Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 4

Afleveres senest kl 23:59:00 på Absalon, 25. juni 2021

Vi bemærker, at Riemann integrabillitet i alle relevante opgave nedenfor er opfyldt, da alle integrander er kontinuerte på afsluttet begrænset intervaller og dermed Riemann integrable.

Opgave 4.1.
Betragt funktionen $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ givet ved

$$f(x) = x\sin(x), \qquad x \in [-\pi, \pi)$$

og udvidet 2π-periodisk.

a) Beregn $c_n(f)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, og opstil Fourierrækken for f.

Løsning. Bemærk at $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Derfor har vi for $n \notin \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4\pi i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-i(n-1)x}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-i(n+1)x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{4\pi i}\left(\left[\frac{i}{n-1}xe^{-i(n-1)x}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{i}{n+1}xe^{-i(n+1)x}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{n-1}(-1)^{n-1}2\pi - \frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}2\pi\right) \\ &= -\frac{(-1)^n}{n^2-1}. \end{aligned}$$

For $n \in \{-1, 1\}$ har vi istedet

$$c_{\pm 1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{\mp ix}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}\sin^2(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4},$$

hvor vi har brugt partiel integration $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)\sin(x)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\mathrm{d}x$, således at
$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x) + \cos^2(x)\mathrm{d}x = \pi$. Dermed ses, at vi har Fourierrækken for f

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = 1 - \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix}) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right).$$

□

b) Argumentér for, at f er stykkevist C^1, og bevis, at Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.

Løsning. Det ses at f er kontinuert, da f er kontinuert på $(-\pi, \pi)$ samt at $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0 = f(-\pi) = f(\pi)$. Betragt nu indelingen $d_0 = -\pi$, $d_1 = \pi$. Da gælder, at restriktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ er C_1. Dette ses da vi for $x \in (-\pi, \pi)$ har $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, som er kontinuert på $(-\pi, \pi)$ samt at $\lim_{x\to-\pi_+} f'(x) = \pi = f'_+(-\pi)$ og $\lim_{x\to\pi_-} f'(x) = -\pi = f'_-(\pi)$, hvor f'_+ er den højre afledte og f'_- er den venstre afledte. Bemærk, at de venstre og højre afledte ovenfor, er lette at finde, da $f(x) = x\sin(x)$ for alle $x \in [-\pi, \pi]$, og $x\sin(x)$ er differentiable overalt.

Det følger da direkte af sætning 5.46, at Fourierrækken konvergerer uniformt mod f. □

c) Eftervis, at f er lige, og opstil cosinus-rækken for f. Indsæt heri $x = \pi$ og udled formlen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

Løsning. At f er lige ses idet at restriktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ er lige, da $x \mapsto x$ er ulige og $x \mapsto \sin(x)$ er ulige samt at $f(\pi) = 0 = f(-\pi)$). Siden f er periodisk per definition, gælder tydeligvis, at $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er lige. Det findes direkte fra resultatet i b), at $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx)$. For $x = \pi$ finder vi, da $\cos(n\pi) = (-1)^n$, at $0 = 1 + 1/2 - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, hvorfra det følger, at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$. $\square$

d) Betragt nu funktionen $g \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ som opfylder

$$g(x) = f'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Find Fourierrækken for g og vis, at denne konvergerer punktvist mod g.

Løsning. Da $f \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er stykkevist C^1, følger det af Lemma 5.45, at g har Fourierkoefficienter $c_n(g) = inc_n(f)$. Dermed findes Fourierrækken for g

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx} = \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - n^{-1}} \frac{1}{i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right).$$

Da $g \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ er differentiabel fra højre og venstre overalt (siden at $\sin(x) + x\cos(x)$ er differentiabel overalt) følger det af Sætning 5.40, at Fourierrækken for g konvergerer punktvist mod g. $\square$

Opgave 4.2. Betragt funktionen $h_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ givet ved

$$h_0(x) = \begin{cases} e^{ix/2}, & -\pi \le x \le 0, \\ ie^{ix/2}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

a) Bestem den funktion $h \in \mathrm{PCN}_{2\pi}$ der stemmer overens med h_0 undtagen i $-\pi$, 0 og π.

Løsning. Betragt den periodiske udvidelse, h, af $\tilde{h} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} -\frac{1+i}{2}, & x = -\pi, \\ \frac{1+i}{2}, & x = 0, \\ h_0(x), & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Da opfylder h betingelserne i opgaven. $\square$

b) Vis at $c_n(h) = \dfrac{1+i}{\pi(n - 1/2)}$ for alle ulige n, og at $c_n(h) = 0$ for alle lige n.

Løsning. Vi har

$$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{ix/2}e^{-inx}\mathrm{d}x + i\int_{0}^{\pi} e^{ix/2}e^{-inx}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(1 - e^{i\pi(n-1/2)})}{-i(n-1/2)} + i\frac{(e^{-i\pi(n-1/2)} - 1)}{-i(n-1/2)}\right).$$

Det følger ved brug af $e^{i\pi} = -1$ samt $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ at

$$c_n(h) = -\frac{1}{i2\pi(n-1/2)}(1 - i + (-1)^n i + i(-1^n)i) = \frac{1}{2\pi(n-1/2)}(1+i)(1 - (-1)^n).$$

