

Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 3

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 10. juni 2021

Opgave 3.1.

- a) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)z^n, z \in \mathbb{C}$.
- b) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}, x \in \mathbb{R}$.
- c) Find konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}$.

Opgave 3.2.

- a) Find Taylorrækken for funktionen

$$f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

og vis, at den konvergerer mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

- b) Find Taylorrækken for funktionen

$$g(x) = \int_0^x e^{t^3} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

og vis, at den konvergerer mod $g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 3.3.

Vi ser på potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$, med $a_0 = 0$ og

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

. Lad r betegne rækkens konvergensradius og s sumfunktionen $s : (-r, r) \rightarrow \mathbb{C}$

- a) Vis at rækken divergerer for $x = 1$, men at den konvergerer for $x = \frac{1}{2}$. Slut, at $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$.
- b) Bestem Taylorrækken for $(1-x)s(x)$, og redegør for, at den også har konvergensradius r .
- c) Vis, at $r = 1$ og bestem et lukket udtryk for $s : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$.

Opgave 3.4.

En funktion $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ siges at være lige hvis $f(x) = f(-x)$. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergensradius $r > 0$ og sumfunktion $s : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Vis at hvis $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$ så er s lige.
- b) Vis at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - (-1)^n) x^n$$

har sum $s(x) - s(-x)$. Brug entydighedssætningen for potensrækker til at konkludere, at hvis s er lige, så er $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$.

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 3

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, og afskrift behandles efter universitetets regler om eksamenssnyd. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på omtrent en fjerdedel af den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra noterne [MC], øvelsesopgaverne og forelæsningslides, samt til alle lærebøger brugt på andre førsteårskurser på matematikstudierne. Hvis I citerer fra materiale nævnt i litteraturlisten i [MC] kan I uden videre benytte forkortelserne brugt her (fx [EHM], [Li]). Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med L^AT_EX eller lignende, men skal være ensartet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. **Det er et krav**, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at besvarelser udarbejdet elektronisk ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare. Overskrides denne begrænsning, vil der blive tildelt halvt pointtal for første overskredne side og kvart pointtal for anden overskredne side. Fra tredje overskredne side og videre, vil besvarelsen ikke blive rettet.

På hver side af den afleverede løsning skal I skrive jeres navn og KU-id (“svenske nummerplade”). Vi anbefaler at I også skriver “side x ud af y ” på hver side.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med et udvalg af forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.