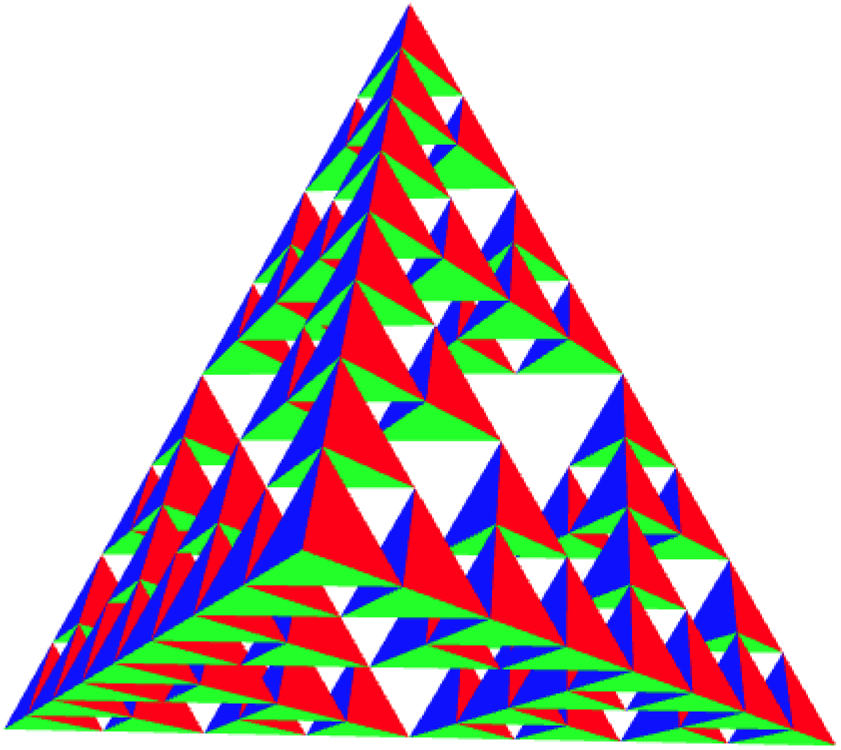
TÖL105M TÖLVUGRAFÍK

Fyrirlestur 7: Línuleg algebra



Hjálmtýr Hafsteinsson
Haust 2024

Í þessum fyrirlestri

- Línuleg algebra (þeir hlutar sem við notum!)
  - Grunnhlutir:
    - Tölur
    - Punktar
    - Vigrar
  - Þrívíðir grunnhlutir

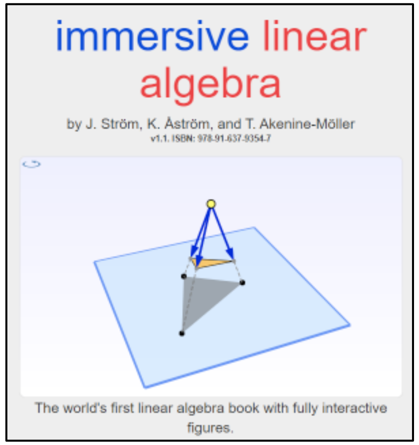
4.1 – 4.2

Rúmfræði fyrir tölvugrafík

- Stærðfræðileg rúmfræði skoðar tengsl milli hluta í *n*-víðu rúmi
- Í tölvugrafík vinnum við aðallega með 3-víð rúm
  - Skilgreinum fræðilega grunnhluti sem við byggjum líkönin okkar á
  - Notum aðeins þær aðgerðir/eiginleika rúmfræðinnar sem hentar fyrir okkur
  - Skoðum hvernig hlutir geta verið táknaðir á mismunandi vegu í ólíkum hnitakerfum

Við notum nokkur hnitakerfi:
Líkanahnit
Heimshnit
Sjónhnit
...

