

1 Allgemeines

1.1 Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

1.2 Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (a^n)^m = a^{mn}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\log_b(1) = 0$$

1.3 Logarithmus-Gesetze

$$x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$$
$$\log(x) + \log(y) = \log(xy)$$
$$\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$
$$\log(u^r) = r \cdot \ln(u)$$

$$\ln(1) = 0 \quad \ln(e^x) = x$$
$$\ln(e) = 1 \quad e^{\ln(x)} = x$$

1.4 Komplexe Zahlen

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$
$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

2 Integralrechnung

e^{foo} u.ä. muss vorher substituiert werden!

Funktion	Aufleitung
0	C
a	$a \cdot x + C$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$x^{-1}, x \neq 0$	$\ln(x) + C$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

2.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:

$$\int u' \cdot v = (u \cdot v) - \int u \cdot v'$$

2.2 Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) dy$$

$$\int \frac{1}{5x-7} dx = ?$$
$$u = 5x - 7$$
$$u' = \frac{du}{dx}$$
$$5 = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{du}{5} = dx$$
$$\int \frac{1 \cdot du}{u \cdot 5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{u} du$$
$$= \frac{1}{5} \ln(u)$$
$$= \frac{1}{5} \ln(5x - 7)$$

3 Ableitung

3.1 typische Ableitungen

$$(x)' = 1 \quad (e^x)' = e^x$$
$$(ax)' = a \quad (e^{ax})' = ae^{ax}$$
$$(ax^2)' = 2ax \quad (a^x)' = a^x \cdot \log(a)$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \ln(x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\sin x)' = \cos x$$
$$(ax^b)' = abx^{b-1} \quad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

3.2 Verknüpfungsfunktionen

Summenregel:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

4 Stochastik

$\Omega = \{\dots\}$ beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.

$A, B, C, \dots \subseteq \Omega$ beschreiben ein Ereignis des Zufallsexperimentes.

$P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet

alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

4.1 Gesetze/Axiome/...

$$P(A) > 0 \text{ für alle } A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$A \subseteq B \iff P(A) \leq P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$= P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P_B(A) = P(A|B)$$

4.2 Dichtefunktion

$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.

Es gilt: $\int_{-\infty}^x w(t) dt = F(x) = P(X \leq x)$

4.3 Verteilungsfunktion

$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ heißt Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion ist Aufleitung der Dichtefunktion.

F ist rechtsseitig stetig und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= \int_x^{\infty} w(t) dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b w(t) dt$$

4.4 Formeln

E = Erwartungswert, V = Varianz

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$$

$$= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \cdot P(X = x) \right) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot w(x) dx$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx \right) - E(X)^2$$

p-Quantile:

Sortieren, $n \cdot p$, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:

$$\tilde{X}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}) & \text{falls } n \text{ ganzz.} \\ x_{\lceil np \rceil} & \text{falls } n \text{ nicht ganzz.} \end{cases}$$

4.5 Verschiedene Verteilungen

4.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit $P(x_i) = \frac{1}{6}$.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

Dabei ist $N = |\Omega|$ und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

4.5.2 Binomialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge A und B hat. Eine **Binomialverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n -Mal, wiederholt werden.

$$X = B(n, p)$$

$$\Omega = \{A, B\}^n$$

$$P(A) = p$$

$$P(B) = 1 - p = q$$

Es ist ein **LaPlace-Experiment**, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4.5.3 Hypergeometrische Verteilung

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = gewünschte Eigenschaft

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$X = P(\lambda)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$, eine Binomialverteilung annähern.

$$X = B(n, p)$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X = k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

4.6 Normalverteilung

$N(\mu, \sigma^2)$ ist eine Normalverteilung. Für $\mu = 1$ und $\sigma = 1$ ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Für Φ siehe Standardnormalverteilungstabelle.

Wenn $\Phi(-x)$, dann $1 - \Phi(x)$

Wenn gilt, dass $X = N(\mu, \sigma^2)$ und $Z = N(0, 1)$, dann folgt $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

X_B ist binomialverteilt. Wenn $np(1-p)$

$p \geq 9$, dann $F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.
 X_p ist poissonverteilt. Wenn $\lambda \geq 9$, dann $F_p(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

4.7 Tabelle Erwartungswert/Varianz

	$E(x)$	$V(x)$
$B(n, p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$
$H(n, M, N)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$
$P(\lambda)$	λ	λ
$N(x)$	μ	σ^2

4.8 Konfidenzintervall

Vertrauensgrad = $1 - \alpha$

4.8.1 Normalverteilung

$\left[\frac{k}{n} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{k}{n} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
z Werte in Normalverteilungstabelle nachschlagen.

4.8.2 T-Verteilung

Keine Varianz gegeben. Stichprobe muss vorhanden sein.

\bar{x} = arithmetisches Mittel = $\frac{\sum x}{n}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$

$[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

T Werte in T-Verteilungstabelle nachschlagen.

