Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 4

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 25. juni 2021

Opgave 4.1.
Betragt funktionen, $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$, med restriktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ givet ved $\tilde{f}(x) = x\sin(x)$.

a) Beregn $c_n(f)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, og opstil Fourierrækken for f.

Løsning. Bemærk at $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Derfor har (Ved vi fra Opgave 6.6.c.i uge 6??) vi for $n \notin \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4\pi i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-i(n-1)x}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-i(n+1)x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{4\pi i}\left(\left[\frac{i}{n-1}xe^{-i(n-1)x}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{i}{n+1}xe^{-i(n+1)x}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{n-1}(-1)^{n-1}2\pi - \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}2\pi\right) \\
&= -\frac{(-1)^n}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

For $n \in \{-1, 1\}$ har vi istedet

$$c_{\pm 1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{\mp ix}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}\sin^2(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4},$$

Dermed ses, at vi har Fourierrækken for f

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = 1 - \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix}) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

□

b) Argumentér for, at f er stykkevist C^1 og bevis, at Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.

Løsning. Det ses at f er kontinuert, da f er kontinuert på $(-\pi, \pi)$ samt at $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0 = f(-\pi)$. Betragt nu indelingen $d_0 = -\pi$, $d_1 = \pi$. Da gælder, at restriktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ er C_1, da vi for $x \in (-\pi, \pi)$ har $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, som er kontinuert på $(-\pi, \pi)$ samt at $\lim_{x\to-\pi_+} f'(x) = -\pi = f'(-\pi)$ og $\lim_{x\to\pi_-} f'(x) = \pi = f'(\pi)$.

Det følger da direkte af sætning 5.46, samt af resultaterne fra a), at Fourierrækken konvergerer uniformt mod f. □

c) Opstil cosinus-rækken for f. Indsæt heri $x = \pi$ og udled formlen

$$\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2-1) = 3/4$$

Løsning. Det findes direkte fra resultatet i c), at $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(nx)$. For $x = \pi$ finder vi $0 = 1 + 1/2 - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, hvorfra det følger, at $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{3}{4}$. □

d) Find Fourierrækken for funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med restriktion givet ved

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi, \\ \sin(x) + x\cos(x), & x \in (-\pi, \pi), \end{cases}$$

og vis, at Fourierrækken for g konvergerer punktivist mod g. (*Bemærk, at g er den normaliseret stykkevist afledte funktion af f*).

Løsning. Da $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er stykkevist C^1, følger det af Lemma 5.45, at g har Fourierkoefficienter $c_n(g) = inc_n(f)$. Dermed findes Fourierrækken for g

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx} = \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - n^{-1}} \frac{1}{i} \left(e^{inx} - e^{-inx}\right).$$

Da $g \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er differentiable fra højre og venstre overalt (siden at $\sin(x) + x\cos(x)$ er differentiable overalt) følger det af Sætning 5.40, at Fourierrækken for g konvergerer punktvist mod g. □

Opgave 4.2. Betragt funktionen $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$g(x) = \begin{cases} e^{ix/2}, & \pi \leq x \leq 0, \\ ie^{ix/2}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Find en funktion h i $\mathrm{PCN}_{2\pi}$ der stemmer overens med g undtagen i $-\pi$, 0 og π.

Løsning. Betragt den periodiske udvidelse, h, af $\tilde{h} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-i\pi/2} + ie^{i\pi/2}}{2}, & x = -\pi \text{ eller } x = \pi, \\ \frac{1+i}{2}, & x = 0, \\ g(x), & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Da opfylder h betingelserne i opgaven. □

b) Vis at $c_n(h) = \frac{1+i}{\pi(n-1/2)}$ for alle ulige n, og at $c_n(h) = 0$ for alle lige n.

Løsning. Vi har

$$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{ix/2}e^{-inx}\mathrm{d}x + i\int_{0}^{\pi} e^{ix/2}e^{-inx}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(1 - e^{i\pi(n-1/2)})}{-i(n-1/2)} + i\frac{(e^{-i\pi(n-1/2)} - 1)}{-i(n-1/2)}\right).$$

Det følger ved brug af $e^{i\pi} = -1$ samt $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ at

$$c_n(h) = -\frac{1}{i2\pi(n-1/2)}(1 - i + (-1)^n i + i(-1^n)i) = \frac{1}{2\pi(n-1/2)}(1+i)(1-(-1)^n).$$

Heraf ses let at $c_n(h) = \frac{1+i}{\pi(n-1/2)}$ for n ulige, og $c_n(h) = 0$ for n lige. □

c) Vis, at $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+i}{\pi(n-1/2)}e^{inx} = h(x)$ punktvist for alle $x \in [-\pi, \pi]$. Afgør om konvergensen er uniform.