Heraf ses let at $c_n(h) = \frac{1+i}{\pi(n-1/2)}$ for n ulige, og $c_n(h) = 0$ for n lige. $\square$

c) Vis, at

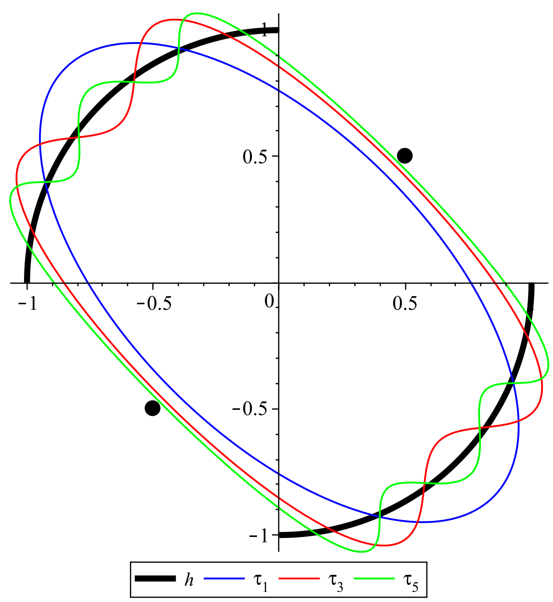
$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{1+i}{\pi(n-1/2)} e^{inx} = h(x)$$

punktvist for alle $x \in \mathbb{R}$. Afgør om konvergensen er uniform.

Løsning. Da $h \in \text{PCN}_{2\pi}$ er differentiabel fra højre og venstre overalt (siden at $e^{ix/2}$ og $ie^{ix/2}$ hver især er differentiable overalt), følger det af sætning 5.40, at Fourierrækken for h konvergerer punktvist mod h. Altså har vi $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{1+i}{\pi(n-1/2)} e^{inx} = h(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og dermed specielt for alle $x \in [-\pi, \pi]$ som ønsket. Bemærk, hvis konvergensen var uniform ville grænsen, h, nødvendigvis være kontinuert per Sætning 3.13 hvor vi identificerer afsnitssummerne med en uniform konvergent funktionsfølge. Men h er ikke kontinuert, hvorfor konvergensen ikke er uniform. $\square$

d) Illustrer h sammen med afsnitssummerne τ_1, τ_3 og τ_5 for Fourierrækken, opfattet som kurver i den komplekse plan.

Løsning.



$\square$

Opgave 4.3.

I denne opgave ser vi på to metrikker på $\mathbb{R}$, nemlig den diskrete metrik d_{disk} og den sædvanlige metrik $d(x,y) = |y-x|$. Lad $A = (\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ og $B = (\mathbb{R}, d)$ være de to metriske rum der begge har $\mathbb{R}$ som underliggende mængde, men er udstyret med de to forskellige metrikker som anført.

a) Vis at enhver funktion $f : A \to B$ er kontinuert. *[Hvis man benytter Eksempel 6.51 skal det forklares hvorfor alle delmængder er åbne i A]*

Løsning. Bemærk, at i et diskret metrisk rum, M, gælder, at $K(x, 1/2) = \{x\}$ for alle $x \in M$. Dermed gælder for enhver delmængde $N \subset M$, at $x \in N$ er et indre punkt, da $K(x, 1/2) = \{x\} \subset N$. Så N er åben i M. Det følger nu af Sætning 6.50, at enhver funktion, $f : A \to B$, er kontinuert da $f^{-1}(G)$ er åben i A for enhver (åben) delmængde $G \subset B$. $\square$

b) Vis at en funktion $f : B \to A$ er kontinuert hvis og kun hvis den er konstant, altså hvis $f(x) = c$ for et fast $c \in \mathbb{R}$ og for alle $x \in \mathbb{R}$. *[Vink: Brug supremumsegenskaben for $\mathbb{R}$ direkte eller indirekte]*

Løsning. Bemærk først, at hvis en ikke-tom delmængde $U \subset B$ er åben og afsluttet, så er $U = \mathbb{R}$. For at se dette, lad $x_0 \in U$, og betragt mængden $S = \{r > 0 : [x_0 - r, x_0 + r] \subset U\}$, som er ikke-tom da U er åben. Antag for modstrid, at S er begrænset. Lad da $R = \sup(S)$ (hvor vi har brugt supremumsegenskaben for de reelle tal) og lad $\{r_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i S der konvergerer mod $\pm R$. Siden U er afsluttet, gælder det per Lemma 6.58, at $x_0 \pm R = \lim_{n\to\infty}(x_0 + r_n^{\pm}) \in U$, hvorfor der eksisterer $\delta_{\pm} > 0$ således at $(x_0 \pm R - \delta_{\pm}, x_0 \pm R + \delta_{\pm}) \subset U$, hvilket er modstrid med definitionen af R for mindst et af fortegnene $\pm$. Vi konkluderer at S er ubegrænset, hvoraf det følger, at $U = \mathbb{R}$.
Lad $f : B \to A$ være kontinuert, og lad $c \in f(B)$. Som argumenteret i a), er enhver delmængde af A åben. Betragt nu den ikke-tomme åbne (pga. kontinuitet og Sætning 6.50) mængde $O = f^{-1}(\{c\})$. Bemærk, at siden alle mængder er åbne i et diskret metrisk rum, er alle mængder også afsluttede per Sætning 6.55. Det gælder dermed klart at $\{c\}$ er afsluttet i A, hvorfor O også er afsluttet i B ved kontinuitet af f (opgave 9.1.b) på ugeseddel 9). Det konkluderes at O er ikke-tom, åben og afsluttet i B, hvorfor $O = \mathbb{R}$, og det følger at $f(x) = c$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Modsat gælder der trivielt, hvis f er konstant, at $f(x_n) \to c = f(x)$ for $x_n \to x$ når $n \to \infty$. Det følger da af sætning 6.37, at f er kontinuert.

$\square$