

---

GIBT ES ROTATIONS -  
SYMMETRISCHE FISCHE?

---



Bachelor thesis

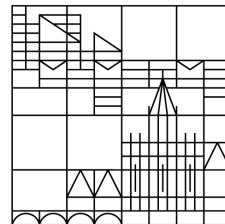
by  
Johannes Krotz

submitted on the

1.03.2018

to

Universität  
Konstanz



---

Department of Mathematics and Statistics  
evaluated by Professor Dr. O. Schnürer (University of Constance)

---

---

*Johannes Krotz*

*Gibt es rotationssymmetrische Fische?*

---

## Danksagung

Vor dem thematischen Einstieg in diese Bachelor-Arbeit möchte ich die Gelegenheit nutzen mich bei einigen Personen bedanken, die bei der Entstehung dieser Arbeit eine Rolle gespielt haben. Besonderer Dank gilt:

- **Oliver Schnürer**, der stets ein offenes Ohr und eine offene Bürotüre hatte und häufig einige Stunden seiner Zeit für mich verschwendete, wenn ich nicht mehr weiter wusste. Ohne seine ausgezeichnete Betreuung wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.
- **Dominique Hahn**, der sich beim Korrekturlesen auch durch für ihn unverständliche Hieroglyphen nicht davon abhalten ließ (hoffentlich) alle Fehler zu finden, die ich in der Rohfassung dieser Arbeit versteckt hatte.
- Allen anderen lieben Menschen, die durch anregende Unterhaltungen und hilfreiche Tipps zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.
- All meinen lieben Freunden, die durch ihre Gesellschaft verhindert haben, dass diese Arbeit nicht früher fertig wurde.

Gegenüber allen, die sich der weiteren Lektüre dieses Werks widmen möchten, bleibt mir nur noch die folgende Warnung auszusprechen:



*Gibt es rotationssymmetrische Fische?*

---

## Inhaltsverzeichnis

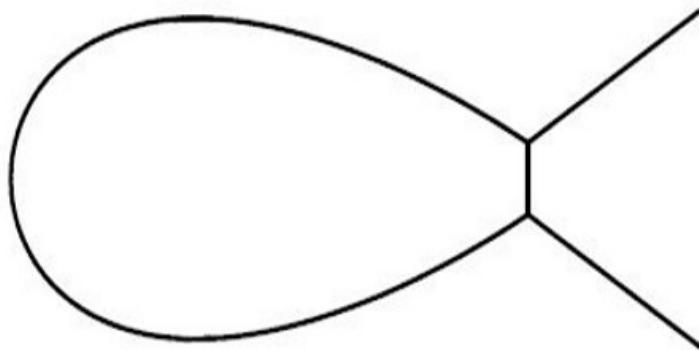
<b>1 Einleitung und Fazit</b>	<b>1</b>
<b>2 Notation und Definitionen</b>	<b>2</b>
2.1 Notation . . . . .	2
2.2 Geometrische Grundbegriffe . . . . .	2
2.3 Rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Fische . . . . .	3
<b>3 Herleitung und Äquivalenz der Gleichungen</b>	<b>5</b>
3.1 Herleitungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	5
3.2 Äquivalenz der Gleichungen $(\star)$ , $(\star\star)$ und $(\star\star\star)$ . . . . .	12
<b>4 Existenz homothetisch schrumpfender rot.sym. Fische</b>	<b>15</b>
<b>6 Abbildungsverzeichnis</b>	<b>29</b>
<b>7 Literaturverzeichnis</b>	<b>31</b>

*Gibt es rotationssymmetrische Fische?*

---

## 1 Einleitung und Fazit

In [1] gelang es Oliver Schnürer et al. unter anderem die Existenz eindimensionaler fischförmiger Netzwerke, die homothetisch schrumpfen und den Gaußkrümmungsfluss erfüllen, zu beweisen. Eine qualitative Darstellung eines solchen Netzwerks ist in Abbildung 1.1 zu sehen.



**Abbildung 1.1:** Qualitative Darstellung eines fischförmigen Netzwerks

Das Ziel dieser Arbeit war der Beweis von Theorem 1.1, welches dieses Ergebnis auf  $n$ -dimensionale rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Fische, die sich unter dem Gaußkrümmungsfluss entwickeln, erweitert. Während die Verallgemeinerung für beliebige  $n$  in dieser Arbeit nicht gelungen ist, so zeigen wir doch einen alternativen Beweis für  $n = 1$ . Ein Großteil der hierzu verwendeten Lemmata ist jedoch auch für größere  $n$  gültig, sodass die Existenz höherdimensionaler Fische eventuell in zukünftigen Arbeiten durch die Verallgemeinerung nur weniger Aussagen gezeigt werden könnte.

**Theorem 1.1.**

*Es gibt rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Fische, die den Gaußkrümmungsfluss erfüllen.*

*Beweis:* Für  $n = 1$  wurde die Behauptung in [1] gezeigt.

Unser Alternativbeweis erstreckt sich über die Kapitel 3 und 4.

Ein Beweis für  $n > 1$  ist nach wie vor ausstehend, wäre jedoch zum Beispiel durch die Verallgemeinerung der Aussagen 3.1ff. möglich.  $\square$

Damit sowohl wir als auch der Leser alle zum Beweis dieses Theorems notwendigen Werkzeuge zur Hand haben, geben wir in Kapitel 2 zunächst einen Überblick über die verwendeten Definitionen und unsere Notation. In diesem Abschnitt werden auch alle bisher benutzten, jedoch aufgrund besserer Lesbarkeit noch nicht rigoros erläuterten Begriffe, präzisiert.

In Kapitel 3 stellen wir fest, dass sich der Beweis von Theorem 1.1 auf den Beweis der Existenz einer Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung unter geeigneten Randbedingungen reduziert. Wir werden dort aus unterschiedlich parametrisierten Hyperflächen drei verschiedene gewöhnliche Differentialgleichungen herleiten und noch einmal explizit nachweisen, dass ihre Lösungen geometrisch identisch sind.

Als nächstes werden in Kapitel 4 besagte Gleichungen darauf untersucht, ob es Lösungen zu ihnen gibt, die die gefordeten Kriterien erfüllen.

Im Laufe von Kapitel 4 konnten einige Aussagen leider nur für den 1-dimensionalen Fall gezeigt

werden. Während numerische Berechnungen die Existenz von rotationssymmetrischen Fischen auch für höhere Dimensionen nahe legen, bleibt die Aussage also dennoch ungeklärt. Darin diese Fälle, durch Verallgemeinerung einiger Lemmata aus dieser Arbeit oder auch auf gänzlich anderem Wege, noch zu zeigen steckt also durchaus noch Potential für weiterführende Arbeiten.

## 2 Notation und Definitionen

*Dieser Abschnitt enthält die notwendigen geometrischen und mathematischen Grundbegriffe sowie die im weiteren Verlauf verwendete Notation und orientiert sich daher sehr stark an [3].*

### 2.1 Notation

**Bemerkung 2.1.** Es gelte stets  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Notation 2.2.** Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar. Dann schreiben wir

$$1. f_{x^i} = f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ist  $n = 1$ , so schreiben wir auch  $f'$ .

$$2. f_{x^i x^j} = f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$3. Df = (f_1, \dots, f_n) \text{ und } Dg = (g_1, \dots, g_n).$$

$$4. \dot{g} = \frac{dg}{dt}.$$

**Bemerkung 2.3.** (Einstinsche Summenkonvention)

Taucht ein lateinischer Index in einem Ausdruck einmal als oberer und einmal als unterer Index auf so summieren wir über diesen Index von 1 bis  $n$ . Liegt dieselbe Situation bei einem griechischen Index vor, wird von 1 bis  $n + 1$  summiert. Für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $A \in R^{n \times n+1}$  gilt also

$$x^i A_{i\alpha} y^\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{n+1} x^i A_{i\alpha} y^\alpha = x^T A y,$$

wobei links die Einstinsche Summenkonvention angewendet wird.

Die Einheitsmatrix wird hierbei stets durch das Kronecker-Delta ausgedrückt.

### 2.2 Geometrische Grundbegriffe

**Definition 2.4.** (Immersion & Einbettung)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt  $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$

1. **Immersion**, falls  $dX(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  für alle  $x \in \Omega$  injektiv ist.

2. **Einbettung**, falls  $X$  eine Immersion und  $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$  bezüglich der Spurtopologien ein Homöomorphismus ist.

**Definition 2.5.** (parametrisierte Hyperflächen)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$  eine Immersion. Dann heißt  $X$  eine parametrisierte oder immersierte ( $C^k$ )-**Hyperfläche**.

Wir identifizieren fortan eine Hyperfläche  $X$  mit ihrem Bild  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definition 2.6.** (Normale)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine immersierte Hyperfläche. Dann heißt eine stetige Funktion  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $|\nu(x)| = 1$  und  $\nu(x) \perp X_i(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $1 \leq i \leq n$  ein **Einheitsnormalenfeld** an  $X$ .  $\nu(x)$  heißt (**Einheits-**)**Normale** an  $X$  in  $x$ .

**Definition 2.7.** (Metrik)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X$  eine immersierte Hyperfläche. Dann heißt  $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  mit

$$g_{ij} = g_{ij}(x) := \langle X_i, X_j \rangle = X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta$$

**Metrik** von  $X$ . Ihre Inverse bezeichnen wir mit  $(g^{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

**Bemerkung 2.8.**  $g$  ist symmetrisch und positiv definit.

**Definition 2.9.** (Zweite Fundamentalform)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X$  eine immersierte  $C^2$ -Hyperfläche mit Normale  $\nu$ . Dann heißt die symmetrische quadratische Form  $A = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  definiert durch

$$h_{ij} = h_{ij}(x) := -\langle X_{,ij}, \nu \rangle$$

**zweite Fundamentalform** von  $X$ .

**Definition 2.10.** (Eigenwerte)

Seien  $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  und  $(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  symmetrische quadratische Formen.  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  heißt Eigenvektor von  $(a_{ij})$  bezüglich  $(b_{ij})$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn

$$a_{ij}\xi^j = \lambda b_{ij}\xi^j$$

für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt.

**Definition 2.11.** (Hauptkrümmungen)

Die Eigenwerte von  $A$  bezüglich  $g$  heißen **Hauptkrümmungen** und werden hier mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  bezeichnet.

**Definition 2.12.** (Gaußkrümmung)

Das Produkt der Hauptkrümmungen

$$K = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

heißt **Gaußkrümmung**.

**Definition 2.13.** (Gaußkrümmungsfluss)

Eine Familie  $(X(\cdot, t))_{t \in [0, T]}$ ,  $T > 0$ , von immersierten Hyperflächen  $X(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  erfüllt den **Gaußkrümmungsfluss**, wenn  $X$  auf  $\Omega \times [0, T]$  stetig ist und für alle  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$\dot{X} = -K\nu$$

gilt.

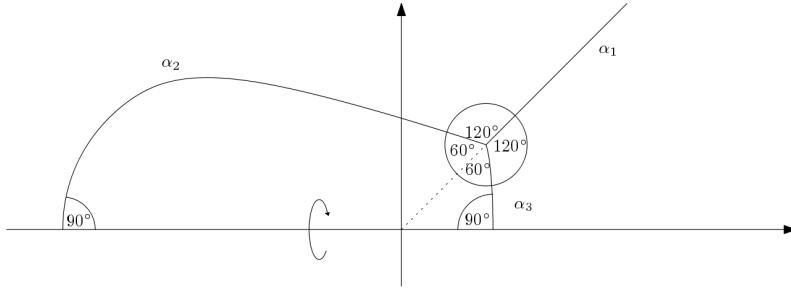
## 2.3 Rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Fische

**Definition 2.14.** (Homothetisch schrumpfend)

Sei  $T > t_0 \in \mathbb{R}$  und  $(X(\cdot, t))_{t \in [t_0, T]}$  eine Familie von immersierten Hyperflächen  $X(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Wir nennen  $X$  **homothetisch schrumpfend**, falls es eine differenzierbare Funktion  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $\mu(t_1, t_2) < 1$  für alle  $t_1 > t_2 \in [0, T]$  und

$$\{X(x, t_1) : x \in \Omega\} = \mu(t_1, t_2) \cdot \{X(x, t_2) : x \in \Omega\}$$

gibt.



**Abbildung 2.1:** Qualitative Darstellung eines rotationssymmetrischen Fisches

**Definition 2.15.** (Rotationssymmetrischer Fisch)

Es seien  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $X_1, X_2, X_3$  rotationssymmetrische immersierte Hyperflächen.  $e_1$  sei die Rotationsachse und  $E$  sei eine beliebige Halbebene, mit  $\delta E = e_1$ .

Wir nennen

$$F := \bigcup_{i=1}^3 \{X_i(x) : x \in \Omega_i\}$$

einen **rotationssymmetrischen Fisch**, falls es injektive Kurven  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, 1] \rightarrow E$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt  $\alpha_i([0, 1]) = X_i(\Omega_i) \cap E$ .
2.  $\alpha_1([0, 1]) = \{\lambda \cdot x : \lambda > 1\}$  für ein  $x \in E \setminus \{0\}$ .
3.  $\alpha_2(1), \alpha_3(1) \in \text{span}(e_1)$  und  $\alpha'_2(1) \perp e_1 \perp \alpha'_3(1)$ .
4. Für alle paarweise verschiedenen  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  gilt  

$$\alpha_i^{-1}(\alpha_i([0, 1]) \cap \alpha_j([0, 1])) = \alpha_i^{-1}(\alpha_i([0, 1]) \cap \alpha_j([0, 1]) \cap \alpha_k([0, 1])) = \{0\}.$$
5.  $\sum_{i=0}^3 \frac{\alpha'_i(0)}{|\alpha'_i(0)|} = 0$ .

Wir sagen eine Familie von rotationssymmetrischen Fischen  $(F_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $T > 0$ , erfüllt den Gaußkrümmungsfluss, wenn die zugehörigen Familien von Hyperflächen  $(X_i(\cdot, t))_{t \in [0, T]}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), den Gaußkrümmungsfluss erfüllen.

Ferner nennen wir  $F_t$  homothetisch schrumpfend, wenn  $X_i(\cdot, t)$  für  $i = 1, 2, 3$  homothetisch schrumpfend sind und die Funktion  $\mu(t_1, t_2)$  bei allen dreien auf  $[0, T]$  dieselbe ist.

**Bemerkung 2.16.** Eine anschaulichere Interpretation von Definition 2.15 lautet wie folgt:

1. Ein rotationssymmetrischer Fisch entsteht aus einem Netzwerk aus drei injektiven Kurven in einer Halbebene des  $\mathbb{R}^2$  durch Rotation um die Kante dieser Halbebene.
2. Eine dieser Kurven ist eine Halbgerade, die den Ursprung nicht schneidet, aber zu einer Ursprungsgeraden fortgesetzt werden kann.
3. Die anderen beiden Kurven enden auf der Rotationsachse und sind in diesem Punkt orthogonal zur Rotationsachse
4. Der einzige gemeinsame Punkt der Kurven ist ihr Anfang.
5. In diesem Tripelpunkt schneiden sich die Kurven paarweise in einem  $120^\circ$ -Winkel.

In Abbildung 2.1 ist beispielhaft ein Netzwerk von Kurven  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  dargestellt, die die Punkte 1. bis 5. erfüllen.

### 3 Herleitung und Äquivalenz der Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir aus der partiellen Differentialgleichung des Gaußschen Krümmungsflusses unter der Annahme es gäbe rotationssymmetrische und homothetisch schrumpfende Lösungen gewöhnliche Differentialgleichungen herleiten. Deren Lösungen, sofern sie existieren, erfüllen wiederum die besagten Annahmen, wodurch diese nachträglich gerechtfertigt werden.

