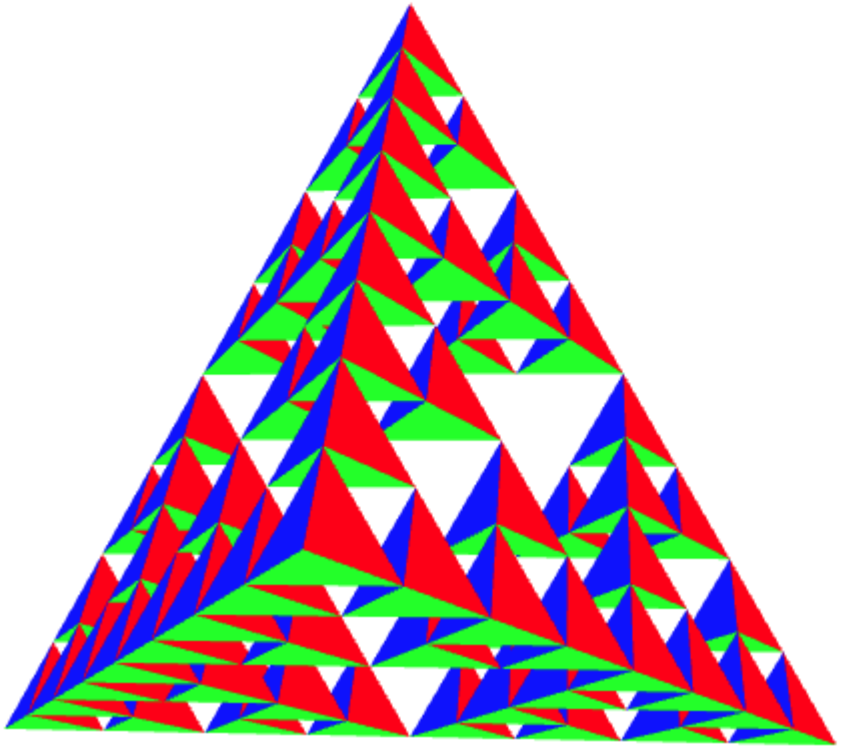
TÖL105M TÖLVUGRAFÍK

Fyrirlestur 9: Varpanir



Hjálmtýr Hafsteinsson
Haust 2024

Í þessum fyrirlestri

- Vigrar og hnitakerfi í WebGL
- Varpanir:
  - Hliðrun (*translation*)
  - Kvörðun (*scaling*)
  - Snúningur (*rotation*)
  - Skekking (*shear*)
- Samskeyting varpana

4.5 – 4.9

Vigrar í WebGL

- Í GLSL eru 2-, 3- og 4-víðir vigrar (og fylki) grunntög
  - Því auðvelt að vinna með þau
- Í Javascript eru þetta ekki grunntög
  - Bókarhöfundar hafa sett saman forritasafnið **`MV.js`**, sem líkir eftir þessum GLSL tögum
  - **`MV.js`** hefur auk þess ýmis önnur gagnleg föll:

Klasar:	**`vec2`**, **`vec3`**, **`vec4`**, **`mat2`**, **`mat3`**, **`mat4`**
Önnur föll:	**`equal`**, **`add`**, **`subtract`**, **`mult`**, **`transpose`** **`dot`**, **`cross`**, **`length`**, **`normalize`**

Notkun í Javascript

- Okkar JS forrit flytja inn skránna **`MV.js`** og geta þá notað klasana og föllin í henni:

```
var u = vec3();
var v = vec3(1, 2, 3);
u = add(u, v);
```

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Við höfum ekki yfirhleðslu virkja (*operator overloading*) í Javascript!

```
var A = mat4();
var B = mat4();
...
mult(transpose(A),B);
```

$$A^T B$$

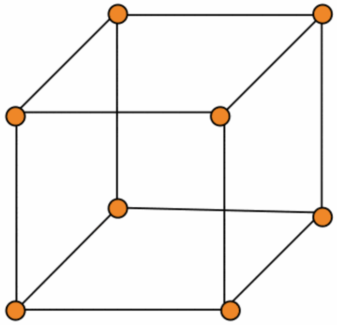
Fáum oft frekar klunnalegar segðir í JS

Varpanir (*transformations*)

