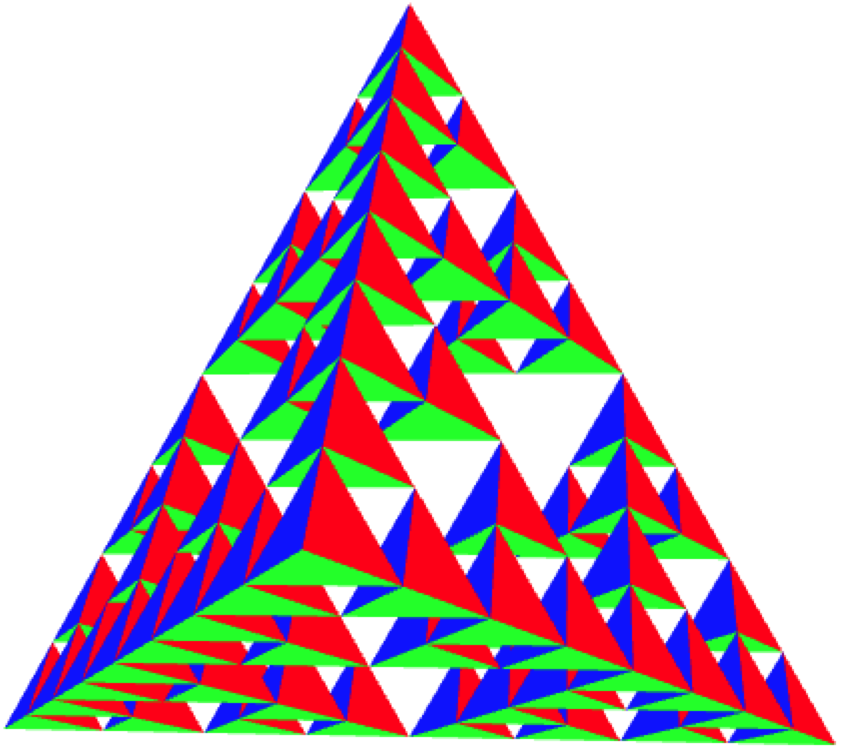
TÖL105M TÖLVUGRAFÍK

Fyrirlestur 8: Hnitakerfi



Hjálmtýr Hafsteinsson

Haust 2024

Í þessum fyrirlestri

- Hnitakerfi
  - Hnitakerfisskipti
  - Rammar (*frames*)
- Rammar í WebGL

4.3 – 4.4

Rúmfræði fyrir tölvugrafík

- Sáum síðast rúmfræðilega grunnhluti:
  - Tölur, punkta og vigra
- Vigurrúm (*vector space*)
  - Stærðfræðikerfi til að vinna með vigra
- Vildarrúm (*affine space*)
  - Vigurrúm að viðbættum punktum
- Skilgreindum með punktum og vigrum:
  - Línur, geisla, línubúta, sléttur
  - Flóknari: Ferlar, yfirborð, rúmmálsform

Línulegt óhæði (*linear independence*)

- Mengi vigra $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er <u>línulega óháð</u> ef gildir að

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \ \text{þþaa} \ \ \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

- Ef mengi vigra er línulega óháð þá er ekki hægt að tákna einn vigranna sem línulega samantekt hinna

- Í n-víðu <u>vigurrúmi</u> (*vector space*) myndar sérhvert n-staka mengi línulegra óháðra vigra <u>grunn</u> (*base*) fyrir rúmið
  - Ef $v_1, v_2, \ldots, v_n$ er grunnur þá er hægt að skrifa sérhvern vigur v í einkvæman hátt sem

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

α_i-in eru einkvæm

Táknun (*representation*)

- Höfum unnið með rúmfræðilega hluti (punkta, vigra, ...) án þess að hafa neitt til að miða við
- Viljum stundum staðsetja hlutina gagnvart hver öðrum
  - Þurfum þá eitthvað viðmiðunarkerfi
  - Skilgreinum til þess hnitakerfi (*coordinate system*)

Viðmiðið skiptir máli!

