Oppg. 3

a) Matematisk modell:

- N er settet av alle noder i nettverket.
- La B være settet av alle buer i nettverket.
- La X være slik at $x_{ij} = 1$ dersom buen (i,j) er med i spenntreet, 0 ellers.
- La C_{ij} være kostnaden ved å traversere buen $(i,j) \in B$.

Ønsker da å finne

$$\min_{X} \sum_{(i,j)\in B} C_{ij} x_{ij}$$

Slik at

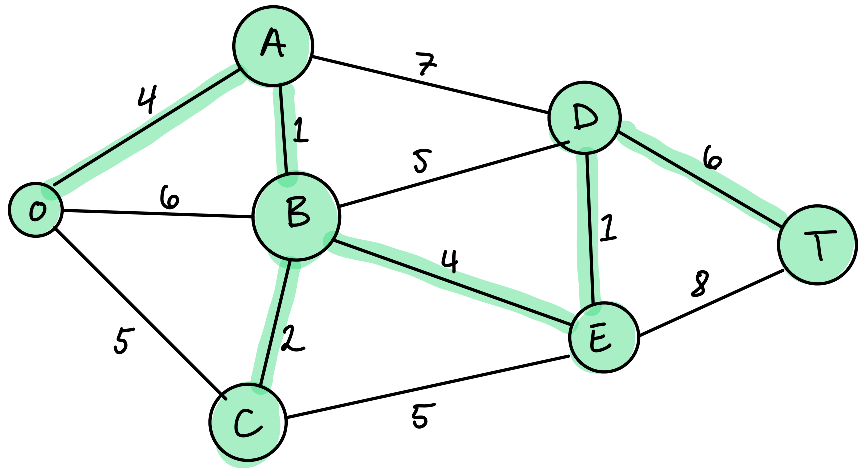
(1) $$\sum_{(i,j)\in B} x_{ij} = N - 1$$

(2) $$\sum_{i\in N'} \sum_{j\in N'} x_{ij} \leq |N'| - 1 \quad \text{der} \quad N' \in N$$

Forklaring:

- Å minimere objektivfunksjonen vil si å minimere den totale kostnaden i spenntreet vi ender opp med. Dette gjør at vi finner et minimalt spenntre.
- Begrensning (1) gjør at spenntreet får riktig antall kanter.
- Begrensning (2) gjør at ingen delgraf i nettverket har for mange kanter. Sammen med (1) tvinger dette X til å danne et spenntre.

b)



Bruker Prims algoritme:

1. Velger tilfeldig startnode: D

2. Har et sett med "fargede" noder: $S = \{D\}$,

og et sett med de resterende nodene: $\bar{S} = \{A, B, C, E, O, T\}$

Legger til den billigste kanten mellom en node i S og en node i $\bar{S}$: $D \rightarrow E$

Flytter E over i S.

3. Fortsetter som i steg 2.

$S = \{D, E\}$

Velger kant $E \rightarrow B$

4. $S = \{D, E, B\}$

Velger kant $B \rightarrow A$

5. $S = \{D, E, B, A\}$

Velger kant $B \rightarrow C$

6. $S = \{D, E, B, A, C\}$

Velger kant $A \rightarrow O$

7. $S = \{D, E, B, A, C, O\}$

Velger kant $D \rightarrow T$

$\bar{S}$ er nå tomt og minimalt spenntre er funnet.

4.

a) For å ta hoyde for de to kildenodene kan vi innfore en dummy-kilde som kobles til de to kildene.

b) N : Alle noder i nettverket

$i = 1, \dots, |N|$: Indekser

B : Settet av alle buer i nettverket.

