Analyse 1 2020/2021 - Hjemmeopgave 3

Afleveres senest kl 13:00 på Absalon, 10. juni 2021

Opgave 3.1.

a) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)z^n, z \in \mathbb{C}.$

Løsning. Konvergensradius findes ved Sætning 4.8 til at være $r = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3/2}{n+1/2}\right)\right)^{-1} = 1$. Vi noterer, at rækken åbenlyst er divergent hvis $|x| = 1$ per divergenstesten, hvorfor vi finder sumfunktionen defineret på $(-1, 1)$. Bemærk at $\sum_{n=0}^{\infty}(-1/2)x^n$ har konvergensradius 1, da det er den sædvanlige (generaliserede) geometriske række, og $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ har konvergensradius 1 per Sætning 4.22 (7). Dermed gælder ved Sætning 4.18 (5), at $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1-1/2)x^n =$ har sumfunktion $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1/2)x^n$. Der gælder yderligere per eksempel 4.17 og Sætning 4.15(1), at $\sum_{n=0}^{\infty}(-1/2)x^n = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$ for $x \in (-1, 1)$, og per sætning 4.22 (7) gælder det at $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ for $x \in (-1, 1)$. Dermed findes sumfunktionen $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{1+x}{(1-x)^2}$ for $x \in (-1, 1)$. □

b) Find konvergensradius, konvergensområde og sumfunktion for potensrækken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}, x \in \mathbb{R}.$

Løsning. Definer $y = x^2$. Da gælder $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{(2n+2)!}$. Der gælder ydermere, at $\frac{1}{(2(n+1)+2)!}\Big/\frac{1}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)}$. Det ses derfor, at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+2)!}\Big/\frac{1}{(2n+2)!}\right) = 0$. Det følger af Sætning 4.8 at konvergensradius for $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{(2n+2)!}$ er ∞. Altså konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{(2n+2)!}$ for alle $y \in \mathbb{R}$, hvoraf det følger, at $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}$ konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$. Det konkluderes at $r = \infty$. Det vides fra eksempel 4.32, at $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Betragt derfor $s(x) = \begin{cases}\frac{\cos(x)-1}{x^2} & x \neq 0, \\ -1/2 & x = 0,\end{cases}$. Det er klart for $x \neq 0$ at $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}$. Desuden, gælder det per Sætning 4.28, at $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}$ er kontinuert. Men, da $s(x)$ også er kontinuert (Kontinuitet i $x = 0$ følger ved brug af L'Hopital's regel, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\sin(x)}{2x} = -1/2$) gælder det, at $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. □

c) Find konvergensradius for potensrækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n, x \in \mathbb{R}.$

Løsning. Bemærk at $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Det fra Eksempel 1.45 at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{n!}\right) = e$. Det ses nu let, at alle antagelser for sætning 4.8 er opfyldt, og det følger derfor, at konvergensradius er $r = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{n!}\right)\right)^{-1} = e^{-1}$. □

Opgave 3.2.

a) Find Taylorrækken for funktionen
$$f(x) = 2^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
og vis, at den konvergerer mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Det ses, at $f(x) = e^{\log(2)x}$, og det følger, at $f^{(n)}(x) = (\log(2))^n f(x)$. Dermed ses at Taylorrækken for f er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(2))^n x^n}{n!}$. Ved brug af Sætning 4.15 (3) med $c = \log(2)$ samt Eksempel 4.10, konkluderes at konvergensradius er $r = \infty$, samt at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(2))^n x^n}{n!} = \exp(\log(2)x) = 2^x$ som er det ønskede resultat. □

b) Find Taylorrækken for funktionen
$$g(x) = \int_0^x e^{t^3} \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}$$
og vis, at den konvergerer mod $g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning. Det gælder at $f'(x) = e^{x^3}$. Det vides derfor, at $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3n}$, for alle $x \in \mathbb{R}$. Det følger af Sætning 4.22 (8) at $\int_0^x e^{t^3} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)n!} x^{3n+1}$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvilket dermed per Sætning 4.28 udgør Taylorrækken. □

Opgave 3.3.
Vi ser på potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$, med $a_0 = 0$ og
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{for} \qquad n \geq 1$$
. Lad r betegne rækkens konvergensradius og s sumfunktionen $s : (-r, r) \to \mathbb{C}$

a) Vis at rækken divergerer for $x = 1$, men at den konvergerer for $x = \frac{1}{2}$. Slut, at $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$.

Løsning. For $x = 1$ har vi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n}$, og det vides at den harmoniske række er divergent, følger det af sammenligningstesten, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er divergent for $x = 1$. For $x = 1/2$ bemærkes at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er positiv. Da det gælder at $1 < a_{n+1}/a_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$ følger det af klemmelemmaet, at $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$. Derfor gælder det, at
$\lim_{n\to\infty} \left((a_{n+1}(1/2)^{n+1})/(a_n(1/2)^n)\right) = 1/2$, og det følger af kvotienttesten, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er konvergent. Det følger du direkte af Sætning 4.3(1) $r \leq 1$ og af Sætning 4.3(2) at $\frac{1}{2} \leq r$. □

b) Bestem Taylorrækken for $(1-x)s(x)$, og redegør for, at den også har konvergensradius r.

