# 1 Allgemeines

## 1.1 Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

## 1.2 Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\qquad (a^n)^m = a^{mn}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$log_b(1) = 0$

## 1.3 Logarithmus-Gesetze

$x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$
$log(x)+log(y) = log(xy)$
$log(x)-log(y) = log(\frac{x}{y})$
$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
$log(u^r) = r\cdot ln(u)$

$ln(1) = 0$ $\qquad ln(e^x) = x$
$ln(e) = 1$ $\qquad e^{ln(x)} = x$

## 1.4 Komplexe Zahlen

$(a+bi)\pm(c+di) = (a\pm c)+(c\pm d)i$
$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

## 1.5 Sin-Cos-Tan Tabelle

| $x$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Grad* | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

# 2 Integralrechnung

$e^{Foo}$ u.ä. muss vorher substituiert werden!

| Funktion | Aufleitung |
|---|---|
| $c$ | $c\cdot x$ |
| $x^a, a\neq -1$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ |
| $x^{-1}, x\neq 0$ | $ln(\|x\|)$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{ln(a)}$ |
| $sin(x)$ | $-cos(x)$ |
| $cos(x)$ | $sin(x)$ |

## 2.1 Partielle Integration

Wenn $u$ und $v$ zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
$\int u'\cdot v = (u\cdot v) - \int u\cdot v'$

## 2.2 Substitutionsregel

$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(y)dy$

$$\int \frac{1}{5x-7}dx = ?$$
$$z = 5x-7$$
$$\frac{dz}{dx} = 5$$
$$\frac{dz}{5} = dx$$
$$\int \frac{1\cdot dz}{z\cdot 5} = \frac{1}{5}\int\frac{1}{z}dz$$
$$= \frac{1}{5}ln(z)$$
$$= \frac{1}{5}ln(5x-7)$$

# 3 Ableitung

## 3.1 typische Ableitungen

$(x)' = 1$ $\qquad (e^x)' = e^x$
$(ax)' = a$ $\qquad (a^x)' = a^x * log(a)$
$(ax^2)' = 2ax$ $\qquad ln(x)' = \frac{1}{x}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad (\sin x) = \cos x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\cos x) = -\sin x$
$(ax^b)' = abx^(b-1)$ $\qquad (\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

## 3.2 Verknüpfungsfunktionen

$$\begin{aligned}
&Summenregel:\\
&(f(x)+g(x))' = f(x)'+g(x)'\\
&Produktregel:\\
&(f(x)g(x))' = f(x)'g(x)+g(x)'f(x)\\
&Quotientenregel:\\
&(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)'g(x)-g(x)'f(x)}{g(x)^2}\\
&Kettenregel:\\
&(f(g(x)))' = f(g(x))'g(x)'
\end{aligned}$$

# 4 Stochastik

$\Omega = \{...\}$ beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.
$A,B,C,... \subseteq \Omega$ beschrieben ein Ereignisse des Zufallsexperimentes.
$P:\Omega\to\mathbb{R}$ ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

## 4.1 Gesetze/Axiome/...

$$\begin{aligned}
P(A) &> 0 \text{ für alle } A\subset\Omega\\
P(\Omega) &= 1\\
P(A_1\cap A_2) &= P(A_1)\cdot P(A_2), A_1\cap A_2 = \emptyset\\
P(A_1\cup A_2) &= P(A_1)+P(A_2), A_1\cap A_2 = \emptyset\\
P(\Omega\backslash A) &= 1-P(A)\\
P(\emptyset) &= 0\\
A\subseteq B &\iff P(A)\leq P(B)\\
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}\\
P(A\cap B) &= P(B)\cdot P(A|B)\\
&= P(A)\cdot P(B|A)\\
P_B(A) &= P(A|B)
\end{aligned}$$

## 4.2 Dichtefunktion

$w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.
Es gilt: $\int_{-\infty}^{x} w(t)dt = F(x) = P(X\leq x)$

## 4.3 Verteilungsfunktion

$F:\mathbb{R}\to[0,1]$ heißt Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion ist Aufleitung der Dichtefunktion.
F ist rechtsseitig stetig und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= 0\\
\lim_{x\to\infty} F(x) &= 1\\
P(X\geq x) &= 1-P(X\leq x)\\
&= \int_x^\infty w(t)dt\\
P(a\leq X\leq b) &= P(X\leq b)-P(X\leq a)\\
&= F(b)-F(a)\\
&= \int_a^b w(t)dt
\end{aligned}$$

## 4.4 Formeln

E = Erwartungswert, V = Varianz

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\cdot P(X=x)\\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot w(x)dx\\
V(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-E(X))^2\cdot P(X=x)\\
&= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)\right)-E(X)^2\\
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot w(x)dx\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)dx\right)-E(X)^2
\end{aligned}$$

**p-Quantile:**
Sortieren, $n\cdot p$, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:

$$\widetilde{x}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{np}+x_{np+1}) & \text{falls } n \text{ ganzz.}\\ x_{\lceil np\rceil} & \text{falls } n \text{ nicht ganzz.}\end{cases}$$

## 4.5 Verschiedene Verteilungen

### 4.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit $P(x_i) = \frac{1}{6}$.

$$P(X=x_i) = \frac{1}{N}$$

Dabei ist $N = |\Omega|$ und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

### 4.5.2 Binominialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge $A$ und $B$ hat. Eine **Binominialverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

$$\begin{aligned}
X &= B(n,p)\\
\Omega &= \{A,B\}^n\\
P(A) &= p\\
P(B) &= 1-p = q
\end{aligned}$$

Es ist ein **LaPlace**-Experiment, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 4.5.3 Hypergeometrische Verteilung

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = Defekte

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

### 4.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$\begin{aligned}
X &= P(\lambda)\\
\Omega &= \{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}\\
P(X=k) &= \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$, eine Binominialverteilung annähren.

$$X = B(n,p)$$
$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X=k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

## 4.6 Normalverteilung

$N(\mu,\sigma^2)$ ist eine Normalverteilung. Für $\mu = 1$ und $\sigma = 1$ ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$
$$P(a \leq x \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Für $\Phi$ siehe Standardnormalverteilungstab.

