Øving 7, Operasjonsanalyse

Problem 1:

a)

i) $A \to D \to C \to E \to F$.

ii) ABDF, ACEF, ADF,

b)

i) ADCA, CEFDC, EDCE,

ii) ABDFECA.

c) $\{AD, DB, DC, CE, EF\}$

d) $\{FD, DB, DC, CA, CE\}$,

$\{EF, ED, DC, CA, AB\}$.

Oppgave 2:

a) Tenker på "korteste vei"-problemet
som et spesialtilfelle av
"minimum cost flow" problemet.
med noder fra indeksettet Ω
Setter vi kostnaden ved å bruke
en rettet link $i \to j$ til å være
$c_{ij} = d(i,j)$, og erstatter alle urettede linker
med to rettede linker frem og tilbake.
x_{ij} er en binærvariabel som sier om link $(i \to j)$ brukes
Samtidig har vi en kilde på 1 enhet
startnoden ($b_{start} = 1$) mens sluttnoden har
et sluk på (-1). Alle andre noder har rette
ingen kilde eller sluk.

· Da blir problemet:

$$\text{minimer } z' = \sum_{i,j \in \Omega^2} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

slik at:

$$\sum_{j \in \Omega} x_{ij} - \sum_{j \in \Omega} x_{ji} = 0 \quad \forall i \in \Omega \setminus \{i_{start}, i_{shuttle}\}$$

$$\sum_{j \in \Omega} x_{ij} = 1, \text{ for } i = i_{start}$$

$$-\sum_{j \in \Omega} x_{ji} = -1, \text{ for } i = i_{shutt}.$$

$$\{x_{ij}\} \in \{0,1\}^{\Omega \times \Omega}.$$

og: Alle summer gjøres bare over faktisk eksisterende koblinger.

b)

	Løste noder koblet til uløste noder	Nærmeste uløste node	Avstand	Total avstand	n'te nærmeste node
n = 1:	O	A	4	4	A (O→A)
n=2:	O	C	5	5	B, (A→B)
	A	B	1	5	C (O→C)
n=3	A	D	7	11	E (B→E)
	B	E	4	9	
	C	E	5	10	
n=4	A	D	7	11	D (B→D)
	B	D	5	10	D (E→D)
	E	D	1	10	
n=5	E	T	8	17	
	D	T	6	16	T (D→T)

Vi fant korteste veien fra $O \to T$ til å være $(T \leftarrow D \leftarrow B \leftarrow A \leftarrow O)^{-1}$ eller $(T \leftarrow D \leftarrow E \leftarrow B \leftarrow A \leftarrow O)^{-1}$, begge med avstand 16 fra O.

Oppg. 3

a) Matematisk modell:

- N er settet av alle noder i nettverket.
- La B være settet av alle buer i nettverket.
- La X være slik at $x_{ij} = 1$ dersom buen (i,j) er med i spenntreet, 0 ellers.
- La C_{ij} være kostnaden ved å traversere buen $(i,j) \in B$.

Ønsker da å finne

$$\min_{X} \sum_{(i,j) \in B} C_{ij} x_{ij}$$

Slik at

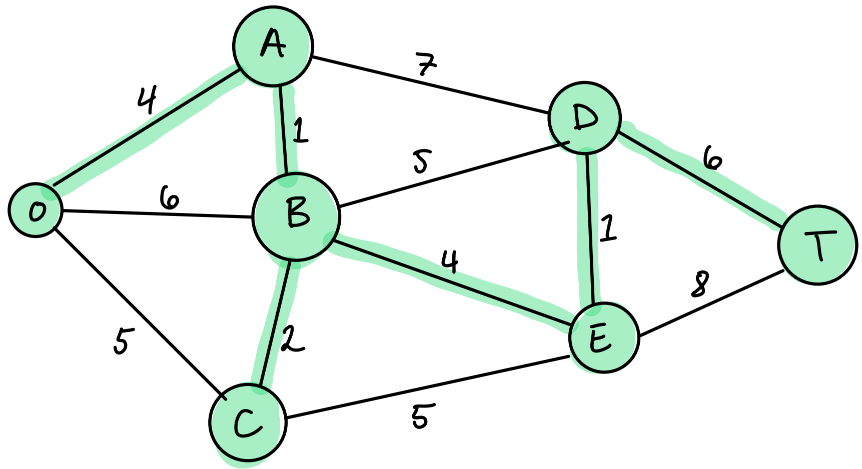
(1) $$\sum_{(i,j) \in B} x_{ij} = N - 1$$

(2) $$\sum_{i \in N'} \sum_{j \in N'} x_{ij} \leq |N'| - 1 \quad \text{der} \quad N' \in N$$

Forklaring:

- Å minimere objektivfunksjonen vil si å minimere den totale kostnaden i spenntreet vi ender opp med. Dette gjør at vi finner et minimalt spenntre.
- Begrensning (1) gjør at spenntreet får riktig antall kanter.
- Begrensning (2) gjør at ingen delgraf i nettverket har for mange kanter. Sammen med (1) tvinger dette X til å danne et spenntre.

b)



Bruker Prims algoritme:

1. Velger tilfeldig startnode: D

2. Har et sett med "fargede" noder: $S = \{D\}$,

   og et sett med de resterende nodene: $\bar{S} = \{A, B, C, E, O, T\}$

   Legger til den billigste kanten mellom en node i S og en node i $\bar{S}$: $D \to E$

   Flytter E over i S.

