Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 3

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 10. juni 2021

Opgave 3.1.

a) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)z^n, z \in \mathbb{C}$.

Løsning. Ved eksempel 4.19 ved vi, at $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ for $z \in B_1$ og ved Eksempel 3.23 og Sætning 4.15(2) gælder det, at $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ for $z \in B_1$. Ved 4.15(1) fåes $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})z^n = -\frac{1}{2(1-z)}$, og ved 4.18(5) fåes $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\frac{1+z}{(1-z)^2}$ for $z \in B_1$. Det ses let ved divergenstesten at rækken er divergent for $|z| = 1$, hvorfor det konkluderes at konvergensradius er 1 og konvergensområdet er B_1. □

b) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}, x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Det vides fra Eksempel 4.32, at $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Ækvivalent gælder det, at $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$ eller at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) - 1$. Ved brug af 4.15(1) kan vi skrive dette som $-x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n)!} = \cos(x) - 1$ eller med $m = n-1$ har vi $-x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+2)!} = \cos(x) - 1$. Alle manipulationer bevarer konvergensradius $r = \infty$, og vi konkluderer for alle $x \neq 0$, at $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. For $x = 0$ findes $s(0) = a_0 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$. Dermed er konvergensradius $r = \infty$ og konvergensområdet hele $\mathbb{R}$. □

c) Find konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Bemærk at $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Det fra Eksempel 1.45 at $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{n!} \right) = e$. Det ses nu let, at alle antagelser for sætning 4.8 er opfyldt, og det følger derfor, at konvergensradius er $r = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{n!} \right) \right)^{-1} = e^{-1}$. □

Opgave 3.2.

a) Find Taylorrækken for funktionen

$$f(x) = 2^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

og vis, at den konvergerer mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Det ses, at $f(x) = e^{\log(2)x}$, og det følger, at $f^{(n)}(x) = (\log(2))^n f(x)$. Dermed ses at Taylorrækken for f er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(2))^n x^n}{n!}$. Ved brug af Sætning 4.15 (3) med $c = \log(2)$ samt Eksempel 4.10, konkluderes at konvergensradius er $r = \infty$, samt at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(2))^n x^n}{n!} = \exp(\log(2)x) = 2^x$ som er det ønskede resultat. □

b) Find Taylorrækken for funktionen

$$g(x) = \int_0^x e^{t^3} \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}$$

og vis, at den konvergerer mod $g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Det vides at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Så ved 4.15(4) ses det at $e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og ved 4.22(8) ses da, at $\int_0^x e^{t^3} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)n!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Per Sætning 4.28 konkluderes det at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)n!}$ udgør Taylorrækken for g. □

Opgave 3.3.
Vi ser på potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$, med $a_0 = 0$ og

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{for} \qquad n \geq 1$$

. Lad r betegne rækkens konvergensradius og s sumfunktionen $s : (-r, r) \to \mathbb{C}$

a) Vis at rækken divergerer for $x = 1$, men at den konvergerer for $x = \frac{1}{2}$. Slut, at $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$.

Løsning. For $x = 1$ har vi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n}$, og det vides at den harmoniske række er divergent, følger det af sammenligningstesten, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er divergent for $x = 1$. For $x = 1/2$ benyttes at $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. Og da det vides fra Eksempel 4.19, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ er konvergent, konkluderes ved sammenligningstesten (Korollar 2.17), at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergerer. Det følger af Sætning 4.3 (1) og (2), at $1/2 \leq r \leq 1$.

□

b) Bestem Taylorrækken for $(1-x)s(x)$, og redegør for, at den også har konvergensradius r.

Løsning. Betragt potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$. Det er klart ved Sætning 4.15(3) og Sætning 4.18(5) at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$ har konvergensradius mindst r og at der gælder $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)s(x)$ for $|x| < r$. Det følger af Sætning 4.28, at dette er Taylorrækken for $(1-x)s(x)$. På den anden side, gælder der, at $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) 1$. Bemærk nu, at det vides at $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ har konvergensradius 1. Lad da r' betegne konvergensradius af $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$, da gælder ved Sætning 4.18(6) (Cauchy-multiplikation), at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradius mindst $\min(1, r')$. Vi ser fra resultatet i c) nedenfor, at $r' = 1$, hvoraf det følger at $r \geq 1 = r'$, således at $r = r'$. □

c) Vis, at $r = 1$ og bestem et lukket udtryk for $s : (-1, 1) \to \mathbb{C}$.

Løsning. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ genkendes fra eksempel 4.24, og det vides, at $r' = 1$, således at $r = r' = 1$ samt at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, hvoraf det ses at $(1-x)s(x) = -\log(1-x)$. Altså har vi $s(x) = \frac{\log(1-x)}{x-1}$, for $x \in (-1, 1)$. □

Opgave 3.4.
En funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ siges at være lige hvis $f(x) = f(-x)$. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergensradius $r > 0$ og sumfunktion $s : (-r, r) \to \mathbb{R}$

a) Vis at hvis $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$ så er s lige.

Løsning. Der gælder åbenlyst at

$$s(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x),$$

hvoraf det følger, at s er lige. □

b) Vis at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-(-1)^n)x^n$$

har sum $s(x) - s(-x)$. Brug entydighedssætningen for potensrækker til at konkludere, at hvis s er lige, så er $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$.

Løsning. Det ses ved Sætning 4.18(5) at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-(-1)^n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n - a_n(-x)^n) = s(x) - s(-x)$ for $x \in (-r, r)$. Hvis s er lige ses dermed, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-(-1)^n)x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = 0$ for $x \in (-r, r)$. Det følger entydighedssætningen (Sætning 4.35) at $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$ $\square$