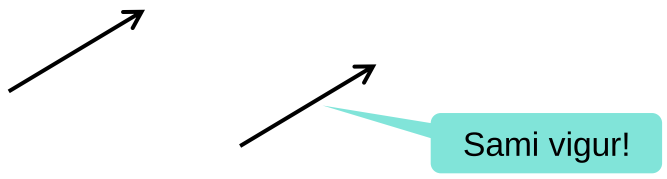
Sambærilegt:
4, **IV**, **IIII** táknar allt sömu töluna



Góð gagnvirk kennslubók um línulega algebru

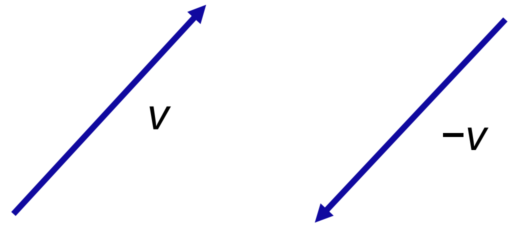
Rúmfræðilegir grunnhlutir

- **Tala** (*scalar*)
  - Rauntala notuð til að tilgreina ýmsa hluti, t.d. fjarlægðir
  - Hefur enga rúmfræðilega eiginleika
- **Punktur** (*point*)
  - Staður í (þrívíðu) rúmi
- **Vigur** (*vector*)
  - Hefur stefnu og stærð en ekki staðsetningu

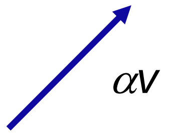


Aðgerðir vigra

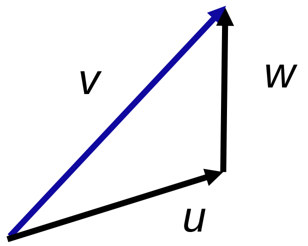
- Sérhver vigur hefur andhverfu
  - Sama lengd, en öfug stefna



- Hægt er að margfalda vigur með skalar (kvarða vigurinn)



- Summa tveggja vigra *u* og *w* er nýr vigur *v*
  - Hali *w* er á haus *u*



Vigurrúm (*vector space*)

- Stærðfræðikerfi til að vinna með vigra
  - Kvarða vigra ($u = \alpha v$)
  - Leggja saman vigra ($v = u+w$)
- Vinnur aðeins með stefnur og stærðir
- Vantar alveg staðsetningar
  - Getum ekki sagt <u>hvar</u> einhver vigur er, bara hvaða stefnu og stærð hann hefur
  - Ef tveir vigrar hafa sömu stefnu og stærð, þá eru þeir sami vigurinn (í vigurrúmi!)

<u>Svipað:</u>

"Talan 4 hefur enga staðsetningu eða stefnu, bara stærð!"

"Punkturinn (2, 3) hefur enga stærð eða stefnu, bara staðsetningu!"

Punktaaðgerðir

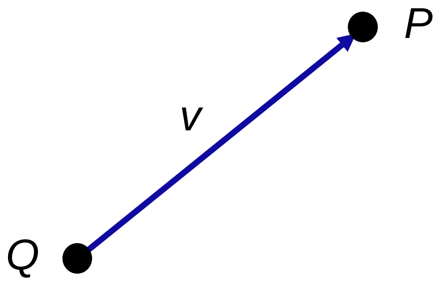
- Punktar tilgreina staðsetningu í rúmi
  - Hafa enga stærð eða lögun (óendanlega litlir)

- Höfum aðgerðir á milli punkta og vigra:
  - Frádráttur milli punkta *P* og *Q* býr til vigur *v*

$$v = P - Q$$

  - Samlagning á vigri *v* og punkti *Q* gefur punkt *P*

$$P = v + Q$$



Fyrirlestraæfingar

1. Ef v, u og w eru vigrar, teiknið þá upp vigrana $v+(u+w)$ og $(v+u)+w$. Eru þeir eins?

2. Gefnir punktarnir (1, 2) og (3, 3), sýnið stikað form línu í gegnum þá (þ.e. á forminu $P(\alpha) = P_0 + \alpha d$)

3. Er nóg að hafa tvo punkta, P og Q, og einn vigur u til að skilgreina sléttu (*plane*)? Hvers vegna (ekki)?

Vildarrúm (*affine space*)

- Vildarrúm er vigurrúm að viðbættum punktum
  - Getum þá líka unnið með staðsetningar
- Helstu aðgerðir:
  - Samlagning vigra $\boxed{v = u + w}$
  - Margföldun talna og vigra $\boxed{v = \alpha u}$
  - Samlagning vigurs og punkts $\boxed{P = v + Q}$
  - Frádráttur punkta $\boxed{v = P - Q}$
  - ...