Løsning. Betragt potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n$. For $|x| < r$, er det klart ved Sætning 4.15(3) og Sætning 4.18(5) at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n$ har konvergensradius mindst r og at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)s(x)$ for $|x| < r$. På den anden side, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n$ konvergerer, da gælder at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, og dermed er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent og vi konkluderer at $|x| \leq r$. Altså gælder, at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n$ også har konvergensradius r. □

c) Vis, at $r = 1$ og bestem et lukket udtryk for $s : (-1, 1) \to \mathbb{C}$.

Løsning. Bemærk, at $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$ for $n \geq 1$. Derfor gælder at $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Det ses let, at alle antagelser for sætning 4.8 er opfyldt, og der gælder dermed, at $r = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} \middle/ \frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = 1$. Ved ledvis integration (Sætning 4.22(8)) af den geometriske række opnåes $\int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, hvoraf det ses at $(1-x)s(x) = -\log(1-x)$. Altså har vi $s(x) = \frac{\log(1-x)}{x-1}$, for $x \in (-1, 1)$. □

Opgave 3.4.

En funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ siges at være lige hvis $f(x) = f(-x)$. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergensradius $r > 0$ og sumfunktion $s : (-r, r) \to \mathbb{R}$

a) Vis at hvis $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$ så er s lige.

Løsning. Der gælder åbenlyst at

$$s(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x),$$

hvoraf det følger, at s er lige. $\square$

b) Vis at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - (-1)^n) x^n$$

har sum $s(x) - s(-x)$. Brug entydighedssætningen for potensrækker til at konkludere, at hvis s er lige, så er $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$.

Løsning. Det ses ved Sætning 4.18(5) at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - (-1)^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n - a_n (-x)^n) = s(x) - s(-x)$ for $x \in (-r, r)$. Hvis s er lige ses dermed, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - (-1)^n) x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = 0$ for $x \in (-r, r)$. Det følger entydighedssætningen (Sætning 4.35) at $a_{2n+1} = 0$ for alle $n \geq 0$ $\square$

Regler og vejledning for aflevering af Hjemmeopgave 3

Besvarelsen skal udarbejdes individuelt, og afskrift behandles efter universitetets regler om eksamenssnyd. Besvarelsen vil blive bedømt på en skala fra 0 til 100. Denne bedømmelse indgår med en vægt på omtrent en fjerdedel af den endelige karakter. På tværs af de fire Hjemmeopgaver skal man have mindst 50 point i gennemsnit for at bestå.

Ved bedømmelsen lægges vægt på klar og præcis formulering og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum, herunder opgaver regnet ved øvelserne. I kan bruge følgende som rettesnor for henvisninger.

- Tænk på henvisninger som en hjælp til at forklare sig. Hvis det er klart af fra konteksten, hvilke resultater man bruger, så er det ikke nødvendigt at henvise.
- I må henvise til resultater fra noterne [MC], øvelsesopgaverne og forelæsningsslides, samt til alle lærebøger brugt på andre førsteårskurser på matematikstudierne. Hvis I citerer fra materiale nævnt i litteraturlisten i [MC] kan I uden videre benytte forkortelserne brugt her (fx [EHM], [Li]). Det er tilladt at henvise til pensum, som endnu ikke er gennemgået. Det er ikke nødvendigt at angive sidetal på henvisninger.
- Det er næsten aldrig relevant at henvise til definitioner.

Besvarelsen må udfærdiges i hånden eller med LaTeX eller lignende, men skal være ensartet og letlæselig. Billeder, plots og lignende må gerne udfærdiges i andre programmer. **Det er et krav**, at håndskrevne besvarelser ikke fylder mere end 7 sider, og at besvarelser udarbejdet elektronisk ikke fylder mere end 5 sider. Billeder, plots og lignende tæller med i sideantallet. Håndskrevne besvarelser skal være tydeligt læsbare. Overskrides denne begrænsning, vil der blive tildelt halvt pointtal for første overskredne side og kvart pointtal for anden overskredne side. Fra tredje overskredne side og videre, vil besvarelsen ikke blive rettet.

På hver side af den afleverede løsning skal I skrive jeres navn og KU-id ("svenske nummerplade"). Vi anbefaler at I også skriver "side x ud af y" på hver side.

Det er kun tilladt at aflevere gennem Absalon, og man skal uploade sin besvarelse som én .pdf. Vi opfordrer jer til hvis muligt at aflevere i god tid for at undgå at Absalon går ned, fordi alle afleverer samtidig.

Bedømmelsen og en .pdf med et udvalg af forklarende kommentarer vil blive uploadet til Absalon inden for en uge.