U_{ij} : Maks flyt for bue (i,j)

Forklaring:

$$\max \sum_{(i,j) \in B} x_{ij}$$

Maksimer total flyt i nettverket

slik at

$$\sum_{j \in N} (x_{ij} + x_{ji}) = 0 \quad , \quad i \in N \setminus \{s, n\}$$

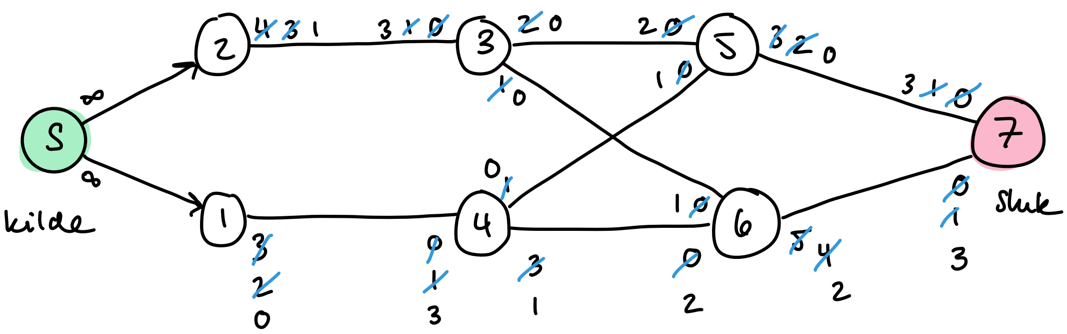
Alle noder, unntatt kilde og sluk, må ha like mye flyt ut som inn.

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad , \quad \forall (i,j) \in B$$

Flyt i hver bue må ikke overskride maksbegrensningen for den buen.

c)

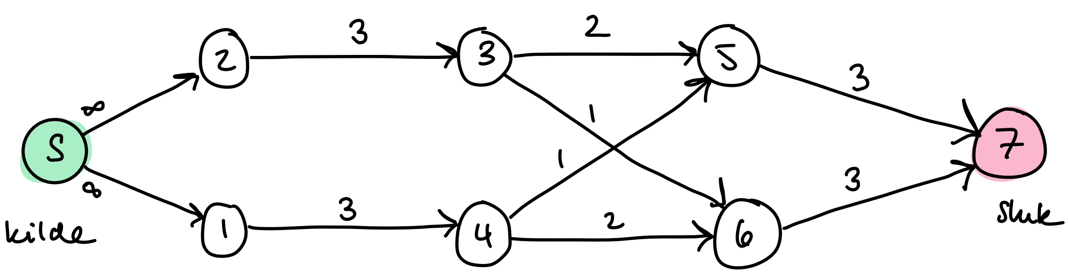
Residualnettverk:



Augmenting path:

		Residualkapasitet
1	1 → 4 → 5 → 7	1
2	2 → 3 → 6 → 7	1
3	1 → 4 → 6 → 7	2
4	2 → 3 → 5 → 7	2

Flyten i nettverket blir:



Man kan sende 6 enheter gass til kunden.

5.

a)

D_i : tilbud / etterspørsel node i.

C_{ij} : kostnad bue (i,j)

U_{ij} : maks flyt bue (i,j)

X : x_{ij} er flyt i bue (i,j).

B : Settet av alle buer i nettverket

Forklaring:

$$\min_{X} \sum_{(i,j)\in B} C_{ij} x_{ij}$$

Vil finne X slik at total kostnad for flyt i nettverket blir minimert.

slik at:

$$\sum_{i\in N} (x_{ij} + x_{ji}) = D_i, \quad j \in N$$

Sum av flyt inn og ut av en node må være lik tilbudet D_i i noden. Altså netto flyt ut for tilbudsnoder, netto negativ flyt ut for etterspørselnoder, netto null flyt ut for transshipment-noder.

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij}, \quad \forall (i,j) \in B$$

Flyten i enhver bue i nettverket må være ikke-negativ og under maksgrensen for buen.

b) Sammenhengen mellom min-cost og shortest-path er at shortest path kan finnes ved å sette tilbudet i startnoden til 1, etterspørselen i sluttnoden til 1, og alle buekostnader til 1 og deretter løse som et min-cost problem.

c) Max-flow-problemet kan løses som et min-cost-problem ved å

- Gi alle buer kostnad 0.
- Gi kilden tilbud $D_s = F$, og sluket tilbud $D_n = -F$, der F er større enn maks flyt i nettverket.
- Lage en bue mellom kilde og sluk. Ikke sette noen maksgrense (altså $U_{sn} = \infty$), men gi buen en kostnad.

Da vil vi få maks flyt gjennom buene i nettverket med kostnad 0, og resten av tilbud/etterspørsel F blir dekket gjennom buen direkte fra kilde til sluk.
Løsningen på min-cost blir også løsningen på max-flow.