Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 1

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 14. maj 2021

Opgave 1.1. Lad $z \in \mathbb{C}$ være givet ved
$$z = \sqrt{3}\frac{5}{12} + i\frac{5}{12}$$
og lad $b \in \mathbb{R}$. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved $a_n = (b \cdot z)^n$.

a) Find polarformen af z, z^3 samt z^6, og vis at z^6 er reel.

Løsning. Polærformen af $z = a + ib$ findes på sædvanligvis ved $z = re^{i\theta}$, hvor $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\cos(\theta) = a/r$ samt $\sin(\theta) = b/r$. Dermed ses det at
$$r = \left(3\frac{25}{144} + \frac{25}{144}\right)^{1/2} = \left(\frac{10^2}{12^2}\right)^{1/2} = \frac{5}{6},$$
og siden at $a > 0$ findes
$$\theta = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6.$$
Desuden findes polarformerne $z = \frac{5}{6}e^{i\pi/6}$, $z^3 = \frac{5^3}{6^3}e^{i\pi/2}(= i\frac{5^3}{6^3})$ og $z^6 = \frac{5^6}{6^6}e^{i\pi}(= -\frac{5^6}{6^6})$. Det ses fra ligheden i den sidste parantes, som følger af $e^{i\pi} = -1$, at z^6 er reel. □

b) Angiv et udtryk for $|a_n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning. Ved resultatet fra a) findes det at $|a_n| = (|z|\,|b|)^n = r^n\,|b|^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n |b|^n$. □

c) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent.

Løsning. Bemærk at $a_n = w^n$, hvor $w \in \mathbb{C}$ er et komplekst tal med, $|w| = \frac{5}{6}|b|$. Hvis $|b| < \frac{6}{5}$ ses det, at $|w| < 1$ og det følger af observation 1.42 samt det velkendte faktum, at $\lim\limits_{x\to\infty} c^x = 0$ når $|c| < 1$, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 0. Hvis $|b| > \frac{6}{5}$ ses det at $|w| > 1$ og det følger at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke er begrænset (modulus er eksponentielt voksende). Dermed ses ved lemma 1.37, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent når $|b| > \frac{6}{5}$. For $|b| = \frac{5}{6}$ ses det, at $|w| = 1$. Men da gælder det, at $a_n = e^{i\pi n/6}$ hvis $b = \frac{6}{5}$ og $a_n = (-e^{i\pi/6})^n = e^{i7\pi n/6}$ hvis $b = -\frac{6}{5}$. I begge tilfælde konkluderes det af Proporsition 1.30, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har 12 fortætningspunkter, og det følger yderligere ved kontraposition af lemma 1.35 at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent. Dermed gælder det altså, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer, hvis og kun hvis $b \in \left(-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$. □

d) Bestem alle $b \in \mathbb{R}$, hvor $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge.

Løsning. Vi så i løsningen til 1.b), at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ var begrænset hvis $|b| \leq 6/5$. Det konkluderes fra Bolzano-Weierstrass, Sætning 1.64, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i dette tilfælde har en konvergent delfølge. Hvis derimod $|b| > 6/5$ ses det, at $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$ er monoton og divergerer mod uendelig. Lad $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en delfølge af $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$, da er $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ også monoton og divergerer mod uendelig. Det følger af opgave 1.6 på ugeseddel 1, at $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke er konvergent, og da $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ var vilkårlig, konkluderer vi, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikke har nogen konvergent delfølge når $b > \frac{6}{5}$. Dermed konkluderes at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge hvis og kun hvis $|b| \leq \frac{6}{5}$ eller ækvivalent $b \in \left[-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right]$. □

Opgave 1.2. Definér følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved
$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

a) Afgør, om $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{n^2 a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergente, og bestem i så fald deres grænseværdier.