Sjónarhorn tölvunarfræðinnar

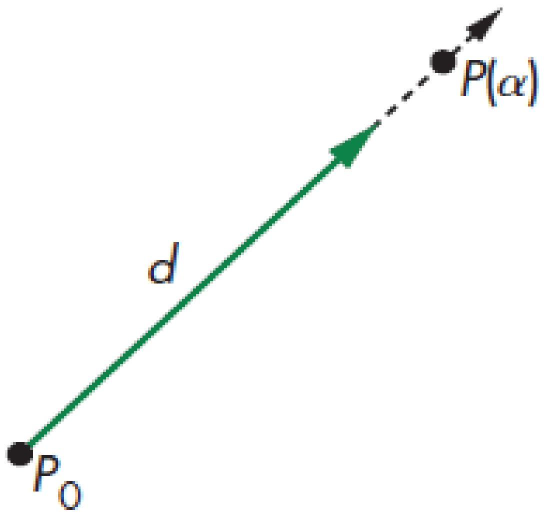
- Getum litið á þessa grunnhluti sem klasa (huglæg gagnatög)

```
vector u, v;
point p, q;
scalar a, b;
```

- Aðgerðir á hluti af tiltekinni gerð skila hlutum af annari gerð
  - Notum þessa leið að vissu marki í Javascript
  - Sjáið þetta í kóðanum í bókinni

Línur (*lines*)

- Lína er safn punkta:
  - Allir punktar sem uppfylla $P(\alpha) = P_0 + \alpha d$
    - þar sem P_0 er punktur, d er vigur og α er tala á ákveðnum bili
    - Hvert gildi á α gefur einn punkt
    - Safn þeirra punkta myndar línuna



Stikað form lína

- Þessi táknun kallast stikað form (*parametric form*)
  - Almennara en aðrar táknanir línu
  - Auðvelt að útvíkka í almenna ferla og yfirborð
- Aðrar tvívíðar táknanir:
  - Bein (*explicit*): $y = mx + h$
  - Fólgin (*implicit*): $ax + by + c = 0$
  - Stikuð (*parametric*): $x(\alpha) = \alpha x_0 + (1-\alpha)x_1$
    $y(\alpha) = \alpha y_0 + (1-\alpha)y_1$

Fyrirlestraæfingar

1. Ef *v*, *u* og *w* eru vigrar, teiknið þá upp vigrana *v*+(*u*+*w*) og (*v*+*u*)+*w*. Eru þeir eins?

2. Gefnir punktarnir (1, 2) og (3, 3), sýnið stikað form línu í gegnum þá (þ.e. á forminu $P(\alpha) = P_0 + \alpha d$)

3. Er nóg að hafa tvo punkta, *P* og *Q*, og einn vigur *u* til að skilgreina sléttu (*plane*)? Hvers vegna (ekki)?

Geislar (*rays*)

- Þegar $\alpha \geq 0$ þá er $P(\alpha)$ geisli (*ray*) frá P_0 í áttina d

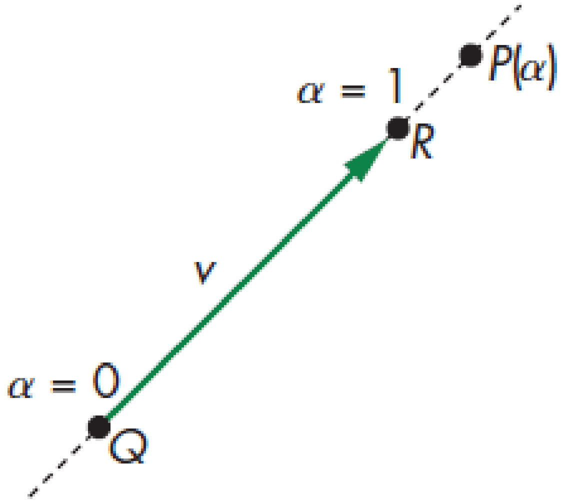
- Ef við notum tvo punkta Q og R til að skilgreina stefnuvigurinn v, þá fáum við