Hipster Relativity

Hnitakerfi (*coordinate systems*)

- Skoðum grunninn $v_1, v_2, \dots, v_n$
- Vigur er skrifaður $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$
- Tölurnar $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\}$ eru <u>táknun</u> (*representation*) *v* miðað við gefna grunninn
- Við getum skrifað táknunina sem línu eða dálk af tölum (<u>stuðlar</u> táknunarinnar)

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \dots \;\; \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Dæmi um táknun

- Höfum vigurinn $v = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3$
- Þá er táknunin $a = [2 \;\; 3 \;\; -4]$

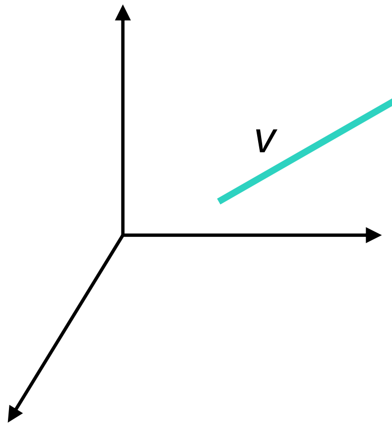
- Athugið að $[2 \;\; 3 \;\; -4]$ er <u>ekki vigurinn</u> sjálfur, heldur <u>táknun hans</u> miðað við grunninn $\{v_1, v_2, v_3\}$

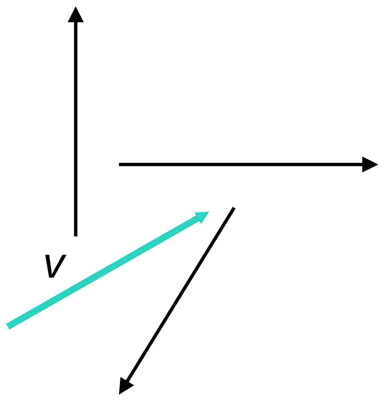
Ef grunnurinn væri annar, þá fengum við aðra táknun fyrir sama vigur!

  - Í WebGL táknum við hluti upphaflega miðað við <u>líkanagrunn</u> (*model basis*), síðar miðað við <u>heimsgrunn</u> (*world basis*) og loks <u>sjóngrunn</u> (*view basis*)

Hnitakerfi

- Hvor myndin er rétt?





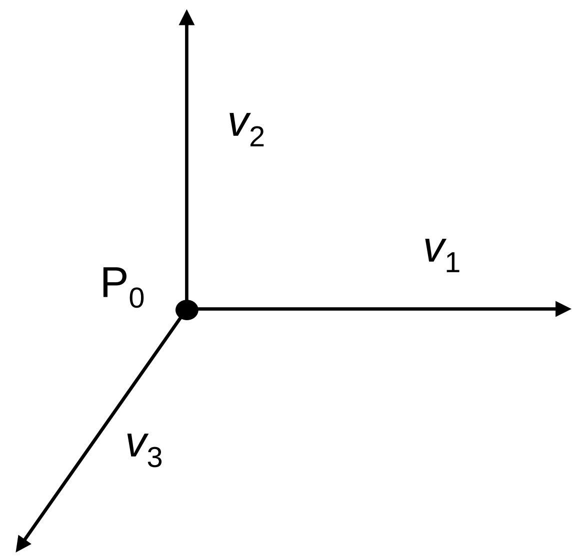
  - Þær eru báðar réttar, því vigrar hafa enga staðsetningu, bara stefnu og stærð
    - Í báðum tilfellum er v línuleg samantekt grunnvigranna

Vinstri myndin er þægilegri að vinna með, en ekki "réttari", svipað og 4 er þægilegri táknun á tölunni fjórir en **IV**

Rammar (*frames*)

- Hnitakerfi getur ekki táknað punkta
- Vildarrúm (*affine space*) inniheldur punkta
  - Ef við festum einn viðmiðunarpunkt, núllpunktinn, þá getum við táknað alla punkta einkvæmt
  - Köllum þetta ramma (*frame*)

Venja að teikna grunnvigrana út frá núllpunktinum, en þeir eru ekki staðsettir þar!