- Munum nota vildarvarpanir (*affine transformations*)
  - Passa við mikið af þeim umbreytingum sem við viljum gera á hlutum í tölvugrafík
  - Varðveita línur
    - Punktar sem liggja saman á línu fyrir vörpun eru saman á línu eftir vörpun
    - Þurfum því aðeins að varpa hnútunum (punktunum) og getum látið vélbúnaðinn um að teikna á milli vörpuðu punktanna

Mjög mikill tímasparnaður!

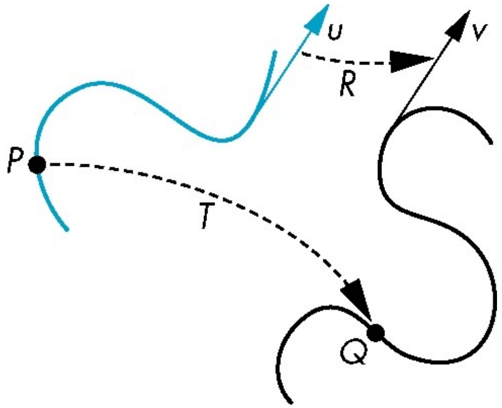
Þríhyrningur er áfram þríhyrningur eftir vildarvörpun
(en ekki endilega eftir almenna vörpun)



Færum aðeins 8 hnúta og þá færist allur teningurinn

Helstu varpanir

- Grunnvarpanir:
  - Hliðrun (*translation*)
  - Kvörðun (*scaling*)
  - Snúningur (*rotation*)
    - Um einn af hnitakerfisásunum
    - Um almennan ás
- Búum til almennari varpanir sem samsetningu grunnvarpana
- Vörpum bæði punktum og vigrum



Varpanir

- Vörpun er fall sem tekur punkt (vigur) og varpar honum í annan punkt (vigur)

$Q = T(P)$	P og Q eru punktar
$v = R(u)$	v og u eru vigrar

- Vinnum aðeins með vildarvarpanir og 4-víð jafnþætt hnit
  - Getum þá notað 4x4 fylki til að tákna vörpunina fyrir bæði punkta og vigra

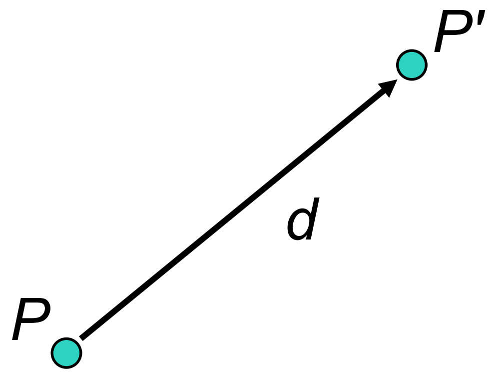
Almennt form vörpunarfylkisins

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

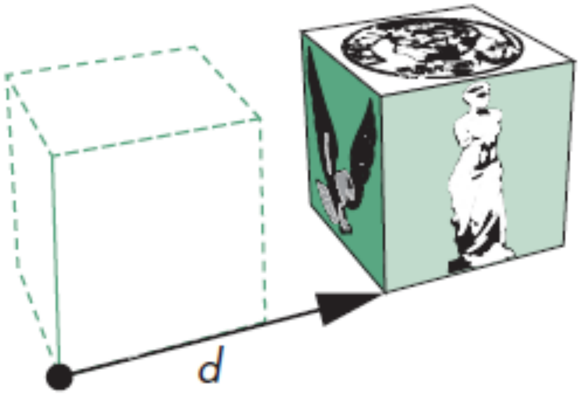
Hliðrun (*translation*)

