# Øving 2, Oper. An.

- Gruppe 117.

## Problem 1:

max $z = 12x_1 + 9x_2$,

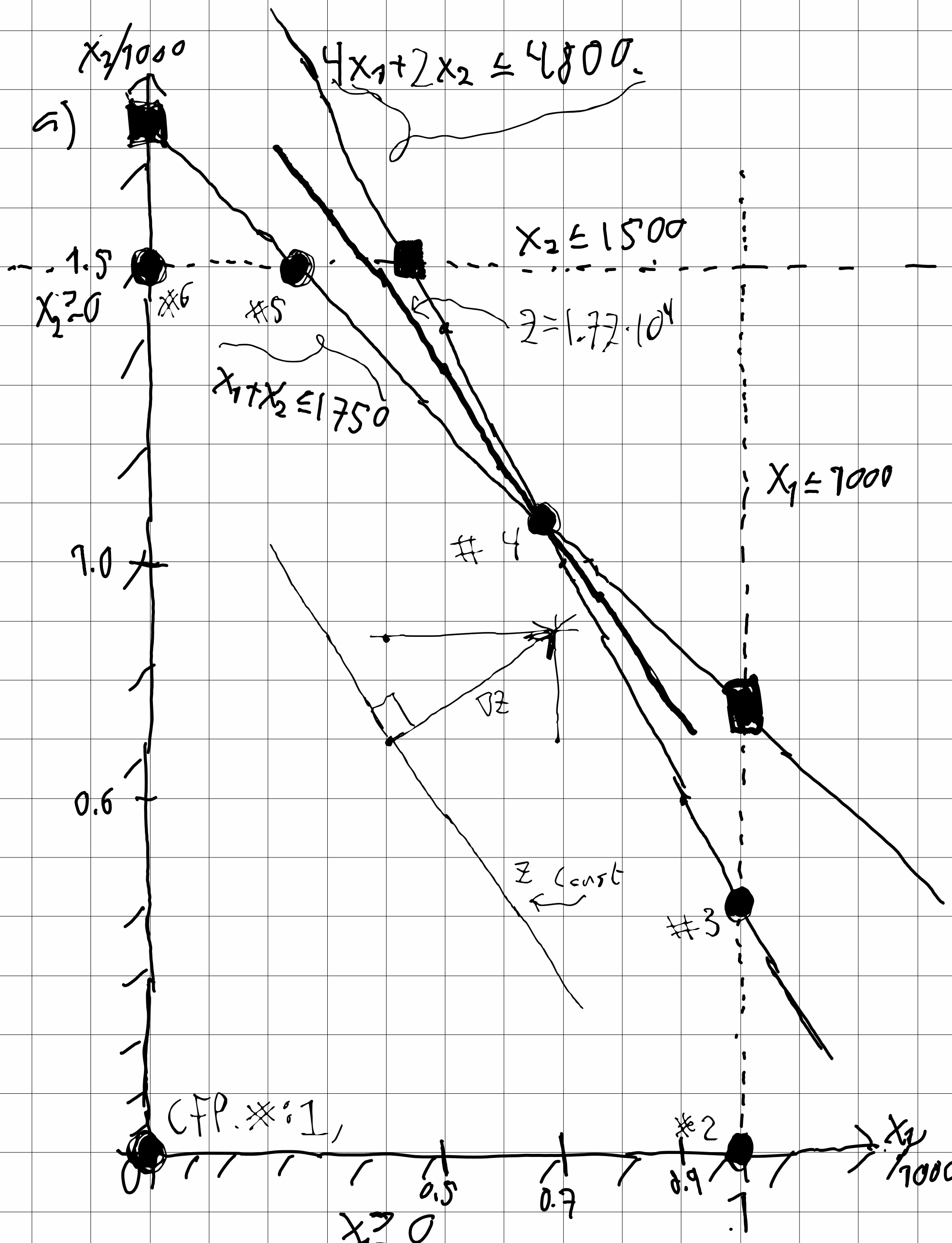
s.t.: $x_1 \leq 1000$ (1)

$x_2 \leq 1500$ (2)

$x_1 + x_2 \leq 1750$ (3)

$4x_1 + 2x_2 \leq 4800$ (4)

$x_1, x_2 \geq 0$ (Non-negative).