Táknun í römmum

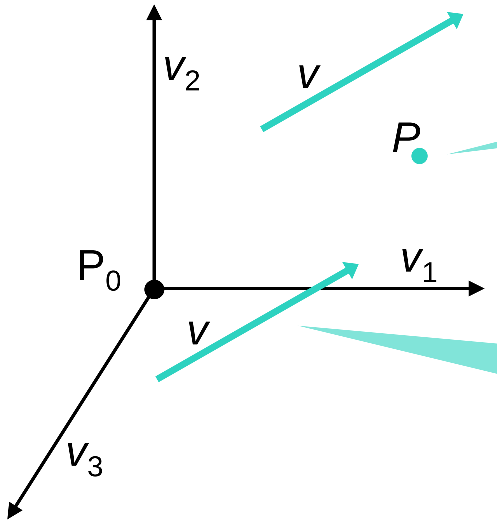
- Rammi er skilgreindur með (P_0, v_1, v_2, v_3)
- Getum nú táknað sérhvern vigur með

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

- og sérhvern punkt P sem

$$P = P_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$$

Munum gera skýran greinarmun á vigrum og punktum



Punktar eru á föstum stað í ramma

Vigrar hafa enga staðsetningu, getum sett þá hvar sem er

Fyrirlestraæfingar

1. Hver er munurinn á vigurrúmi (*vector space*) og vildarrúmi (*affine space*)?
2. Í tvívídd eru jafnþætt hnit vigra táknuð $[\alpha_1\ \alpha_2\ 0]^T$ og punkta táknuð $[\beta_1\ \beta_2\ 1]^T$. Hvaða merkingu hefur þá "jafnþætta víddin"?
3. Maðurinn hefur tvö augu, eru þau með sama heimshnitakerfi? Hvað með sjónhnitakerfi?

Tilgangur með römmum

- Leyfir okkur að tákna bæði <u>vigra</u> og <u>punkta</u> innan sama kerfis
- Munum nota 4-víð hnit (*homogeneous coordinates*) til að vinna með báðar gerðir hluta

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ 0][v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$

$$P = P_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ 1][v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$

$$\boldsymbol{v} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ 0]^T$$

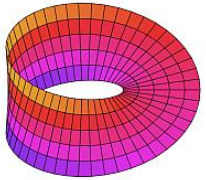
Jafnþætt hnit fyrir vigur

$$\boldsymbol{p} = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ 1]^T$$

Jafnþætt hnit fyrir punkt

Jafnþætt hnit (homogeneous coordinates)

- Fyrst sett fram af August Möbius
  - Aðallega þekktur fyrir Möbius bandið



- Getum útfært allar algengustu varpanirnar (snúning, kvörðun, hliðrun) með 4x4 fylkjamargföldun
  - Hraðvirk útfærsla í vélbúnaði

Eitt 4x4 fylki skilgreinir vörpunina algerlega!

- Auðveldar líka útfærslu á sjónhornsofanvarpi (*perspective projection*)
  - Fjarlægir hlutir sýnast minni

Jafnlangt á milli teinanna allsstaðar!

Fyrirlestraæfingar

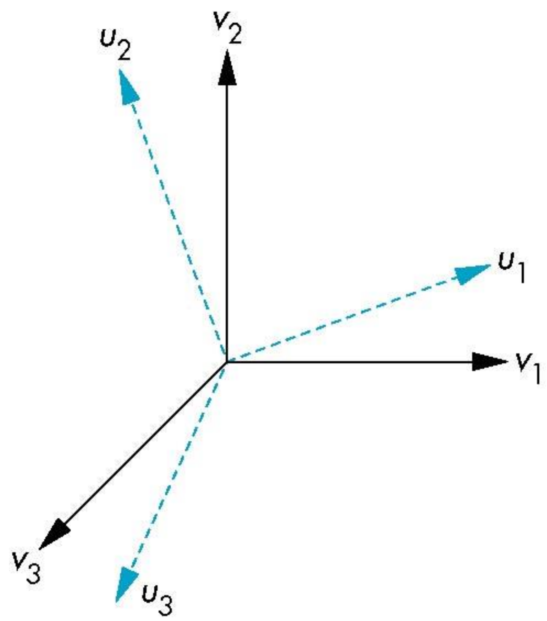
1. Hver er munurinn á vigurrúmi (*vector space*) og vildarrúmi (*affine space*)?
2. Í tvívídd eru jafnþætt hnit vigra táknuð $[\alpha_1\ \alpha_2\ 0]^T$ og punkta táknuð $[\beta_1\ \beta_2\ 1]^T$. Hvaða merkingu hefur þá "jafnþætta víddin"?
3. Maðurinn hefur tvö augu, eru þau með sama heimshnitakerfi? Hvað með sjónhnitakerfi?

