Analyse 1 2020/2021 -

24. maj 2021

Forelæsninger: Søren Eilers, `eilers@math.ku.dk`
Øvelser: Johannes Agerskov, `johannes-as@math.ku.dk`

Opgave 0.1 (Fourierrækker I)**.**

a) Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$g(x) = e^{-ix} - 3e^{-3ix} + \frac{1}{2}\sin(x).$$

Bestem Fourierkoefficienterne og Fourierrækken for g, både på formen med den komplekse eksponentialfunktion og på formen med sinus og cosinus.

Kan du trække nogle analogier til Opgave 6.1c)i)?

b) Vi ved fra opgave 6.5b), at den trigonometriske række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}e^{inx}$ er uniformt konvergent. Bestem Fourierkoefficienterne og Fourierrækken for dens sumfunktion f[1].

c) Betragt den 2π-periodiske funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0) \\ x & x \in [0, \pi) \\ \pi/2 & x = \pi \end{cases}.$$

Beregn Fourierkoefficienterne, og bestem Fourierrækken for f, både på formen med den komplekse eksponentialfunktion og på formen med sinus og cosinus.

Kan du sige noget om, hvorvidt Fourierrækken konvergerer uniformt?

d) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \sin(x)^3$. Vis, at f er 2π-periodisk. Bestem Fourierkoefficienterne $c_k(f)$ hørende til den komplekse skrivemåde, og angiv den tilsvarende Fourierrække for f.[2]

Opgave 0.2 (Vektorrumstruktur)**.** Lad $N \in \mathbb{N}_0$ og lad V_N være mængden af trigonometriske polynomier af grad N, det vil sige mængden af funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

, med $c_{-N}, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$.

a) Overvej følgende punkter uden at forsøge at lave et formelt bevis.

   i) Overvej kort, hvorfor V_N er et vektorrum over $\mathbb{C}$ (sammenlign med MC 5.18) udstyret med den naturlige skalarmultiplikation og addition af funktioner. Overvej også, hvorfor

   $$V_N = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_{-N}, \ldots, e_N\},$$

   hvor $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som sædvanlig betegner funktionen givet ved $e_k(x) = e^{ikx}$ for $k \in \mathbb{Z}$. Hvad siger dette om dimensionen $\dim_{\mathbb{C}}(V_N)$ af V_N?

[1] Opgaven kan faktisk løses uden at kende f eksplicit – du kan evt. finde inspiration på side 125 i MC.
[2] Hint: Det er fordelagtigt først at omskrive f ved hjælp af eksponentialfunktioner.

ii) Argumentér for, at $V_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1\}$ og at $V_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1, \cos, \sin\}$, hvor 1 betegner den konstante funktion $x \mapsto 1$.

iii) Begrund, at V_M er et underrum af V_N hvis $M \leq N$, og giv et eksempel på en kontinuert, 2π-periodisk funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ikke tilhører vektorrummet V_N for noget $N \in \mathbb{N}$.

b) Vis, at afbildningen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_N} : V_N \times V_N \to V_N$ givet ved

$$\langle f, g \rangle_{V_N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$$

definerer et indre produkt (MC side 121) på vektorrummet V_N, det vil sige vis, at ...

i) ... afbildningen $f \mapsto \langle f, g_0 \rangle_{V_N}$ er lineær for ethvert fastholdt $g_0 \in V_N$;

ii) ... $\langle g, f \rangle_{V_N} = \overline{\langle f, g \rangle_{V_N}}$ for alle $f, g \in V_N$; og

iii) ... $\langle f, f \rangle_{V_N} \geq 0$ for alle $f \in V_N$ med lighed kun hvis $f = 0$.

c) Vis, at funktionerne $\{e_k\}_{k=-N,\ldots,N}$ udgør et ortonormalt system i V_N med hensyn til det indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_N}$.

Konkludér, at systemet er lineært uafhængigt over $\mathbb{C}$, og at $\dim_{\mathbb{C}} V_N = 2N + 1$.

d) Vis, at V_N er isomorft med $\mathbb{C}^{2N+1}$ som vektorrum med indre produkt, det vil sige find en lineær bijektiv afbildning $\Pi_N : V_N \to \mathbb{C}^{2N+1}$, sådan at

$$\langle f, g \rangle_N = \langle \Pi_N(f), \Pi_N(g) \rangle_{\mathbb{C}^{2N+1}} \quad \text{for alle } f, g \in V_N,$$

hvor $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^{2N+1}} = \sum_{i=0}^{2N} x_i \overline{y_i}$ for $x, y \in \mathbb{C}^{2N+1}$.

