Mathe III - Zusammenfassung

Johann Wagner

23. Januar 2017

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Zufallsexperiment

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang, der unter **gleichen** Bedingungen beliebig oft wiederholt werden kann. Die Menge **aller** möglichen Ereignisse ist der Ereignisraum Ω. Teilmengen des Ereignisraums heißen Ereignis ($A \subseteq \Omega$).

> *Bsp.: Das Zufallsexperiment ist ein Würfel. Der Würfel hat einen Ereignisraum* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*.*
> *Das Würfeln einer geraden Zahl ist das Ereignis* $A = \{2,4,6\}$*.*

$$
\begin{aligned}
|A| = 1 &\rightarrow \text{Elementarereignis} \\
A = \Omega &\rightarrow \text{Sicheres Ereignis} \\
A = \emptyset &\rightarrow \text{Unmögliches Ereignis} \\
A \cap B = \emptyset &\rightarrow \text{Disjunkte Ereignisse} \\
\bar{A} = \Omega \backslash A &\rightarrow \text{Gegenereignis}
\end{aligned}
$$

1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

Annahmen: $|\Omega| = |\mathbb{N}|, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}, \Omega = \{\omega_i | i \in \mathbb{N}\}$
Ein Abbildung $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum, wenn gilt:

$$P(A) > 0 \text{ für alle } A \subset \Omega \tag{1}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), A_1 \cap A_2 = \emptyset \tag{3}$$

Das **Tupel** (Ω, P) ist dann ein **Wahrscheinlichkeitsraum** mit der **Ereignismenge** Ω und dem **Wahrscheinlichkeitsmaß** P. Eine **Wahrscheinlichkeit** gibt also an, wie oft ein Ergebnis **ungefähr** eintritt, wenn man das Zufallsexperiment nur lange genug wiederholt.

> *Der einfachste Wahrscheinlichkeitsraum ist ein LaPlace-Experiment.* Ω *ist eine endliche Menge an Ereignissen. Für P gilt also:* $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Es gilt für einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P):

$$P(\Omega \backslash A) = 1 - P(A) \tag{1}$$

$$P(\emptyset) = 0 \tag{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

$$A \subseteq B \iff P(A) \leq P(B) \tag{4}$$

1.3 Realisierungen

Eine Zufallsvariable X ist auf einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert.
$x = X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ bezeichnet eine Realisierung von X.

1.4 Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen unabhängig, wenn gilt, dass $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Es sei ein Ereignis A gegeben. Das Ereignis A ist von dem Ereignis B abhängig. Wir suchen das Wahrscheinlichkeitsmaß von A.

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\
&= P(A) \cdot P(B|A) \\
P_B(A) &= P(A|B)
\end{aligned}
$$

Wir würfeln mit einem Würfel einmalig mit $A = \{\text{Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.}\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_A(\{1\}) &= 0 \\
P_A(\{2\}) &= \frac{1}{3} \\
P_A(\{3\}) &= 0 \\
P_A(\{4\}) &= \frac{1}{3} \\
P_A(\{5\}) &= 0 \\
P_A(\{6\}) &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

In Worten: Wir wissen, dass A eine gerade Zahl ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Zahl eine 1 ist ?

1.5 Mehrstufige Zufallsexperimente

Wenn mehrere Experimente m-Mal hintereinander ausgeführt werden, reden wir von mehrstufigen Zufallsexperimenten. Mögliche Ausgänge der i-ten Stufe werden als Ω_i bezeichnet.
Ein Ereignis ist ein m-Tupel mit $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) \in \Omega_1 \times ... \times \Omega_m$. Dabei ist ω_i das Ergebnis der i-ten Stufe.

1.5.1 Unabhängiger Ereignisraum

Einfaches Multiplizieren aller Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

$$P((\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)) = \prod_{i=1}^{m} P(\omega_i)$$

*Wir betrachten ein **Zufallsexperiment** einer Urne, welche rote und blaue Kugeln enthält. Es werden zwei Kugeln nacheinander gezogen. Die Kugeln werden **zurückgelegt**.*

1.5.2 Abhängiger Ereignisraum

Darstellung durch Baumdiagramm ist einleuchtender, Formel ist sehr sperrig.

$$P((\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)) = P(\omega_1) \cdot P(\omega_2|\omega_1) \cdot P(\omega_3|\omega_1, \omega_2) \cdot ... \cdot P(\omega_m|\omega_1, ...\omega_{m-1})$$

