Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 2

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 27. maj 2021

Opgave 2.1.

a) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}.$$

Løsning. Bemærk at $\left|\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\right| = \frac{n!}{(2n)!}$ og der gælder

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}\bigg/\frac{n!}{(2n)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}\right) = 0.$$

Det konkluderes dermed ved kvotienttesten (Sætning 2.24) at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!} < \infty$ og rækken er absolut konvergent. $\square$

b) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(\log(n))}.$$

Løsning. Bemærk at rækken er alternerende, da $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Ydermere gælder at $\left|\frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}\right| = \frac{1}{\log(\log(n))}$ er monotont aftagende med $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log(\log(n))}\right) = 0$. Per Leibniz' test (Sætning 2.30) konkluderes at $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{\log(\log(n))}$ er konvergent. Det ses samtidig let at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(\log(n))}$ er divergent ved sammeligningstesten (Korollar 2.17) da $1/\log(\log(n)) > 1/n$. Altså er rækken betinget konvergent. $\square$

c) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log(n)}\right)$$

Løsning. Betragt den alternerende række $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n/\log(n)$. Per Leibniz' test (Sætning 2.30) ses det let, at denne række er konvergent, da absolutværdien af ledne er monotont aftagende og gående mod 0. Derfor konkluderes, at $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\log(n) < \infty$. Det følger da umiddelbart af Korollar 2.11, samt at $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ er divergent, at $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log(n)}\right)$ er divergent.

$\square$

Opgave 2.2. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{an+b}$

a) Lad $a = 0$. Bestem for hvilke $b \in \mathbb{R}$, rækken er konvergent.

Løsning. For $a = 0$ har vi $\sum_{n=1}^{\infty} n^b$. Det genkendes som en p-række med $p = -b$. Det konkluderes fra eksempel 2.23 at rækken er konvergent hvis og kun hvis $b < -1$. $\square$

b) Bestem alle $a, b \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken er konvergent.

Løsning. For $a > 0$ benytter vi rodtesten. Vi ser først at

$$\left(n^{an+b}\right)^{1/n} = n^{a+b/n} = n^a n^{b/n}.$$

Bemærk at $n^{b/n} = \exp(\log(n^{b/n})) = \exp\left(\frac{b}{n}\log(n)\right)$. Det vides at $x \mapsto \exp(x)$ er kontinuert på hele $\mathbb{R}$. Det følger yderligere af L'Hôpital's regel og Observation 1.42 at $\lim_{n\to\infty} b\frac{\log(n)}{n} = \lim_{x\to\infty} b\frac{\log(x)}{x} = \lim_{n\to\infty} b\frac{1}{x} = 0$. Dermed gælder per Sætning 1.43, at $\lim_{n\to\infty} n^{b/n} = \exp(0) = 1$. For $a < 0$ har vi nu ved regnereglerne for konvergente følger (Sætning 1.39)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{an+b}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^a n^{b/n} = 0,$$

hvor vi har brugt den velkendte grænseværdi $\lim_{n\to\infty} n^a = 0$ for $a < 0$. Det følger af rodtesten (Sætning 2.26), at rækken er konvergent.
Hvis $a > 0$ har vi derimod $\lim_{n\to\infty} n^{an+b} = \infty$. Dette kan ses ved at bemærke, at $n^{an+b} = \exp(\log(n^{an+b})) = \exp((an+b)\log n)$. Det er tydeligt at $\lim_{n\to\infty}(an+b)\log n = \infty$, og det gælder per observation 1.42 samt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, at $\lim_{n\to\infty} n^{an+b} = \infty$. Det følger da ved kontraposition af (Sætning 2.2) at rækken er divergent.
Tilfældet $a = 0$ er dækket i opgave a). Vi konkluderer alt i alt, at rækken konvergerer hvis og kun hvis $a < 0$ eller $a = 0$ *og* $b < -1$. □

Opgave 2.3. Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4}.$$

a) Vis at rækken er konvergent. Samt at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} \in \left[1, \frac{11}{10}\right]$

