

Oppgave 2

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

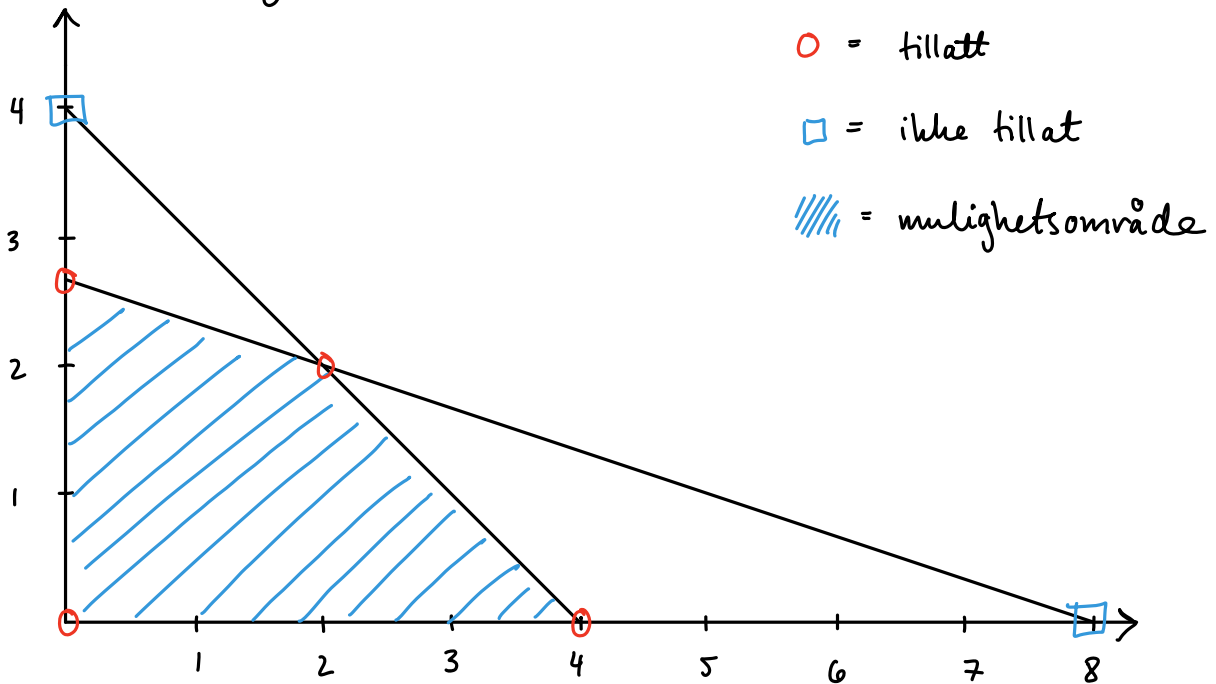
subject to

$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Grafisk fremstilling:



b)

Hjørnepunkt løsning	Målfunktionsverdi	Tillatt løsning?
$(0, 0)$	0	Ja
$(4, 0)$	4	Ja
$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$	Ja
$(2, 2)$	6	Ja
$(8, 0)$	8	Nei
$(0, 4)$	8	Nei

Vi ser av tabellen at $(2, 2)$ er den beste tillatte hjørnepunktløsningen, og er derfor optimal løsning.

c) Med $(0, 0)$ som startpunkt:

- Går i x_2 -retningen siden stigningen er størst her.
- Neste punkt: $(0, \frac{8}{3})$
- Målfunksjonen stiger langs den andre kanten, derfor gå til neste hjørnepunktløsning.
- Neste punkt: $(2, 2)$
- Målfunksjonen minsker langs den andre kanten fra $(2, 2)$.
 $(2, 2)$ er derfor optimal løsning.

