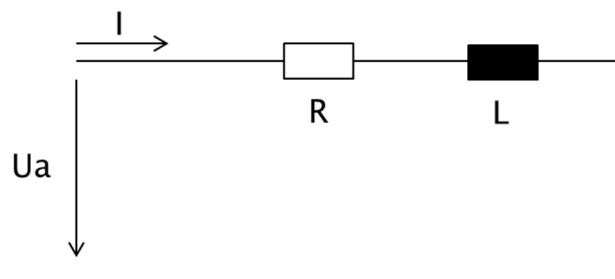


Bild. 2.3. Ersatzschaltbild einer ohmschen-induktiven Last

Folgende Gleichungen beschreiben den Zusammenhang:

$$-U_a + L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} \cdot U_a - \frac{R}{L} \cdot I$$

Wandelt man die Gleichung in einem Blockschaltbild um, so erhält man die integrierende Funktion:

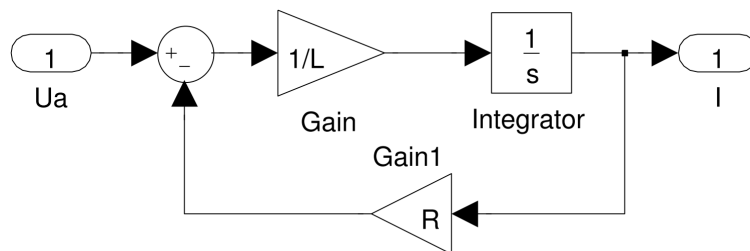


Bild. 2.4. Blockschaltbild der DGL mit dem Simulink® typischen Bezeichnungen

Unter Verwendung der oben gezeigten Gleichstrommaschinengleichung lässt sich jetzt unter Anwendung des Beispiels das Blockschaltbild der Gleichstrommaschine in Simulink® erstellen.

Das Blockschaltbild beschreibt das Verhalten einer Gleichstrommaschine bei der Vorgabe einer konstanten Spannung  $U_a$ . Somit stellt sich eine Drehzahl ein, die Abhängig von der Last, und beim Beschleunigen vom Trägheitsmoment ist.

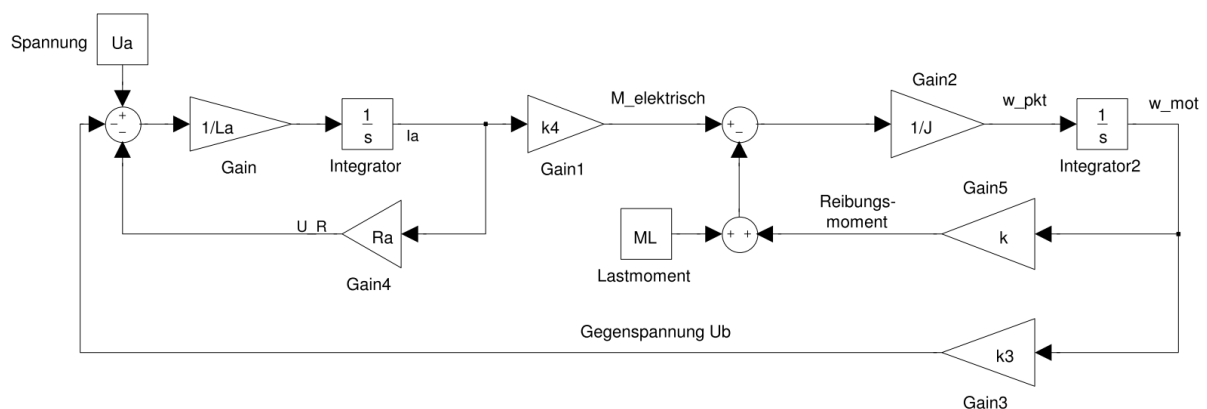


Bild. 2.5. Blockschaltbild einer ankergesteuerten Gleichstrommaschine in Simulink®

## 2.6 Kopplung der Gleichstrommaschine mit der Fenstermechanik unter Berücksichtigung des Massenträgheitsmoments

Das in Bild 2.4 gezeigte Modell der Gleichstrommaschine kann nicht direkt mit dem Modell der Fenstermechanik gekoppelt werden, da das Modell der Fenstermechanik als Eingangsgröße das Moment der Antriebsrolle benötigt. Die Gleichstrommaschine liefert als Ausgangsgröße hingegen eine Drehzahl.