3. Fortsetter som i steg 2.

   $S = \{D, E\}$

   Velger kant $E \to B$

4. $S = \{D, E, B\}$

   Velger kant $B \to A$

5. $S = \{D, E, B, A\}$

   Velger kant $B \to C$

6. $S = \{D, E, B, A, C\}$

   Velger kant $A \to O$

7. $S = \{D, E, B, A, C, O\}$

   Velger kant $D \to T$

$\bar{S}$ er nå tomt og minimalt spenntre er funnet.

4.

a) For å ta høyde for de to kildenodene kan vi innføre en dummy-kilde som kobles til de to kildene.

b) N: Alle noder i nettverket

$i = 1, \dots, |N|$: Indekser

B: Settet av alle buer i nettverket.

U_{ij}: Maks flyt for bue (i,j)

$$\max \sum_{(i,j) \in B} x_{ij}$$

Forklaring:

Maksimer total flyt i nettverket

slik at

$$\sum_{j \in N} (x_{ij} + x_{ji}) = 0 \quad , \quad i \in N \setminus \{s, n\}$$

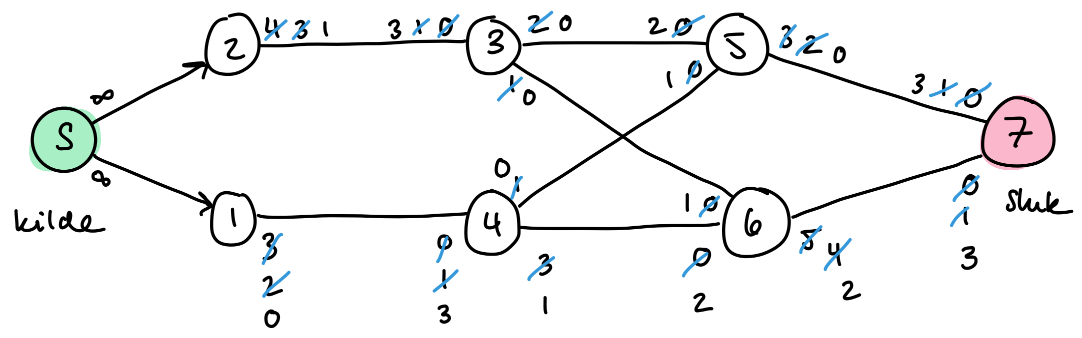
Alle noder, unntatt kilde og sluk, må ha like mye flyt ut som inn.

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad , \quad \forall (i,j) \in B$$

Flyt i hver bue må ikke overskride maksbegrensningen for den buen.

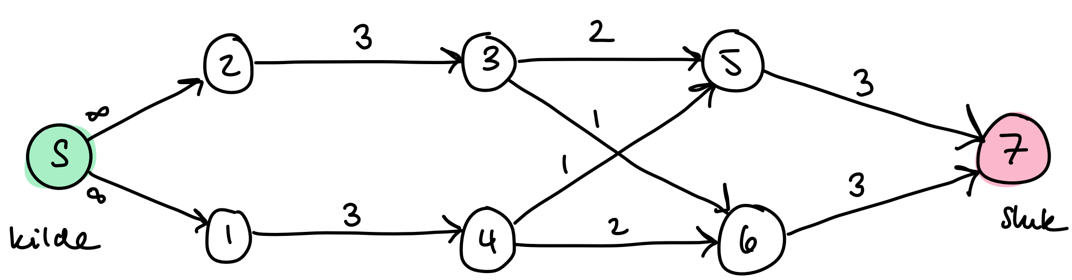
c)

Residualnettverk:



Augmenting path:					Residualkapasitet
1	1 →	4 →	5 →	7	1
2	2 →	3 →	6 →	7	1
3	1 →	4 →	6 →	7	2
4	2 →	3 →	5 →	7	2

Flyten i nettverket blir:



Man kan sende 6 enheter gass til kunden.

5.

a) D_i : tilbud / etterspørsel node i.

C_{ij} : kostnad bue (i,j)

U_{ij} : maks flyt bue (i,j)

X : x_{ij} er flyt i bue (i,j).

B : Settet av alle buer i nettverket

Forklaring:

$$\min_{X} \sum_{(i,j)\in B} C_{ij} x_{ij}$$

Vil finne X slik at total kostnad for flyt i nettverket blir minimert.

slik at:

$$\sum_{i\in N} (x_{ij} + x_{ji}) = D_i, \quad j \in N$$

Sum av flyt inn og ut av en node må være lik tilbudet D_i i noden. Altså netto flyt ut for tilbudsnoder, netto negativ flyt ut for ettersporselnoder, netto null flyt ut for transshipment-noder.

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij}, \quad \forall (i,j) \in B$$

Flyten i enhver bue i nettverket må være ikke-negativ og under maksgrensen for buen.

b) Sammenhengen mellom min-cost og shortest-path er at shortest path kan finnes ved å sette tilbudet i startnoden til 1, etterspørselen i sluttnoden til 1, og alle buekostnader til 1 og deretter løse som et min-cost problem.

c) Max-flow-problemet kan løses som et min-cost-problem ved å

- Gi alle buer kostnad 0.
- Gi kilden tilbud $D_s = F$, og sluket tilbud $D_n = -F$, der F er større enn maks flyt i nettverket.
- Lage en bue mellom kilde og sluk. Ikke sette noen maksgrense (altså $U_{sn} = \infty$), men gi buen en kostnad.

Da vil vi få maks flyt gjennom buene i nettverket med kostnad 0, og resten av tilbud/etterspørsel F blir dekket gjennom buen direkte fra kilde til sluk.
Løsningen på min-cost blir også løsningen på max-flow.