  $P = Q + \alpha v$ með $v = R - Q$

  $P = Q + \alpha(R - Q)$ eða

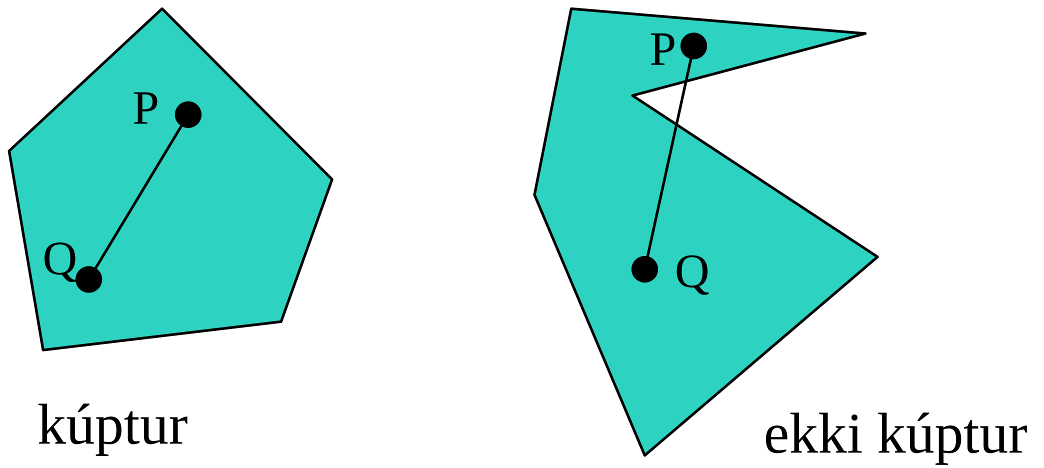
  $P = \alpha R + (1 - \alpha)Q$

- Ef $0 \leq \alpha \leq 1$ þá eru allir punktarnir á línubútinum (*line segment*) á milli R og Q



Kúptir (*convex*) hlutir

- Hlutur er <u>kúptur</u>:
  - Ef tveir punktar eru innan hlutarins þá eru allir punktar á línubúti milli þeirra líka innan hlutarins
  - eða ef hann er <u>úthyrndur</u>:
    - Öll innri horn eru minni en 180°



<u>Önnur skilgreining:</u>

Hægt að ferðast allan hringinn og beygja alltaf í sömu átt (t.d. vinstri, ef rangsælis hringur)

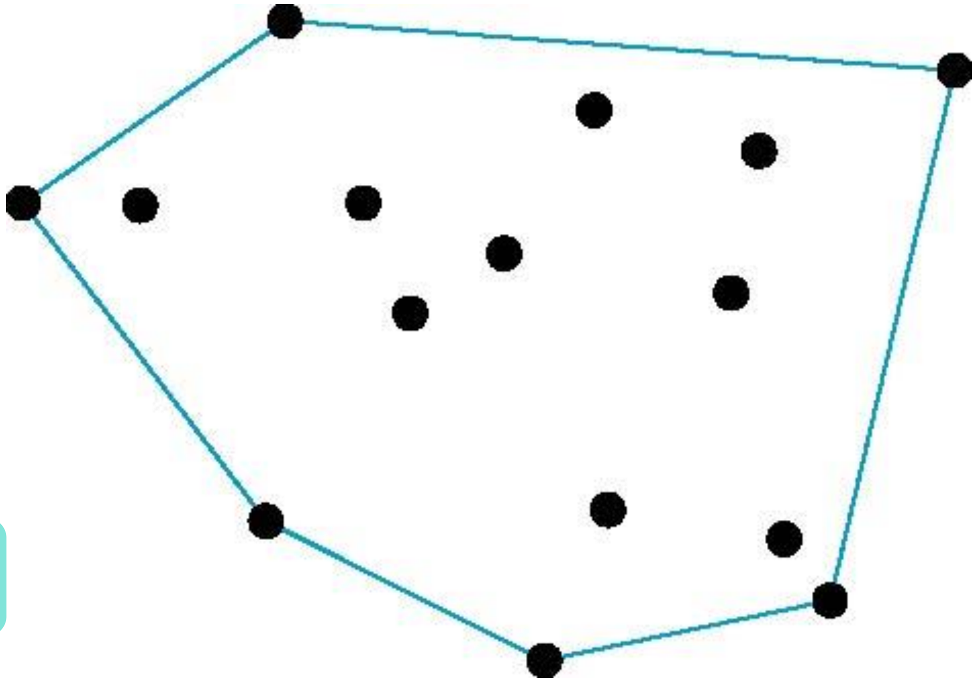
Kúptur hjúpur (*convex hull*)