●: Lovlige løsninger ■: Ulovlige løsninger.

b)

$$CFP_s = \{ \overset{1}{(0,0)}, \overset{2}{(1000,0)}, \overset{3}{(1000,400)}, \overset{4}{(650,1100)}, \overset{5}{(250,1500)}, \overset{6}{(0,1500)} \}$$

$$CFP\#4: \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4800 \\ 1 & 1 & 1750 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1200 \\ 0 & 1/2 & 550 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 650 \\ 0 & 1 & 1100 \end{array}\right]. \Rightarrow (x_1, x_2) = (650, 1100)$$

$$Z(CFP's) = \{ \overset{(1)}{0}, \overset{(2)}{1{,}2 \cdot 10^4}, \overset{(3)}{1.56 \cdot 10^4}, \overset{(4)}{1.77 \cdot 10^4}, \overset{(5)}{1.65 \cdot 10^4}, \overset{(6)}{1.35 \cdot 10^4} \}.$$

$\mathrm{Argmax}(Z(CFP's)) = 4$,

optimal løsning: punktet $(650, 1100)$.

Der er $Z(x_1 = 650, x_2 = 1100) = 1{,}77 \cdot 10^4$.

Restriksjon (3) og (4) er bindende restriksjoner i løsningen.

(0)
c) Vil begynne i (0, 0),

der stiger vi i retning $x_1$ mest.
Går til nabo-hjørnepunktet
(1): (1000, 0).

Stiger langs $x_2$-aksen.
(2): (1000, 400)
Til slutt følges betingelsen for ulikhet (4).

(3): (650, 1100) ← optimal CPF-løsning.

d) $\max\ z = 12x_1 + 9x_2$

s.t.
$$x_1 + s_1 = 1000, \quad (1)$$
$$x_2 + s_2 = 1500, \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 + s_3 = 1750, \quad (3)$$
$$4x_1 + 2x_2 + s_4 = 4800, \quad (4)$$

og $\quad x_1, x_2, s_1, \ldots, s_4 \geq 0.$

Skjønner ikke hva som menes med å "uttrykke hver restriksjon" med slakk variablene på grafen fra a)? Bytte at til likhet og ~~trekke~~ trekke fra slakk-variabel fra motsatt side?

e)

$$CFP_s = \{ \overset{1}{(0,0)}, \overset{2}{(1000,0)}, \overset{3}{(1000,400)}, \overset{4}{(650,1100)}, \overset{5}{(250,1500)}, \overset{6}{(0,1500)} \}$$

$$\begin{array}{llllllll} & & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ BFs = \{ & ( & 0, & 0, & 1000, & 1500, & 1750, & 4800), \\ & ( & 1000, & 0, & 0, & 1500, & 750, & 800), \\ & ( & 1000, & 400, & 0, & 1100, & 350, & 0), \\ & ( & 650, & 1100, & 350, & 400, & 0, & 0), \\ & ( & 250, & 1500, & 750, & 0, & 0, & 800), \\ & ( & 0, & 1500, & 1000, & 250, & 0, & 1800) \} \end{array}$$

Restriksjonene (2) og (4) er oppfylt der $x_2 = 1500$, $x_1 = 450$, og med alle slakk-dimensjonene er vi får:

$(450, 1500, 550, 0, -150, 0)$,

og da $s_3 < 0$ vet vi at
dette ~~ikke~~ er en BF-løsning,
siden ikke-negativitetskravet brytes.

f) Det er slakkvariabler $s_3$ og $s_4$
som er ved sin nedre grense
ved den optimale løsningen på
"augmented" form.

$(x_1, x_2, s_1, s_2)$ er i basis ved den
optimale løsningen.