Es wird deswegen das Drehmoment  $M_{el}$  ausgekoppelt, was zu einem Verlust des Trägheitsmoments führt. Deshalb muss die Trägheit des Motors auf eine äquivalente Masse umgerechnet und innerhalb der Fenstermechanik berücksichtigt werden.

Das von der Winkelbeschleunigung und der Trägheit abhängige Trägheitsmoment muss in eine von der translatorischen Beschleunigung und der Masse abhängigen Kraft überführt werden. Bei der Umrechnung wird die im folgenden Kapitel benötigte Getriebeübersetzung mit betrachtet:

$$M_{Trg,M} = J \cdot \dot{\omega}_{Mot}$$

$$M_{Trg,G} = F_{Trg,G} \cdot r_a$$

Mit der Übersetzung des Getriebes

$$M_{Trg,M} \cdot u_{Getr} \cdot \eta_{Getr.} = M_{Trg,G}$$

$$\omega_{Getr} \cdot u_{Getr} \cdot \eta_{Getr.} = \omega_{Mot}$$

folgt

$$M_{Trg,M} \cdot u_{Getr} \cdot \eta_{Getr.} = F_{Trg} \cdot r_a$$

Einsetzen des Trägheitsmoments

$$J \cdot \dot{\omega}_{Mot} \cdot u_{Getr} \cdot \eta_{Getr.} = F_{Trg} \cdot r_a$$

und der Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}_{Mot}$

$$J \cdot \dot{\omega}_{Getr} \cdot u_{Getr}^2 \cdot \eta_{Getr.} = F_{Trg} \cdot r_a$$

Überführen der Winkelbeschleunigung in die translatorische Beschleunigung des Schlittens

$$\dot{\omega}_{Getr} = \frac{\ddot{z}_s}{r_a}$$

liefert

$$J \cdot \frac{\ddot{z}_s}{r_a} \cdot u_{Getr}^2 \cdot \eta_{Getr.} = F_{Trg} \cdot r_a$$

und daraus folgt

$$F_{Trg} = J \cdot \frac{\ddot{z}_s}{r_a^2} \cdot u_{Getr}^2 \cdot \eta_{Getr.}$$

Die ermittelte Kraft  $F_{Trg}$  greift nun zusätzlich an der Masse des Schlittens an und muss in der Bewegungsgleichung des Schlittens integriert werden.



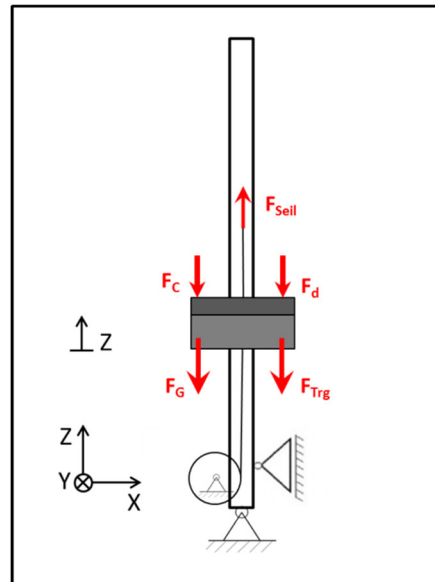


Bild 2.6. Mechanisches Teilsystems des Schlittens mit der zusätzlichen Kraft  $F_{Trg}$

$$m_S \cdot \ddot{z}_S = F_{Seil} - F_D - F_C - F_G - F_{Trg}$$

$$m_S \cdot \ddot{z}_S = F_{Seil} - k \cdot (\dot{z}_S - \dot{z}_f) - c \cdot (z_S - z_f) - m_S \cdot g - J \cdot \frac{\ddot{z}_S}{r_a^2} \cdot u_{Getr}^2 \cdot \eta_{Getr}.$$

$$\ddot{z}_S = \frac{1}{m_S + J \frac{u_{Getr}^2}{r_a^2} \cdot \eta_{Getr}.} [F_{Seil} - k \cdot (\dot{z}_S - \dot{z}_f) - c \cdot (z_S - z_f) - m_S \cdot g]$$

Die Trägheit des Motors ist jetzt in eine zusätzliche Masse des Schlittens überführt worden.