Die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung ist offenbar abhängig von der Wahl der Parametrisierung der Lösungen des Gaußkrümmungsflusses. Da manche der Aussagen, die wir in nachfolgenden Kapiteln zu beweisen suchen in verschiedenen Parametrisierungen unterschiedlich schwer zu zeigen sind, werden wir hier die gewöhnlichen Differentialgleichungen für drei verschiedene Parametrisierungen herleiten.

Anschließend weisen wir nach, dass die drei resultierenden Gleichungen dieselbe Geometrie beschreiben und sich viele der Ergebnisse von einer der Gleichungen auf die jeweils anderen beiden übertragen lassen.

#### 3.1 Herleitungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

**Bemerkung 3.1.** (Graphische Parametrisierung entlang der Rotationsachse)

- Sei  $T > t_0 > 0$  und  $X : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Lösung der Differentialgleichung des Gaußkrümmungsflusses. Ohne Einschränkung gehe die Rotationsachse  $e^z$  durch den Ursprung. Die Koordinate entlang dieser Achse sei  $z \in \mathbb{R}$ .

Ferner seien  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $Y : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  eine lokale Parametrisierung der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre, derart, dass

$$X(z, \vartheta, t) = (V(z, t)Y(\vartheta), z)$$

eine mögliche Parametrisierung von  $X$  ist. Da  $X$  rotationssymmetrisch um die  $e^z$ -Achse ist, existieren geeignete  $V$  und  $Y$ . Eine Veranschaulichung dieser Parametrisierung findet sich in Abbildung 3.1.

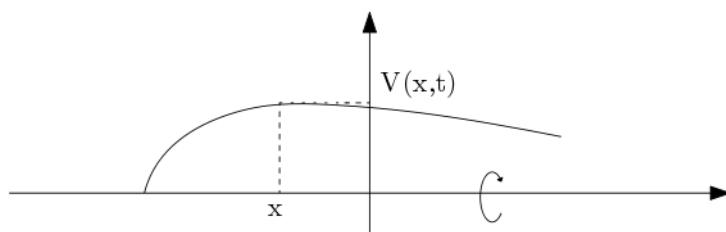


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der graphischen Parametrisierung entlang der Rotationsachse

- In der obigen Parametrisierung erhalten wir folgende Resultate für die ersten und zweiten Ableitungen von  $X$ : ( $i, j \in \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}\}$ )

$$X_z(z, \vartheta, t) = (V'(z, t)Y(\vartheta), 1)$$

$$X_i(z, \vartheta, t) = (V(z, t)Y_i(\vartheta), 0)$$

$$X_{ij}(z, \vartheta, t) = (V(z, t)Y_{ij}(\vartheta), 0)$$

$$X_{iz}(z, \vartheta, t) = (V'(z, t)Y_i(\vartheta), 0)$$

$$X_{zz}(z, \vartheta, t) = (V''(z, t)Y(\vartheta), 0)$$

$$\dot{X}(z, \vartheta, t) = (\dot{V}(z, t)Y(\vartheta), 0)$$

Hieraus lässt sich unmittelbar die Metrik  $g$  ablesen:

$$g = (\langle X_l, X_k \rangle)_{1 \leq k, l \leq n} = \begin{pmatrix} V^2(\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} & 0 \\ 0 & 1 + V'^2 \end{pmatrix},$$

wobei  $(\sigma_{ij}) = (\langle Y_i, Y_j \rangle)$  die Metrik der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre ist.

3. Durch scharfes Hinsehen findet man die Normale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+V'^2}}(Y, -V').$$

Nutzt man die Tatsache aus, dass auf der Einheitssphäre die erste und zweite Fundamentalform identisch sind und  $Y = \nu^{\mathbb{S}^{n-1}}$ , dass also

$$\sigma_{ij} = -\langle Y_{ij}, Y \rangle$$

gilt, sieht man leicht, dass auch

$$Y_{ij} = -\sigma_{ij}Y + \tau_{ij}^k Y_k$$

gilt, wobei der zweite Term im Tangentialraum der Sphäre liegt und somit orthogonal auf der Normalen steht.

Durch Einsetzen ergibt sich nun direkt die zweite Fundamentalform:

$$A = -(\langle X_{kl}, \nu \rangle)_{1 \leq k, l \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{V}{\sqrt{1+V'^2}}(\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} & 0 \\ 0 & \frac{-V''}{\sqrt{1+V'^2}} \end{pmatrix}.$$

4. Da  $\sigma$  als Metrik insbesondere invertierbar ist, können wir die Hauptkrümmungen, als Eigenwerte der zweiten Fundamentalform bezüglich der Metrik, ablesen und erhalten

$$\lambda_z = \frac{-V''}{\sqrt{1+V'^2}^3} \quad \lambda_\vartheta = \frac{1}{V\sqrt{1+V'^2}},$$

wobei  $\lambda_\vartheta$  mit Vielfachheit  $n-1$  auftritt.

Als Produkt dieser Hauptkrümmungen erhält man

$$K = -\frac{V''}{V^{n-1}} \sqrt{1+V'^2}^{-n-2}.$$

Da  $X$  nach Annahme den Gaußkrümmungsfluss erfüllt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \dot{X}, \nu \rangle &= -K \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{V}}{\sqrt{1+V'^2}} &= +\frac{V''}{V^{n-1}} \sqrt{1+V'^2}^{-n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

5. Aufgrund der Annahme, dass es sich bei  $X$  neben einer rotationssymmetrischen Lösung auch um eine homothetisch schrumpfende Lösung handeln soll, fordern wir

$$\mu(t) \{(V(\tilde{z}, t_0)Y(\vartheta), \tilde{z}) : \tilde{z} \in \mathbb{R}\} = \{(V(z, t)Y(\vartheta), z) : z \in \mathbb{R}\}$$

für  $\mu(t) \neq 0$  und ein festes  $\vartheta$  und schreiben  $v(\tilde{z}) = V(\tilde{z}, t_0)$ . Es folgt  $\mu(t)\tilde{z} = z$  und  $\mu(t)v(\tilde{z}) = V(z, t)$ . Woraus sich  $V(z, t) = \mu(t)v\left(\frac{z}{\mu(t)}\right)$  ergibt.

Für die Ableitungen von  $V$  folgt daher

$$\begin{aligned} V'(z, t) &= v'\left(\frac{z}{\mu(t)}\right) \\ V''(z, t) &= \frac{v''\left(\frac{z}{\mu(t)}\right)}{\mu(t)} \\ \dot{V}(z, t) &= \dot{\mu}(t) \left( v\left(\frac{z}{\mu(t)}\right) - v'\left(\frac{z}{\mu(t)}\right) \cdot \frac{z}{\mu(t)} \right). \end{aligned}$$

6. Einsetzen dieser Ableitungen in Gleichung (1) liefert

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(t)(v(x) - v'(x) \cdot x) &= \frac{v''(x)}{\mu(t)^n v(x)^{n-1}} \sqrt{1 + v'(x)^2}^{-(n+1)} \\ \Leftrightarrow \dot{\mu}(t)\mu(t)^n &= \frac{v''(x)\sqrt{1 + v'(x)^2}^{-(n+1)}}{v(x)^{n-1}(v(x) - v'(x)x)},\end{aligned}\quad (2)$$

wobei die Substitution  $x = \frac{z}{\mu(t)}$  vorgenommen wurde.

Wir haben implizit angenommen, dass  $v(x) - v'(x)x \neq 0$  ist. Wir werden später nur  $v$  betrachten, die dieser Annahme genügen oder Ursprungsgeraden sind. Rotiert man eine Ursprungsgerade um die Rotationsachse, so erhält man einen Kegel, eine Ebene oder die Rotationsachse selbst. Bei allen drei handelt es sich um einfache Lösungen des Gaußkrümmungsflusses.

Da in Gleichung (2) die linke Seite nur von  $t$  abhängt, während die rechte Seite allein von  $x$  abhängt, folgt, dass beide Seiten gleich einer Konstanten  $c$  sein müssen. Für  $c = 0$  folgt  $\mu \equiv 0$ . Für  $c \neq 0$  ist die allgemeine Lösung

$$\mu(t) = \pm \sqrt[n+1]{(n+1)c(t-t_0) - \mu(t_0)^{(n+1)}},$$

solange der Term unter der Wurzel nicht negativ ist.

Aufgrund der Rotationssymmetrie können wir uns auf die positive Lösung beschränken und stellen fest, dass  $c < 0$  gelten muss, damit  $X$  homothetisch schrumpft. Ferner bemerken wir, dass eine andere Wahl von  $|c|$  lediglich einer Zeitreskalierung entspricht, weshalb wir ohne Einschränkung  $c = -1$  wählen. Es kann auch nachgerechnet werden, dass im Raum reskalierte Versionen von  $v(x)$  Gleichung (2) bei anderer Wahl von  $c$  erfüllen. Bei Homothetisch schrumpfenden Lösungen ist dies nicht überraschend, da Translation in der Zeit und Raumreskalierungen bei homothetisch schrumpfenden Lösungen äquivalent sind.

7. Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung (2) mit  $c = -1$  und Auflösen nach  $v''(x)$  liefert

$$v''(x) = \sqrt{1 + v'(x)^2}^{-n+1} v(x)^{n-1} (v'(x) \cdot x - v(x)), \quad (\star)$$

und damit eine gewöhnliche Differentialgleichung aus deren Lösungen rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Lösungen der Gleichung des Gaußkrümmungsflusses konstruiert werden können.

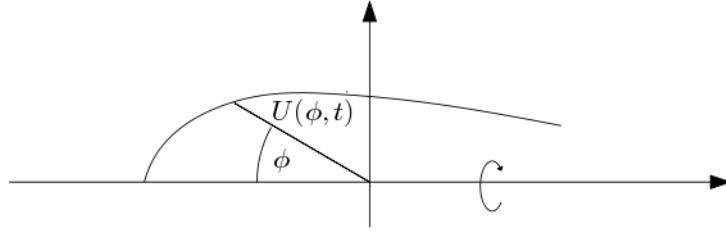
Die Gleichung  $(\star)$  ist zum Beweis einiger wichtiger Aussagen in Bezug auf Theorem 1.1 gut geeignet, weist aber beispielsweise den Nachteil auf, dass ihre Lösungen in manchen Punkten unendlich hohe Ableitungen haben müssten, um aus ihnen einen Fisch zu konstruieren. Daher wollen wir aus einer anderen Parametrisierung von  $X$  nun eine weitere gewöhnliche Differentialgleichung herleiten, die dieses Manko nicht aufweist.

**Bemerkung 3.2.** (Winkelparametrisierung)

1.  $X$  sei wie zuvor eine rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Hyperfläche, die den Gaußkrümmungsfluss erfüllt.  $E$  sei eine beliebige Ebene in der die Rotationsachse liegt. In dieser Ebene verwenden wir Polarkoordinaten, wobei  $\varphi$  der Winkel zur Rotationsachse sei. Aufgrund der Rotationssymmetrie lässt sich nun  $X$  als

$$X(\varphi, \vartheta, t) = U(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei  $Y$  wo im letzten Abschnitt eine lokale Parametrisierung der Sphäre ist und  $U : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine geeignete von  $\varphi$ -abhängige Funktion ist, die den Abstand von  $X$  zum Ursprung codiert. Als Anschauung dieser Wahl der Parametrisierung dient Abbildung 3.2.



**Abbildung 3.2:** Veranschaulichung der Winkelparametrisierung

2. In dieser Parametrisierung erhalten wir die nachfolgenden ersten und zweiten Ableitungen von  $X$ : ( $i, j \in \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ )

$$\begin{aligned} X_\varphi(\varphi, \vartheta, t) &= U'(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} + U(\varphi, t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi)Y(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \\ X_i(\varphi, \vartheta, t) &= U(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y_i(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X_{ij}(\varphi, \vartheta, t) &= U(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y_{ij}(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X_{i\varphi}(\varphi, \vartheta, t) &= U'(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y_i(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} + U(\varphi, t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi)Y_i(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X_{\varphi\varphi}(\varphi, \vartheta, t) &= (U''(\varphi, t) - U(\varphi, t)) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} + 2U'(\varphi, t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi)Y(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \\ \dot{X}(\varphi, \vartheta, t) &= \dot{U}(\varphi, t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anhand der ersten Ableitungen lässt sich leicht die Metrik  $g$  ablesen:

$$g = (\langle X_l, X_k \rangle)_{1 \leq l, k \leq n} = \begin{pmatrix} U^2 \sin^2(\varphi) (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} & 0 \\ 0 & U^2 + U'^2 \end{pmatrix}.$$

$\sigma$  ist hier wie zuvor die Metrik auf der Einheitssphäre.

3. Ebenso leicht überzeugt man sich davon, dass

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{U^2 + U'^2}} \left( U \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} - U' \begin{pmatrix} \cos(\varphi)Y \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \right)$$

die äußere Normale ist. Mit denselben Argumenten wie in Bemerkung 3.1 in Abschnitt 3 erhält man den nachfolgenden Ausdruck für die zweite Fundamentalform:

$$A = \frac{1}{\sqrt{U^2 + U'^2}} \left( (U^2 \sin^2(\varphi) - UU' \sin(\varphi) \cos(\varphi)) (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} \quad 0 \quad \begin{matrix} 0 \\ U^2 + 2U'^2 - UU'' \end{matrix} \right).$$

4. Die Hauptkrümmungen sind somit

$$\lambda_\varphi = \frac{U^2 + 2U'^2 - UU''}{\sqrt{U^2 + U'^2}^3} \quad \lambda_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{U^2 + U'^2}} \left( 1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{U'}{U} \right).$$

Die Vielfachheit von  $\lambda_\vartheta$  ist erneut  $n - 1$ , sodass die Gaußkrümmung die Gestalt

$$K = \left( 1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{U'}{U} \right)^{n-1} \frac{(U^2 + 2U'^2 - UU'')}{\sqrt{U^2 + U'^2}^{n+2}}$$

hat.

Die Gleichung des Gaußkrümmungsflusses reduziert sich beim Einsetzen der bisherigen Resultate zu

$$\begin{aligned} \langle \dot{X}, \nu \rangle &= -K \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{U}U}{\sqrt{U^2 + U'^2}} &= - \left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{U'}{U}\right)^{n-1} \frac{(U^2 + 2U'^2 - UU'')}{\sqrt{U^2 + U'^2}^{n+2}} \end{aligned} \quad (3)$$

5. Die Forderung, dass  $X$  homothetisch schrumpfend ist, lautet in der momentanen Parametrisierung

$$\mu(t) \{U(\tilde{\varphi}, t_0)(\sin(\tilde{\varphi})Y(\vartheta), \cos(\tilde{\varphi})) : \tilde{\varphi} \in [0, \pi]\} = \{U(\varphi, t)(\sin(\varphi)Y(\vartheta), \cos(\varphi)) : \varphi \in [0, \pi]\}.$$

Wir definieren  $u(\tilde{\varphi}) := U(\tilde{\varphi}, t_0)$  und schlussfolgern aus der Mengengleichheit, dass  $\varphi = \tilde{\varphi}$  und  $U(\varphi, t) = \mu(t)u(\varphi)$  gelten.