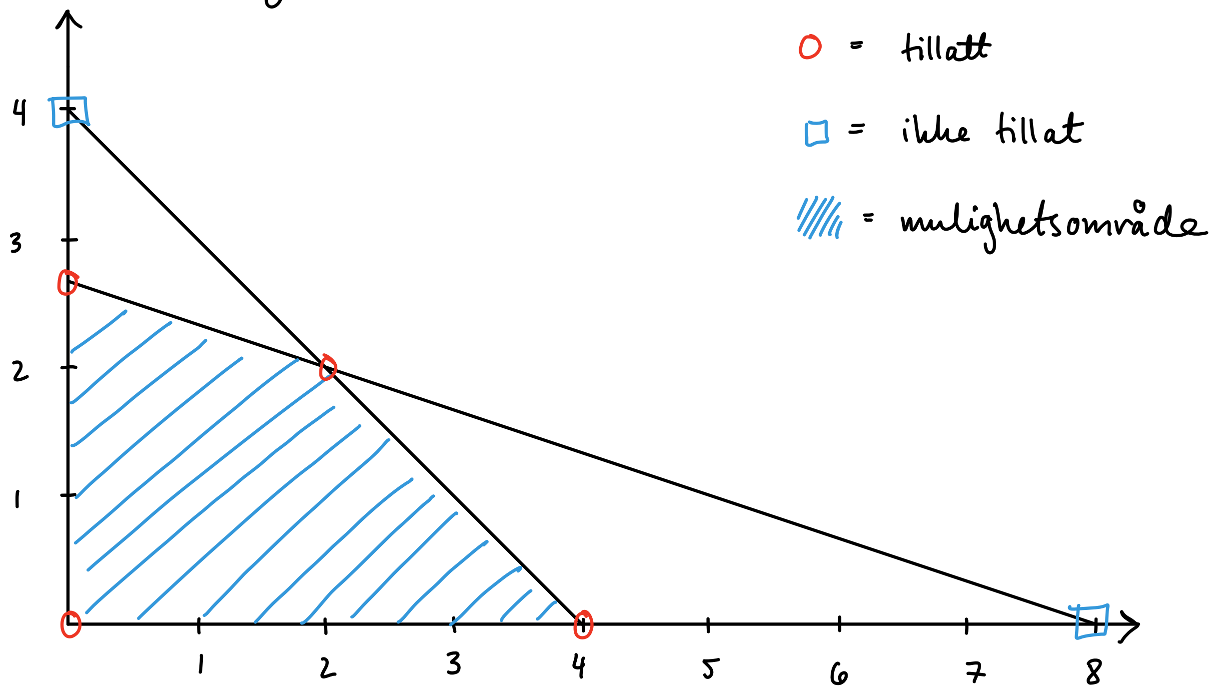
Oppgave 2

$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Grafisk fremstilling:




b)

| Hjørnepunktløsning | Målfunksjonsverdi | Tillatt løsning? |
|---|---|---|
| $(0, 0)$ | $0$ | Ja |
| $(4, 0)$ | $4$ | Ja |
| $(0, \frac{8}{3})$ | $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ | Ja |
| $(2, 2)$ | $6$ | Ja |
| $(8, 0)$ | $8$ | Nei |
| $(0, 4)$ | $8$ | Nei |

Vi ser av tabellen at (2, 2) er den beste tillatte hjørnepunktløsningen, og er derfor optimal løsning.

c) Med (0, 0) som startpunkt:

- Går i $x_2$- retningen siden stigningen er størst her.
- Neste punkt: $(0, \frac{8}{3})$
- Målfunksjonen stiger langs den andre kanten, derfor gå til neste hjørnepunktløsning.
- Neste punkt: (2, 2)
- Målfunksjonen minker langs den andre kanten fra (2, 2). (2, 2) er derfor optimal løsning.

