Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 1

Afleveres senest kl 23:00 på Absalon, 14. maj 2021

Opgave 1.1. Lad $z \in \mathbb{C}$ være givet ved
$$z = \sqrt{3}\frac{5}{12} + i\frac{5}{12}$$
og lad $b \in \mathbb{R}$. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved $a_n = (b \cdot z)^n$.

a) Skriv z på polær form, og udregn z, z^2, z^3 og z^6.

Løsning. Polærformen af $z = a + ib$, med $a \neq 0$ findes på sædvanligvis ved $z = re^{i\theta}$, hvor $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\cos(\theta) = a/r$ samt $\sin(\theta) = b/r$. Dermed findes det at
$$r = \left(3\frac{25}{144} + \frac{25}{144}\right)^{1/2} = \left(\frac{10^2}{12^2}\right)^{1/2} = \frac{5}{6},$$
og siden at $a > 0$ findes
$$\theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$$
Dermed findes det, at $z = \frac{5}{6}e^{i\pi/6}$, $z^2 = \frac{25}{36}e^{i\pi/3}$, $z^3 = \frac{5^3}{6^3}e^{i\pi/2}$ og $z^6 = -\frac{5^6}{6^6}$ □

b) Angiv et udtryk for $|a_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning. Ved resultatet fra a) findes det at $|a_n| = (|z|\,|b|)^n = r^n\,|b|^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n |b|^n$. □

c) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent.

Løsning. Bemærk at $a_n = w^n$, Hvor $w \in \mathbb{C}$ er et komplekst tal med, $|w| = \frac{5}{6}|b|$. Hvis $|b| < \frac{6}{5}$ ses det, at $|w| < 1$ og det følger af observation 1.42 samt det velkendte faktum, at $\lim_{x\to\infty} c^x = 0$ når $|c| < 1$, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 0. Hvis $|b| > \frac{6}{5}$ ses det at $|w| > 1$ og det følger $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke er begrænset (modulus er eksponentielt voksende). Dermed ses ved lemma 1.37, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent når $|b| > \frac{6}{5}$. For $|b| = \frac{5}{6}$ ses det, at $|w| = 1$. Men da gælder det, at $a_n = e^{i\pi/6}$ hvis $b = \frac{6}{5}$ og $a_n = -e^{i\pi/6} = e^{i7\pi/6}$ hvis $b = -\frac{6}{5}$. I begge tilfælde følger det af Proporsition 1.30, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har 12 fortætningspunkter, og det følger dermed yderligere ved kontraposition af lemma 1.35 at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent. Dermed gælder det altså, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer, hvis og kun hvis $b \in \left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ □

d) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge.

Løsning. Vi så i løsningen til 1.b), at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ var begrænset hvis $|b| \leq 5/6$. Det konkluderes fra Bolzano-Weierstrass, Sætning 1.64, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i dette tilfælde har en konvergent delfølge. Hvis derimod $|b| > 5/6$ ses det, at $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$ er monoton og divergerer mod uendelig. Lad $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en delfølge af $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$, da er $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ også monoton og divergerer mod uendelig. Det følger af opgave 1.6 på ugeseddel 1, at $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke er konvergent, og da $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ var vilkårlig, konkluderer vi, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke har nogen konvergent delfølge når $b > \frac{6}{5}$. Dermed konkluderes at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge hvis og kun hvis $|b_n| \leq \frac{6}{5}$. □

Opgave 1.2. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved
$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

a) Afgør, om $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2 a)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergente, og bestem i så fald deres grænseværdier.

Løsning. Det ses gælder åbenlyst at $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(1/(n+1)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ begge konvergerer mod 0. Dermed ses per sætning 1.39.1 at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $0-0=0$. Det gælder tydeligvis også at $n^2 a_n = 1 - \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(1+1/n)^2}$, hvor $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2}\right) = 1$ per sætning 1.39.1 og 1.39.4. Dermed gælder per sætning 1.39.1 at $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $1-1=0$. □

b) Vis, at $(n^3 a)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 2.

