Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 2

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 27. maj 2021

Opgave 2.1.

a) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}.$$

Løsning. Bemærk at $\left|\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\right| = \frac{n!}{(2n)!}$ og der gælder

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \Big/ \frac{n!}{(2n)!} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = 0,$$

hvor det følger af sidste lighedstegn, at grænsen eksisterer. Det konkluderes dermed ved kvotienttesten (Sætning 2.24), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} < \infty$ og rækken er absolut konvergent. $\square$

b) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(\log(n))}.$$

Løsning. Bemærk at rækken $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(\log(n))}$ er alternerende, da $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Ydermere gælder at $\left\{ \left| \frac{(-1)^n}{\log(\log(n))} \right| \right\}_{n=3}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{\log(\log(n))} \right\}_{n=3}^{\infty}$ er monotont aftagende med $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log(\log(n))} \right) = 0$. Per Leibniz' test (Sætning 2.30) konkluderes at $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(\log(n))}$ er konvergent, hvoraf det følger at den oprindelige række er konvergent per Proporsition 2.12. Det ses samtidig let at $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log(\log(n))}$ er divergent ved sammeligningstesten (Korollar 2.17) da $1/\log(\log(n)) > 1/n$ for $n \geq 3$, hvoraf det følger at den oprindelige række er divergent per Proporsition 2.12 . Altså er rækken betinget konvergent. $\square$

c) Afgør om følgende række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log(n)} \right)$$

Løsning. Betragt den alternerende række $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n / \log(n)$. Per Leibniz' test (Sætning 2.30) ses det let, at denne række er konvergent, da absolutværdien af ledne er monotont aftagende og gående mod 0. Derfor konkluderes, at $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / \log(n) < \infty$. Det følger da umiddelbart af Korollar 2.11, samt at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent, at $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log(n)} \right)$ er divergent.

$\square$

Opgave 2.2. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{an+b}$

a) Lad $a = 0$. Bestem mængden af $b \in \mathbb{R}$ hvor rækken er konvergent.

Løsning. For $a = 0$ har vi $\sum_{n=1}^{\infty} n^b$. Det genkendes som en p-række med $p = -b$. Det konkluderes fra Eksempel 2.23 at rækken er konvergent hvis og kun hvis $b < -1$. $\square$

b) Bestem mængden af $a, b \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken er konvergent.

Løsning. For $a < 0$ bemærkes, at der eksistere $N \in \mathbb{N}$ således at $an + b < -2$ for alle $n > \mathbb{N}$. Men da gælder at $n^{an+b} < n^{-2}$ for alle $n > \mathbb{N}$, og ved sammeligningtesten (Korollar 2.17) ses at $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{an+b}$ er konvergent, da det vides at $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent per Eksempel 2.23,
For $a > 0$ vides det, at der eksistere $N' \in \mathbb{N}$ således at $an + b > 1$ for $n > N'$. Da gælder klart at $n^{an+b} > n$ for alle $n > N'$, hvoraf det konkluderes ved divergenstesten (kontraposition af Sætning 2.2), at $\sum_{n=1}^{\infty} n^{an+b}$ er divergent, da n^{an+b} ikke konvergerer mod 0.

Tilfældet $a = 0$ er dækket i opgave a). Vi konkluderer alt i alt, at rækken konvergerer hvis og kun hvis $a < 0$ eller $a = 0$ *og* $b < -1$. $\square$

Opgave 2.3. Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\lceil \frac{n}{\pi} \right\rceil}{n^4}.$$

a) Vis at rækken er konvergent med en sum, der ligger i intervallet $\left[1, \frac{11}{10}\right]$

[Estimater skal som altid begrundes, og i det omfang der er brugt computeralgebrasystemer skal output herfra underbygges teoretisk.]