- Færa punkt P á nýjan stað, P'
- Færslan er gefin með vigrinum d

$$P' = P + d$$



Hlutur, samanstendur
af mörgum punktum



Allir punktar hlutar færðir á sama hátt

Táknun hliðrunar

- Jafnþætt hnit punktanna og vigursins:

  $\boldsymbol{p} = [x\ y\ z\ 1]^T$

  $\boldsymbol{p}' = [x'\ y'\ z'\ 1]^T$

  $\boldsymbol{d} = [d_x\ d_y\ d_z\ 0]^T$

- Þá gefur formúlan $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}$:

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$
$$z' = z + d_z$$

eða

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hliðrunarfylki

- Getum líka táknað hliðrun með 4x4 fylki ***T*** í jafnþættum hnitum

  p' = ***Tp***, þar sem

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mikið af 0-um, en betra að vera með staðlaða útgáfu af vörpun

Athugið að þessi vörpun breytir **vigrum** ekkert, því þeir hafa 0 í 4-ða sæti

- Þessi framsetning hentar betur fyrir útfærslu
  - Einnig auðveldara að skeyta saman vörpunum

Fyrirlestraæfingar

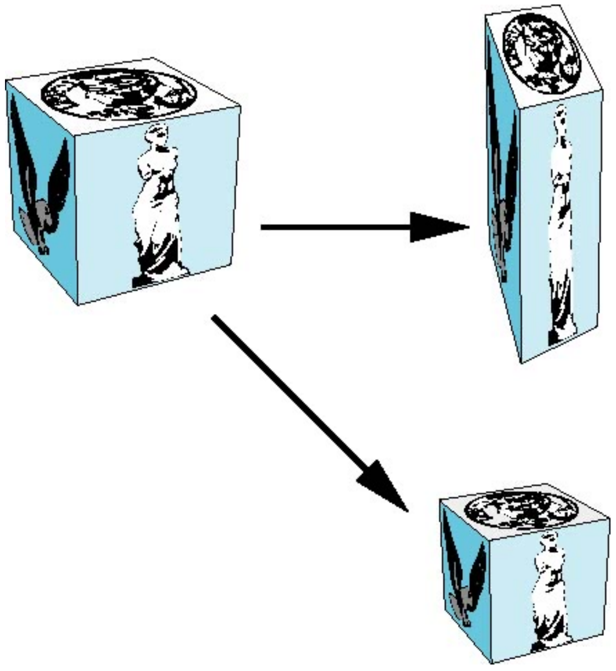
1. Sýnið vörpunarfylki fyrir jafnþætta (*homogeneous*) tvívíða hliðrun sem hliðrar *x*-hniti um 3 og *y*-hniti um 1.5
2. Hvernig gerum við tvívíðan **réttsælis** snúning um 45°?
3. Gefnir tvívíðu punktarnir (2, 1) og (3, 3). Kvarðið þá með S(1, 2). Hvað gerist við ferhyrninginn sem þeir mynda?

Kvörðun (*scaling*)

- Hver vídd margfölduð með stuðli

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

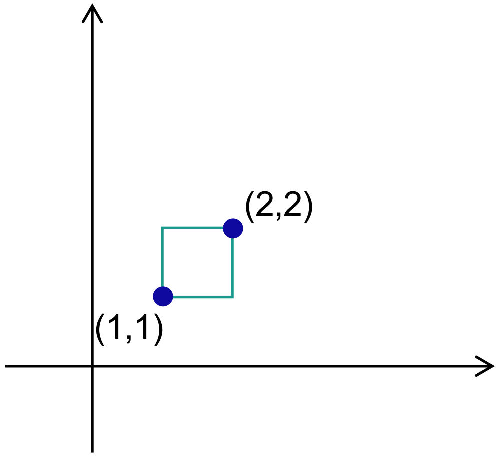
$$x' = s_x x$$
$$y' = s_y y$$
$$z' = s_z z$$