Wenn gilt, dass $X = N(\mu,\sigma^2)$ und $Z = N(0,1)$, dann folgt $\frac{X-\mu}{\sigma}$.
$X_B$ ist binominalverteilt. Wenn $np(1-p) \geq 9$, dann $F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.
$X_P$ ist possionverteilt. Wenn $\lambda \geq 9$, dann $F_P(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

## 4.7 Tabelle Erwartungswert/Varianz

| | $E(x)$ | $V(x)$ |
|---|---|---|
| $B(n,p)$ | $n \cdot p$ | $n \cdot (1-p)$ |
| $H(n,M,N)$ | $n \cdot \frac{M}{N}$ | $n \cdot \frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$ |
| $P(\lambda)$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $N(x)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |

# 5 Numerik

## 5.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$$
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

## 5.2 Newton'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$$
$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)$$

Auflösen nach $a$ für die einzelnen Faktoren:

$$y_0 = a_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1(x_1-x_0)$$
$$y_2 = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

## 5.3 Newton-Cotes-Formeln

a = untere Grenze
b = obere Grenze
$\alpha_{i,n}$ Tabelle:

| n | $i=0$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/2 | | |
| 2 | 1/3 | 4/3 | 1/3 | |
| 3 | 3/8 | 9/8 | 9/8 | 3/8 |

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_i = a + i \cdot h$$
$$p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$$

## 5.4 QR-Zerlegung

Seien $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ mit $m \geq n$ und $rg(A) = n$. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von $A$.
Die Vektoren $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$$
$$u_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < u_j, a_i > \cdot u_j$$
$$u_i = \frac{u_i'}{|u_i'|}$$

$$Q = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$Q^{-1} \cdot A = R$$

## 5.5 LU-Zerlegung

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:

Step 1: L1 Matrix aufbauen:
$x \in \{1,2\}$
$L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$
Step 2: $\tilde{A} = L1 \cdot A$
Step 3: L2 Matrix aufbauen:
$L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$
Step 4: $U = L2 \cdot \tilde{A}$
Step 5: $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

### 5.5.1 Lösung von PLUx = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$$P = Einheitsmatrix$$

Lineares Gleichungssystem:

$$Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1}$$
$$Ux = y$$

## 5.6 Cholesky-Zerlegung

Eine symmetrische Matrix ist die Voraussetzung für eine Cholesky-Zerlegung. Wir wollen eine Matrix $L$ finden, für die gilt, dass $A = L \cdot L^T$. L sollte dabei eine Dreiecksmatrix sein, damit gilt, dass $L^T = L^{-1}$
**TODO: Beispiel einfügen**

## 5.7 Matrixnormen

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} x_i$$
$$A \in R^{n\times n}$$
$$|A|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{ Spaltens.}$$
$$|A|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ Zeilens.}$$

# 6 Differentialgleichung

## 6.1 DGL 1. Ordnung

### 6.1.1 Variation der Konstanten

- Alle Ableitungen $y'$ umformen: $y' = \frac{dy}{dx}$
- Umstellen durch Integration und $e^{ln(x)}$-Trick nach $y$

## 6.2 Anfangswertproblem

Wir haben unsere aufgelöste DGL: $y = C_1 \cdot \ldots$ Beim AWP haben wir eine Zusatzbedingung, die ähnlich zu $y(0) = 2$ ist. AWP löst sich, indem wir einsetzen und zur Konstante umformen.

## 6.3 DGL 2. Ordnung

Eine DGL kann eine Störfunktion enthalten. Störfunktionen sind für den inhomogenen Teil der Lösung verantwortlich. Jeder Teil, welcher nicht abhängig von $y^{(n)}$ ist, ist eine Störfunktion. $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

### 6.3.1 Charakteristisches Polynom

Umformen der Ableitungen: $y^{(n)} = \lambda^n$ Anschließend werden die Lösungen für $\lambda$ bestimmt.
Einfache Nullstelle:
$e^{\lambda \cdot x}$
k-fache Nullstelle:
$x^{k-1} e^{\lambda x}$
Komplexe Nullstelle:
$(a \pm bi) \rightarrow e^{ax} \cdot sin(b), e^{ax} \cdot cos(b)$
Bsp.: $y_h(t) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{4x}$
Bei inhomogenen DGL muss ein Ansatz gefunden werden, der zur Lösung führt, wenn man ihn samt Ableitungen in die ursprüngliche DGL einsetzt.

1. Aufstellen des Ansatzes für $y = \{Ansatz\}$
2. Ableiten und Einsetzen als homogenen Teil der DGL.
3. Parameter des Ansatzes ausrechnen und als $y_p$ angeben.