Die Masse des Schlittens und der Trägheit wird zu einer erweiterten Masse zusammengefasst  $m_S + J \frac{u_{Getr}^2}{r_a^2} \cdot \eta_{Getr}. = m_{erw}$  und in das Simulinkmodell integriert.

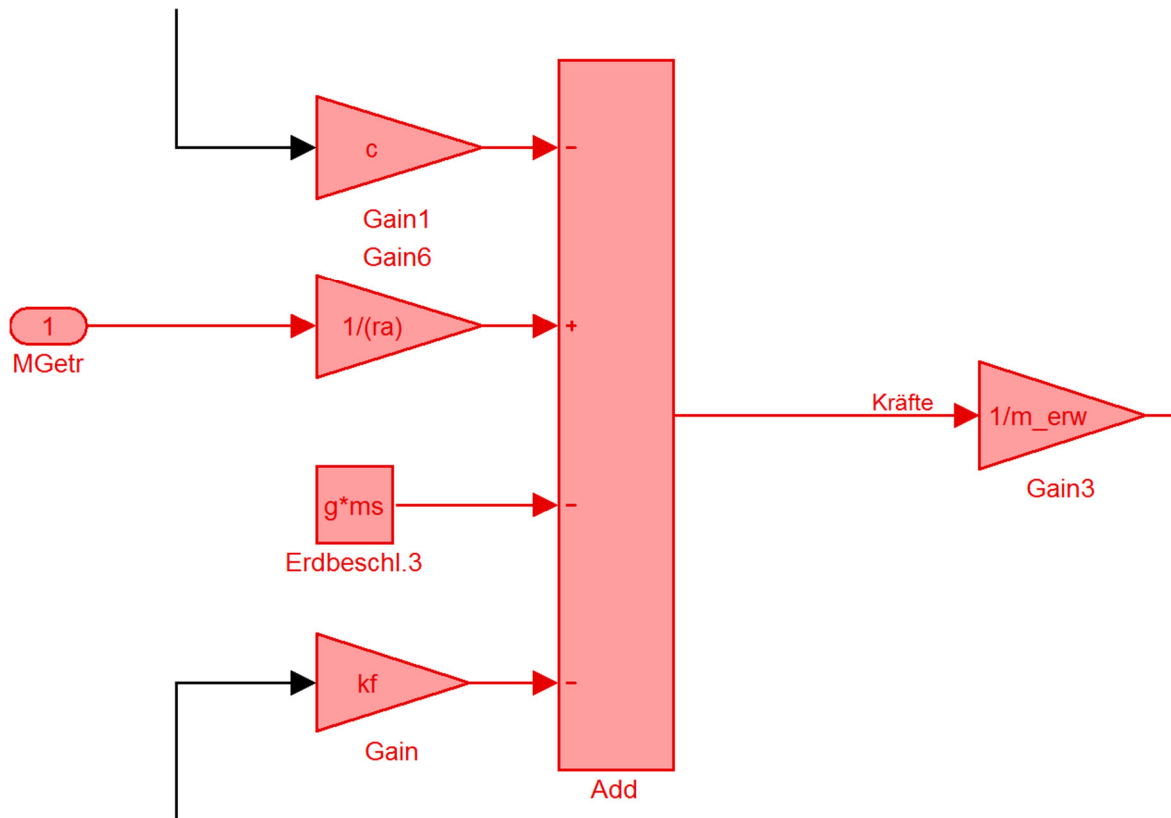


Bild 2.7. Simulinkmodell der Fenstermechanik mit der erweiterten Masse