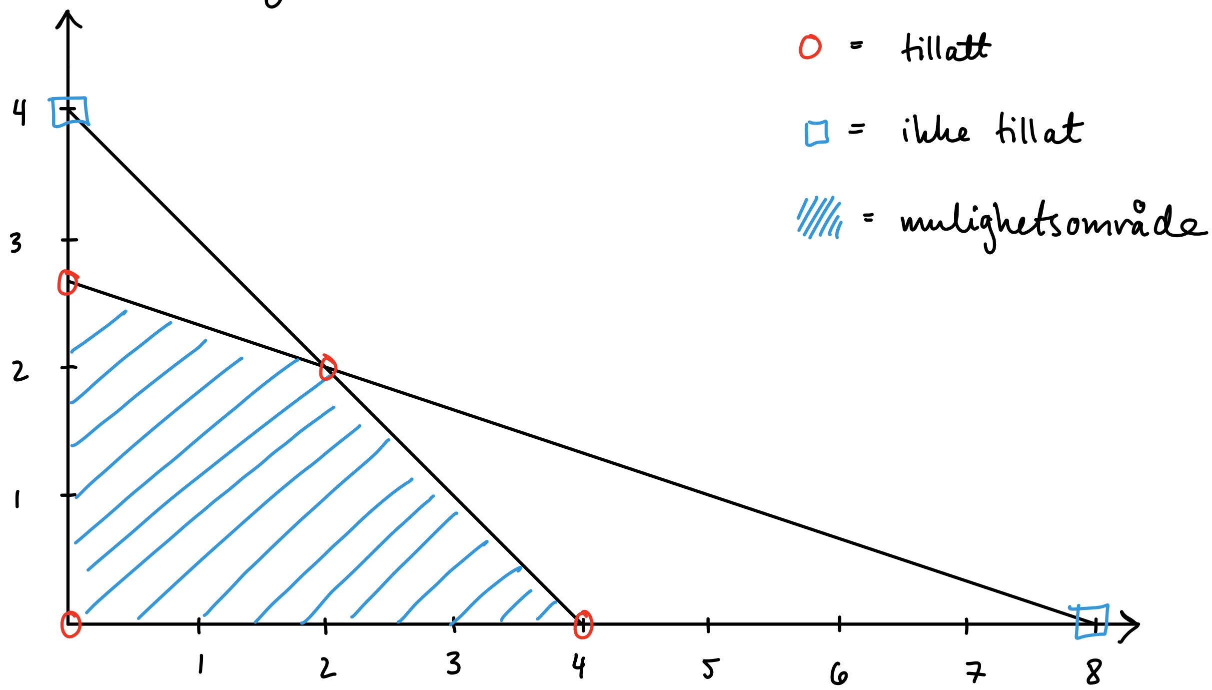
Oppgave 2

$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + 3x_2 \leqslant 8$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 4$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

a) Grafisk fremstilling:



b)

Hjørnepunktløsning	Målfunksjonsverdi	Tillatt løsning?
$(0, 0)$	0	Ja
$(4, 0)$	4	Ja
$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$	Ja
$(2, 2)$	6	Ja
$(8, 0)$	8	Nei
$(0, 4)$	8	Nei

Vi ser av tabellen at (2, 2) er den beste tillatte hjørnepunktløsningen, og er derfor optimal løsning.

c) Med (0, 0) som startpunkt:

- Går i x_2- retningen siden stigningen er størst her.
- Neste punkt: $(0, \frac{8}{3})$
- Målfunksjonen stiger langs den andre kanten, derfor gå til neste hjørnepunktløsning.
- Neste punkt: (2, 2)
- Målfunksjonen minker langs den andre kanten fra (2, 2). (2, 2) er derfor optimal løsning.

