1 Allgemeines

1.1 Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

1.2 Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$(a^n)^m = a^{mn}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$log_b(1) = 0$$

1.3 Logarithmus-Gesetze

$$x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$$
$$log(x) + log(y) = log(xy)$$
$$log(x) - log(y) = log(\frac{x}{y})$$
$$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$$
$$log(u^r) = r \cdot ln(u)$$
$$ln(1) = 0$$
$$ln(e) = 1$$
$$ln(e^x) = x$$
$$e^{ln(x)} = x$$

1.4 Komplexe Zahlen

$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (c \pm d)i$
$(a+bi) * (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$

1.5 Binominalkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

1.6 Sin-Cos-Tan Tabelle

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
Grad	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

2 Ableitung

2.1 typische Ableitungen

$$(x)' = 1$$
$$(ax)' = a$$
$$(ax^2)' = 2ax$$
$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(ax^b)' = abx^{b-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$
$$(a^x)' = a^x * log(a)$$
$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

2.2 Verknüpfungsfunktionen

2.2.1 Summenregel

$(f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'$

2.2.2 Produktregel

$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + g(x)'f(x)$

2.2.3 Quotientenregel

$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)'g(x) - g(x)'f(x)}{g(x)^2}$

2.2.4 Kettenregel

$(f(g(x)))' = f(g(x))'g(x)'$

3 Integralrechnung

e^{Foo} u.ä. muss vorher substituiert werden!

$$\int 0dx = c$$
$$\int adx = ax + c$$
$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$
$$\int e^x dx = e^x$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$
$$\int x^{-1} dx = \ln(|x|) + c$$
$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + c$$
$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c$$
$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

3.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
$\int u' \cdot v = (u \cdot v) - \int u \cdot v'$

3.2 Substitutionsregel

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(y)dy$

$$\int \frac{1}{5x-7}dx = ?$$
$$u = 5x - 7$$
$$u' = \frac{du}{dx}$$
$$5 = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{du}{5} = dx$$
$$\int \frac{1 \cdot du}{u \cdot 5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{5}ln(u)$$
$$= \frac{1}{5}ln(5x-7)$$

4 Stochastik

$\Omega = \{...\}$ beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.
$A, B, C, ... \subseteq \Omega$ beschrieben ein Ereignisse des Zufallsexperimentes.
$P: \Omega \to [0,1]$ ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

4.1 Gesetze/Axiome/...

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$= P(A) \cdot P(B|A)$$
$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A), A \subseteq B$$
$$A \subseteq B \iff P(A) \leq P(B)$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

4.1.1 Unabhängigkeit

Wenn gilt:
$P(A|B) = P(A)$ so wie $P(B|A) = P(B)$

4.2 Dichtefunktion

$w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.
Es gilt: $\int_{-\infty}^{x} w(t)dt = F(x) = P(X \leq x)$

4.3 Verteilungsfunktion

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$ heißt Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion ist Aufleitung der Dichtefunktion.
F ist rechtsseitig stetig und es gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$
$$= \int_x^\infty w(t)dt$$
$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b w(t)dt$$

4.4 Formeln

E = Erwartungswert, V = Varianz
$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$
$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x)dx$
$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \cdot P(X = x$
$= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \cdot P(X = x)\right) - E(X$
$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot w(x)dx$
$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)dx\right) - E(X)^2$

p-Quantile:
Sortieren, $n \cdot p$, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:

$$\widetilde{X}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}) & \text{falls } n \text{ ganzz.} \\ x_{\lceil np \rceil} & \text{falls } n \text{ nicht gan} \end{cases}$$

4.5 Verschiedene Verteilungen

4.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit $P(x_i) = \frac{1}{6}$.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

Dabei ist $N = |\Omega|$ und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

4.5.2 Binominialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge A und B hat. Eine **Binominialverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

$$X = B(n, p)$$
$$\Omega = \{A, B\}^n$$
$$P(A) = p$$
$$P(B) = 1 - p = q$$

Es ist ein **LaPlace**-Experiment, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4.5.3 Hypergeometrische Verteilung

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = gewünschte Eigenschaft

$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

4.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$X = P(\lambda)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$, eine Binominialverteilung annähren.

$$X = B(n,p)$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X=k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

4.6 Normalverteilung

$N(\mu, \sigma^2)$ ist eine Normalverteilung. Für $\mu = 1$ und $\sigma = 1$ ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Für Φ siehe Standardnormalverteilungstabelle.

Wenn $\Phi(-x)$, dann $1 - \Phi(x)$

Wenn gilt, dass $X = N(\mu, \sigma^2)$ und $Z = N(0,1)$, dann folgt $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

X_B ist binominalverteilt. Wenn $np(1-p) \geq 9$, dann $F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.

X_P ist possionverteilt. Wenn $\lambda \geq 9$, dann $F_P(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

4.7 Tabelle Erwartungswert/Varianz

	$E(x)$	$V(x)$
$B(n,p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$
$H(n,M,N)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$
$P(\lambda)$	λ	λ
$N(x)$	μ	σ^2

4.8 Konfidenzintervall

$Vertrauensgrad = 1 - \alpha$

4.8.1 Normalverteilung

$[\frac{k}{n} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{k}{n} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

z Werte in Normalverteilungstabelle nachschlagen.

