1 Allgemeines

1.1 Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

1.2 Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\quad$ $(a^n)^m = a^{mn}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$log_b(1) = 0$

1.3 Logarithmus-Gesetze

$x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$
$log(x)+log(y) = log(xy)$
$log(x)-log(y) = log(\frac{x}{y})$
$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
$log(u^r) = r \cdot ln(u)$

$ln(1) = 0$ $\quad$ $ln(e^x) = x$
$ln(e) = 1$ $\quad$ $e^{ln(x)} = x$

1.4 Komplexe Zahlen

$(a+bi)\pm(c+di) = (a\pm c)+(c\pm d)i$
$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

2 Integralrechnung

e^{Foo} u.ä. muss vorher substituiert werden!

Funktion	Aufleitung
c	$c\cdot x$
$x^a, a\neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x^{-1}, x\neq 0$	$ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{ln(a)}$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$

2.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
$\int u'\cdot v = (u\cdot v) - \int u\cdot v'$

2.2 Substitutionsregel

$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(y)dy$

$$\int \frac{1}{5x-7}dx = ?$$
$$\begin{aligned}
z &= 5x-7\\
\frac{dz}{dx} &= 5\\
\frac{dz}{5} &= dx\\
\int\frac{1\cdot dz}{z\cdot 5} &= \frac{1}{5}\int\frac{1}{z}dz\\
&= \frac{1}{5}ln(z)\\
&= \frac{1}{5}ln(5x-7)
\end{aligned}$$

3 Ableitung

3.1 typische Ableitungen

$(x)' = 1$ $\quad$ $(e^x)' = e^x$
$(ax)' = a$ $\quad$ $(a^x)' = a^x * log(a)$
$(ax^2)' = 2ax$ $\quad$ $ln(x)' = \frac{1}{x}$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad$ $(\sin x) = \cos x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $(\cos x) = -\sin x$
$(ax^b)' = abx^(b-1)$ $\quad$ $(\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

3.2 Verknüpfungsfunktionen

Summenregel:
$(f(x)+g(x))' = f(x)'+g(x)'$
Produktregel:
$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x)+g(x)'f(x)$
Quotientenregel:
$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)'g(x)-g(x)'f(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel:
$(f(g(x)))' = f(g(x))'g(x)'$

4 Stochastik

$\Omega = \{...\}$ beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.
$A, B, C, ... \subseteq \Omega$ beschrieben ein Ereignisse des Zufallsexperimentes.
$P: \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

4.1 Gesetze/Axiome/...

$$\begin{aligned}
P(A) &> 0 \text{ für alle } A\subset\Omega\\
P(\Omega) &= 1\\
P(A_1\cap A_2) &= P(A_1)\cdot P(A_2), A_1\cap A_2 = \emptyset\\
P(A_1\cup A_2) &= P(A_1)+P(A_2), A_1\cap A_2 = \emptyset\\
P(\Omega\backslash A) &= 1-P(A)\\
P(\emptyset) &= 0\\
A\subseteq B &\iff P(A)\leq P(B)\\
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\
&= \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}\\
P(A\cap B) &= P(B)\cdot P(A|B)\\
&= P(A)\cdot P(B|A)\\
P_B(A) &= P(A|B)
\end{aligned}$$

4.2 Dichtefunktion

$w: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.
Es gilt: $\int_{-\infty}^x w(t)dt = F(x) = P(X\leq x)$

4.3 Verteilungsfunktion

$F: \mathbb{R}\to[0,1]$ heißt Verteilungsfunktion.
Verteilungsfunktion ist Aufleitung der Dichtefunktion.
F ist rechtsseitig stetig und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= 0\\
\lim_{x\to\infty} F(x) &= 1\\
P(X\geq x) &= 1-P(X\leq x)\\
&= \int_x^\infty w(t)dt\\
P(a\leq X\leq b) &= P(X\leq b)-P(X\leq a)\\
&= F(b)-F(a)\\
&= \int_a^b w(t)dt
\end{aligned}$$

4.4 Formeln

E = Erwartungswert, V = Varianz

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\cdot P(X=x)\\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot w(x)dx\\
V(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-E(X))^2\cdot P(X=x)\\
&= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)\right)-E(X)^2\\
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot w(x)dx\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2 w(x)dx\right)-E(X)^2
\end{aligned}$$

p-Quantile:
Sortieren, $n\cdot p$, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:

$$\widetilde{X}_p = \begin{cases}\frac{1}{2}(x_{np}+x_{np+1}) & \text{falls } n \text{ ganzz.}\\ x_{\lceil np\rceil} & \text{falls } n \text{ nicht ganzz.}\end{cases}$$

4.5 Verschiedene Verteilungen

4.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit $P(x_i) = \frac{1}{6}$.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

Dabei ist $N = |\Omega|$ und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

4.5.2 Binominialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge A und B hat. Eine **Binominialverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

$$\begin{aligned}
X &= B(n,p)\\
\Omega &= \{A,B\}^n\\
P(A) &= p\\
P(B) &= 1-p = q
\end{aligned}$$

Es ist ein **LaPlace**-Experiment, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4.5.3 Hypergeometrische Verteilung

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = gewünschte Eigenschaft

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$\begin{aligned}
X &= P(\lambda)\\
\Omega &= \{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}\\
P(X=k) &= \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n\geq 50$ und $p\leq 0.1$, eine Binominialverteilung annähren.