Løsning. Bemærk, at $a_n = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, hvoraf det ses at $n^3 a_n = \frac{2n^4+n^3}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{2+1/n}{1+2/n+1/n^2}$. Per sætning 1.39.1 og 1.39.4 gælder det at $(n^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\frac{2}{1}=2$. □

c) Definér følgen $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N,$$

Vis at $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 1.

Løsning. Bemærk at $A_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$. Det ses dermed let at $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 1. □

Opgave 1.3.

a) Vis, at følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$x_n = \frac{1-an}{1+an}$$

er konvergent for alle $a\in[0,\infty)$, og bestem grænseværdien som en funktion af a.

Løsning. For $a=0$ gælder det, at $x_n = \frac{1}{1} = 1$ og $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer åbenlyst mod 1. For $a\neq 0$ gælder at $x_n = \frac{1/n-a}{1/n+a}$, og siden at $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, følger det af sætning 1.39 at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\frac{-a}{a} = -1$. Dermed ses det, at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & \text{for } a = 0, \\ -1 & \text{for } a > 0. \end{cases} \tag{1}$$

□

b) Vis, at følgen $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$y_n = n^2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - n^2$$

er konvergent, og bestem grænseværdien.

Løsning. Betragt funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^2\cos(1/x) - x^2$ for $x\neq 0$ og $f(0)=0$ ($f(0)$ er irrelevant). Da gælder, at $f(x) = \frac{\cos(1/x)-1}{1/x^2}$. Dermed ses at $f(x)$ er et 0/0-udtryk i grænsen $x\to\infty$. Det vides, at $(\cos(1/x)-1)' = \frac{1}{x^2}\sin(1/x)$ og $(1/x^2)' = -(1/(2x^3))$. Ved brug af L'Hôpital's regel, finder vi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sin(1/x)}{1/(2x)}\right) = -1/2$, hvor vi har brugt den velkendte grænse $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1$ (denne kan alternativt ses ved at benytte L'Hôpital's regel endnu en gang). Det følger nu af Observation 1.42, samt at $y_n = f(n)$, at y_n er konvergent og $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = -1/2$ □

c) Vis, at følgen $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

er konvergent, og bestem grænseværdien. *[Vink: Omskriv z_n til $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$ og bemærk at udtrykket er en middelsum for integralet af funktionen $1/x$ over et passende valgt interval.]*

Løsning. Bemærk, at $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$. Lad nu $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \frac{1}{x}$. De ses let, at $z_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1})$, hvor $t_k = 1 + k/n$ for $k = 0, 1, 2, ..., n$, således at $t_k - t_{k-1} = \frac{1}{n}$ for $k = 1, 2, ..., n$. Det noteres at $(t_k)_{k=0}^{n}$ udgør en inddeling af intervallet $[1,2]$ med findhed $1/n$. Da f er kontinuert er den Riemann integrabel og dermed er z_n en middelsum for integralet af $1/x$ på intervallet $[1,2]$. Siden f er Riemann integrabel, findes der per definition for ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ således at $\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - z_n\right| < \varepsilon$ for $n > \frac{1}{\delta}$ (husk at $\frac{1}{n}$ var finheden af inddelingen udgjort af $(t_k)_{k=0}^{n}$). Ækvivalent gælder der, at $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Det følger da ved analysens fundamentalsætning at $\lim_{n\to\infty} z_n = \log(2) - \log(1) = \log(2)$. $\square$

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 4

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på 25% i den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra bøgerne MC og TL, øvelsesopgaverne og Henriks slides. Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

I skal argumentere med en grundighed svarende til de vejledende besvarelser af de tidligere hjemmeopgaver.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med LaTeX, men skal være ensarttet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. Det forventes, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at LaTeX-besvarelser ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med få forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.