4.8.2 T-Verteilung

Keine Varianz gegeben. Stichprobe muss vorhanden sein.

$\bar{x} = \text{arithmetisches Mittel} = \frac{\sum x}{n}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

$[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

T Werte in T-Verteilungstabelle nachschlagen.

5 Numerik

5.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

n = Anzahl der Stützstellen

$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$

$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

5.2 Newton'sches Interpolationspolynom

n = Anzahl der Stützstellen

$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$

Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren:

$y_0 = a_0$

$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$

5.3 Ausgleichsrechung

A ist gegeben, n=Grad, x=Stützstellen

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^T \cdot A \cdot c = A^T \cdot y$

Gleichungssystem lösen

5.3.1 Newton-Verfahren für Nullstellen

Voraussetzung: Muss stetig sein (hinschreiben!)

stetig = an jeder Stelle definiert

Allgemeine Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5.4 Newton-Cotes-Formeln

a = untere Grenze

b = obere Grenze

$\alpha_{i,n}$ Tabelle:

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	1/2	1/2		
2	1/3	4/3	1/3	
3	3/8	9/8	9/8	3/8

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i \cdot h$$

$$p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$$

5.5 Sekanten-Verfahren

Nur bei stetigem Intervall bestimmen

1. Startwerte bestimmen: x_0 und x_1
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

5.6 QR-Zerlegung

Seien $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ mit $m \geq n$ und $rg(A) = n$.

Es seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A.

Die Vektoren $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$$

$$u_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} < u_j, a_i > \cdot u_j$$

$$u_i = \frac{u_i'}{|u_i'|}$$

$$Q = (u_1, u_2, ..., u_n)$$

$$Q^{-1} \cdot A = R$$

5.7 LU-Zerlegung

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:

Step 1: L1 Matrix aufbauen:
$x \in \{1,2\}$
$L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$

Step 2: $\tilde{A} = L1 \cdot A$

Step 3: L2 Matrix aufbauen:
$L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$

Step 4: $U = L2 \cdot \tilde{A}$

Step 5: $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

5.7.1 Lösung von PLUx = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$P = Einheitsmatrix$

Lineares Gleichungssystem:

$$Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1}$$

$$Ux = y$$

5.8 Jacobi-Verfahren

Voraussetzungen: (Schwach) Diagonaldominant und Diagonalelemente nicht null. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen.

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

Um dieses zu lösen, wird die i-te Gleichung nach der i-ten Variablen x_i aufgelöst,

$x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij} \cdot x_j^{(m)}\right), i = 1, \ldots, n$

und diese Ersetzung, ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$, iterativ wiederholt.

5.9 Cholesky-Zerlegung

Voraussetzung: symmetrische Matrix & Determinante jeder Teilmatrix > 0

$A = GG^T$

$$A = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

6 Differentialgleichung

6.1 DGL 1. Ordnung

6.2 homogen

1. Trennung der Variablen
2. y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen
3. dx auf x Seite umstellen
4. Seiten integrieren ($c_1 - c_2 \to c$)
5. Nach y umstellen

6.2.1 Variation der Konstanten (inhomogen)

Wenden wir an wenn wir die Variablen nicht geteilt bekommen:

$y' + b(x) \cdot y = 0$ für y_1

$y' + b(x) \cdot y = a(x)$ für y_2

$y_1 = c \cdot e^{\int b(x)dx}$

$y_2 = \int(a(x)e^{-\int b(x)dx})dx \cdot e^{-\int b(x)dx}$

$y(x) = y_1 + y_2 =$ allgemeine Lösung

6.3 Anfangswertproblem

Siehe oben (homogen oder inhomogen)

6.4 DGL 2. Ordnung

1. Umstellen nach:
   $y'' + a_0 \cdot y' + a_1 \cdot y = b(x)$
2. Fälle für a_0 und a_1 anschauen:
   1 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 > a_1$
   $\to y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$,
   $y_2(x) = xe^{\lambda_2 x}$
   $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{(\frac{a_0}{2})^2 - a_1}$
   2 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 = a_1$
   $\to y_1(x) = e^{\lambda x}$,
   $y_2(x) = xe^{\lambda x}$
   $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2}$
   3 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 < a_1$
   $\to y_1(x) = cos(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x}$,
   $y_2(x) = sin(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x}$
   mit $\lambda = -\frac{a_0}{2}$,
   $w = \sqrt{a_1 - \frac{a_0}{2}}$
3. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bestimmen:
   $y_h = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$
4. Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen:
   $y_p = w_1 \cdot y_1(x) + w_2 \cdot y_2(x)$
   $w_{1/2} \to$ Wronski Determinanten
   $w_1(x) = \int -\frac{y_2(x)\cdot b(x)}{w(x)}$
   $w_2(x) = \int \frac{y_1(x)\cdot b(x)}{w(x)}$
   $w(x)$: Fall 1: $(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$
   Fall 2: $e^{2\lambda x}$
   Fall 3: $w \cdot e^{2\lambda x}$
5. Partikuläre Lösung: $y(x) = y_h + y_p$