Hnitakerfisskipti

Skoðum aðeins vigra fyrst

- Viljum stundum umrita vigur með öðrum grunnvigrum
- Höfum tvö mengi grunnvigra $\{v_1, v_2, v_3\}$ og $\{u_1, u_2, u_3\}$
  - Höfum $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$
  - Viljum finna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, þannig að $v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$
- Getum táknað nýju grunnvigrana með þeim gömlu:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3 \\
u_2 &= \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3 \\
u_3 &= \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3
\end{aligned}
$$



Fylkjaform

- Stuðlarnir níu skilgreina 3x3 fylki

  - og við getum þá skrifað: $$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Fylkið $\mathbf{M}$ inniheldur allar þær upplýsingar sem þarf til að skipta um hnitakerfi

Hnitakerfisskipti vigurs

- Höfum vigurinn $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$
  - eða

$$w = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{með} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

- Viljum fá $w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$
  - eða

$$w = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{með} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

En við getum táknað *u*-vigrana með *v*-vigrunum

Hnitakerfisskipti vigurs

- Höfum þá að

$$w = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{sem er} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Þetta skref er vegna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

- Þá gildir að

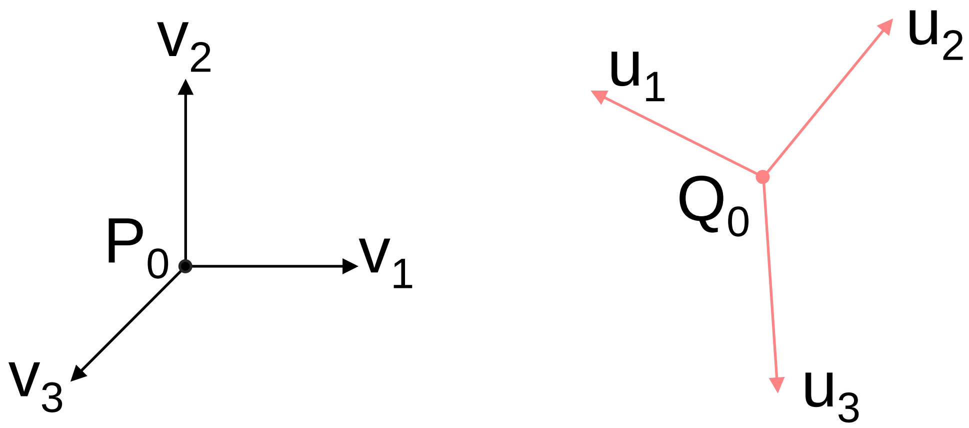
$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \quad \text{eða} \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}}$$

til að fara hina áttina: $\boxed{\mathbf{b} = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{a}}$

Skipti um ramma

- Sambærilegt fyrir ramma (*frames*)
  - Notum þá jafnþætt hnit (*homogeneous coordinates*)

Höfum tvo ramma:
(v_1, v_2, v_3, P_0)
(u_1, u_2, u_3, Q_0)



- Hægt að tákna sérhvern punkt og vigur í báðum römmunum

Rammaskipti

- Táknum einn rammann með hinum:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3\\
u_2 &= \gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3\\
u_3 &= \gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3\\
Q_0 &= \gamma_{41}v_1+\gamma_{42}v_2+\gamma_{43}v_3 + P_0
\end{aligned}
$$

  - Fáum þá 4x4 fylkið

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}
$$

Vinna með táknanir

- Skilgreinum eftirfarandi:

Punktur

Tala

Núllpunkturinn

$$0 \cdot P = \boldsymbol{0}$$
$$1 \cdot P = P$$

Skrifum þá punkta: $P = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og vigra: $w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rammaskipti: $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ þar sem **a** og **b** eru táknanir fyrir punkt eða vigur