- Minnsti kúpti hlutur sem inniheldur punktana P_1, P_2, ... P_n
- Svipað og punktarnir væru "plastaðir" (*shrink wrapped*)

Notar Deila-og-Drottna aðferðafræði

Til hraðvirkt reiknirit fyrir tvívíðu útgáfuna: $O(n \log h)$

h er fjöldi hnúta á hjúpnum ($h \leq n$)



Vildarsumma (*affine sum*)

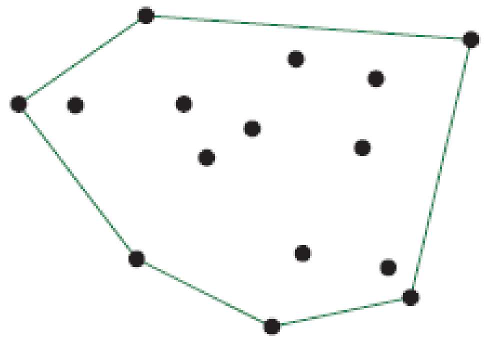
- Skoðum summuna:

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

- Þessi summa er vildarsumma ef

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$

- Ef allir stuðlarnir α_i eru líka jákvæðir ($\alpha_i \geq 0$) þá skilgreinir formúlan $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$ alla punkta innan við kúptan hjúp punktanna $P_1, \ldots, P_n$



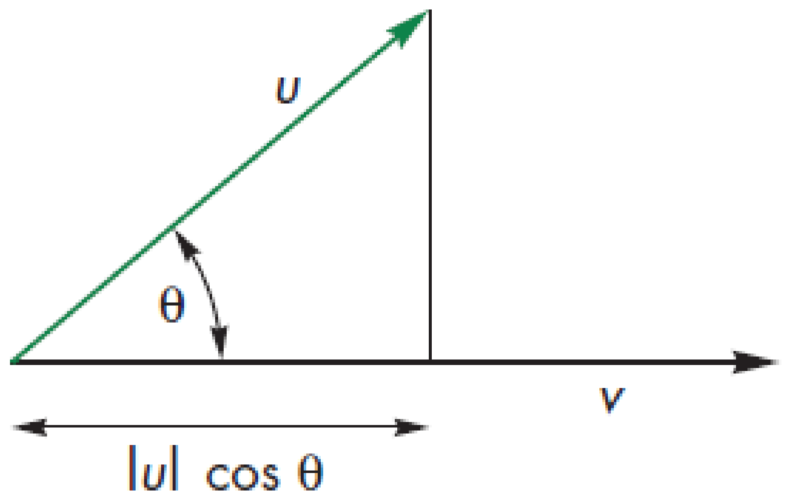
Viguraðgerðir

- <u>Innfeldi</u> (depilfeldi, *dot product*) tveggja vigra *u* og *v* varpar öðrum vigrinum ofan á hinn
  - Ef u og v eru einingarvigrar þá gefur innfeldi þeirra hornið á milli þeirra ($\cos\theta$)
  - Ef $u \cdot v = 0$ þá eru u og v hornréttir

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$

Þetta er tala (skalar)