5 Numerik

5.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

n = Anzahl der Stützstellen

$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$

$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

5.2 Newton'sches Interpolationspolynom

n = Anzahl der Stützstellen

$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$

Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren:

$y_0 = a_0$

$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

7 Sin-Cos-Tan Tabelle

x	0	$\frac{1}{6} \pi$	$\frac{1}{4} \pi$	$\frac{1}{3} \pi$	$\frac{1}{2} \pi$	$\frac{2}{3} \pi$	$\frac{3}{4} \pi$	$\frac{5}{6} \pi$	π	$\frac{7}{6} \pi$
Grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.3 Ausgleichsrechnung

A ist gegeben, n=Grad, x=Stützstellen

$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^T \cdot A \cdot c = A^T \cdot y$

Gleichungssystem lösen

5.3.1 Newton-Verfahren für Nullstellen

Voraussetzung: Muss stetig sein (hinschreiben!)

stetig = an jeder Stelle definiert

Allgemeine Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5.4 Newton-Cotes-Formeln

a = untere Grenze

b = obere Grenze

$\alpha_{i,n}$ Tabelle:

n	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
1	1/2	1/2		
2	1/3	4/3	1/3	
3	3/8	9/8	9/8	3/8

$h = \frac{b-a}{n}$

$x_i = a + i \cdot h$

$p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$

5.5 Sekanten-Verfahren

Nur bei stetigem Intervall bestimmen

- 1. Startwerte bestimmen: x_0 und x_1
- 2. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

5.6 QR-Zerlegung

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $rg(A) = n$.

Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A.

Die Vektoren $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die

Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$

$u'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_j, a_i \rangle \cdot u_j$

$u_i = \frac{u'_i}{|u'_i|}$

$Q = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$Q^{-1} \cdot A = R$

5.7 LU-Zerlegung

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:

Step 1: L1 Matrix aufbauen:

$x \in \{1, 2\}$

$L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$

Step 2: $\tilde{A} = L1 \cdot A$

Step 3: L2 Matrix aufbauen:

$L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$

Step 4: $U = L2 \cdot \tilde{A}$

Step 5: $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

5.7.1 Lösung von PLUX = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$P = \text{Einheitsmatrix}$

Lineares Gleichungssystem:

$Ly = P^T b$ mit $P^T = P^{-1}$

$Ux = y$

5.8 Jacobi-Verfahren

Voraussetzungen: (Schwach) Diagonaldominant und Diagonalelemente nicht null. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit

n Variablen und n Gleichungen.

$a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$

\vdots

$a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$

Um dieses zu lösen, wird die i-te Gleichung nach der i-ten Variablen x_i aufgelöst,

$x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, \dots, n$

und diese Ersetzung, ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$, iterativ wiederholt.

5.9 Cholesky-Zerlegung

Voraussetzung: symmetrische Matrix & Determinante jeder Teilmatrix > 0

$A = GG^T$

$A = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$

5.10 Matrixnormen

$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

...

6 Differentialgleichung

6.1 DGL 1. Ordnung

6.2 homogen

1. Trennung der Variablen

2. y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen

3. dx auf x Seite umstellen

4. Seiten jeweils integrieren
(+k₁, +k₂ → k₃)

5. Nach y umstellen (jeweils k++)

6.2.1 Variation der Konstanten (inhomogen)

Wenden wir an wenn wir die Variablen nicht geteilt bekommen:

$y' + b(x) \cdot y = 0$ für y_1

$y' + b(x) \cdot y = a(x)$ für y_2

$y_1 = c \cdot e^{\int b(x) dx}$

$y_2 = \int (a(x) e^{\int b(x) dx}) dx \cdot e^{-\int b(x) dx}$

$y(x) = y_1 + y_2 = \text{allgemeine Lösung}$

6.3 Anfangswertproblem

Siehe oben (homogen oder inhomogen)

6.4 DGL 2. Ordnung

1. Umstellen nach:

$y'' + a_0 \cdot y' + a_1 \cdot y = b(x)$

2. Fälle für a₀ und a₁ anschauen:

1 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 > a_1$

$\rightarrow y_1(x) = e^{\lambda_1 x},$

$y_2(x) = x e^{\lambda_2 x}$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2} \pm$

$\sqrt{(\frac{a_0}{2})^2 - a_1}$

2 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 = a_1$

$\rightarrow y_1(x) = e^{\lambda x},$

$y_2(x) = x e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2}$

3 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 < a_1$

$\rightarrow y_1(x) = \cos(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x},$

$y_2(x) = \sin(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x}$

mit $\lambda = -\frac{a_0}{2},$

$w = \sqrt{a_1 - \frac{a_0^2}{4}}$

3. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bestimmen:

$y_h = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$

4. Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen:

$y_p = w_1 \cdot y_1(x) + w_2 \cdot y_2(x)$

$w_{1/2} \rightarrow \text{Wronski Determinanten}$

$w_1(x) = \int -\frac{y_2(x) \cdot b(x)}{w(x)}$

$w_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot b(x)}{w(x)}$

$w(x)$: Fall 1: $(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$

Fall 2: $e^{2\lambda x}$

Fall 3: $w \cdot e^{\lambda x}$

5. Partikuläre Lösung: $y(x) = y_h + y_p$