Damit sind die Ableitungen von  $U$ :

$$\begin{aligned} U'(\varphi, t) &= \mu(t)u'(\varphi) \\ U''(\varphi, t) &= \mu(t)u''(\varphi) \\ \dot{U}(\varphi, t) &= \dot{\mu}(t)u(\varphi). \end{aligned}$$

6. Setzt man diese Ableitungen in Gleichung (3) ein ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) \frac{u(\varphi)^2}{\sqrt{u(\varphi)^2 + u'(\varphi)^2}} &= \frac{-1}{\mu(t)^n} \left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u'(\varphi)}{u(\varphi)}\right)^{n-1} \frac{(u(\varphi)^2 + 2u'(\varphi)^2 - u(\varphi)u''(\varphi))}{\sqrt{u(\varphi)^2 + u'(\varphi)^2}^{n+2}} \\ \Leftrightarrow -\dot{\mu}(t)\mu(t)^n &= \left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u'(\varphi)}{u(\varphi)}\right)^{n-1} \frac{(u(\varphi)^2 + 2u'(\varphi)^2 - u(\varphi)u''(\varphi))}{u(\varphi)^2 \sqrt{u(\varphi)^2 + u'(\varphi)^2}^{n+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Auch hier sind die rechte und linke Seite von jeweils verschiedenen Variablen abhängig, woraus folgt, dass beide Seiten konstant sein müssen. Die Lösung von  $\dot{\mu}(t)\mu(t)^n = c$  ist aus dem vorigen Abschnitt bekannt. Ferner folgern wir analog, dass ohne Einschränkung  $c = -1$  gewählt werden kann.

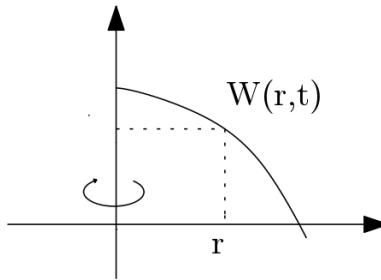
7. Durch Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung (4) und Auflösen nach  $u''(\varphi)$  bekommen wir folgende gewöhnliche Differentialgleichung für  $u$ :

$$u''(\varphi) = u(\varphi) + \frac{2u'(\varphi)^2}{u(\varphi)} - \frac{u(\varphi)\sqrt{u(\varphi)^2 + u'(\varphi)^2}^{n+1}}{\left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u'(\varphi)}{u(\varphi)}\right)^{n-1}}. \quad (\star\star)$$

Gleichung  $(\star\star)$  ist in ihrer Gestalt komplizierter als  $(\star)$ . Dafür lassen sich in dieser Parametrisierung die Kriterien, die wir von einem Fisch fordern besonders leicht ausdrücken. Die Bedingung, dass Fische senkrecht von der Rotationsachse durchstoßen werden reduziert sich beispielsweise zu  $u'(0) = 0$  und  $u'(\pi) = 0$ .

Des Weiteren lässt sich in dieser Darstellung der Schnittwinkel  $\vartheta(\varphi)$  von  $X$  mit einer Ursprungsgeraden, die die Rotationsachse im Winkel  $\varphi$  schneidet, besonders leicht ausdrücken, da

$$\begin{aligned} \left\langle X_\varphi, \begin{pmatrix} \sin(\varphi)Y \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\rangle &= |X_\varphi| \cos(\vartheta(\varphi)) \\ \Leftrightarrow \cos(\vartheta(\varphi)) &= \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + u^2}} \end{aligned} \quad (5)$$



**Abbildung 3.3:** Veranschaulichung der graphischen Parametrisierung senkrecht zur Rotationsachse

gilt.

Aufgrund der Singularität von  $\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$  in  $(\star\star)$  bei  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  erweisen sich jedoch Aussagen zur Existenz von Lösungen an diesen Stellen als schwierig, weshalb wir hierzu noch eine dritte gewöhnliche Differentialgleichung herleiten wollen.

**Bemerkung 3.3.** (Graphische Parametrisierung senkrecht zur Rotationsachse)

*Die gewöhnliche Differentialgleichung, die in diesem Abschnitt hergeleitet wird, wurde bereits zuvor in [4] hergeleitet.*

1. Die Herleitung in diesem Abschnitt verläuft exakt parallel zu der in 3.1. Wir wollen das Koordinatensystem bei der Parametrisierung jedoch um  $90^\circ$  drehen, suchen also senkrecht zur Rotationsachse  $r$  graphische homothetisch schrumpfende Lösungen der Gleichung des Gaußkrümmungsflusses.

Sei dazu  $X$  wie in den Abschnitten zuvor eine rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende Lösung des Gaußkrümmungsflusses,  $Y$  erneut eine lokale Parametrisierung der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre und  $W : \mathbb{R}_0^+ \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$X(r, \vartheta, t) = (W(r, t), rY(\vartheta))$$

gilt. Eine Veranschaulichung dieser Parametrisierung findet sich in Abbildung 3.3.

2. Nun nehmen die ersten und zweiten Ableitungen nach  $r$  bzw.  $i, j \in \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_2\}$  folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} X_r(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} W'(r, t) \\ Y(\vartheta) \end{pmatrix}, \\ X_i(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ rY_i(\vartheta) \end{pmatrix}, \\ X_{ij}(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ rY_{ij}(\vartheta) \end{pmatrix}, \\ X_{ir}(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ Y_i(\vartheta) \end{pmatrix}, \\ X_{rr}(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} W''(r, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{X}(r, \vartheta, t) &= \begin{pmatrix} \dot{W}(r, t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Metrik  $g$  ist somit

$$g = \begin{pmatrix} r^2 (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} & 0 \\ 0 & 1 + W'^2 \end{pmatrix}.$$

3. Man überprüft leicht, dass

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+W'^2}}(1, -W'Y)$$

die obere Normale ist und erhält damit analog zu Absatz 3 in Bemerkung 3.1, dass die zweite Fundamentalform folgendermaßen aussieht:

$$A = \frac{-1}{\sqrt{1+W'^2}} \begin{pmatrix} rW'(\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} & 0 \\ 0 & W'' \end{pmatrix}.$$

4. Aus  $g$  und  $A$  lassen sich nun die Hauptkrümmungen ablesen:

$$\lambda_r = \frac{-W''}{\sqrt{1+W'^2}^3} \quad \lambda_\theta = \frac{1}{\sqrt{1+W'^2}} \frac{-W'}{r}.$$

Da  $\lambda_\theta$  mit  $(n-1)$ -facher Vielfachheit vorkommt ist die Gaußkrümmung

$$K = \frac{-W''}{\sqrt{1+W'^2}^{n+2}} \left( \frac{-W'}{r} \right)^{n-1}.$$

Damit wird  $\langle \dot{X}, \nu \rangle = -K$  zu

$$\frac{\dot{W}}{\sqrt{1+W'^2}} = \frac{W''}{\sqrt{1+W'^2}^{n+2}} \left( \frac{-W'}{r} \right)^{n-1}. \quad (6)$$

5. Die Forderung an  $X$ , homothetisch schrumpfend zu sein, formulieren wir erneut als Mengengleichheit

$$\mu(t) \{(W(\tilde{r}, t_0), \tilde{r}Y(\vartheta)) : \tilde{r} \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(W(r, t), rY(\vartheta)) : r \in \mathbb{R}_0^+\}$$

und folgern, dass  $r = \mu(t)\tilde{r}$  und  $W(r, t) = \mu(t)W(\tilde{r}, t_0) =: \mu(t)w\left(\frac{r}{\mu(t)}\right)$ .

Mit dieser Definition von  $w$  nehmen die Ableitungen von  $W$  folgende Form an:

$$\begin{aligned} W'(r, t) &= w'\left(\frac{r}{\mu(t)}\right) \\ W''(r, t) &= \frac{w''\left(\frac{r}{\mu(t)}\right)}{\mu(t)} \\ \dot{W}(r, t) &= \dot{\mu}(t) \left( w\left(\frac{r}{\mu(t)}\right) - w'\left(\frac{r}{\mu(t)}\right) \frac{r}{\mu(t)} \right). \end{aligned}$$

6. Wir setzen diese in Gleichung (6) ein und erhalten nach der Substitution  $\rho = \frac{r}{\mu(t)}$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}(t)(w(\rho) - \rho w'(\rho))}{\sqrt{1+w'(\rho)^2}} &= \frac{w''(\rho)}{\mu(t)\sqrt{1+w'(\rho)^2}^{n+2}} \left( \frac{-w'(\rho)}{\rho\mu(t)} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow \dot{\mu}(t)\mu(t)^n &= \frac{w''(\rho)}{\sqrt{1+w'(\rho)^2}^{n+1}} \frac{\left( \frac{-w'(\rho)}{\rho} \right)^{n-1}}{w(\rho) - \rho w'(\rho)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus der notwendigen Konstanz beider Seiten erhalten wir dieselbe Lösung für  $\mu$  wie bereits in den beiden vorangegangenen Bemerkungen und argumentieren analog, dass somit auch die rechte Seite von Gleichung (7) gleich  $-1$  sein muss. Den Fall  $w(\varphi) - \rho w'(\varphi) = 0$  haben wir hier wieder implizit ausgeschlossen, da dieser Fall im Folgenden nur bei Ursprungsgeraden auftreten wird, deren Rotationskörper den Gaußkrümmungsfluss bereits trivial erfüllen.

7. Setzt man dies ein und löst nach  $w''$  auf erhalten wir wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$w''(r) = \sqrt{1 + w'(r)^2}^{n+1} \left( \frac{-r}{w'(r)} \right)^{n-1} (rw'(r) - w(r)). \quad (\star\star\star)$$

Mit der Gleichung  $(\star\star\star)$  hat sich Sebastian Kümpel in [4] auseinandergesetzt und unter anderem die Existenz und Regularität von Lösungen nahe  $r = 0$  bewiesen.

### 3.2 Äquivalenz der Gleichungen $(\star), (\star\star)$ und $(\star\star\star)$

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass Lösungen von  $(\star), (\star\star)$  und  $(\star\star\star)$  überall dort wo sie existieren geometrisch äquivalent sind, also beispielsweise in den Hauptkrümmungen übereinstimmen.

**Lemma 3.4.** Sei  $T > 0$  und  $X : \Omega \times [0, T)$  eine Lösung von  $\langle \dot{X}, \nu \rangle = -K$ . Sei  $\Psi : \hat{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \Omega$  eine  $C^{2,1}$ -Funktion so, dass  $\Psi(\cdot, t) : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  für alle  $t \in [0, T)$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus ist. Dann gilt für  $\hat{X}(x, t) := X((\Psi(x, t), t))$

$$\langle \dot{\hat{X}}, \hat{\nu} \rangle = -\hat{K}.$$

Mit  $\hat{\nu}, \hat{K}, \hat{g}, \hat{A}, \dots$  sind hier die zu  $\hat{X}$  gehörigen geometrischen Größen gemeint.

Es gilt ferner  $\hat{\nu}(x, t) = \nu(\Psi(x, t), t)$  und  $\hat{\lambda}_i(x, t) = \lambda_i(\Psi(x, t), t)$  für  $i = 1, \dots, n$ , was natürlich auch dieselbe Gleichheit für  $K$  und  $\hat{K}$  impliziert.

*Beweis:* Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= \frac{\partial}{\partial t} X + X_k \dot{\Psi}^k \\ \dot{\hat{X}}_i &= X_k \Psi_i^k \\ \dot{\hat{X}}_{ij} &= X_k \Psi_{ij}^k + X_{kl} \Psi_i^k \Psi_j^l. \end{aligned}$$

Da  $\nu$  überall normiert ist gilt dasselbe offenbar für  $\hat{\nu}$ . Ferner ist

$$\langle \hat{\nu}(x, t), \dot{\hat{X}}_i(x, t) \rangle = \langle \nu(\Psi(x, t), t), X_k(\Psi(x, t), t) \rangle \Psi_i^k(x, t) = 0.$$

Für die Metriken gilt

$$\hat{g}_{ij} = \hat{X}_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} \hat{X}_j^\beta = \Psi_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_l^\beta \Psi_j^l = \Psi_i^k g_{kl} \Psi_j^l.$$

Die zweite Fundamentalform transformiert sich analog:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij} &= -\hat{X}_{ij}^\alpha \delta_{\alpha\beta} \hat{\nu}^\beta = -X_k^\alpha \Psi_{ij}^\beta \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta - X_{,kl}^\alpha \Psi_i^k \Psi_j^l \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta \\ &= -\Psi_{ij}^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta - \Psi_i^k (X_{,kl}^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta) \Psi_j^l = 0 + \Psi_i^k h_{kl} \Psi_j^l. \end{aligned}$$

Da  $\Psi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $(\Psi_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$  eine invertierbare Matrix. Aus dem Transformationsverhalten der Metrik und der zweiten Fundamentalform folgt hiermit, dass die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform bezüglich der Metrik übereinstimmen. Damit sind die Behaupteten Eigenschaften von  $\nu, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  und  $K$  gezeigt.

Zuletzt gilt noch

$$\langle \dot{\hat{X}}, \hat{\nu} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} X^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta + \dot{\Psi}^i X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta = -K + 0 = -\hat{K}.$$

□

Die aus Lösungen von  $(\star)$ ,  $(\star\star)$  und  $(\star\star\star)$  konstruierten Hyperflächen unterscheiden sich lediglich in ihrer Parametrisierung, sodass es uns Lemma 3.4 erlauben wird einige der Aussagen von den Gleichungen aufeinander zu übertragen.

**Lemma 3.5.** *Sei  $h > 0$ . Existiert eine Lösung  $v$  von  $(\star)$  mit  $-hv'(-h) - v(-h) < 0$  auf  $-h \leq x < x_{max}$  und gilt dort  $v > 0$ , so ist  $v$  auf dem gesamten Existenzintervall strikt konkav.*

*Beweis:* Wegen der Differentialgleichung gilt  $v''(-h) < 0$ . Angenommen, es existiert ein  $x_0 \in (-h, x_{max})$  mit  $v''(x_0) = 0$ . Dann folgt, da  $v > 0$ , dass  $v'(x_0)x_0 - v(x_0) = 0$ . In  $x_0$  stimmen also die Ableitung von  $v$  und die der Ursprungsgeraden  $g$  durch  $(x_0, v(x_0))$  überein.  $g$  ist jedoch selbst eine Lösung von  $(\star)$ , sodass aus der eindeutigen Lösbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen  $g = v$  folgt. Damit folgt  $-v'(-h)h - v(-h) = 0$ . Ein Widerspruch.  $\square$

**Lemma 3.6.** *Sei  $I := (a, b) \subseteq \mathbb{R}_0^+$  und  $w$  eine Lösung von  $(\star\star\star)$  auf  $I$  mit  $w'(a)a - w(a) < 0$ . Dann gilt  $w'(x)x - w(x) < 0$  für alle  $x \in I$  und  $w$  ist streng konkav.*

*Beweis:* Mit Hilfe der Differentialgleichung  $(\star\star\star)$  folgt der zweite Teil der Behauptung direkt aus dem ersten. Dieser erste Teil folgt genauso wie die Aussage des vorangegangenen Lemma aus der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.  $\square$

**Lemma 3.7.** *1. Sei  $v$  eine Lösung von  $(\star)$  auf einem Existenzintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $v'(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ , dann ist  $w := -v^{-1}$   $(\star\star\star)$ .*

*2. Sei  $w$  eine Lösung von  $(\star\star\star)$  auf einem Existenzintervall  $I \subseteq \mathbb{R}_0^+$  mit  $w'(x) < 0$  für alle  $x \in I$ , dann ist  $v := (-w)^{-1}$  eine Lösung von  $(\star)$ .*

Mit  $(\cdot)^{-1}$  ist hier stets die Umkehrfunktion gemeint.