Mikið notað í tölvugrafík til að reikna speglun (*reflection*) ljóss

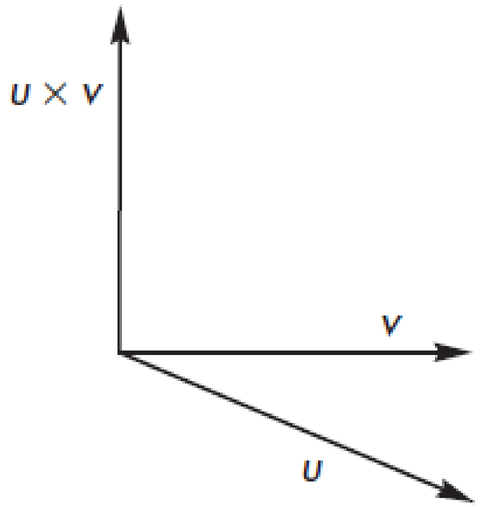


Viguraðgerðir

- Krossfeldi (*cross product*) tekur tvo ekki-samsíða vigra og býr til vigur sem er hornréttur á þá báða
  - Aðeins til í þrívídd

```
function cross( u, v ) {
   ...
   var result = [u[1]*v[2] - u[2]*v[1],
                 u[2]*v[0] - u[0]*v[2],
                 u[0]*v[1] - u[1]*v[0]
];
   return result;
}
```

Kóði úr MV.js

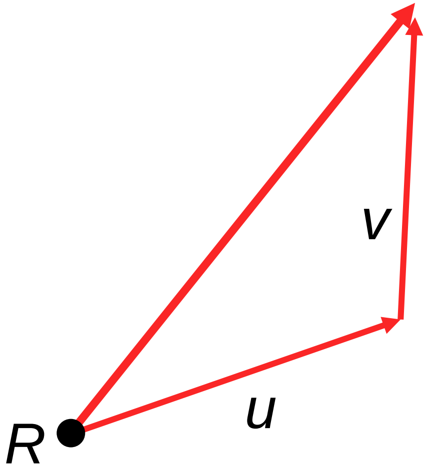


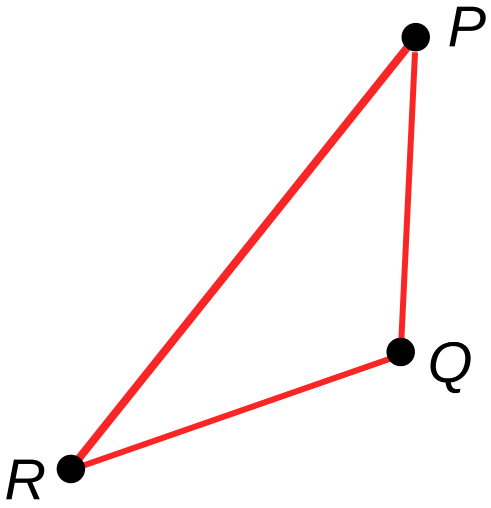
Mikið notað í tölvugrafík til að finna þvervigur (*normal vector*) á yfirborð hlutar

Lengd *uxv* er flatarmál samsíðungsins sem hefur *u* og *v* sem hliðar

Slétta (*plane*)

- Hægt að skilgreina sléttu á tvo vegu:
  1. með einum punkti R og tveimur vigrum u og v
  2. með þremur punktum P, Q, R





$T(\alpha, \beta) = R + \alpha u + \beta v$

$T(\alpha, \beta) = R + \alpha(Q - R) + \beta(P - Q)$

Stikað form sléttu

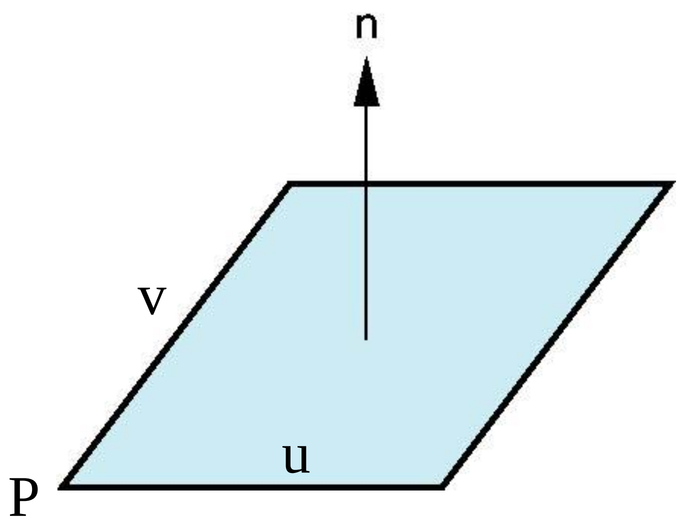
Þvervigrar (*normals*)

- Sérhver slétta í þvívídd hefur vigur *n*, sem er hornréttur (þverstæður) á sléttuna
  - Kallast <u>þvervigur</u>
- Munið að slétta er skilgreind með punkti *P* og vigrum *u* og *v*