Opgave 0.3 (Fourierrækker II)**.**

a) Betragt funktionerne $F_{\text{fløjte}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\mathcal{F}_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, givet ved

$$F_{\text{fløjte}}(x) = \sin(x) + 9\sin(2x) + \frac{15}{4}\sin(3x) + \frac{9}{5}\sin(4x),$$

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x),$$

hvor D_n som tidligere betegner Dirichlet-kernen. Bestem Fourierkoefficienterne og Fourierrækken for $F_{\text{fløjte}}$ og $\mathcal{F}_N$.

Fun fact: $F_{\text{fløjte}}$ beskriver kammertonen (A440) for en fløjte, og $\mathcal{F}_N$ kaldes Fejér-kernen.

b) Beregn Fourierkoefficienterne for de 2π-periodiske funktioner f og F defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & x \in (0, \pi) \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4}(x+\pi)^2, & x \in [-\pi, 0) \\ \\ \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4}(x-\pi)^2, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Vis, at Fourierrækkerne for f og F er lig de trigonometriske rækker fra Opgave 6.4. Diskutér med din underviser, hvad det kan bruges til.

Opgave 0.4 (Pythagoras, Bessel og Parseval)**.**

a) Husk fra Opgave 7.2 definitionen af det $(2N+1)$-dimensionelle komplekse vektorrum $V_N = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_{-N}, \ldots, e_N\}$. Vis, at Parsevals identitet holder for alle funktioner f tilhørende V_N, det vil sige vis at

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2,$$

for $f = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e_k$, hvor som sædvanligt $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.

For en endelig sum bærer identiten ofte Pythagoras' navn. Overvej hvorfor sammen med din underviser.

b) Betragt de 2π-periodiske funktioner f og F fra Opgave 7.3b). Beregn $\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2$ og $\langle F, F\rangle = \|F\|_2^2$.

c) Betragt den trigonometriske række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvor $c_n = 2^{-|n|}$ for $n \in \mathbb{Z}$.

Vi viste i Opgave 6.5b), at denne række er uniformt konvergent.

Angiv Fourierkoefficienterne $c_n(f)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ for rækkens sumfunktion f, og vis at

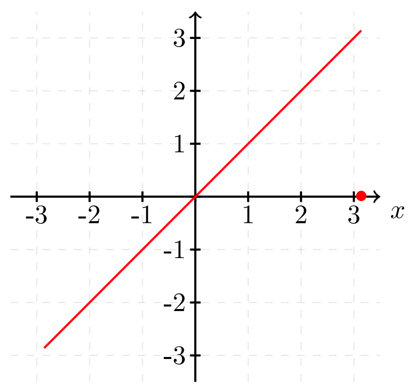
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4^{-|n|} \sim \frac{5}{3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

d) Modificér og løs Opgave 7.4c) ved at lade $c_n = r^{|n|}$ for $r \in (0,1)$, eller endda $c_n = z^{|n|}$ for et vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < 1$.

Opgave 0.5. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den 2π-periodiske funktion defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

Grafen for f er vist herunder.



a) Udregn Fourierkoefficienterne for f, og angiv Fourierrækken for f.

b) Lad $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $g(x) = f(x) + 2$. Udregn Fourierkoefficienterne for g, og angiv Fourierkoefficienterne.

c) Betragt funktionsrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^2 x)}{n^2}$. Hvis at rækken konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$.

Opgave 0.6 (Ekstraopgave)**.**

a) Lad $N \in \mathbb{N}_0$ og betragt afbildningen $P_N\colon \mathrm{PC}_{2\pi} \to \mathrm{PC}_{2\pi}$ givet ved

$$P_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k.$$

Vis, at P_N er en lineær afbildning, der opfylder $P_N \circ P_N = P_N$ (altså $P_N(P_N(f)) = P_N(f)$ for alle $f \in \mathrm{PC}_{2\pi}$).

Man kan tænke på P_N som en *projektion* i vektorrummet $\mathrm{PC}_{2\pi}$.

Opgave 0.7. Definér $\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ og lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ være en kontinuert, 2π-periodisk funktion, der opfylder

$$f(x+y) = f(x) f(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Antag f ikke er konstant lig 1.

a) Vis, at $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$.

b) Lad $k \in \mathbb{Z}$ og definer en funktion $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ ved $f_k(x) = f(kx)$. Vis at

$$\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z},$$

hvor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ noterer det indre produkt op $\mathrm{PC}_{2\pi}$.

Man kan faktisk vise, at der findes et $n \in \mathbb{Z}$ så $f(x) = e^{inx}$.