*Beweis:* Ursprungsgeraden lösen sowohl  $(\star)$  als auch  $(\star\star\star)$ . Sei daher  $v$  keine Ursprungsgerade. Nach Lemma 3.5 ist daher  $v'' \neq 0$  in  $I$ . Da  $v$  graphisch ist, folgt  $w' < 0$ . Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gilt:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{-1}{v'} &\Leftrightarrow v' &= \frac{-1}{w'} \\ w'' &= \frac{v''}{v'^3} &\Leftrightarrow v'' &= \frac{w''}{(-w')^3} \end{aligned}$$

Einsetzen in  $(\star)$  liefert

$$\begin{aligned} v'' &= \sqrt{1 + v'^2}^{n+1} v^{n-1} (v'x - v) \\ \underset{x=-w, v=r}{\Leftrightarrow} w'' \left( \frac{-1}{w'} \right)^3 &= \sqrt{1 + \frac{1}{w'^2}}^{n+1} r^{n-1} \left( \frac{-1}{w'} (-w) - r \right) \\ \Leftrightarrow w'' &= \sqrt{1 + w'^2}^{n+1} \left( \frac{r}{|w'|} \right)^{n-1} (w'r - w) \end{aligned}$$

Da  $w' < 0$  ist, ist die letzte Zeile gerade  $(\star\star\star)$ .

Die andere Richtung funktioniert unter Anwendung von Lemma 3.6 durch Umkehrung der obigen Rechenschritte.  $\square$

**Lemma 3.8.** *Sei  $v(x(\varphi)) := u(\varphi) \sin(\varphi)$  und  $x(\varphi) = u(\varphi) \cos(\varphi)$  so, dass  $v'x - v \neq 0 \Leftrightarrow u' \neq \pm\infty$  und  $v' \neq \pm\infty \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u'}{u}\right) = 0$ . Dann gilt*

$$v \text{ löst } (\star) \Leftrightarrow u \text{ löst } (\star\star).$$

*Beweis:* Wir rechnen die Behauptung nach. Zunächst gelten

$$\begin{aligned}x_\varphi &= u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi), \\v_\varphi &= u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi) = v_x x_\varphi, \\x_{\varphi\varphi} &= u_{\varphi\varphi} \cos(\varphi) - 2u_\varphi \sin(\varphi) - u \cos(\varphi), \\v_{\varphi\varphi} &= u_{\varphi\varphi} \sin(\varphi) + 2u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Es folgen

$$v_x = \frac{u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi)}{x_\varphi} = \frac{u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi)}{u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi)} \quad (8)$$

und

$$\begin{aligned}v_{xx} x_\varphi^2 &= v_{\varphi\varphi} - v_x x_{\varphi\varphi} \\&= (u_{\varphi\varphi} \sin(\varphi) + 2u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi)) \\&\quad - \frac{u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi)}{u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi)} (u_{\varphi\varphi} \cos(\varphi) - 2u_\varphi \sin(\varphi) - u \cos(\varphi)) \\&= \frac{1}{x_\varphi} [(u_{\varphi\varphi} \sin(\varphi) + 2u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi))(u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi)) \\&\quad - (u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi))(u_{\varphi\varphi} \cos(\varphi) - 2u_\varphi \sin(\varphi) - u \cos(\varphi))] \\&= \frac{1}{x_\varphi} [-u_{\varphi\varphi} u + u^2 + 2u_\varphi^2].\end{aligned}$$

Damit erhalten wir also

$$v_{xx} x_\varphi^3 = -u_{\varphi\varphi} u + u^2 + 2u_\varphi^2.$$

Als nächstes rechnen wir den Term  $\sqrt{1+v'^2}v$  in eine praktischere Form um:

$$\begin{aligned}v^2(1+v'^2) &= u^2 \sin(\varphi)^2 + u^2 \sin(\varphi)^2 \frac{u_\varphi^2 \sin(\varphi)^2 + 2uu_\varphi \cos(\varphi) \sin(\varphi) + u^2 \cos(\varphi)^2}{u_\varphi^2 \cos(\varphi)^2 - 2uu_\varphi \cos(\varphi) \sin(\varphi) + u^2 \sin(\varphi)^2} \\&= \frac{u^2 \sin(\varphi)^2 (u_\varphi^2 \cos(\varphi)^2 + u^2 \sin(\varphi)^2 + u_\varphi^2 \sin(\varphi)^2 + u^2 \cos(\varphi)^2)}{u_\varphi^2 \cos(\varphi)^2 - 2uu_\varphi \cos(\varphi) \sin(\varphi) + u^2 \sin(\varphi)^2} \\&= \frac{u^2 \sin(\varphi)^2 (u^2 + u_\varphi^2)}{u^2 \sin(\varphi)^2 (1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u_\varphi}{u})^2} = \left( \frac{\sqrt{u^2 + u_\varphi^2}}{1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u_\varphi}{u}} \right)^2.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch

$$\begin{aligned}x_\varphi^2(1+v_x^2) &= (u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi))^2 + (u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi))^2 \\&= u^2 + u_\varphi^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(v_x x - v)x_\varphi &= (u_\varphi \sin(\varphi) + u \cos(\varphi))u \cos(\varphi) - (u_\varphi \cos(\varphi) - u \sin(\varphi))u \sin(\varphi) \\&= u^2.\end{aligned}$$

Setzen wir alles in  $(\star)$  ein ergibt sich die Behauptung:

$$\begin{aligned}
 (\star) &\Leftrightarrow v_{xx} = \sqrt{1 + v_x^2}^{n+1} v^{n-1} (v_x x - v) \\
 &\Leftrightarrow -u_{\varphi\varphi} u + u^2 + 2u_\varphi^2 = \underbrace{\left(\sqrt{1 + v_x^2} v\right)^{n-1}}_{= \frac{\sqrt{u^2 + u_\varphi^2}}{1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u_\varphi}{u}}} \underbrace{x_\varphi^2 (1 + v_x^2)}_{= u_\varphi^2 + u^2} \underbrace{(v_x x - v) x_\varphi}_{= u^2} \\
 &= \frac{\sqrt{u^2 + u_\varphi^2}}{1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u_\varphi}{u}} \\
 &\Leftrightarrow u_{\varphi\varphi} = u + \frac{2u_\varphi^2}{u} - \frac{u \sqrt{u^2 + u_\varphi^2}^{n+1}}{\left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{u_\varphi}{u}\right)^{n-1}} \Leftrightarrow (\star\star).
 \end{aligned}$$

□

## 4 Existenz homothetisch schrumpfender rot.sym. Fische

**Lemma 4.1.** Sei  $h > 0$ . Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  und eine Lösung  $w$  von  $(\star\star\star)$ , die auf  $[0, \varepsilon]$  existiert und  $w(0) = h$ ,  $w'(0) = 0$  und  $w'(x) < 0$  für alle  $x \in (0, \varepsilon)$  erfüllt. Ferner sind die Hauptkrümmungen von der aus  $w$  konstruierbaren Hyperfläche  $X$  strikt positiv.

*Beweis:* Diese Aussage wird von Sebastian Kümpel in [4] gezeigt. □

Nach Lemma 3.4 sind somit auch die Hauptkrümmungen von den zu entsprechenden Lösungen von  $(\star)$  und  $(\star\star)$  gehörigen Flächen im Punkt  $(\varepsilon, w(\varepsilon))$  streng positiv. Da  $w'(\varepsilon) < 0$  gilt für eine korrespondierende Lösung  $v$  von  $(\star)$   $v'(w(\varepsilon)) \neq \infty$ . Damit sind die Lösungen in diesem Punkt für  $(\star)$  und  $(\star\star)$  wohldefiniert und beide in einer Umgebung stetig. Nach Picard-Lindelöf existieren also Lösungen  $v$  und  $u$  von  $(\star)$  und  $(\star\star)$  in einer Umgebung von besagtem Punkt. Wir setzen diese durch  $w$  bis zur Rotationsachse fort.

**Lemma 4.2.** Es sei  $h > 0$  und  $v$  eine Lösung von  $(\star\star)$  mit  $v(-h) > 0$ ,  $v'(-h) < \infty$  und  $-hv'(-h) - v(-h) < 0$ . Dann existiert  $v$  auf  $[-h, \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$  und es gilt dort  $v > 0$ .

*Beweis:* Sei  $I := [-h, x_{max}]$  das maximale Intervall auf dem  $v$  existiert und positiv ist. Dann folgt aus Lemma 3.5, dass  $v$  dort streng konkav ist und daher sowohl  $v'(x) < v'(-h) < \infty$  und  $v(x) < v(-h) + v'(-h)(h+x) < \infty$  für alle  $x \in I$  gelten. Falls  $v' \geq 0$  gilt, sind wir fertig. Daher gelte nun ohne Einschränkung  $v'(-h) < 0$  und damit auch  $v' < 0$ . Ferner gilt, dass die Ungleichung  $v'(x)x - v(x) < 0$  auf ganz  $I$  ihre Gültigkeit behält, da es sonst ein  $x \in I$  gäbe, in dem Gleichheit gilt. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, wäre  $v$  daher eine Ursprungsgerade. Ein Widerspruch.

Aus der Ungleichung folgt nun aber  $v'(x) > -\infty$  für alle  $x < 0$ .

Sei  $f(x) := v(-h) - \frac{v(-h)}{h}(h+x)$ . Dann gilt  $f(-h) = v(-h)$  und wegen  $v'(x)x - v(x) < 0$  in  $I$  außerdem  $f'(-h) < v'(-h)$ . Also insbesondere  $f \neq v$  auf einer Umgebung von  $-h$ .

Angenommen es gibt ein  $x_0 \in (-h, 0) \cap I$  mit  $v(x_0) = f(x_0)$ . Ohne Einschränkung sei dieses  $x_0$  minimal mit dieser Eigenschaft. Dann muss  $v'(x_0) \leq f'(x_0)$  gelten. Wir erhalten also

$$v'(x_0)x_0 - v(x_0) \geq f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

Daher gibt es ein  $x_1 \in (-h, x_0)$  mit  $v'(x_1)x_1 - v(x_1) = 0$ . Erneut ein Widerspruch.

Es gilt also  $x_{max} \geq 0$ . Falls  $v(0) = 0$  ist, so folgt aus  $(\star)$  und der Eindeutigkeit von Lösungen, dass  $v$  eine Ursprungsgerade ist. Falls  $|v'(0)| = \infty$  gilt, so betrachten wir die korrespondierende Lösung  $w$  von  $\star\star\star$ , für die dann  $w'(v(0)) = 0$  gilt. Ein Blick in  $(\star\star\star)$  zeigt, dass auch hier mit Hilfe der Eindeutigkeit von Lösungen folgt, dass  $w$  eine Ursprungsgerade ist. Beides steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

**Bemerkung 4.3.** Zusammen mit Lemma 4.1 und 3.4 folgt hieraus auch die Existenz von Lösungen von  $(\star\star)$  auf  $[0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

**Lemma 4.4.** Sei  $h > 1$  und  $w$  eine Lösung von  $(\star\star\star)$  mit  $w(0) = h$  und  $w'(0) = 0$ . Dann ist  $w$  in einer Umgebung der Rotationsachse im Inneren der Einheitssphäre, die lokal als  $g(r) = \sqrt{1 - r^2} + h - 1$  dargestellt werden kann.

*Beweis:* Nach Lemma 4.1 existiert der Grenzwert  $A := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r}{w'(r)}$  und ist positiv. Mit dem Satz von l'Hospital folgt durch Einsetzen in  $(\star\star\star)$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow 0} -w''(r) = \frac{1}{A^{n-1} w(0)} \\ \Leftrightarrow -w''(0) &= \sqrt[n]{\frac{1}{w(0)}} > 1. \end{aligned}$$

Da  $g(0) = h = w(0)$  und  $g'(0) = \frac{-0}{g(0)} = 0 = w'(0)$  gelten, aber  $g''(0) = \frac{-1}{g(0)^3} = -1$  ist, gilt  $g''(0) > w''(0)$ . Aufgrund der Stetigkeit gilt dies weiterhin auf einer Umgebung  $U$  der 0. Zweimaliges Anwenden des Vergleichsprinzips für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert daher für  $w(r) < g(r)$  für alle  $r \in U$   $\square$

**Lemma 4.5.** Sei  $h > 1$  und  $u$  eine Lösung von  $(\star\star)$  mit  $u(0) = h$  und  $u'(0) = 0$ . Ferner sei  $\varphi_0$  minimal mit  $u(\varphi_0) = 1$ . Dann ist  $u'(x) < 0$  für alle  $x \in (0, \varphi_0]$ .

*Beweis:* Nach Lemma 4.4 gilt  $u''(0) < 0$  und damit  $u' < 0$  auf  $(0, \varepsilon)$  für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ .

Angenommen es gibt nun ein  $\varphi_0$  mit  $u'(\varphi_0) = 0$ . Dann muss  $u''(\varphi_0) \geq 0$  gelten. Mit  $(\star\star)$  gilt weiter

$$u(\varphi_0) - u(\varphi_0)^{n+3} \geq 0,$$

woraus  $u(\varphi_0) \leq 1$  folgt. Gälte zusätzlich  $u''(\varphi_0) = 0$ , so wäre auch  $u(\varphi_0) = 1$ . In diesem Fall würde  $u$  in  $\varphi_0$  sowohl in der nullten als auch in der ersten Ableitung mit der Einheitssphäre um die Null übereinstimmen. Da diese Sphäre, wie man leicht prüft, ebenfalls eine Lösung von  $(\star\star)$  ist, wäre  $u$  aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen mit dieser Sphäre identisch. Dies widerspräche  $u(0) = h > 1$ . Damit sind beide vorangegangenen Ungleichungen strikt und die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 4.6.** In den nachfolgenden Lemmata wird sich die folgenden Aussage einige Male finden:

Sei  $v$  eine Lösung von  $(\star)$  mit  $v(-h) = 0$  und  $v'(-h) = \infty$ .

Diese etwas laxe Formulierung ist wie folgt zu verstehen:

$v$  löst  $(\star)$  auf  $(-h, x_{max})$ , wobei  $x_{max}$  von der jeweiligen Situation abhängen wird, und es gibt eine Lösung  $w$  von  $(\star\star\star)$  mit  $w(0) = h$  und  $w'(0)$ , sodass  $\overline{\text{graph}(v)}$  und  $R_{90^\circ}(\overline{\text{graph}(w)})$  in einer Umgebung des Punktes  $(-h, 0)$  identisch sind.  $R_{90^\circ}$  bewirke hier eine Rotation im Gegenuhrzeigersinn um  $90^\circ$  um den Koordinatenursprung.

**Lemma 4.7.** Sei  $h \geq 1$  und sei  $v$  eine Lösung von  $(\star)$  mit  $v(-h) = 0$  und  $v'(-h) = \infty$ . Ferner sei  $v_{max} := \max_{t \leq 0} v(t)$  der Höchstwert, den  $v$  annimmt bevor  $x = 0$ . Dann gilt  $\lim_{h \rightarrow \infty} v_{max} = 0$ .

*Beweis:* Es sei  $V(x, t)$  die Lösung von Gleichung (1) mit  $V(x, t_0) = v(x)$ .  $X(x, \vartheta, t)$  sei die aus  $V$  konstruierte homothetisch schrumpfende rotationssymmetrische Lösung des Gaußkrümmungsflusses und  $\text{Vol}(X)$ , das durch  $X$  zwischen  $x = -h(t)$  und  $x = 0$  eingeschlossene Volumen.  $-h(t) \leq 0$  ist hier der linke Schnittpunkt von  $X$  mit der Rotationsachse. Nach Lemma 4.2 ist dies der einzige

Schnittpunkt kleiner Null.

Es gilt

$$|Vol| = \int_{Vol} dx = \omega_n \int_{-h(t)}^0 V(x, t)^n dx.$$

Für die Zeitentwicklung von  $|Vol|$  ergibt sich daher

$$\frac{d}{dt} Vol(X) = \omega_n \left( V(0, t)^n \dot{0} + V(-h(t), t)^n h(t) + \int_{-h(t)}^0 n \dot{V} V^{n-1} dx \right)$$

Da  $-h(t)$  der Schnittpunkt mit der Rotationsachse ist und  $\dot{0} = 0$ , sind die ersten beiden Terme Null. Für  $c \in \mathbb{R}$  sei  $y_c(t) \leq 0$  maximal mit  $V'(y_c(t), t) = c$  und  $y_c(t) = 0$ , falls kein  $x \leq 0$  die Bedingung erfüllt. Aufgrund der Konkavität von  $v$  sind diese Punkte wohldefiniert.