Ender med sekvensen $(0, 0) \rightarrow (0, \frac{8}{3}) \rightarrow (2, 2)$.

d) Modellen på utvidet form:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

e) Verdier til slakkevariable:

$$(0, 0) \rightarrow s_1 = 8, \quad s_2 = 4$$

$$(4, 0) \rightarrow s_1 = 4, \quad s_2 = 0$$

$$(0, \frac{8}{3}) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(2, 2) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 0$$

Basisløsninger:

Basisvariable	Verdi	Ikke-basisvariable
s_1, s_2	8, 4	x_1, x_2
x_1, s_1	4, 4	x_2, s_2
x_2, s_2	$\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$	x_1, s_1
x_1, x_2	2, 2	s_1, s_2

f) (x_1, x_2, s_1, s_2)	Ligning	Venstre side	Højre side
$(0, 0, 8, 4)$	(1)	$0 + 0 + 8 = 8$	8
	(2)	$0 + 0 + 4 = 4$	4
<hr/>			
$(4, 0, 4, 0)$	(1)	$4 + 0 + 4 = 8$	8
	(2)	$4 + 0 + 0 = 4$	4
<hr/>			
$(0, \frac{8}{3}, 0, \frac{4}{3})$	(1)	$0 + 3 \cdot \frac{8}{3} + 0 = 8$	8
	(2)	$0 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$	4
<hr/>			
$(2, 2, 0, 0)$	(1)	$2 + 3 \cdot 2 + 0 = 8$	8
	(2)	$2 + 2 + 0 = 4$	4

g) Basisløsninger fra ikke-tillatte hjørnepunktløsninger

$$(8, 0) \rightarrow s_1 = 8 - 8 = 0, \quad s_2 = 4 - 8 + 0 = -4$$

$$(0, 4) \rightarrow s_1 = 8 - 3 \cdot 4 = -4, \quad s_2 = 4 - 4 = 0$$

Basisvariable	Verdi	Ikke-basisvariable
x_1, s_2	$8, -4$	x_2, s_1
x_2, s_1	$4, -4$	x_1, s_2

(x_1, x_2, s_1, s_2)	Ligning	Venstre side	Højre side
$(8, 0, 0, -4)$	(1)	$8 + 3 \cdot 0 + 0 = 8$	8
	(2)	$8 + 0 - 4 = 4$	4
<hr/>			
$(0, 4, -4, 0)$	(1)	$0 + 3(4) - 4 = 8$	8
	(2)	$0 + 4 + 0 = 4$	4

$$i) \quad (0) \quad z - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$(1) \quad x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

Basic variables: $s_1, s_2 \rightarrow (0, 0, 8, 4)$

Iteration 1:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Take x_2 into basis.

Minimum ratio test:

$$x_2 \text{ kan kun økes til } \min \left\{ \frac{8}{3}, \frac{4}{1} \right\} = \frac{8}{3}$$

s_1 forlater basis.

Iteration 2:

$$\sim \begin{array}{c|ccccc|c} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \hline 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 \end{array}$$

$$x_1 \text{ kan økes til } \min \left\{ \frac{8/3}{1/3} = 8, \frac{4/3}{2/3} = 2 \right\} = 2$$

s_2 forlater basis.

Iteration 3:

$$\sim \begin{array}{c|ccccc} & z & \textcircled{x_1} & \textcircled{x_2} & s_1 & s_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 2 \end{array}$$

Optimal losing function: $x_1 = 2, x_2 = 2, z = 6.$

j) Simplex i tabellform.

Basisvar.	Ligning	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Højreside	Forholdstest
Z	(0)	1	-1	-2	0	0	0	
s_1	(1)	0	1	3	1	0	8	$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
s_2	(2)	0	1	1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$
Z	(0)	1	-1/3	0	2/3	0	16/3	
x_2	(1)	0	1/3	1	1/3	0	8/3	$\frac{8/3}{1/3} = 8$
s_2	(2)	0	2/3	0	-1/3	1	4/3	$\frac{4/3}{2/3} = 2$
Z	(0)	1	0	0	1/2	1/2	6	
x_2	(1)	0	0	1	1/2	-1/2	2	
x_1	(2)	0	1	0	-1/2	3/2	2	

Optimal løsning: $x_1 = 2, x_2 = 2, z = 6.$