$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vandamál við kvörðun

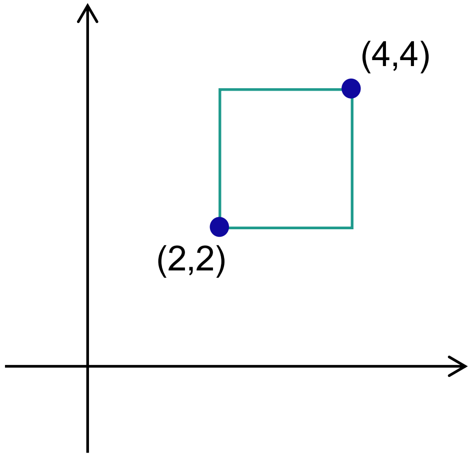
- Kvörðun getur fært hluti til
- Tvívítt dæmi:



Ferningur með hornpunkta
(1, 1) og (2, 2)

S(2, 2) gefur

Kvörðum með 2
í báðum víddum

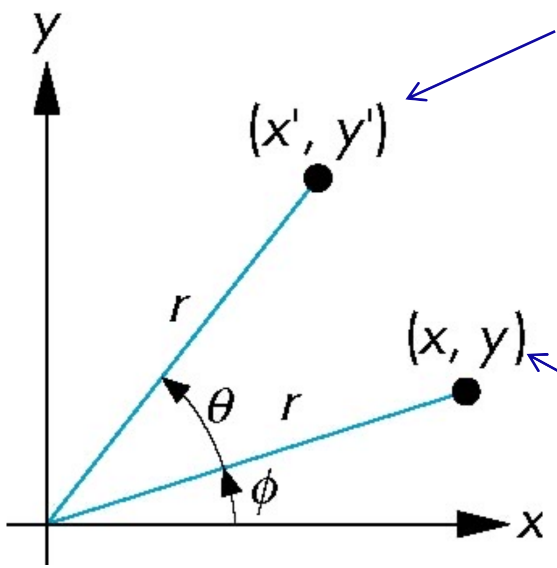


Ferningurinn stækkar
og færist til!

Ef núllpunkturinn væri í miðju ferningsins
þá myndi ferningurinn ekki færast

Snúningur (*rotation*)

- Skoðum fyrst tvívídd:
  - Snúningur um núllpunktinn um θ gráður



$x' = r\cos(\phi + \theta)$
$y' = r\sin(\phi + \theta)$

(x,y) í pólhnitum:

$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$

Út frá hornafallareglum:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}}$$

Fyrirlestraæfingar

1. Sýnið vörpunarfylki fyrir jafnþætta (*homogeneous*) tvívíða hliðrun sem hliðrar *x*-hniti um 3 og *y*-hniti um 1.5

2. Hvernig gerum við tvívíðan **réttsælis** snúning um 45°?

3. Gefnir tvívíðu punktarnir (2, 1) og (3, 3). Kvarðið þá með S(1, 2). Hvað gerist við ferhyrninginn sem þeir mynda?

Snúningur um *z*-ás

- Snúningur um núllpunkt með *z*-hnit óbreytt
  - Eins og tvívíður snúningur í *xy*-sléttunni

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$
$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R_z}(\theta)\boldsymbol{p} \qquad \text{með } \boldsymbol{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Snúningur um *x*-ás

- Snúningur um núllpunkt með *x*-hnit óbreytt
  - Tvívíður snúningur í *yz*-sléttunni

$$x' = x$$
$$y' = y \cos\theta - z \sin\theta$$
$$z' = y \sin\theta + z \cos\theta$$

Rangsælissnúningur um θ gráður þegar horft niður eftir jákvæða *x*-ás

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R_x}(\theta)\mathbf{p} \qquad \text{með } \mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Snúningur um *y*-ás

- Snúningur um núllpunkt með *y*-hnit óbreytt
  - Tvívíður snúningur í *xz*-sléttunni

$$x' = x \cos\theta + z \sin\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = -x \sin\theta + z \cos\theta$$

