Analyse 1 2020/2021 -

9. juni 2021

Forelæsninger: Søren Eilers, `eilers@math.ku.dk`
Øvelser: Johannes Agerskov, `johannes-as@math.ku.dk`

Opgave 0.1. Lad $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en talfølge således at $0 < \varepsilon < b_n \leq 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Definer da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ved

$$a_n = b_n \prod_{i=1}^{n-1}(1-b_i) \text{ for } n \geq 2, \quad a_1 = b_1.$$

Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

Løsning. Bemærk at,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = b_1 + \sum_{n=2}^{N}(1-(1-b_n))\prod_{i=1}^{n-1}(1-b_i). \tag{1}$$

Definer $c_n = \prod_{i=1}^{n}(1-b_i)$, da ses det at

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = b_1 + \sum_{n=2}^{N}(c_{n-1}-c_n) = b_1 + c_1 - c_N = b_1 + (1-b_1) - c_N. \tag{2}$$

Det gælder åbenlyst at $\lim_{N\to\infty} c_N = 0$, da $0 < c_N < (1-\varepsilon)^N$, og derfor konkluderes at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ ☐

Opgave 0.2. Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, med $p \in \mathbb{R}$.

a) Vis at der for ethvert $p > 1$ eksistrerer en konvergent række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ således at $\lim_{n\to\infty}(a_n n^p) = \infty$.

b) Vis at der for ethvert $p \leq 1$ eksisterer en divergent række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ således at $\lim_{n\to\infty}(b_n n^p) = 0$

c) Vis at der for enhver konvergent positiv række, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, eksisterer en positiv konvergent række $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ således at $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{c_n} = \infty$, samt at der for enhver positiv divergent række $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ eksisterer en positiv divergent række $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ således at $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{D_n} \to 0$

Opgave 0.3.
Betragt funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, givet ved $f(x) = \frac{1}{1-e^{ix}+\frac{1}{4}e^{2ix}}$.

a) Find Fourierrækken for f.

b) Afgør, om Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.