Ender med sekvensen $(0,0) \rightarrow (0, \frac{8}{3}) \rightarrow (2,2)$.

d) Modellen på utvidet form:

$$\max \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

e) Verdier til slakkevariable:

$(0,0) \rightarrow s_1 = 8, \quad s_2 = 4$

$(4,0) \rightarrow s_1 = 4, \quad s_2 = 0$

$(0, \frac{8}{3}) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

$(2,2) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 0$

Basisløsninger:

Basisvariable	Verdi	Ikke-basisvariable
s_1, s_2	$8, 4$	x_1, x_2
x_1, s_1	$4, 4$	x_2, s_2
x_2, s_2	$\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$	x_1, s_1
x_1, x_2	$2, 2$	s_1, s_2

f)

(x_1, x_2, s_1, s_2)	Ligning	Venstre side	Høyre side
$(0, 0, 8, 4)$	(1)	$0 + 0 + 8 = 8$	8
	(2)	$0 + 0 + 4 = 4$	4
$(4, 0, 4, 0)$	(1)	$4 + 0 + 4 = 8$	8
	(2)	$4 + 0 + 0 = 4$	4
$(0, \frac{8}{3}, 0, \frac{4}{3})$	(1)	$0 + 3 \cdot \frac{8}{3} + 0 = 8$	8
	(2)	$0 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$	4
$(2, 2, 0, 0)$	(1)	$2 + 3 \cdot 2 + 0 = 8$	8
	(2)	$2 + 2 + 0 = 4$	4

g) Basisløsninger fra ikke-tillatte hjørnepunktløsninger

$(8,0) \rightarrow \quad s_1 = 8 - 8 = 0 \,, \quad s_2 = 4 - 8 + 0 = -4$

$(0,4) \rightarrow \quad s_1 = 8 - 3 \cdot 4 = -4 \,, \quad s_2 = 4 - 4 = 0$

Basisvariable	Verdi	Ikke-basisvariable
x_1, s_2	$8, -4$	x_2, s_1
x_2, s_1	$4, -4$	x_2, s_2

h)

(x_1, x_2, s_1, s_2)	Ligning	Venstre side	Høyre side
$(8, 0, 0, -4)$	(1)	$8 + 3 \cdot 0 + 0 = 8$	8
	(2)	$8 + 0 - 4 = 4$	4
$(0, 4, -4, 0)$	(1)	$0 + 3(4) - 4 = 8$	8
	(2)	$0 + 4 + 0 = 4$	4

i) (0) $z - 3x_1 - 5x_2 = 0$

(1) $x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$

(2) $x_1 + x_2 + s_2 = 4$

Basic variables: $s_1, s_2 \rightarrow (0, 0, 8, 4)$

Iterasjon 1:

$$\begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ta x_2 inn i basis.

Minimum ratio test:

x_2 kan kun økes til $\min\left\{\frac{8}{3}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{8}{3}$

s_1 forlater basis.

Iterasjon 2:

$$\begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & 0 & 40/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

x_1 kan økes til $\min\left\{\frac{8/3}{1/3} = 8, \frac{4/3}{2/3} = 2\right\} = 2$

s_2 forlater basis.

Iterasjon 3:

$$\sim \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 2 \end{array}\right]$$

Optimal løsning funnet: $x_1 = 2,\ x_2 = 2$.

j) Simplex i tabellform.

Basisvar.	Ligning	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Høyre side	Forholdstest
Z	(0)	1	-3	$\boxed{-5}$	0	0	0	
S_1	(1)	0	1	3	1	0	8	$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
S_2	(2)	0	1	1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$
Z	(0)	1	$\boxed{-4/3}$	0	5/3	0	40/3	
X_2	(1)	0	1/3	1	1/3	0	8/3	$\frac{8/3}{1/3} = 8$
S_2	(2)	0	2/3	0	$-1/3$	1	4/3	$\frac{4/3}{2/3} = 2$
Z	(0)	1	0	0	1	2	16	
X_2	(1)	0	0	1	1/2	$-1/2$	2	
X_1	(2)	0	1	0	$-1/2$	3/2	2	

Optimal løsning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.