Løsning. Da $h \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er differentiable fra højre og venstre overalt (siden af $e^{ix/2}$ og $ie^{ix/2}$ hver især er differentiable overalt), følger det af sætning 5.40, at Fourierrækken for h konvergerer punktivist mod h. Altså har vi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+i}{\pi(n-1/2)}e^{inx} = h(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og dermed specielt for alle $x \in [-\pi, \pi]$ som ønsket. Bemærk, hvis konvergensen var uniform ville grænsen, h, nøvendigvis være kontinuert per Sætning 3.13 hvor vi identificerer afsnitssummerne med en uniform konvergent funktionsfølge. Men h er ikke kontinuert, hvorfor konvergensen ikke er uniform. □

d) Illustrer h sammen med afsnitssummerne s_3, s_5 og s_7 i den komplekse plan.

Opgave 4.3.
I denne opgave ser vi på to metrikker på $\mathbb{R}$, nemlig den diskrete metrik d_{disk} og den sædvanlige metrik $d(x, y) = |y - x|$. Lad $A = (\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ og $B = (\mathbb{R}, d)$ være de to metriske rum der begge har $\mathbb{R}$ som underliggende mængde, men er udstyret med de to forskellige metrikker som anført.

a) Vis at enhver funktion $f : A \to B$ er kontinuert [Hvis man benytter Eksempel 6.51 skal det forklares hvorfor alle delmængder er åbne i A]

Løsning. Bemærk, at i et diskret metrisk rum, M, gælder, at $K(x, 1/2) = \{x\}$ for alle $x \in M$. Dermed gælder for enhver delmængde $N \subset M$, at $x \in N$ er et indre punkt, da $K(x, 1/2) = \{x\} \subset N$. Dermed er N åben i M. Det følger nu af Sætning 6.50, at enhver funktion, $f : A \to B$, er kontinuert da $f^{-1}(G)$ er åben i A for enhver (åben) delmængde $G \subset B$. $\square$

b) Vis at en funktion $f : B \to A$ er kontinuert hvis og kun hvis den er konstant, altså hvis $f(x) = c$ for et fast $c \in \mathbb{R}$ og for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Bemærk først, at hvis en ikke-tom delmængde $U \subset B$ er åben og afsluttet, så er $U = \mathbb{R}$. For at se dette, lad $x_0 \in U$, og betragt mængden $S = \{r > 0 : [x_0 - r, x_0 + r] \subset U\}$, som er ikke-tom da U er åben. Antag for modstrid, at S er begrænset. Lad da $R = \sup(S)$ og lad $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i S der konvergerer mod R. Siden U er lukket, gælder det at $x_0 + R = \lim_{n\to\infty}(x_0 + r_n) \in U$, hvorfor der eksisterer $\delta > 0$ således at $(x_0 + R - \delta, x_0 + R + \delta) \subset U$, hvilket er modstrid med definitionen af R. Vi konkluderer at S er ubegrænset, hvoraf det følger, at $U = \mathbb{R}$.
Lad $f : B \to A$ være kontinuert, og lad $c \in f(B)$. Som argumenteret i a), er enhver delmængde af A åben. Betragt nu den ikke-tomme åbne mængde $O = f^{-1}(\{c\})$. Bemærk, at siden alle mængder er åbne i et diskret metrisk rum, er alle mængder også afsluttet per Sætning 6.55. Det gælder dermed klart at $\{c\}$ er afsluttet i A, hvorfor O også er afsluttet i B ved kontinuitet af f (Opg... ugeseddel...). Det konkluderes at O er ikke-tom, åben og afsluttet i B, hvorfor $O = \mathbb{R}$, og det følger at $f(x) = c$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 4

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, og afskrift behandles efter universitetets regler om eksamenssnyd. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på omtrent en fjerdedel af den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra noterne [MC], øvelsesopgaverne og forelæsningsslides, samt til alle lærebøger brugt på andre førsteårskurser på matematikstudierne. Hvis I citerer fra materiale nævnt i litteraturlisten i [MC] kan I uden videre benytte forkortelserne brugt her (fx [EHM], [Li]). Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med LaTeX eller lignende, men skal være ensartet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. **Det er et krav**, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at besvarelser udarbejdet elektronisk ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare. Overskrides denne begrænsning, vil der blive tildelt halvt pointtal for første overskredne side og kvart pointtal for anden overskredne side. Fra tredje overskredne side og videre, vil besvarelsen ikke blive rettet.

På hver side af den afleverede løsning skal I skrive jeres navn og KU-id ("svenske nummerplade"). Vi anbefaler at I også skriver "side x ud af y" på hver side.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med et udvalg af forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.