*Wir betrachten ein **Zufallsexperiment** einer Urne, welche rote und blaue Kugeln enthält. Es werden zwei Kugeln nacheinander gezogen. Die Kugeln werden **nicht** zurückgelegt.*
*Nach dem ersten Zug verändert sich der **Ergebnisraum**, da eine rote oder blaue Kugel weniger in der Urne liegen. Dadurch ändern sich die Wahrscheinlichkeiten in **diesem** Zufallsexperiment ebenfalls.*

2 Zufallsvariablen

Annahmen: Der Ereignisraum Ω ist unendlich. ($|\Omega| = \infty$)

2.1 Verteilungsfunktion

Eine **Zufallsvariable** ist eine **Abbildung** $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Wenn das Tupel (Ω, P) ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist, dann gibt es eine **Abbildung** $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, welche eine **Verteilungsfunktion** darstellt, welche definiert ist:

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega \leq x)\}) \\
&= P(X(\omega) < x) \\
&= P(X < x)
\end{aligned}$$

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Falls der **Wahrscheinlichkeitsraum** Ω endlich ist, dann können wir ein $Bild(X) \to [0,1]$ definieren: $x_i \to P(X(\omega) = x_i)$. Diese Abbildung nennen wir **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

2.3 Bemerkungen

Die Verteilungsfunktion F ist streng monoton wachsend und rechtseitig stetig.
Ist X eine Zufallsvariable mit einer Verteilungsfunktion F, so sagen wir, dass X F-verteilt ist und schreiben XF.

2.4 Formeln

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R} \to [0,1] \text{ mit } F(x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega \leq x)\}) \\
&= P(X(\omega) < x) \\
&= P(X < x) \\
P(x < X < y) &= F(y) - F(x) \\
F(x) &= \sum_{\omega : X(\omega \leq x)} P(\omega)
\end{aligned}$$

2.5 Verschiedene Verteilungen

2.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit $P(x_i) = \frac{1}{6}$.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

Dabei ist $N = |\Omega|$ und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

2.5.2 Binominialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge A und B hat. Eine **Binominialverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

$$\begin{aligned}
X &= B(n,p) \\
\Omega &= \{A, B\}^n \\
P(A) &= p \\
P(B) &= 1 - p = q
\end{aligned}$$

Es ist ein **LaPlace**-Experiment, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

2.5.3 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$\begin{aligned}
X &= P(\lambda) \\
\Omega &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \\
P(X = k) &= \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}
\end{aligned}$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$, eine Binominialverteilung annähren.

$$\begin{aligned}
X &= B(n,p) \\
\lambda &= n \cdot p
\end{aligned}$$

$$P(X = k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

2.5.4 Hypergeometrische Verteilung

Wir betrachten ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen. Es gilt:

$$\begin{aligned} X &= H(n, M, N) \\ n &= \text{Anzahl der Züge} \\ N &= \text{Anzahl der Kugeln/Autos/Steine/...} \\ M &= \text{Anzahl der gesuchten Kugeln/Flugzeuge/Hölzer/...} \end{aligned}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{M-N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

3 Lagemaße

3.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert ist der Wert, welcher ein Zufallsexperiment bei unendlicher Wiederholung annimmt. Wir betrachten alle Realisierungen $x_1, x_2, ..., x_n$ einer Zufallsgröße X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i) = \mu$$

3.2 Varianz

Die Varianz berechnet sich folgend:

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

Wir können ebenfalls wieder alle Realisierungen von $x_1, x_2, ...$ betrachten und dann folgende Formel aufstellen:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

3.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung einer Zufallsvariable X ist die Wurzel der Varianz.

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

3.4 Rechenregeln

TODO

4 Statistik

5 Stichproben

Stichproben werden aus großen Mengen gezogen. Bei kleinen Veränderungen des Ereignisraums (Ω) wird darüber hinweg gesehen.

$$\begin{aligned} n &= \text{Umfang der Strichprobe} \\ a_1, ..., a_n &= \text{Merkmale der Strichprobe} \\ h_1, ..., h_n &= \text{Anzahl der absoluten Häufigkeiten} \end{aligned}$$

5.1 Empirischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot a_i$$

5.2 Empirische Varianz

$$\bar{s_x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

6 Stichprobe als Zufallsexperiment

Wir können analog zur Stichprobe definieren:

$$n = \text{Umfang der Stichprobe}$$
$$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in \Omega^n$$

6.1 Empirischer Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

6.2 Empirische Varianz

$$\bar{S_X}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

7 Induktive Statistik

8 Numerik

9 Differenzialgleichungen