$$\begin{aligned}
X &= B(n,p)\\
\lambda &= n\cdot p
\end{aligned}$$

$$P(X=k) \sim \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

4.6 Normalverteilung

$N(\mu,\sigma^2)$ ist eine Normalverteilung. Für $\mu = 1$ und $\sigma = 1$ ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$
$$P(a\leq x\leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Für Φ siehe Standardnormalverteilungstabelle.
Wenn $\Phi(-x)$, dann $1-\Phi(x)$

Wenn gilt, dass $X = N(\mu, \sigma^2)$ und $Z = N(0,1)$, dann folgt $\frac{X-\mu}{\sigma}$.
X_B ist binominalverteilt. Wenn $np(1-p) \geq 9$, dann $F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.
X_P ist possionverteilt. Wenn $\lambda \geq 9$, dann $F_P(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

4.7 Tabelle Erwartungswert/Varianz

	$E(x)$	$V(x)$
$B(n,p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$
$H(n,M,N)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$
$P(\lambda)$	λ	λ
$N(x)$	μ	σ^2

4.8 Konfidenzintervall

$Vertrauensgrad = 1-\alpha$

4.8.1 Normalverteilung

$[\frac{k}{n} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{k}{n} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
z Werte in Normalverteilungstabelle nachschlagen.

4.8.2 T-Verteilung

Keine Varianz gegeben. Stichprobe muss vorhanden sein.
$\bar{x} = \text{arithmetisches Mittel} = \frac{\sum x}{n}$
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$
$[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
T Werte in T-Verteilungstabelle nachschlagen.

5 Numerik

5.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$$

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren:

$$y_0 = a_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$
$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

5.2.1 Newton-Verfahren für Nullstellen

Voraussetzung: Muss stetig sein (hinschreiben!)
stetig = an jeder Stelle definiert
Allgemeine Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5.3 Newton-Cotes-Formeln

a = untere Grenze
b = obere Grenze
$\alpha_{i,n}$ Tabelle:

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	1/2	1/2		
2	1/3	4/3	1/3	
3	3/8	9/8	9/8	3/8

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_i = a + i \cdot h$$
$$p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$$

5.4 Sekanten-Verfahren

Nur bei stetigem Intervall bestimmen

1. Startwerte bestimmen: x_0 und x_1
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

5.5 QR-Zerlegung

Seien $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ mit $m \geq n$ und $rg(A) = n$.
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A.
Die Vektoren $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$$
$$u_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < u_j, a_i > \cdot u_j$$
$$u_i = \frac{u_i'}{|u_i'|}$$

$$Q = (u_1, u_2, ..., u_n)$$
$$Q^{-1} \cdot A = R$$

5.6 LU-Zerlegung

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:
Step 1: L1 Matrix aufbauen:
$x \in \{1,2\}$
$L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$
Step 2: $\tilde{A} = L1 \cdot A$
Step 3: L2 Matrix aufbauen:
$L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$
Step 4: $U = L2 \cdot \tilde{A}$
Step 5: $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

5.6.1 Lösung von PLUx = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$$P = Einheitsmatrix$$
Lineares Gleichungssystem:
$$Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1}$$
$$Ux = y$$

5.7 Jacobi-Verfahren

Voraussetzungen: (Schwach) Diagonaldominant und Diagonalelemente nicht null. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen.

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

Um dieses zu lösen, wird die i-te Gleichung nach der i-ten Variablen x_i aufgelöst,
$x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}\cdot x_j^{(m)}\right), i = 1, \ldots, n$
und diese Ersetzung, ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$, iterativ wiederholt.

5.8 Cholesky-Zerlegung

Voraussetzung: symmetrische Matrix & Determinante jeder Teilmatrix > 0
$A = GG^T$

$$A = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

5.9 Matrixnormen

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

...

6 Differentialgleichung

6.1 DGL 1. Ordnung

6.1.1 Variation der Konstanten

- Alle Ableitungen y' umformen: $y' = \frac{dy}{dx}$
- Umstellen durch Integration und $e^{ln(x)}$-Trick nach y

6.2 Anfangswertproblem

Wir haben unsere aufgelöste DGL: $y = C_1 \cdot \ldots$ Beim AWP haben wir eine Zusatzbedingung, die ähnlich zu $y(0) = 2$ ist. AWP löst sich, indem wir einsetzen und zur Konstante umformen.

6.3 DGL 2. Ordnung

Eine DGL kann eine Störfunktion enthalten. Störfunktionen sind für den inhomogenen Teil der Lösung verantwortlich. Jeder Teil, welcher nicht abhängig von $y^{(n)}$ ist, ist eine Störfunktion.
$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

6.3.1 Charakteristisches Polynom

Umformen der Ableitungen: $y^{(n)} = \lambda^n$
Anschließend werden die Lösungen für λ bestimmt.
Einfache Nullstelle:
$e^{\lambda \cdot x}$
k-fache Nullstelle:
$x^{k-1}e^{\lambda x}$
Komplexe Nullstelle:
$(a \pm bi) \rightarrow e^{ax} \cdot sin(b), e^{ax} \cdot cos(b)$
Bsp.: $y_h(t) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{4x}$
Bei inhomogenen DGL muss ein Ansatz gefunden werden, der zur Lösung führt, wenn man ihn samt Ableitungen in die ursprüngliche DGL einsetzt.

1. Aufstellen des Ansatzes für $y = \{\text{Ansatz}\}$
2. Ableiten und Einsetzen als homogenen Teil der DGL.
3. Parameter des Ansatzes ausrechnen und als y_p angeben.

7 Sin-Cos-Tan Tabelle

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$
Grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$