1 Allgemeines

1.1 Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$(a^n)^m = a^{mn}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
	$log_b(1) = 0$

1.2 Logarithmus-Gesetze

$x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$
$log(x) + log(y) = log(xy)$
$log(x) - log(y) = log(\frac{x}{y})$
$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
$log(u^r) = r \cdot ln(u)$

$ln(1) = 0$	$ln(e^x) = x$
$ln(e) = 1$	$e^{ln(x)} = x$

1.3 Komplexe Zahlen

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (c \pm d)i$
$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i$$

2 Integralrechnung

e^{Foo} u.ä. muss vorher substituiert werden!

Funktion	Aufleitung
c	$c \cdot x$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x^{-1}, x \neq 0$	$ln(\|x\|)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{ln(a)}$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$

2.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:

$\int u' * v = (u * v) - \int u * v'$

2.2 Substitutionsregel

$\int f(g(x)) * g'(x)dx = \int f(y)dy$

$$\int \frac{1}{5x - 7}dx = ? \tag{1}$$
$$z = 5x - 7 \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dx} = 5 \tag{3}$$
$$\frac{dz}{5} = dx \tag{4}$$
$$\int \frac{1 * dz}{z * 5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{z}dz \tag{5}$$
$$= \frac{1}{5}ln(z) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{5}ln(5x - 7) \tag{7}$$

3 Numerik

3.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$$
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3.2 Newton'sches Interpolationspolynom

$n = \text{Anzahl der Stützstellen}$
$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$
Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren
$y_0 = a_0$
$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$
$y_2 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)$

3.3 QR-Zerlegung

Seien $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ mit $m \geq n$ und $rg(A) = n$.
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A.
Die Vektoren $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|}a_1$$
$$u_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < u_j, a_i > \cdot u_j$$
$$u_i = \frac{u_i'}{|u_i'|}$$

$$Q = (u_1, u_2, ..., u_n)$$
$$Q^{-1} \cdot A = R$$

3.4 LU-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Wir initialisieren drei Matrizen: $P = L = I_m$ und $A = U$.
Zeilenvertauschungen werden über die P-Matrix realisiert.
Jede Operation, welche im Gauß gemacht wird, wird auf der L-Matrix mit gedrehtem Vorzeichen gemacht.
Am Ende gilt, dass $PLU = A$.

3.4.1 Lösung von PLUx = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$$Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1}$$
$$Ux = y$$

3.5 Cholesky-Zerlegung

Eine symmetrische Matrix ist die Voraussetzung für eine Cholesky-Zerlegung. Wir wollen eine Matrix L finden, für die gilt, dass $A = L \cdot L^T$. L sollte dabei eine Dreiecksmatrix sein, damit gilt, dass $L^T = L^{-1}$

TODO: Beispiel einfügen

4 Differentialgleichungen

4.1 DGL 1. Ordnung

4.1.1 Variation der Konstanten

- Alle Ableitungen y' umformen: $y' = \frac{dy}{dx}$
- Umstellen durch Integration und $e^{ln(x)}$-Trick nach y

4.2 Anfangswertproblem

Wir haben unsere aufgelöste DGL: $y = C_1 \cdot ...$
Beim AWP haben wir eine Zusatzbedingung, die ähnlich zu $y(0) = 2$ ist. AWP löst sich, indem wir einsetzen und zur Konstante umformen.

4.3 DGL 2. Ordnung

Eine DGL kann eine Störfunktion enthalten. Störfunktionen sind für den inhomogenen Teil der Lösung verantwortlich. Jeder Teil, welcher nicht abhängig von $y^{(n)}$ ist, ist eine Störfunktion. $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

4.3.1 Charakteristisches Polynom

Umformen der Ableitungen: $y^{(n)} = \lambda^n$ Anschließend werden die Lösungen für λ bestimmt.

Einfache Nullstelle:
$e^{\lambda \cdot x}$
k-fache Nullstelle:
$x^{k-1}e^{\lambda x}$
Komplexe Nullstelle:
$(a \pm bi) \rightarrow e^{ax} \cdot sin(b), e^{ax} \cdot cos(b)$

Bsp.: $y_h(t) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{4x}$

Bei inhomogenen DGL muss ein Ansatz gefunden werden, der zur Lösung führt, wenn man ihn samt Ableitungen in die ursprüngliche DGL einsetzt.

TODO: Beispiel