Løsning. At rækken er konvergent konkluderes let ved sammeligningstesten, da $\lceil n/\pi\rceil \leq n$ og dermed gælder $\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} \leq \frac{1}{n^3}$. Det følger da af $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty$, at rækken konvergerer.
For at estimere rækken, bemærkes først at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} > 1$. På den anden side gælder det at $\lceil n/\pi\rceil < n/\pi + 1$, hvoraf vi får

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\frac{n}{\pi}+1}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} + \frac{\frac{N+1}{\pi}+1}{(N+1)^4} + \int_{N+1}^{\infty}\frac{\frac{x}{\pi}+1}{x^4}\mathrm{d}x.$$

Vælger vi $N = 3$ finder vi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} \leq 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{4/\pi+1}{4^4} + \int_4^{\infty}\frac{x/\pi+1}{x^4}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{4/\pi+1}{4^4} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^3} = 1.0988...$$

Altså konkluderes at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\lceil\frac{n}{\pi}\right\rceil}{n^4} \in (1, 1.099) \subset \left[1, \frac{11}{10}\right]$. □

Opgave 2.4. Betragt rækken givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n-\frac{1}{2}}, \qquad \text{hvor } x \in \mathbb{R}$$

og lad $0 \leq a < 1$.

a) Vis, at rækken konvergerer uniformt på intervallet $[-a, a]$.

Løsning. Bemærk at $\left|\frac{x^{2n-1}}{n-\frac{1}{2}}\right| \leq 2a^n$ for $-1 < -a \leq x \leq a < 1$ med $0 \leq a$, og siden $\sum_{n=1}^{\infty} 2a^n < \infty$, for $0 \leq a < 1$, følger det af Weierstrass' majorenttest (Sætning 3.24), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n-\frac{1}{2}}$ er uniformt konvergent på intervallet $[-a, a]$. $\square$

b) Vis, at rækkens sumfunktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ er differentiabel, og der gælder

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2}, \qquad x \in [-a, a].$$

Løsning. Den ledvist afledte række findes

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{x^{2n-2}}{n - \frac{1}{2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n.$$

Det ses at den ledvist afledte række er uniform konvergent på intervallet $[-a, a]$, da det blot er en (generaliseret) geometrisk række. Det ses yderligere at hvert led er i $C^1([-a, a])$. Det følger af Korollar 3.20 fra forelæsningsslides at rækkens sumfunktion er differentiable og at den afledte sumfunktion er givet ved den ledvist afledte række. vi får dermed

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2},$$

hvor vi i sidste lighedstegn benyttede Sætning 2.4 samt $\left|x^2\right| \leq a^2 < 1$. $\square$

c) Vis at $g(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$ også opfylder at $g'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ og konkluder at formlen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n-\frac{1}{2}} = \log(1+x) - \log(1-x)$ gælder for alle $x \in [-a, a]$.

Løsning. Det gælder åbenlyst at $g'(x) = (\log(1+x) - \log(1-x))' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$. Derfor gælder $(g(x) - f(x))' = g'(x) - f'(x) = 0$, og vi konkluderer at $g(x) - f(x) = \text{konst.} = g(0) - f(0)$. Men der gælder klart at $f(0) = 0 = g(0)$, hvorfor vi konkluderer $f(x) = g(x)$. $\square$

d) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} = \log(3)$.

Løsning. Bemærk at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{2n-2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$. Ved at lade $a = 1/2$ ses det nu let fra c) at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \log(1+1/2) - \log(1-2) = \log(3/2) - \log(1/2) = \log(3/2) + \log(2) = \log(3),$$

hvoraf det ønskede resulat følger. $\square$

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 2

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, og afskrift behandles efter universitetets regler om eksamenssnyd. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på omtrent en fjerdedel af den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra noterne [MC], øvelsesopgaverne og forelæsningsslides, samt til alle lærebøger brugt på andre førsteårskurser på matematikstudierne. Hvis I citerer fra materiale nævnt i litteraturlisten i [MC] kan I uden videre benytte forkortelserne brugt her (fx [EHM], [Li]). Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med LaTeX eller lignende, men skal være ensartet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. Det forventes, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at besvarelser udarbejdet elektronisk ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare.

På hver side af den afleverede løsning skal I skrive jeres navn og KU-id ("svenske nummerplade"). Vi anbefaler at I også skriver "side x ud af y" på hver side.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med et udvalg af forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.