Wir rechnen mit dem dritten Term weiter und erhalten nach Einsetzen von Gleichung (1)

$$\dot{\nu} = \omega_n n \left( \int_{-h(t)}^{y_{-1}(t)} \frac{V''}{\sqrt{1+V'^2}^{n+1}} dx + \int_{y_1(t)}^{y_{-1}(t)} \frac{V''}{\sqrt{1+V'^2}^{n+1}} dx + \int_{y_{-1}(t)}^0 \frac{V''}{\sqrt{1+V'^2}^{n+1}} dx \right).$$

Da  $X$  homothetisch schrumpfend ist, gilt  $\frac{d}{dt} Vol(X) < 0$ . Ferner gilt  $\frac{V''}{\sqrt{1+V'^2}^{n+1}} \geq \frac{V''}{|V'|^{n+1}}$  und  $\frac{V''}{\sqrt{1+V'^2}^{n+1}} \geq V''$ .

Es folgt

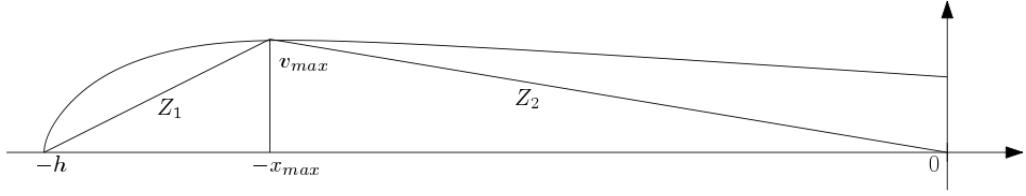
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Vol(X) &\geq -\omega_n n \left| \int_{-h(t)}^{y_1(t)} \frac{V''}{|V'|^{n+1}} dx \right| + \left| \int_{y_1(t)}^{y_{-1}(t)} V'' dx \right| + \left| \int_{y_{-1}(t)}^0 \frac{V''}{|V'|^{n+1}} dx \right| \\ &\geq -\omega_n n \left| \left[ \frac{V'^{-n}}{n} \right]_{-h(t)}^{y_1(t)} \right| - \omega_n n \left| [V']_{y_1}^{y_{-1}} \right| - \omega_n n \left| \left[ \frac{V'^{-n}}{n} \right]_{y_{-1}}^0 \right| \\ &\geq -\omega_n - 2n\omega_n - \omega_n \geq -2\omega_n(n+1). \end{aligned}$$

Wirft man einen Blick auf die Zeitentwicklung von  $X$ , die maßgeblich durch das in der Herleitung von  $(*)$  definierte  $\mu$  bestimmt wird, stellt man fest, dass es einen Zeitpunkt  $t_{fin} < \infty$  gibt bei dem  $\nu(t_{fin}) = 0$  gilt.

Da  $v$  beschränkt ist, ist auch  $t_0 - t_{fin} < \infty$  und es folgt

$$Vol(X) \leq Vol(X) \Big|_{t=t_0} \leq 2\omega_n(n+1)(t_0 - t_{fin}) < \infty.$$

Sei  $-x_{max} \leq 0$  der eindeutige Punkt, in dem  $v$  seinen Maximalwert  $v_{max}$  links von  $x = 0$  annimmt.  $Z_1$  sei der  $(n+1)$ -dimensionale Kegel der Länge  $h - x_{max}$  und Radius  $v_{max}$ .  $Z_2$  sei der  $(n+1)$ -dimensionale Kegel der Länge  $x_{max}$  und Radius  $v_{max}$ . Aufgrund der Konkavität von  $v$  passen beide Zylinder in  $Vol(x) \Big|_{t=t_0}$ . Eine Veranschaulichung, wie diese beiden Zylinder in  $Vol(X)$  platziert sind, ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Das Gesamtvolumen beider Zylinder



**Abbildung 4.1:** Qualitative Darstellung der Einbettung der Zylinder  $Z_{1/2}$  in das Volumen  $\nu$

$V_Z = \frac{\omega_n}{n} v_{max}^n (h - x_{max}) + \frac{\omega_n}{n} v_{max}^n x_{max}$  erfüllt also

$$\begin{aligned} V_Z &= \frac{\omega_n}{n} v_{max}^n h \leq 2\omega_n(n+1)(t_{max} - t_0) \\ \Leftrightarrow v_{max} &\leq \sqrt[n]{\frac{2n(n+1)}{h}(t_{max} - t_0)} \leq \frac{4}{\sqrt[n]{h}} \sqrt[n]{(t_{max} - t_0)}. \end{aligned}$$

$t_{max}$  sei hier die Zeit, zu der sich  $Vol$  zu einem Punkt zusammengezogen hat. Das letzte  $\leq$ -Zeichen folgt hier aufgrund der Tatsache, dass  $f_n = \sqrt[n]{\frac{2n(n+1)}{h}}$  eine monoton in  $n$  fallende Folge ist und für  $f_1 = \frac{4}{\sqrt[4]{h}}$  gilt. Der Beweis der Monotonie dieser Folge ist nicht ganz trivial und bedarf noch einer kleinen Überlegung, auf deren Ausführung wir an dieser Stelle jedoch verzichten möchten.  $\square$

**Lemma 4.8.** Sei  $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+3}10^n} < 1$ ,  $\varphi \in (120^\circ, 150^\circ)$  und  $g_\varphi$  die Ursprungsgerade, die die Rotationsachse im Winkel  $\varphi$  schneidet. Dann existiert ein  $h > 1$  und ein  $v$ , welches  $g_\varphi$  in einem Winkel kleiner als  $60^\circ$  schneidet. Dieses  $v$  löst  $(\star)$  auf  $[-h, \varepsilon]$  und erfüllt  $v(-h) = 0$  und  $v'(-h) = \infty$ .

*Beweis:* Sei  $v$  eine Lösung von  $\star$  mit  $v(-h) = 0$  und  $v'(-h) = \infty$ .  $h$  lassen wir zunächst beliebig. Nach Lemma 4.7 gilt  $v(-\varepsilon) \leq \frac{4}{\sqrt[n]{h}}$ . Angenommen  $v'(-\varepsilon) \geq 0$ . Dann folgt aufgrund der Konkavität von  $v$  für hinreichend großes  $h$ , dass  $v'(-\varepsilon) \leq v'(-h+1) \leq \frac{4}{\sqrt[n]{h}} \cdot 1$ , wobei die zweite Ungleichung gelten muss, da  $v$  sonst seinen Maximalwert überschreiten würde.  
Angenommen  $v'(-\varepsilon) < 0$ . Dann folgt wegen  $v'x - v < 0$ , dass  $|v'(-\varepsilon)| \leq \frac{4}{\sqrt[n]{h}\varepsilon}$  gelten muss.  
Daher existiert zu  $\delta \ll 0.1$  ein  $h > 1$  so, dass  $v(-\varepsilon) < \delta$  und  $|v'(-\varepsilon)| < \delta$  gelten.  
Wir nehmen an, dass  $v(x), |v'(x)| \leq 10\delta$  für alle  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Dann gilt

$$|v''(x)| \leq \sqrt{1 + 100\delta^2}^{n+1} (10\delta)^{n-1} (10\varepsilon\delta + 10\delta) \leq 2^{n+2} 10^n \delta^n.$$

Woraus wir schließen, dass

$$|v'(\varepsilon)| \leq \delta + 2^{n+2} 10^n \delta^n (2\varepsilon) \leq 2\delta$$

sein muss. Folglich wächst auch  $v(\varepsilon)$  nicht über  $10\delta$ , was die entsprechende Annahme rechtfertigt. Für hinreichend große  $h$  ist  $v$  in der Umgebung von  $x = 0$  also beinahe eine Ursprungsgerade mit Steigung 0. Für  $\delta \ll \varepsilon$  gilt dies insbesondere bis zum Schnittpunkt mit  $g_\varphi$ . Folglich schneidet sie alle  $g_\varphi$  in einem Winkel spitzer als  $60^\circ$ .

Der letzte Argumentationsschritt wird in Abbildung 4.2 nochmals verdeutlicht.  $\square$

**Korollar 4.9.** Sei  $\varphi_1 \in (120^\circ, 121^\circ)$  und  $h_1 > 1$  und  $g_\varphi$  wie eben. Dann existieren ein  $h_2 > h_1$ ,  $\varphi_2 \in (119^\circ, 121^\circ)$  und eine Lösung  $v$  von  $\star$  mit  $v(-h_2) = 0$  und  $v'(-h_2) = \infty$ , die  $g_{\varphi_2}$  im  $60^\circ$ -Winkel schneidet.

Ferner gilt, der Abstand des Schnittpunkts von  $v$  und  $g_{\varphi_2}$  zum Ursprung ist kleiner als 0,5.

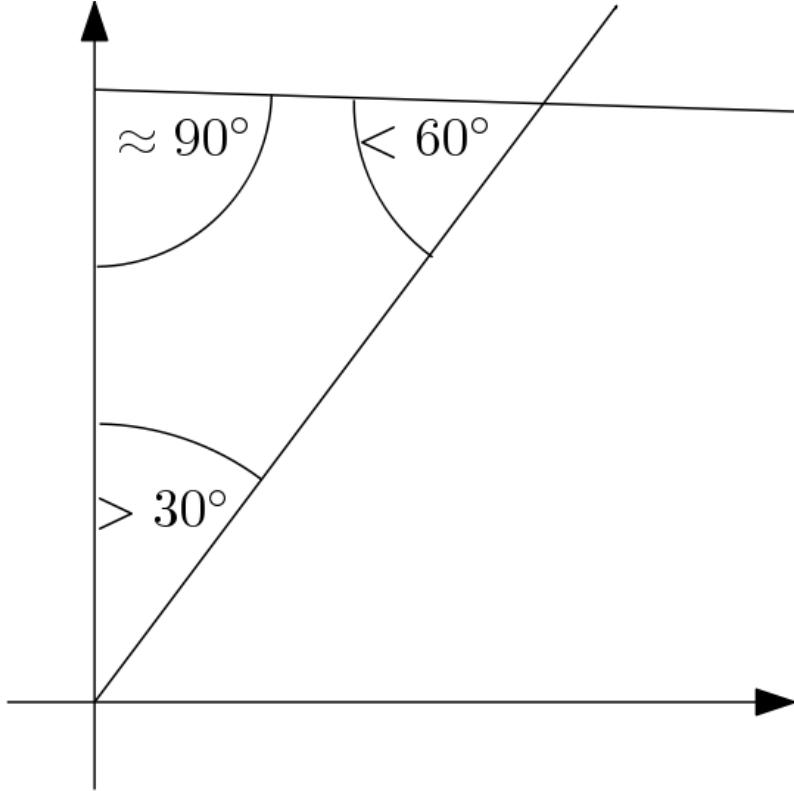


Abbildung 4.2: Veranschaulichung zum Beweis von Lemma 4.8

*Beweis:* Im Beweis von Lemma 4.8 ist insbesondere zu sehen, dass für  $\delta \rightarrow 0$  auch mindestens eine Teilfolge der zugehörigen  $h$  nach unendlich divergiert. Wir verkleinern also zunächst  $\delta$  so, dass wir ein dazu passendes  $h_2 > h_1$  wählen können. Da sich das zugehörige  $v$  auf  $\varphi \in [90^\circ, 121^\circ]$  mehr und mehr einer Geraden parallel zur Rotationsachse annähert, wenn  $\delta$  verkleinert wird, können wir  $\delta$ , falls nötig, weiter verkleinern, bis  $v$  die Ursprungsgerade  $g_{119^\circ}$  in einem Winkel größer als  $60^\circ$  schneidet, während die Ursprungsgerade  $g_{\varphi_1}$  in einem Winkel kleiner als  $60^\circ$  geschnitten wird.

Abschließend können wir  $\delta$ , erneut falls nötig, noch weiter verkleinern um  $\sup_{\varphi \in (119^\circ, \varphi_1)} v(x_s(\varphi)) < 0,5$

zu gewährleisten, ohne die bisher konstruierten Eigenschaften zu verlieren.  $(x_s(\varphi), v(x_s(\varphi)))$  sei hier der Schnittpunkt von  $v$  und  $g_\varphi$ .

Falls wir noch zeigen können, dass der Schnittwinkel von  $v$  und  $g_\varphi$  stetig in  $\varphi$  ist, folgt die Behauptung.

Für den Fall, dass sich  $v$  und  $g_\varphi$  im Punkt  $(x_s, v(x_s))$  schneiden kann ihr Schnittwinkel  $\vartheta(\varphi)$  an der Formel

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ v'(x_s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_s) \end{pmatrix} \right\rangle = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ v'(x_s) \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_s) \end{pmatrix} \right| \cos(\vartheta(\varphi))$$

abgelesen werden. Wenn  $x_s$  stetig in  $\varphi$  ist, folgt dasselbe also für  $\vartheta(\varphi)$  als Komposition stetiger Abbildungen.

$x_s$  erfüllt die Gleichung

$$F(\varphi, x_s) := a_\varphi x_s - v(x_s) = 0,$$

wobei  $a_\varphi x = g_\varphi(x)$  ist. Aus dem Beweis der Konkavität von  $v$  wissen wir, dass  $v$  nie parallel zu einer Ursprungsgeraden sein kann und daher  $F_x(\varphi, x_s) = a_\varphi - v'(x_s) \neq 0$  gilt.

Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun, dass  $x_s$  lokal eine stetige Funktion von  $\varphi$  ist. Da  $v$  konkav ist, existiert für jedes  $\varphi$  höchstens ein solcher Schnittpunkt. Da  $\varphi$  beliebig war, folgt damit, dass  $x_s$  auch global stetig in  $\varphi$  ist.  $\square$

**Lemma 4.10.** Sei  $x \in \mathbb{S}^1$  und  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B^1$  so, dass  $y_1 < x_1 < 0$  und  $x_2 = y_2 > 0$ . Dann gilt

$$\langle x, y \rangle > 1.$$

Beweis:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = |x_1| |y_1| + x_2^2 > x_1^2 + x_2^2 = 1$$

□

**Lemma 4.11.** Sei  $h > 1$  und  $v$  eine Lösung von  $(\star)$  mit  $v(-h) = 0$  und  $v'(-h) = \infty$ . Dann existiert ein  $x_0 < 0$  mit  $x_0^2 + v(x_0)^2 = 1$  und es gilt  $v(x) \leq 1$  für alle  $x \in [-h, x_0]$ .

Beweis: Nach Lemma 4.2 existiert  $v$  bis einschließlich  $x = 0$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $v$  bis zur  $\mathbb{S}^1$  kleiner als 1 bleibt.

Wir definieren  $g(x) := \sqrt{1 - x^2}$ .  $g$  ist kleiner als 1 und erfüllt  $g'(x) = \frac{-x}{g(x)}$  und  $g''(x) = \frac{-1}{g(x)^3}$ .

Als nächstes definieren wir für  $x \in (-h, 0)$   $y_x$  so, dass  $g'(y_x) = v'(x)$  und die Translation  $T_x$  so, dass  $T_x x = y_x$ . Dann ist  $g_{x_0} := g(T_{x_0} x)$  gerade der Graph derjenigen Einheitssphäre mit Mittelpunkt auf der Rotationsachse, deren Ableitung im Punkt  $x_0$  mit  $v'(x_0)$  übereinstimmt.