Rammar í WebGL

- Rammar í grafíkpípu WebGL (í réttri röð):
  - Líkanahnit (*model coordinates*)
  - Heimshnit (*object/world coordinates*)
  - Sjónhnit (*eye/camera coordinates*)
  - Klippihnit (*clip coordinates*)
  - Stöðluð tækjahnit (*normalized device coordinates*)
  - Skjáhnit (*window/screen coordinates*)

3D

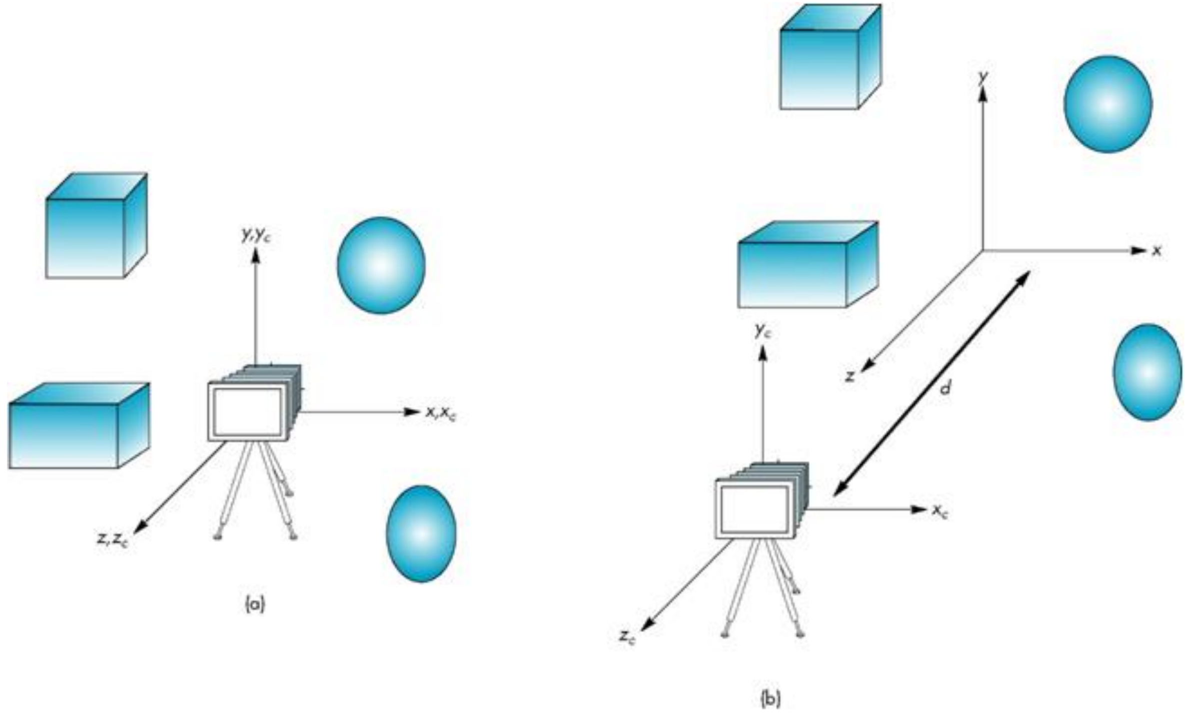
2D

- Við vinnum mest í líkana- og heimshnitum
  - Skilgreinum hluti í líkanahnitum og sviðsmyndir (*scenes*) í heimshnitum

Sjónhnit

- Breyting frá heimshnitum yfir í sjónhnit verður vegna skilgreiningar okkar á staðsetningu og stefnu augans
  - WebGL gerir þessa umbreytingu fyrir okkur

Fáum nýtt hnitakerfi með augað í núllpunkti og það horfir niður $-z$ ásinn



Fyrirlestraæfingar

1. Hver er munurinn á vigurrúmi (*vector space*) og vildarrúmi (*affine space*)?
2. Í tvívídd eru jafnþætt hnit vigra táknuð $[\alpha_1\ \alpha_2\ 0]^T$ og punkta táknuð $[\beta_1\ \beta_2\ 1]^T$. Hvaða merkingu hefur þá "jafnþætta víddin"?
3. Maðurinn hefur tvö augu, eru þau með sama heimshnitakerfi? Hvað með sjónhnitakerfi?