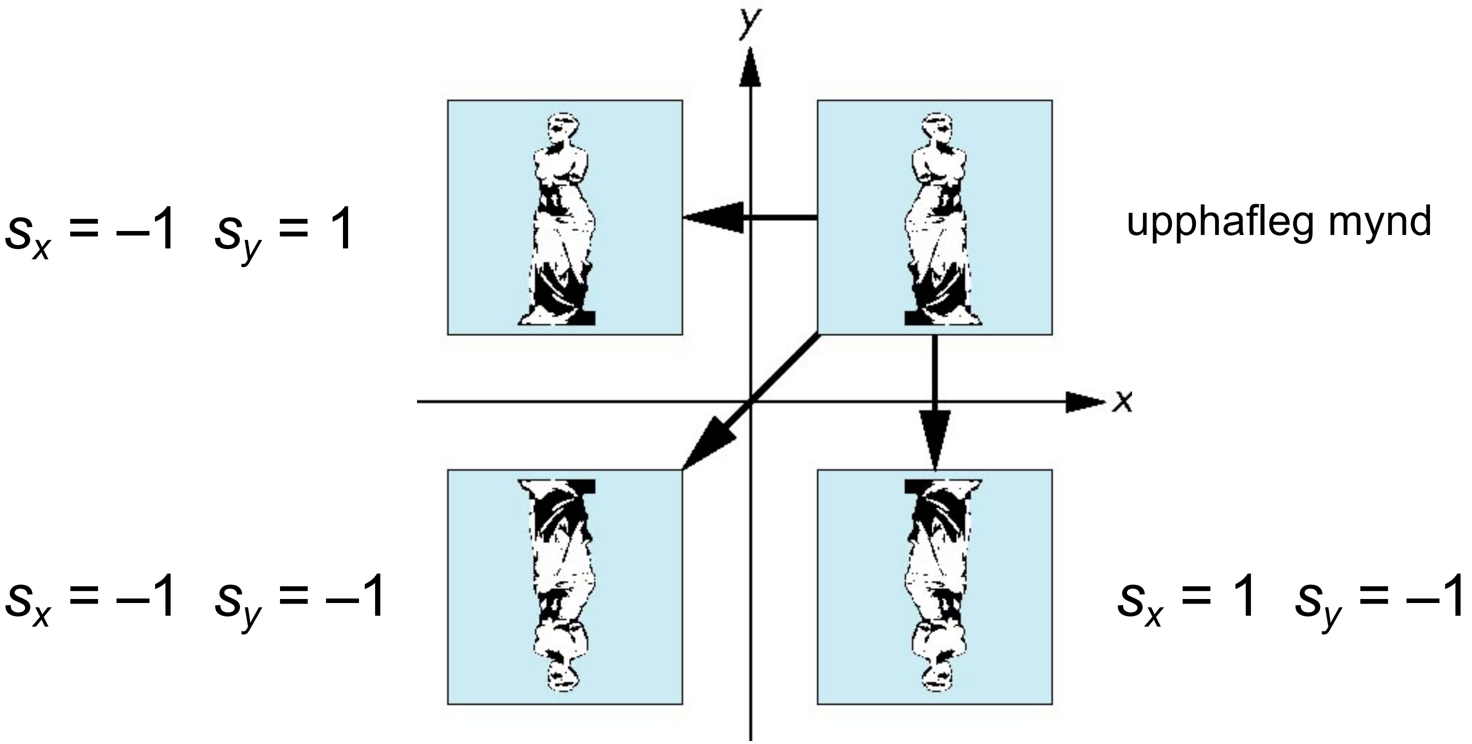
Athugið að formúlan er aðeins öðruvísi en fyrir snúning um *x*- og *z*-ás

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{p} \qquad \text{með} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sjá sýnisforrit: cube

Speglun (*reflection*)