Aus Lemma 4.4 wissen wir nach einer Drehung des Koordinatensystems um  $90^\circ$ , dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, sodass  $v(x) < g_{-h}(x)$ ,  $v'(x) < g'_{-h}(x)$  und  $v''(x) < g''_{-h}(x)$  für alle  $x \in (-h, -h + \varepsilon)$  gelten. Ohne Einschränkung wählen wir  $\varepsilon$  so klein, dass auf diesem Intervall auch  $v' > 0$  gilt.

Da auf diesem Intervall  $0 < g'_x(x) = v'(x) < g'_{-h}(x)$  gilt, folgt  $0 > y_x > 1 + (h - |x|) = y_{-h}$  und damit  $g(y_x) > g(y_{-h})$ .

Mit  $v(x) \leq g_{-h}(x)$  liefert dies zusätzlich  $v(x) < g_x(x)$  für alle  $x \in (-h, -h + \varepsilon)$ .

Da  $g \leq 1$  sind wir fertig, falls diese Ungleichung für alle  $x \in (-h, 0)$  erhalten bleibt.

Um dies zu zeigen nehmen wir an, es gäbe ein  $x_0 \in (-h, 0)$ , bei dem  $g_{x_0}(x_0) = v(x_0)$  gilt. Außerdem wollen wir zunächst den Fall  $v'(x_0) \geq 0$  betrachten.

Nach Konstruktion gilt  $v(x_0) = g_{x_0}(x_0) = g(y_{x_0})$  und  $v'(x_0) = g'_{x_0}(x_0) = g'(y_{x_0})$ .

Setzen wir dies in  $(\star\star)$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} v''(x_0) &= \sqrt{1 + g'(y_{x_0})^2}^{n+1} g(y_{x_0})^{n-1} (x_0 g'(y_{x_0}) - v(x_0)) \\ &= \sqrt{\frac{1 - y_{x_0}^2 + y_{x_0}^2}{1 - y_{x_0}^2}}^{n+1} g(y_{x_0})^{n-1} \left( x_0 \frac{-y_{x_0}}{g(y_{x_0})} - v(x_0) \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{g(y_{x_0})^2}}^{n+1} g(y_{x_0})^{n-1} \frac{-1}{g(y_{x_0})} \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ v(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{x_0} \\ g(y_{x_0}) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{-1}{g(y_{x_0})^3} \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ v(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{x_0} \\ g(y_{x_0}) \end{pmatrix} \right\rangle < \frac{-1}{g(y_{x_0})^3} = g''(y_{x_0}) = g''_{x_0}(x_0). \end{aligned}$$

Falls  $x_0 < y_{x_0}$  folgt die Ungleichung in der vorangegangenen Rechnung aus Lemma 4.10. Falls  $x_0 \geq y_{x_0}$  gilt, gilt auch  $x_0^2 + v(x_0)^2 \leq 1$  und wir sind ebenfalls fertig.

Somit wissen wir also, dass  $v''(x_0) \leq g''_{x_0}(x_0)$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt damit auch  $v''(x) \leq g''_{x_0}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Durch das Vergleichsprinzip folgt weiter, dass  $v(x) \leq g_{x_0}(x)$  und  $v'(x) \leq g'_{x_0}(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$  gelten. Da wir angenommen haben, dass  $v'(x_0) \geq 0$  ist, schlussfolgern wir genau wie in der Umgebung von  $-h$ , dass sogar  $v(x) \leq g_x(x)$  für alle  $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$  gilt.

Damit haben wir gezeigt, solange  $v' \geq 0$  gilt, wird  $v \mid g_x$  höchstens von innen berühren. Dort gilt also  $v(x) \leq g_x(x) \leq 1$ .

Da  $v$  konkav ist, genügt dies, da  $v'$  lediglich einen einzigen Vorzeichenwechsel vollzieht.

□

**Bemerkung 4.12.** Alle bisher gezeigten Aussagen, waren unabhängig von der Dimension  $n$  der Fische deren Existenz wir zu zeigen versuchen.

Die Verallgemeinerung der ab hier vorgestellten Aussagen auf  $n > 1$  ist uns jedoch nicht gelungen,

weshalb wir an dieser Stelle darauf hinweisen, dass nachfolgende Lemmata nur für den übrigen Fall  $n = 1$  Gültigkeit haben.

Für  $n = 1$  wird  $(\star\star)$  zu

$$u''(\varphi) = u(\varphi) + \frac{2u'(\varphi)^2}{u(\varphi)} - u(\varphi)(u(\varphi)^2 + u'(\varphi)^2). \quad (4\star)$$

**Lemma 4.13.** *Sei  $n = 1$  und  $u$  eine Lösung von  $(4\star)$ . Dann liegt zwischen einem Minimum und einem Maximum von  $u$  steht ein Abstand von mindestens  $90^\circ$  und weniger als  $128^\circ$ .*

*Beweis:* Aus den Ergebnissen in [5] oder [6] folgt, dass der Abstand  $d$  zwischen einem Maximum und Minimum von  $u$  im Intervall  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$  liegt. Wegen  $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$  und  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \hat{=} 173.3^\circ$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 4.14.** *Sei  $n = 1$  und  $u$  eine Lösung von  $(4\star)$  auf  $[\varphi_0, \varphi_1]$ . Dann ist  $\tilde{u}$ , die Spiegelung von  $u$  an  $\varphi_1$ , mit  $\tilde{u}(\varphi_1 + \varphi_0) = u(\varphi_1 - \varphi)$  eine Lösung von  $(4\star)$  auf  $[\varphi_1, 2\varphi_1 - \varphi_0]$ .*

*Beweis:* Die Aussage folgt direkt aus der Autonomie von  $(4\star)$  und der Invarianz von  $(4\star)$  unter der Ersetzung von  $\varphi$  durch  $-\varphi$ .  $\square$

**Lemma 4.15.** *Sei  $n = 1$  und  $h > 1$ .  $u$  sei eine Lösung von  $(\star\star)$  mit  $u(0) = h$ ,  $u'(0) = 0$  und maximalem Existenzintervall  $I_{max}$ . Dann gilt  $I_{max} = \mathbb{R}$ .*

*Beweis:* Wir wissen bereits, dass  $u$  bis mindestens  $\varphi = 90^\circ$  existiert und in einer Umgebung der  $0$  streng monoton fallend ist. Folglich hat  $u$  in  $\varphi = 0$  ein Maximum. Wenn wir zeigen können, dass  $u$  bis zu einem Minimum existiert, folgt der Rest der Behauptung aus 4.14. Dieses Lemma liefert, dass man  $u$  in seinem Minimum durch eine an  $\varphi = \varphi_0$  gespiegelte Version von  $u$  fortsetzen kann. Wiederholt man dieses Verfahren in allen folgenden Maxima und Minima erhält man eine periodische Lösung  $\tilde{u}$  von  $4\star$ , die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen ist  $u = \tilde{u}$ .

Wir wissen nach Lemma 4.2, dass  $u$  bis mindestens  $\varphi = 90^\circ$  existiert und aus Lemma 4.11, dass  $u$  in einem Winkel  $\varphi_0 \leq 90^\circ$  die Einheitskugel um den Ursprung durchstößt.

Sei  $\varphi_1 \in (90^\circ, 128^\circ)$  der Winkel, in dem  $u$  ein Minimum annimmt oder aber das Supremum von  $I_{max}$ . Mit Lemma 4.13 folgt, dass  $u(\varphi) \leq 1$  und  $u'(\varphi) \leq 0$  für alle  $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_1)$  gelten muss. Damit haben  $u$  und  $u'$  eine obere Schranke.

Da auf diesem Intervall  $u \leq 1$  gilt, gilt nach  $(4\star)$

$$u'' = u + \frac{2u'^2}{u} - u(u^2 + u'^2) > 0.$$

Damit hat  $u'$  mit  $u'(\varphi_0)$  eine untere Schranke. Es bleibt  $u > 0$  auf  $(\varphi_0, \varphi_1)$  zu zeigen.

Dazu definieren wir  $-c := \frac{u'}{u}(\varphi_0) \leq 0$  und betrachten die Differentialgleichung zu  $\frac{u'}{u}$ , die sich aus  $(\star\star)$  ergibt zu

$$\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} = 1 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 - u^2 \left(1 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2\right).$$

Da  $u < 1$  gilt, ist somit  $\left(\frac{u'}{u}\right)' > 0$ . Weiter erhalten wir hieraus  $\frac{u'}{u} \geq -c$ , also

$$|u'| \leq cu.$$

Mit dem Vergleichsprinzip für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass  $u$  auf  $I$  höchstens exponentiell abfallen kann und daher positiv bleibt.  $\square$

**Lemma 4.16.** Sei  $h^* > 1$  und für  $h \in (1, h^*)$  sei  $u_h$  die Lösung von  $(\star\star)$  mit  $u(0) = h$  und  $u'(0) = 0$ . Dann ist die Abbildung  $(h, \varphi) \mapsto u_h(\varphi)$  auf  $(1, h^*) \times \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.

*Beweis:* Da  $u_h$  Lösung von  $(\star\star)$  ist erfüllt es

$$\begin{cases} u''_h(\varphi) = u_h(\varphi) + \frac{2u'_h(\varphi)^2}{u_h(\varphi)} - u_h(\varphi)^3 - u_h(\varphi)u'_h(\varphi)^2 =: F(h, \varphi, u_h(\varphi), u'_h(\varphi)) \\ u_h(0) = h \\ u'_h(0) = 0 \end{cases}$$

Nach Theorem 8.17 und 8.18 in [2] genügt es zu zeigen, dass  $F, DF, D_2F$  und  $D_3F$  gleichmäßig Lipschitzstetig sind, um die Behauptung zu beweisen. Da sämtliche Ableitungen von  $F$  Polynome in  $u_h, u'_h$  und  $\frac{1}{u_h}$  sind, reicht es dazu weiter zu zeigen, dass  $u_h$  und  $u'_h$  gleichmäßig beschränkt sind und  $\inf_{(h, \varphi) \in (1, h^*) \times \mathbb{R}} u_h(\varphi) > 0$  gilt.

Da wir bereits gesehen haben, dass die Lösungen  $u_h$  periodisch mit einer Periode kleiner als  $180^\circ$  sind, reicht es dies für  $\varphi \in [0, 180^\circ]$  zu zeigen.

Sei zunächst  $\varphi \in (0, 45^\circ)$ . Wir wissen aus Lemma 4.2, dass  $u_h$  in diesem Intervall nie parallel zur Ursprungsgeraden mit  $\varphi = 90^\circ$  verläuft. An Gleichung (8) sehen wir, dass hieraus folgt, dass  $\sin(\varphi)u(\varphi) - \cos(\varphi)u'(\varphi) > 0$  ist.

Einige leichte Umformungen zeigen, dass für  $\varphi \in (0^\circ, 45^\circ)$

$$-u'_h(\varphi) = |u'_h(\varphi)| \leq \tan(\varphi)u_h(\varphi) \leq \tan(45^\circ)u_h(\varphi). \quad (9)$$

Da  $u_h$  auf diesem Intervall noch monoton fallend ist, folgt  $u'_h(\varphi) \in [0, -\tan(45^\circ)h]$  für alle  $\varphi \in [0, 45^\circ]$ .  $h$  kann natürlich weiter durch  $h^*$  abgeschätzt werden.

Da wir in Lemma 4.11 gesehen haben, dass der Abstand zu Rotationsachse stets kleiner als 1 ist, können wir folgern, dass für  $\varphi \in [45^\circ, 90^\circ]$   $u_h(\varphi) < \sqrt{2}$  gelten muss. Damit ist in diesem Intervall  $\frac{2}{u_h(\varphi)} - u_h(\varphi) > 0$  und wir können  $u''_h$  wie folgt abschätzen:

$$u''_h(\varphi) \geq u_h(\varphi) - u_h(\varphi)^3 \geq -\sqrt{2}^3.$$

Integration liefert nun, dass

$$c := \sup_{(h, \varphi) \in (1, h^*) \times [0^\circ, 90^\circ]} |u'_h(\varphi)| \leq \tan(45^\circ)h^* + \sqrt{2}^3 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Aus 4.11 ist weiter ersichtlich, dass es ein  $\varphi_h \in (0^\circ, 90^\circ)$  gibt in dem  $u_h(\varphi_h) = 1$  gilt. Aufgrund der Monotonie von  $u_h$  bis zum Minimum bei  $\varphi_{0,h} > 90^\circ$ , bleibt  $u_h$  zunächst kleiner 1. An  $(\star\star)$  sieht man nun, dass  $u''_h > 0$  auf  $(\varphi_h, \varphi_{0,h})$  gilt. Folglich hat  $u'_h$  auf  $(0^\circ, 90^\circ)$  bereits sein Minimum angenommen, welches wir durch  $-c$  abschätzen können. Da Lösungen von  $(\star\star)$  in ihrem Minima und Maxima schlicht gespiegelt werden, ist  $c$  bereits eine Schranke für das betragmäßige Maximum von  $u'_h(\varphi)$  auf  $\mathbb{R}$ .

Damit ist  $u'_h(\varphi)$  auf  $(1, h^*) \times \mathbb{R}$  also gleichmäßig durch  $\pm c$  beschränkt.

Aufgrund der Monotonie von  $u_h$  zwischen Maximum und Minimum und der Periodizität ist  $u_h$  nach oben durch  $h < h^*$  beschränkt.

Im Beweis von Lemma 4.15 haben wir außerdem gesehen, dass  $|u'| \geq u'(\varphi_h)u$  für alle  $\varphi \in [\varphi_h, \varphi_{0,h}]$  gilt und erhalten somit mit dem Vergleichsprinzip  $u_h(\varphi) \geq e^{u'_h(\varphi_h)(\varphi - \varphi_h)}$  für alle  $\varphi \in [\varphi_h, \varphi_{0,h}]$ . Da  $u_h$  sein Minimum in diesem Intervall annimmt, sind wir fertig, wenn wir diesen Term gleichmäßig gegen ein  $q > 0$  abschätzen.

Um dies zu tun schätzen wir  $u'_h(\varphi_s)$  durch  $-c$  und  $\varphi - \varphi_h$  durch  $\pi$  ab.

Damit sind alle Ableitungen von  $F$  gleichmäßig beschränkt und damit  $F$  und seine Ableitungen gleichmäßig Lipschitz-stetig.

□

**Lemma 4.17.** Sei  $h > 1$  und  $u$  eine Lösung von  $(4\star)$  mit  $u(0) = h$  und  $u'(0) = 0$ .  $u$  nehme in  $\varphi_0 \in (90^\circ, 128^\circ)$  sein Minimum an. Weiter sei  $\varphi_1 > \varphi_0$  minimal mit  $u(\varphi_1) = 1$ . Dann ist der Schnittwinkel  $\vartheta(\varphi)$  von  $u(\varphi)$  mit der Ursprungsgeraden  $g_\varphi$  in  $(\varphi_0, \varphi_1)$  streng monoton wachsend.

*Beweis:*  $\vartheta_h(\varphi)$  sei der Schnittwinkel von  $u_h$  mit der Ursprungsgeraden unter dem Winkel  $\varphi$ . Dann ist  $\vartheta_h(\varphi_0) = 90^\circ$  und nach Gleichung (5)

$$\cos(\vartheta_h) = \frac{u'_h}{\sqrt{u_h^2 + u'^2}}.$$

Leiten wir dies nach  $\varphi$  ab und benutzen wir Gleichung (\*\*) ( $n = 1$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\cos(\vartheta_h(\varphi)))' &= \frac{u_h^2 u''_h - u_h u'^2}{(u_h^2 + u'^2)^{3/2}} = \left[ u_h^2 \left( u_h + \frac{2u'^2}{u_h} - u_h(u_h^2 + u'^2) \right) - u_h u'^2 \right] \frac{1}{(u_h^2 + u'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(u_h^2 + u'^2)(u_h - u_h^3)}{(u_h^2 + u'^2)^{3/2}} = \frac{(u_h - u_h^3)}{\sqrt{u_h^2 + u'^2}}. \end{aligned}$$

Solange  $u < 1$  ist, ist diese Ableitung streng positiv, was bedeutet, dass die Ableitung von  $\vartheta_h$  streng negativ ist.  $\square$

**Bemerkung 4.18.** Um mit Hilfe der bisher gezeigten Aussagen 1.1 zu beweisen, wollen wir im folgenden den Spiegelungswinkel  $\varphi_h$  und die Fischfunktion  $f_h$  definieren.