Løsning. At rækken er konvergent konkluderes let ved sammeligningstesten, da $\lceil n/\pi \rceil \leq n$ og dermed gælder $\frac{\lceil \frac{n}{\pi} \rceil}{n^4} \leq \frac{1}{n^3}$. Det følger da af $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$ (Eksempel 2.23), at rækken konvergerer.
For at estimere rækken, bemærkes først at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lceil \frac{n}{\pi} \rceil}{n^4} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lceil \frac{n}{\pi} \rceil}{n^4} > 1$. På den anden side gælder det at $\lceil n/\pi \rceil < n/\pi + 1$. Dermed har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\lceil \frac{n}{\pi} \right\rceil}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\left\lceil \frac{n}{\pi} \right\rceil}{n^4} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\frac{n}{\pi} + 1}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\left\lceil \frac{n}{\pi} \right\rceil}{n^4} + \frac{\frac{N+1}{\pi} + 1}{(N+1)^4} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{\frac{x}{\pi} + 1}{x^4} \mathrm{d}x,$$

hvor den anden ulighed følger af Observation 2.21. Vælger vi $N = 3$ findes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\lceil \frac{n}{\pi} \right\rceil}{n^4} \leq 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{4/\pi + 1}{4^4} + \int_4^{\infty} \frac{x/\pi + 1}{x^4} \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{4/\pi + 1}{4^4} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{4^3} = 1.0988...$$

Altså konkluderes at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lceil \frac{n}{\pi} \rceil}{n^4} \in (1, 1.099) \subset \left[1, \frac{11}{10}\right]$. $\square$

Opgave 2.4. Betragt rækken givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n - \frac{1}{2}}, \qquad \text{hvor } x \in \mathbb{R}$$

og lad $0 \leq a < 1$.

a) Vis, at rækken konvergerer uniformt på intervallet $[-a, a]$.

Løsning. Bemærk at $\left| \frac{x^{2n-1}}{n - \frac{1}{2}} \right| \leq 2a^n$ for $-1 < -a \leq x \leq a < 1$ med $0 \leq a$, og siden $\sum_{n=1}^{\infty} 2a^n < \infty$, for $0 \leq a < 1$, følger det af Weierstrass' majorenttest (Sætning 3.24), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n - \frac{1}{2}}$ er uniformt konvergent på intervallet $[-a, a]$. $\square$

b) Vis, at rækkens sumfunktion $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ er differentiabel, og der gælder

$$f'(x) = \frac{2}{1 - x^2}, \qquad x \in [-a, a].$$

Løsning. Den ledvist afledte række findes

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{2n-2}}{n-\frac{1}{2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n.$$

Det ses at den ledvist afledte række er uniform konvergent på intervallet $[-a,a]$, da det blot er en (generaliseret) geometrisk række. Det ses yderligere at hvert led i den oprindelige række er kontinuert differentiable på intervallet $[-a,a]$. Det følger af Korollar 3.20 fra forelæsningsslides, at rækkens sumfunktion er differentiable, og at den afledte sumfunktion er givet ved den ledvist afledte række. vi får dermed

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2},$$

hvor vi i sidste lighedstegn benyttede Sætning 2.4 samt $\left|x^2\right| \leq a^2 < 1$. $\square$

c) Vis at $g(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$ også opfylder at $g'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ og vis at formlen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n-\frac{1}{2}} = \log(1+x) - \log(1-x)$ gælder for alle $x \in [-a,a]$.

Løsning. Det gælder åbenlyst at $g'(x) = (\log(1+x) - \log(1-x))' = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$. Derfor gælder $(g(x)-f(x))' = g'(x) - f'(x) = 0$, og vi konkluderer at $g(x) - f(x) = \text{konst.} = g(0) - f(0)$. Men der gælder klart at $f(0) = 0 = g(0)$, hvorfor vi konkluderer $f(x) = g(x)$. $\square$

d) Vis at $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} = \log(3)$.

Løsning. Vi bermærker først at rækken åbenlyst er konvergent per sammenlignstesten da $\frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} < \frac{1}{4^n}$. Ydermere gælder det at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{2n-2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}.$$

Ved at lade $a = 1/2$ i c) ses det nu let fra resultatet i c) at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \log(1+1/2) - \log(1-1/2) = \log(3/2) - \log(1/2) = \log(3/2) + \log(2) = \log(3),$$

hvoraf det ønskede resulat følger. $\square$