- Getum litið á speglun sem kvörðun með neikvæðri tölu



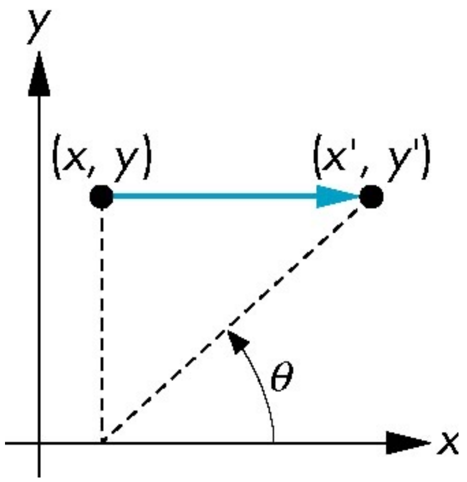
Líka hægt að líta á speglun sem snúning um 180°

Skekking (*shear*)

- Punktum hliðrað um gildi sem er í réttu hlutfalli við fjarlægð þeirra frá línu (hnitakerfisás)

$$x' = x + y \cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\mathbf{H}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Líka til skekking út frá hinum ásunum

Andhverfur varpanna

- Gætum reiknað andhverfur fylkjanna með aðferðum úr línulegri algebru, en þær eru frekar einfaldar:
  - Hliðrun: $\boldsymbol{T}^{-1}(d_x, d_y, d_z) = \boldsymbol{T}(-d_x, -d_y, -d_z)$
    - Færum til baka!
  - Kvörðun: $\boldsymbol{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \boldsymbol{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$
    - Notum margföldunarandhverfurnar
  - Snúningur: $\boldsymbol{R}^{-1}(\theta) = \boldsymbol{R}(-\theta)$
    - Athugið að þar sem $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ og $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ þá gildir að $\boldsymbol{R}^{-1}(\theta) = \boldsymbol{R}^{T}(\theta)$

Á við um alla snúningana

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Samskeyting varpana

- Getum búið til flóknari varpanir með því að skeyta saman grunnvörpunum
  - Jafngilt: margfalda saman vörpunarfylkin
- Þurfum að huga að röð varpananna:

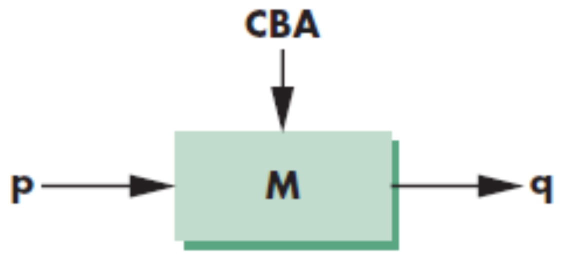
$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{CBAp}$ er jafngilt $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{C(B(Ap))}$

  - Vörpuninni ***A*** er beitt fyrst, síðan er ***B*** beitt á útkomuna og loks er ***C*** beitt á útkomu þess

Röð varpanna skiptir oftast miklu máli, munum skoða það betur næst

Samskeyttar varpanir

- Hver vörpun er táknuð sem 4x4 fylki
  - Samskeyting varpana er því 4x4 fylkjamargföldun
  - Hverri vörpun er oft beitt á mikinn fjölda punkta
  - Búum til fylkið fyrir samsettu vörpunina einu sinni og beitum því svo á alla punktana
    - Skiptir ekki svo miklu máli hversu flókin vörpunin er



Þetta er alltaf bara margföldun á 4x4 fylki við 4x1 vigur

Fyrirlestraæfingar

1. Sýnið vörpunarfylki fyrir jafnþætta (*homogeneous*) tvívíða hliðrun sem hliðrar *x*-hniti um 3 og *y*-hniti um 1.5
2. Hvernig gerum við tvívíðan **réttsælis** snúning um 45°?
3. Gefnir tvívíðu punktarnir (2, 1) og (3, 3). Kvarðið þá með S(1, 2). Hvað gerist við ferhyrninginn sem þeir mynda?