Dazu sei für  $h > 1$   $u_h$  die Lösung von (\*\*) mit  $u_h(0) = h$  und  $u'_h(0) = 0$ .  $\varphi_h$  sei für  $h > 1$  der kleinste Winkel aus  $(90^\circ, 180^\circ)$  der eine der folgenden Eigenschaften hat:

1.  $u_h(\varphi_h) = 1$
2.  $u'_h(\varphi_h) = \frac{u_h(\varphi_h)}{\sqrt{3}}$ , was gleichbedeutend damit ist, dass  $u_h$  die Ursprungsgerade mit Winkel  $\varphi_h$  im  $60^\circ$ -Winkel schneidet.
3.  $\varphi_h = 179^\circ$ .

$\tilde{u}_h$  sei die Lösung von (\*\*) mit  $\tilde{u}_h(\varphi_h) = u_h(\varphi_h)$  und  $\tilde{u}'_h(\varphi_h) = -u'_h(\varphi_h)$ .

Hierauf basierend definieren wir nun die folgende Funktion :

$$f_h(\varphi) = \begin{cases} u_h(\varphi) & \text{für } \varphi \leq \varphi_h \\ \tilde{u}_h(\varphi) & \text{für } \varphi > \varphi_h \end{cases}$$

Wir werden als nächstes zeigen, dass  $f'_h(180^\circ)$  stetig von  $h$  abhängt, dass es ein  $h^*$  gibt, für welches  $f'_{h^*}(180^\circ) = 0$  gilt und, dass  $u_{h^*}$  und  $\tilde{u}_{h^*}$  in  $\varphi_{h^*}$  die  $120^\circ$ -Bedingung erfüllen. Ist all dies erfüllt, so ist  $f_{h^*}$  ein Netzwerk, aus dem durch Spiegelung ein Fisch konstruiert werden kann.

**Lemma 4.19.** Seien  $A = \bar{A} \subseteq B$  und  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $f$  auf  $B$  stetig ist.  $g$  sei auf  $A$  ebenfalls stetig und es gelte  $f(x) < g(x)$  für alle  $x \in B \setminus A$  und  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in \partial A$ . Dann ist  $m : B \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \min(f(x), g(x))$  stetig.

*Beweis:* Sei  $C \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen. Dann ist das Urbild von  $C$  unter  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} m^{-1}(C) &= \{x \in B : (f(x) \in C \wedge f(x) \leq g(x)) \vee (g(x) \in C \wedge g(x) \leq f(x))\} \\ &= (\{x \in B : f(x) \in C\} \cap \{x \in B : f(x) \leq g(x)\}) \\ &\quad \cup (\{x \in B : g(x) \in C\} \cap \underbrace{\{x \in B : g(x) \leq f(x)\}}_{\subseteq A}) \\ &= (\{x \in B : f(x) \in C\} \cap \{x \in B : f(x) \leq g(x)\}) \\ &\quad \cup (\{x \in A : g(x) \in C\} \cap \{x \in B : g(x) \leq f(x)\}). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass diese vier Mengen jeweils abgeschlossen sind, sodass dasselbe auch für  $m^{-1}(C)$  gilt.

$\{x \in B : f(x) \in C\} = f^{-1}(C)$  ist als Urbildmenge einer stetigen Funktion abgeschlossen.

Für die zweite Menge gilt  $\{x \in B : f(x) \leq g(x)\} = B \setminus \overset{\circ}{A} \cup \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$ . Die Menge  $B \setminus \overset{\circ}{A}$  ist als Komplement der offenen Menge  $\overset{\circ}{A}$  in  $B$  abgeschlossen und  $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$  ist in  $A$ , und daher auch in  $B$ , abgeschlossen, da  $f$  und  $g$  auf  $A$  stetig sind.

$\{x \in A : g(x) \in C\}$  ist gerade die Urbildmenge von  $C$  unter  $g|_A$ . Da  $g$  auf  $A$  stetig ist, ist sie in  $A$  und damit auch in  $B$  abgeschlossen.

Weiter gilt, da  $\{x \in B : g(x) \leq f(x)\} \subseteq A$  ist und  $f$  und  $g$  dort stetig sind, dass diese Menge abgeschlossen in der Spurtopologie bezüglich  $A$  und folglich auch in der Topologie von  $B$  ist.

□

**Lemma 4.20.** Sei

$$W := \{h > 1 : \exists \varphi =: \varphi_{60^\circ}(h) \text{ mit } \vartheta_h(\varphi_{60^\circ}(h)) = 60^\circ, \varphi_{60^\circ}(h) \in (90^\circ, 180^\circ) \text{ und } u_h(\varphi_{60^\circ}(h)) < 1\}$$

Dann lässt sich  $W \ni h \mapsto \varphi_{60^\circ}(h)$  stetig auf  $\overline{W}$  fortsetzen. Auf  $\overline{W}$  gilt  $\vartheta_h(\varphi_{60^\circ}(h)) = 60^\circ$  und für alle  $h \in \partial W$  gilt  $u_h(\varphi_{60^\circ}(h)) = 1$  oder  $\varphi_{60^\circ}(h) = 180^\circ$ .

*Beweis:* Wir zeigen diese Aussage in mehreren Schritten.

1. Seien  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}, h_0 > 1$  mit  $h_k \rightarrow h_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Im Beweis von Lemma 4.16 haben wir gesehen, dass  $u_{h_k}(\varphi)$  punktweise gegen  $u_{h_0}(\varphi)$  konvergiert und, dass für alle  $h$  aus einem beschränkten Intervall  $u'_h(\varphi)$  gleichmäßig beschränkt und  $u_h(\varphi)$  gleichmäßig beschränkt und echt größer Null ist. Ein Blick in (4\*) zeigt, dass damit auch  $u''_h$  gleichmäßig beschränkt ist. Es folgen  $u_{h_k} \Rightarrow u_{h_0}$ ,  $u'_{h_k} \Rightarrow u'_{h_0}$  und  $\frac{u'_{h_k}}{u_{h_k}} \Rightarrow \frac{u'_{h_0}}{u_{h_0}}$  für  $k \rightarrow \infty$ . Aufgrund der Periodizität von Lösungen von (4\*) gilt dies für alle  $\varphi$ .
2. Als nächstes zeigen wir, dass  $\varphi_{60^\circ}(h)$  auf  $W$  stetig ist. Dazu betrachten wir die  $\varphi_{60^\circ}(h)$ -definierende Gleichung

$$F(h, \varphi_{60^\circ}(h)) = \vartheta_h(\varphi) - 60^\circ = 0. \quad (10)$$

Ableiten nach  $\varphi_{60^\circ}(h)$  liefert

$$F_\varphi(h, \varphi) = \vartheta'_h(\varphi)$$

Wir wissen aus Lemma 4.17, dass  $\vartheta'_h(\varphi) \neq 0$  für alle  $h$  mit  $u_h(\varphi_{60^\circ}(h)) < 1$ , also insbesondere für alle  $h \in W$  gilt. Damit folgt mit dem Satz von der impliziten Funktion, dass  $\varphi_{60^\circ}(h)$  lokal stetig in  $W$  ist. Da  $\vartheta_h(\varphi)$  monoton in  $\varphi$  ist, solange  $u_h(\varphi) < 1$  ist und da für jedes andere Intervall  $[a, b]$  in dem  $u_h$  kleiner 1 ist  $[a, b] \cap [90^\circ, 180^\circ] = \emptyset$  gilt, ist  $\varphi_{60^\circ}(h)$  für jedes  $h \in W$  eindeutig bestimmt, sodass sogar bereits Stetigkeit in ganz  $W$  folgt.

3. Nun zeigen wir, dass  $W$  offen ist.

Sei dazu  $h_0 \in W$ .

Da  $u_{h_0}$  stetig ist und  $u_{h_0}(\varphi_{60^\circ}(h_0)) < 1$ , existieren  $\zeta > 0$  und  $\varepsilon > 0$  so, dass  $u_{h_0}((\varphi_{60^\circ}(h_0) - \varepsilon, \varphi_{60^\circ}(h_0) + \varepsilon)) \subseteq (2\zeta, 1 - 2\zeta)$  gilt.

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit von Anfangswert von  $u_h$  existiert weiter ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $h \in (h_0 - \delta, h_0 + \delta)$   $u_h((\varphi_{60^\circ}(h_0) - \varepsilon, \varphi_{60^\circ}(h_0) + \varepsilon)) \subseteq (\zeta, 1 - \zeta)$  gilt.

Somit ist nach Lemma 4.17  $\vartheta'_h(\varphi) \neq 0$  für alle

$$(\varphi, h) \in (\varphi_{60^\circ}(h_0) - \varepsilon, \varphi_{60^\circ}(h_0) + \varepsilon) \times (h_0 - \delta, h_0 + \delta).$$

Der Satz von der impliziten Funktion liefert analog zum Vorgehen in 2. die Existenz eines  $0 < \eta \leq \delta$  so, dass für alle  $h \in (h_0 - \eta, h_0 + \eta)$  ein stetiges  $\tilde{\varphi}(h)$  mit  $\vartheta_h(\tilde{\varphi}(h)) = 60^\circ$  und  $\tilde{\varphi}(h_0) = \varphi_{60^\circ}(h_0)$  existiert. Da  $\tilde{\varphi}(h)$  stetig ist, kann ein  $\kappa$  so gewählt werden, dass  $\tilde{\varphi}(h) \in (\varphi_{60^\circ}(h_0) - \varepsilon, \varphi_{60^\circ}(h_0) + \varepsilon)$  für alle  $h \in (h_0 - \kappa, h_0 + \kappa)$  gilt.

Damit ist gezeigt, dass  $W$  offen ist.

4. Angenommen  $\varphi_{60^\circ}(h)$  kann stetig auf  $\overline{W}$  fortgesetzt werden. Dann impliziert 1., dass für alle  $h \in \overline{W}$  die Bedingung  $u_h(\varphi_{60^\circ}(h)) \leq 1$  gilt. Da  $\vartheta_h(\varphi) = 60^\circ$  äquivalent ist zu  $\frac{u'_h(\varphi)}{u_h(\varphi)} = \sqrt{3}$  folgt aus 1. weiter, dass für alle  $h \in \overline{W}$  auch  $\vartheta_h \varphi_{60^\circ}(h) = 60^\circ$  gilt.

Da  $W$  offen ist, muss  $h \in \overline{W} \setminus W = \partial W$  dann  $\varphi_{60^\circ}(h) \in \{90^\circ, 180^\circ\}$  oder  $u_h(\varphi_{60^\circ}(h)) = 1$  erfüllen.  $\varphi_{60^\circ}(h) = 90^\circ$  kann ausgeschlossen werden, da für alle  $h > 1$  die Aussage  $u'_h(90^\circ) < 0$  gilt und daher  $\frac{u'_h(90^\circ)}{u_h(90^\circ)} \neq \sqrt{3}$  gilt.

Es bleibt also zu zeigen, dass  $\varphi_{60^\circ}(h)$  stetig auf  $\overline{W}$  fortgesetzt werden kann.

5. Sei  $h_0 \in \partial W$  und  $W \supseteq (h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Folge, die nach  $h_0$  konvergiert. Da  $\varphi_{60^\circ}(h_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  beschränkt bleibt existiert eine konvergente Teilfolge, die wir ohne Einschränkung auch mit  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bezeichnen. Gelte  $\varphi_{60^\circ}(h_k) \rightarrow \tilde{\varphi}$  für ein  $\tilde{\varphi}$ . In 2. haben wir gesehen, dass stetige Fortsetzbarkeit kein Problem ist, solange  $u_{h_0}(\tilde{\varphi}) < 1$  ist.

Nehmen wir also ohne Einschränkung an, dass  $u_{h_0}(\tilde{\varphi}) = 1$  gilt. Da  $\varphi_{60^\circ}(h_k) \rightarrow \tilde{\varphi}$  folgt mit den gleichmäßigen Konvergenzen aus 1., dass  $\vartheta_{h_0}(\tilde{\varphi}) = 60^\circ$ .

Angenommen es gibt ein  $\varepsilon > 0$  und eine andere Teilfolge  $(h_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq W$  die nach  $h_0$  konvergiert für die  $\varphi_{60^\circ}(h_l) \rightarrow \hat{\varphi} \notin (\tilde{\varphi} - \varepsilon, \tilde{\varphi} + \varepsilon)$  für  $l \rightarrow \infty$  gilt. Für dieses  $\hat{\varphi}$  muss ebenfalls  $u_{h_0}(\hat{\varphi}) = 1$  und  $\vartheta_{h_0}(\hat{\varphi}) = 60^\circ$  gelten.

Damit folgt  $u_{h_0}(\tilde{\varphi}) = u_{h_0}(\hat{\varphi})$  und  $u'_{h_0}(\tilde{\varphi}) = u'_{h_0}(\hat{\varphi}) > 0$ . Betrachtet man eine Lösung  $u$  von  $(\star\star)$  stellt man fest, dass solche Punkte  $\tilde{\varphi}$  und  $\hat{\varphi}$  gerade ein Vielfaches der Periodenlänge von  $u_h$  als Abstand haben müssen. Eine Periodenlänge beträgt mindestens  $180^\circ$ .

Damit ist gezeigt, dass  $\varphi_{60^\circ}(h)$  stetig auf  $\overline{W}$  fortgesetzt werden kann.  $\square$

**Lemma 4.21.** *Die Funktion  $h \mapsto f'_h(180^\circ)$  ist auf  $(1, \infty)$  stetig.*

*Beweis:* Da  $u_h, u'_h, \tilde{u}_h$  und  $\tilde{u}'_h$ , aus denen  $f_h$  konstruiert ist, stetig von ihren Anfangswerten abhängen, ist  $h \mapsto f'_h(180^\circ)$  stetig, wenn  $h \mapsto \varphi_h$  aus der Definition von  $f_h$  stetig ist.

Um dies zu zeigen definieren wir zunächst  $\varphi_{1,h} := \min\{\varphi \in (90^\circ, 256^\circ) : u_h(\varphi) = 1, u'_h(\varphi) > 0\}$ . Die Monotonie von  $u_h$  zwischen seinen Minima und Maxima und die Tatsache, dass deren Abstand zwischen  $90^\circ$  und  $128^\circ$  liegt, liefert sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von  $\varphi_{1,h}$ . Da nach Konstruktion  $u'(\varphi_{1,h}) \neq 0$  liefert der Satz von der impliziten Funktion zusammen mit der Eindeutigkeit, dass die Funktion  $h \mapsto \varphi_{1,h}$  stetig von  $h$  abhängt.

Damit ist  $\tilde{\varphi}_h := \min(\varphi_{1,h}, 179^\circ)$  ebenfalls stetig.