  - Finnum þá *n* með krossfeldi *u* og *v*

$$T(\alpha, \beta) = P + \alpha u + \beta v$$

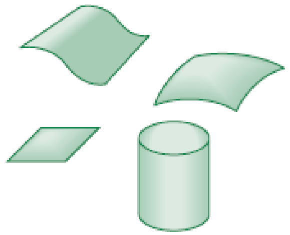
$$n = u \times v$$



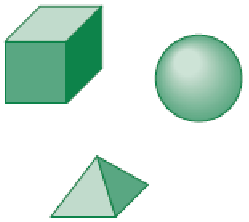
Grunnhlutir í þrívídd

- Höfum þrjár grunngerðir hluta í þrívídd:
  - Ferlar (*curve*)
    - Oft notaðir til að lýsa hreyfingu

  - Yfirborð (*surface*)
    - Oft lýst með línulegum jöfnuhneppum



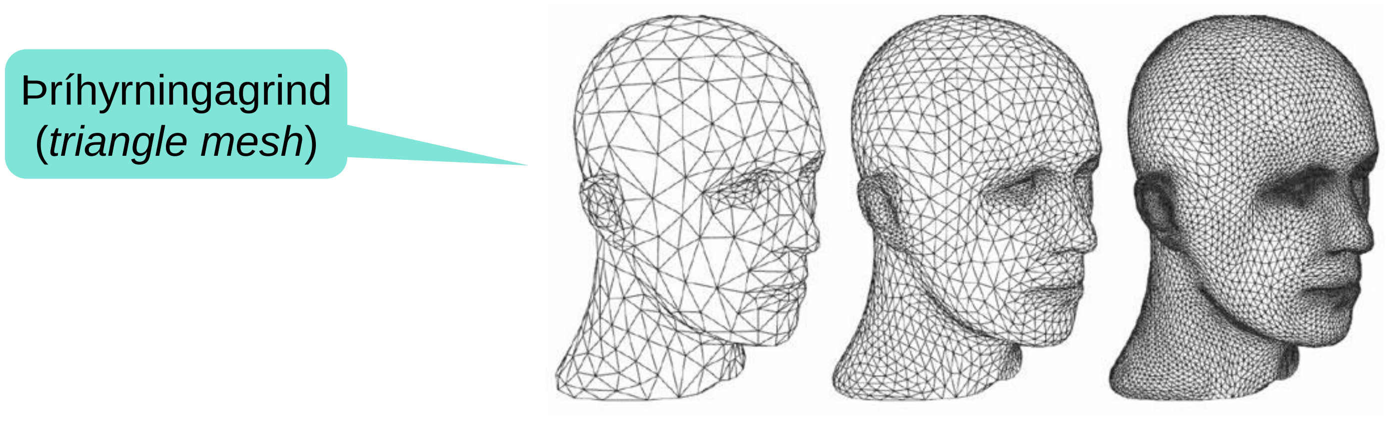
  - Rúmmálsform (*volumetric*)
    - Nokkrar fyrirfram skilgreindar gerðir



Vandamál við þrívíða grunnhluti

- Stærðfræðileg framsetning þeirra verður flókin
  - Kúla ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$) er allt í lagi, en hvað með mannsform?

- Höldum okkur við hluti með eftirfarandi eiginleika:
  - Skilgreindir með <u>yfirborðum</u> (holir að innan)
  - Hægt að tilgreina þá með <u>mengi hnúta</u> í þrívídd
  - Hægt að brjóta þá upp í (eða nálga með) <u>þríhyrninga</u>



Fyrirlestraæfingar

1. Ef $\vec{v}$, $\vec{u}$ og $\vec{w}$ eru vigrar, teiknið þá upp vigrana $v+(u+w)$ og $(v+u)+w$. Eru þeir eins?

2. Gefnir punktarnir (1, 2) og (3, 3), sýnið stikað form línu í gegnum þá (þ.e. á forminu $P(\alpha) = P_0 + \alpha d$)

3. Er nóg að hafa tvo punkta, P og Q, og einn vigur u til að skilgreina sléttu (*plane*)? Hvers vegna (ekki)?