Løsning. Det gælder åbenlyst, at $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(1/(n+1)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ begge konvergerer mod 0. Dermed ses per sætning 1.39.1 at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $0-0=0$. Det gælder tydeligvis også at $n^2 a_n = 1 - \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(1+1/n)^2}$, hvor $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2}\right) = 1$ per sætning 1.39.1 og 1.39.4. Dermed gælder per sætning 1.39.1 at $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer med grænseværdi $1-1=0$. □

b) Vis, at $\{n^3 a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 2.

Løsning. Bemærk, at $a_n = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, hvoraf det ses at $n^3 a_n = \frac{2n^4+n^3}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{2+1/n}{1+2/n+1/n^2}$. Per sætning 1.39.1 og 1.39.4 gælder det at $\{n^3 a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\frac{2}{1}=2$. □

c) Definér følgen $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N,$$

Vis at $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi 1.

Løsning. Bemærk at $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$. Det ses dermed let per Sætning 1.39, at $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 1. □

Opgave 1.3.

a) Vis, at følgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$x_n = \frac{1-an}{1+an}$$

er konvergent for alle $a\in[0,\infty)$, og bestem grænseværdien som en funktion af a.

Løsning. For $a=0$ gælder det, at $x_n = \frac{1}{1} = 1$ og $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer åbenlyst mod 1. For $a\neq 0$ gælder at $x_n = \frac{1/n-a}{1/n+a}$, og siden at $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, følger det af sætning 1.39 at $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\frac{-a}{a}=-1$. Dermed ses det, at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & \text{for } a=0, \\ -1 & \text{for } a>0. \end{cases} \tag{1}$$

□

b) Vis, at følgen $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$y_n = n^2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - n^2$$

er konvergent, og bestem grænseværdien.

Løsning. Betragt funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x^2} & x\neq 0, \\ -1/2 & x=0. \end{cases}$$

Det ses let, at f er kontinuert i x for alle $x\neq 0$, idet at f er et produkt af to kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. At f er kontinuert i 0 ses ved brug af L'Hôpital's regel $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin(x)}{2x}\right) = -1/2$. Bemærk nu, at $y_n = f(1/n)$, og det følger da af sætning 1.43 og den velkendte grænse, $\lim_{n\to\infty}(1/n)=0$, at $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdien $\lim_{n\to\infty} y_n = f(0) = -1/2$. □

c) Vis, at følgen $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

er konvergent, og bestem grænseværdien. *[Vink: Omskriv* z_n *til* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$ *og bemærk at udtrykket er en middelsum for integralet af funktionen* $1/x$ *over et passende valgt interval.]*

Løsning. Bemærk, at $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$. Lad nu $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \frac{1}{x}$. Det ses let, at $z_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1})$, hvor $t_k = 1 + k/n$ for $k = 0, 1, 2, ..., n$, således at $t_k - t_{k-1} = \frac{1}{n}$ for $k = 1, 2, ..., n$. Det noteres, at $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ udgør en ækvidistant inddeling af intervallet $[1,2]$. Da f er kontinuert er den Riemann integrabel og dermed er z_n en middelsum for integralet af $1/x$ på intervallet $[1,2]$. Siden f er Riemann integrabel, findes der per definition for ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ således at $\left| \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - z_n \right| < \varepsilon$ for $n > \frac{1}{\delta}$ (husk at $\frac{1}{n}$ er finheden af inddelingen udgjort af $\{t_k\}_{k=0}^{n}$). Ækvivalent gælder der, at $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Det følger da ved analysens fundamentalsætning at $\lim_{n\to\infty} z_n = \log(2) - \log(1) = \log(2)$. $\square$

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 1

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, og afskrift behandles efter universitetets regler om eksamenssnyd. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på omtrent en fjerdedel af den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra bøgerne MC og TL, øvelsesopgaverne og forelæsningsslides. Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med LaTeX, men skal være ensartet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. Det forventes, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at LaTeX-besvarelser ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med et udvalg af forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.