Sei nun  $\varphi_{60^\circ,h}$  die stetige Fortsetzung von  $\varphi_{60^\circ}(h)$  auf  $\overline{W}$ , welche wie gerade eben in Lemma 4.20 definiert sind. Dann ist  $\varphi_h = \min(\varphi_{60^\circ,h}, \tilde{\varphi}_h)$ . Nach Lemma 4.19 ist  $\varphi_h$  also stetig.  $\square$

**Lemma 4.22.** *Sei  $h > 1$  und  $\delta > 0$  so, dass  $0^\circ \leq \varphi_h - \delta$  und  $\varphi_h + \delta \leq 180^\circ$  gelten. Dann ist  $f_h(\varphi_h + \delta) = f_h(\varphi_h - \delta)$  und  $f'_h(\varphi_h + \delta) = -f'_h(\varphi_h - \delta)$ .*

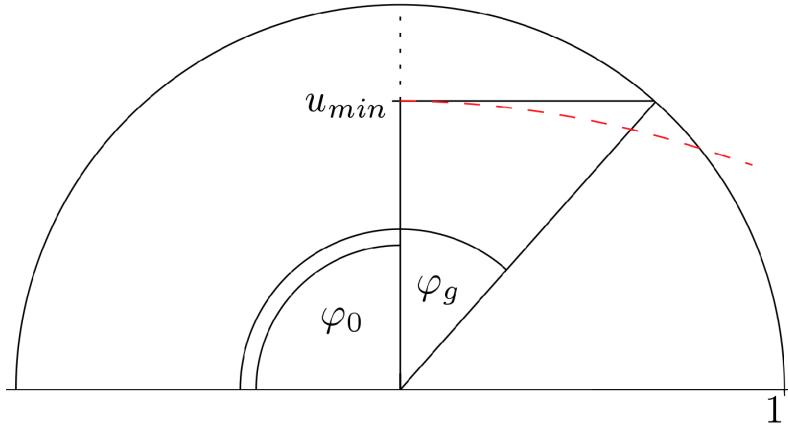
*Beweis:* Dies folgt direkt aus der Konstruktion von  $f_h$  und Lemma 4.14.  $\square$

**Korollar 4.23.** *Sei  $h > 1$ . Falls  $\varphi_h = 179^\circ$ , so ist  $f'_h(180^\circ) < 0$ .*

*Beweis:* Wir wissen, dass  $u_h$  sein Minimum in einem  $\varphi_0 \in (90^\circ, 128^\circ)$  annimmt, und, dass der Abstand zum nächsten Maximum größer ist als  $90^\circ$ . Daraus folgt, dass  $u'_h(178^\circ) > 0$  ist, woraus mit dem eben gezeigten Lemma 4.22 folgt, dass  $\tilde{u}'_h(180^\circ) < 0$  ist.  $\square$

**Korollar 4.24.** *Sei  $h > 1$  und  $\varphi_0 \in (90^\circ, 128^\circ)$  der Winkel unter dem  $u_h$  sein Minimum annimmt. Wenn  $u_h(\varphi_0) < \cos(45^\circ)$  und  $u_h(\varphi_h) = 1$  gilt, so ist  $f'_h(180^\circ) < 0$ .*

*Beweis:* Sei  $h > 1$  so, dass  $u_h(\varphi_0) < \cos(45^\circ) =: u_{\min}$ . Dort gilt auch  $u'_h(\varphi_0) = 0$ . Aufgrund der Konkavität von Lösungen  $v$  von  $(\star\star)$  bleibt  $u_h$  auch für größere  $\varphi$  sicher unterhalb der Tangente  $g$  an  $u$  in  $\varphi = \varphi_0$  (vergl. Abb. 4.3). Daher wird  $u_h$  den Einheitskreis um den Ursprung später schneiden als  $g$ . Bezeichnen wir den größeren der beiden Winkel unter dem  $g$  den Einheitskreis



**Abbildung 4.3:** Veranschaulichung zum Beweis von Lemma (4.24) mit Ausschnitt eines Einheitskreises sowie Hilfsdreieck (schwarz) und einem möglichen Verlauf von  $u_h(\varphi)$  (rot) für  $\varphi > \varphi_0$

schneidet mit  $\varphi_g$ , so folgt  $\varphi_0 < \varphi_g < \varphi_h$ .

$\varphi_g$  können wir aber berechnen, wenn wir das Dreieck betrachten welches von den Ursprungsgeraden mit Winkel  $\varphi_0$  bzw.  $\varphi_g$  und  $g$  selbst aufgespannt wird (Vergleiche zur Veranschaulichung Abbildung 4.3).

An diesem Dreieck sehen wir, dass

$$0 \leq \cos(\varphi_g - \varphi_0) = \frac{u_{min}}{1} < \cos(45^\circ)$$

ist. Es folgt  $\varphi_g > 45^\circ + \varphi_0$ .

Damit können wir schließen, dass auch  $\varphi_h - \varphi_0 \geq 45^\circ$  gilt. Da  $\varphi_0 \in (90^\circ, 128^\circ)$  ist, folgt, dass  $180^\circ - \varphi_h < \varphi_h - \varphi_0$  ist. Da  $u'_h(\varphi) > 0$  auf  $(\varphi_0, \varphi_h)$  gilt, folgt daher nach Lemma 4.22, dass  $\tilde{u}'_h(\varphi) < 0$  für alle  $\varphi \in (\varphi_h, 180^\circ]$ .  $\square$

**Korollar 4.25.** Für jedes  $h_1 > 1$  existiert ein  $h_2 > h$  mit  $f'_{h_2}(180^\circ) > 0$ .

*Beweis:* Sei  $h_1 > 1$ . Wir wählen nun  $h_2 > h_1$  so, dass  $u_{h_2}$  die  $60^\circ$ -Bedingung in  $\varphi_s \in (119^\circ, 121^\circ)$  erfüllt und  $u_{h_2}(\varphi_s) < 0.5$  ist. Ein solches  $\varphi_s$  existiert nach Lemma 4.9. Durch diese Wahl ist  $\varphi_s = \varphi_{h_2}$ . Da das Minimum von  $u_{h_2}$  in einem  $\varphi_0 \in (90^\circ, 128^\circ)$  angenommen wird, ist der Abstand zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_h$  kleiner als  $31^\circ$ . Folglich nimmt nach Lemma 4.22  $\tilde{u}_{h_2}$  sein Minimum in einem  $\varphi_2 < 152^\circ$  an. Da der Abstand zwischen diesem Minimum von  $\tilde{u}_{h_2}$  und seinem nächsten Maximum mindestens  $90^\circ$  betragen muss, ist  $f_{h_2}$  auf  $(\varphi_2, 180^\circ]$  streng monoton wachsend.  $\square$

**Lemma 4.26.**  $h \mapsto f'_h(180^\circ)$  hat eine Nullstelle  $h^*$ . In dieser Nullstelle gilt  $\vartheta_{h^*}(\varphi_{h^*}) = 60^\circ$ .

*Beweis:* Sei  $\varphi_0^h \in (90^\circ, 128^\circ)$  der Winkel unter dem  $u_h$  sein Minimum annimmt. Wir wissen aus Lemma 4.7, dass der maximale Abstand von  $u_h$  zur Rotationsachse für große  $h$  nach Null geht. Daraus folgt insbesondere, dass auch der minimale Abstand von  $u_h$  auf  $(0, 180^\circ)$  zum Koordinatenursprung  $u_h(\varphi_0^h)$  nach Null geht, wenn  $h$  hinreichend groß ist. Sei  $\hat{h} > 1$  der maximale Startwert, bei dem gilt  $u_{\hat{h}}(\varphi_0^{\hat{h}}) = 0.7$ . Ein solcher Existiert, da für  $u_1(\varphi) = 1$  für alle  $\varphi$  gilt. Wir setzen  $\varphi_0^{\hat{h}} = \varphi_0$

Nach Korollar 4.25 wissen wir, dass es ein  $\hat{h}_2 > \hat{h}$  gibt, sodass  $f'_{h_2}(180^\circ) > 0$  gilt.

Da  $0.7 < \cos(45^\circ) \approx 0.71$  gilt, wissen wir aus Korollar 4.24 ferner, dass im Falle  $u_{\hat{h}}(\varphi_{\hat{h}}) = 1$  folgt, dass  $f'_{\hat{h}}(180^\circ) < 0$ .

Dasselbe gilt nach Korollar 4.23, falls  $\varphi_{\hat{h}} = 179^\circ$ . Damit wissen wir sicher, dass falls  $h \mapsto f'_h(180^\circ)$  eine Nullstelle  $h^*$  besitzt, auch  $\vartheta_{h^*}(\varphi_{h^*}) = 60^\circ$  gelten muss.

Angenommen es gilt  $\vartheta_{\hat{h}}(\varphi_{\hat{h}}) = 60^\circ$ . Dann ist  $u_{\hat{h}}(\varphi) \in [0.7, 1]$  für alle  $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_{\hat{h}}]$ , da  $u_{\hat{h}}$  nach

dem Minimum monoton wachsend ist und falls es ein  $\tilde{\varphi} \in (\varphi_0, \varphi_{\hat{h}})$  mit  $u_{\hat{h}}(\tilde{\varphi}) = 1$  gäbe,  $\varphi_{\hat{h}} = \tilde{\varphi}$  folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Betrachten wir nun die Entwicklung von  $\vartheta_{\hat{h}}(\varphi)$ , dem Schnittwinkel mit den Ursprungsgeraden, die die Rotationsachse im Winkel  $\varphi$  schneiden, auf diesem Intervall.

Da bei  $\varphi_0$  ein Minimum ist gilt  $\vartheta_{\hat{h}}(\varphi_0) = 90^\circ$ . Nach Lemma 4.17 kennen wir  $(\cos(\vartheta_{\hat{h}}))'$ . Es gilt

$$(\cos(\vartheta_{\hat{h}}))' = \frac{u_{\hat{h}} - u_{\hat{h}}^3}{\sqrt{u_{\hat{h}}^2 + u_{\hat{h}'}^2}} \leq \frac{u_{\hat{h}} - u_{\hat{h}}^3}{\sqrt{u_{\hat{h}}^2}} = 1 - u_{\hat{h}}^2 \leq 1 - 0.7^2 = 0,51.$$

Durch Integration dieser Ungleichung sieht man mit  $45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$  für  $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 45^\circ)$ , dass

$$0 \leq \cos(\vartheta_{\hat{h}}(\varphi_0 + \varphi)) \leq 0,51\varphi \leq 0,51 \frac{\pi}{4} < 0,5 = \cos(60^\circ)$$

gilt.

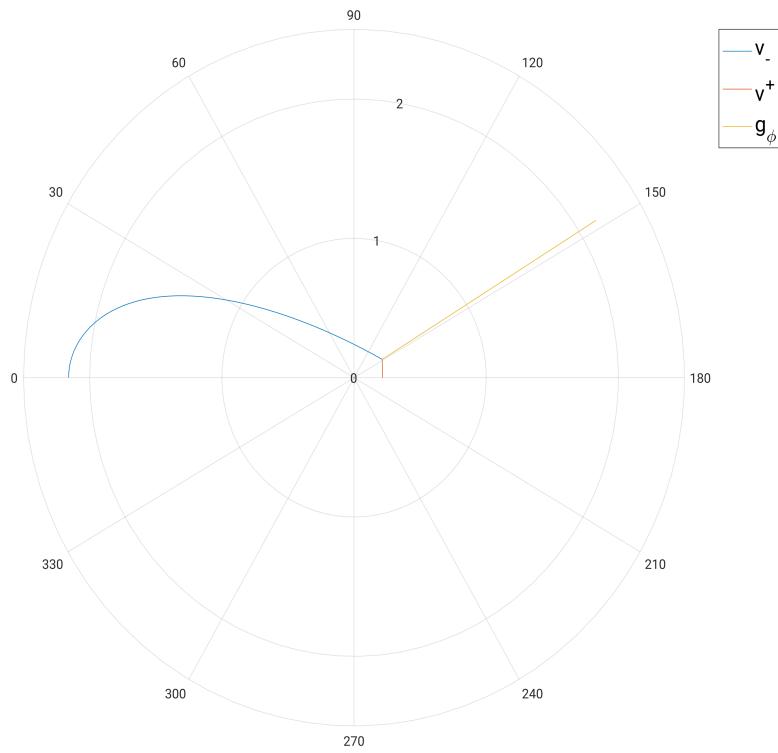
Damit folgt weiter, dass auf diesem Intervall  $\vartheta_{\hat{h}} > 60^\circ$  gilt und daher  $\varphi_{\hat{h}} > \varphi_0 + 45^\circ$  ist.

Wir sehen also, dass  $\varphi_{\hat{h}} - \varphi_0 > 180^\circ - \varphi_{\hat{h}}$  gilt. Da  $u_{\hat{h}}$  zwischen  $\varphi_0$  und  $\varphi_{\hat{h}}$  streng monoton wachsend ist, folgt hieraus mit Lemma 4.22, dass  $f'_{\hat{h}}(180^\circ) < 0$  ist.

Wir haben also gezeigt, dass  $h \mapsto f'_h(180^\circ)$  auf  $[\hat{h}, \hat{h}_2]$  einen Vorzeichenwechsel vollzieht. Nach dem Mittelwertsatz gibt es daher auch eine Nullstelle.  $\square$

Damit ist Theorem 1.1 bewiesen. In Abbildung 4.4 ist zum Abschluss noch eine numerische Näherung eines solchen rotationssymmetrischen unter dem Gaußkrümmungsfluss homothetisch schrumpfenden Fisches zu sehen.

Vergleichbare numerische Lösungen für höhere Dimensionen als  $n = 1$  legen nahe, dass derartige Fische auch in höheren Dimensionen existieren, auch wenn der Beweis hierfür im Rahmen dieser Arbeit nicht erbracht werden konnte.



**Abbildung 4.4:** Numerische Lösungen von  $(\star)$  für  $n = 1$ , aus denen sich ein homothetisch schrumpfender rotationssymmetrischer Fisch konstruieren lässt.

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Qualitative Darstellung eines fischförmigen Netzwerks . . . . .	1
2.1	Qualitative Darstellung eines rotationssymmetrischen Fisches . . . . .	4
3.1	Veranschaulichung der graphischen Parametrisierung entlang der Rotationsachse . . . . .	5
3.2	Veranschaulichung der Winkelparametrisierung . . . . .	8
3.3	Veranschaulichung der graphischen Parametrisierung senkrecht zur Rotationsachse . . . . .	10
4.1	Qualitative Darstellung der Einbettung der Zylinder $Z_{1/2}$ in das Volumen $\nu$ . . . . .	18
4.2	Veranschaulichung zum Beweis von Lemma 4.8 . . . . .	19
4.3	Veranschaulichung zum Beweis von Lemma (4.24) mit Ausschnitt eines Einheitskreises sowie Hilfsdreieck (schwarz) und einem möglichen Verlauf von $u_h(\varphi)$ (rot) für $\varphi > \varphi_0$ . . . . .	26
4.4	Numerische Lösungen von $(\star)$ für $n = 1$ , aus denen sich ein homothetisch schrumpfender rotationssymmetrischer Fisch konstruieren lässt. . . . .	28



## Literaturverzeichnis

- [1] "Evolution of convex lens-shaped networks under curve shortening flow", O. Schnürer, Abderrahim Azouani, Marc Georgi, Juliette Hell, Nihar Jangle, Amos Koeller, Tobias Marxen, Sandra Ritthaler, Mariel Sáez, Felix Schulze, and Brian Smith, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2265–2294.
- [2]
- [3] Skript zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Geometrischen Anwendungen", O. Schnürer, <http://www.math.uni-konstanz.de/~schnuere/skripte/geomode.pdf>, Stand: 04.05.17
- [4] Sebastian Kümpel, Gibt es rotationssymmetrische homothetisch schrumpfende linsenartige Lösungen des Gaußkrümmungsflusses?, ( voraussichtlich 2018) Bachelorarbeit an Universität Konstanz, Fachbereich für Mathematik und Statistik
- [5] Uwe Abresch and Joel Langer, The normalized curve shortening flow and homothetic solutions , J. Differential Geom. 23 (1986), no. 2, 175–196.
- [6] Ben Andrews, Classification of limiting shapes for isotropic curve flows, J. Amer. Math. Soc. 16(2003), no.2, 443-459