Analyse 1 2020/2021 - Ugeseddel 1

3. maj 2021

Forelæsninger: Søren Eilers, `eilers@math.ku.dk`
Øvelser: Johannes Agerskov, `johannes-as@math.ku.dk`

Opgave 1.1. Lad $z \in \mathbb{C}$ være givet ved

$$z = \frac{2}{3} + \frac{i}{2}$$

og lad $b \in \mathbb{R}$. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved $a_n = (b \cdot z)^n$.

a) Skriv z på polær form, og udregn z, z^2, z^3 og z^6.

b) Angiv et udtryk for $|a_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent.

d) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge.

Opgave 1.2. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

a) Afgør, om $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{n^2 a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergente, og bestem i så fald deres grænseværdier.

b) Vis, at $\{n^3 a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 2.

c) Definér følgen $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N,$$

Vis at $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 1.

Opgave 1.3.

a) Vis, at følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$x_n = \frac{1 - an}{1 + an}$$

er konvergent for alle $a \in [0, \infty)$, og bestem grænseværdien som en funktion af a.

b) Vis, at følgen $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$y_n = n^2 \cos\left(\frac{1}{n}\right) - n^2$$

er konvergent, og bestem grænseværdien.

c) Vis, at følgen $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

er konvergent, og bestem grænseværdien. *[Vink: Omskriv z_n til $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$ og bemærk at udtrykket er en middelsum for integralet af funktionen $1/x$ over et passende valgt interval.]*