Ender med sekvensen $(0,0) \rightarrow (0, \frac{8}{3}) \rightarrow (2,2)$.

d) Modellen på utvidet form:

$$\max \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

e) Verdier til slakkvariable:

$(0,0) \rightarrow s_1 = 8, \quad s_2 = 4$

$(4,0) \rightarrow s_1 = 4, \quad s_2 = 0$

$(0, \frac{8}{3}) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

$(2,2) \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = 0$

Basisløsninger:

| Basisvariable | Verdi | Ikke-basisvariable |
|---|---|---|
| $s_1, s_2$ | $8, 4$ | $x_1, x_2$ |
| $x_1, s_1$ | $4, 4$ | $x_2, s_2$ |
| $x_2, s_2$ | $\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$ | $x_1, s_1$ |
| $x_1, x_2$ | $2, 2$ | $s_1, s_2$ |

f)

| $(x_1, x_2, s_1, s_2)$ | Ligning | Venstre side | Høyre side |
|---|---|---|---|
| $(0,0,8,4)$ | (1) | $0+0+8 = 8$ | 8 |
| | (2) | $0+0+4 = 4$ | 4 |
| $(4,0,4,0)$ | (1) | $4+0+4 = 8$ | 8 |
| | (2) | $4+0+0 = 4$ | 4 |
| $(0, \frac{8}{3}, 0, \frac{4}{3})$ | (1) | $0 + 3 \cdot \frac{8}{3} + 0 = 8$ | 8 |
| | (2) | $0 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$ | 4 |
| $(2,2,0,0)$ | (1) | $2 + 3 \cdot 2 + 0 = 8$ | 8 |
| | (2) | $2 + 2 + 0 = 4$ | 4 |

g) Basisløsninger fra ikke-tillatte hjørnepunktløsninger

$(8, 0) \rightarrow \quad s_1 = 8 - 8 = 0 \quad , \quad s_2 = 4 - 8 + 0 = -4$

$(0, 4) \rightarrow \quad s_1 = 8 - 3 \cdot 4 = -4 \quad , \quad s_2 = 4 - 4 = 0$

| Basisvariable | Verdi | Ikke-basisvariable |
|---|---|---|
| $x_1, s_2$ | $8, -4$ | $x_2, s_1$ |
| $x_2, s_1$ | $4, -4$ | $x_2, s_2$ |

h)

| $(x_1, x_2, s_1, s_2)$ | Ligning | Venstre side | Høyre side |
|---|---|---|---|
| $(8, 0, 0, -4)$ | (1) | $8 + 3 \cdot 0 + 0 = 8$ | 8 |
| | (2) | $8 + 0 - 4 = 4$ | 4 |
| $(0, 4, -4, 0)$ | (1) | $0 + 3(4) - 4 = 8$ | 8 |
| | (2) | $0 + 4 + 0 = 4$ | 4 |

i) (0) $z - 3x_1 - 5x_2 = 0$

(1) $x_1 + 3x_2 + s_1 = 8$

(2) $x_1 + x_2 + s_2 = 4$

Basic variables: $s_1, s_2$ $\rightarrow$ $(0, 0, 8, 4)$

Iterasjon 1:

$$\begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ta $x_2$ inn i basis.

Minimum ratio test:

$x_2$ kan kun økes til $\min\left\{\frac{8}{3}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{8}{3}$

$s_1$ forlater basis.

Iterasjon 2:

$$\begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & 0 & 40/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

$x_1$ kan økes til $\min\left\{\frac{8/3}{1/3} = 8, \frac{4/3}{2/3} = 2\right\} = 2$

$s_2$ forlater basis.

Iterasjon 3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \end{array} \\ \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Optimal løsning funnet: $x_1 = 2,\ x_2 = 2$.

j) Simplex i tabellform.

| Basisvar. | Ligning | Z | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | Høyre side | Forholdstest |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | (0) | 1 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | |
| $S_1$ | (1) | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 8 | $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ |
| $S_2$ | (2) | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | $\frac{4}{1} = 4$ |
| Z | (0) | 1 | −4/3 | 0 | 5/3 | 0 | 40/3 | |
| $X_2$ | (1) | 0 | 1/3 | 1 | 1/3 | 0 | 8/3 | $\frac{8/3}{1/3} = 8$ |
| $S_2$ | (2) | 0 | 2/3 | 0 | −1/3 | 1 | 4/3 | $\frac{4/3}{2/3} = 2$ |
| Z | (0) | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 16 | |
| $X_2$ | (1) | 0 | 0 | 1 | 1/2 | −1/2 | 2 | |
| $X_1$ | (2) | 0 | 1 | 0 | −1/2 | 3/2 | 2 | |

Optimal løsning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.