

1 ALLGEMEINES

1.1 BINOMISCHE FORMELN

(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2
a^2 - b^2 = (a + b) · (a - b)

1.2 POTENZGESETZE

a^m · a^n = a^{m+n}
a^n · b^n = (ab)^n
a^n / a^m = a^{n-m}
a^n / b^n = (a/b)^n
(a^n)^m = a^{mn}
a^{-n} = 1/a^n
log_b(1) = 0

1.3 LOGARITHMUS-GESETZE

x = log_a(y) ⇔ y = a^x
log(x) + log(y) = log(xy)
log(x) - log(y) = log(x/y)
log_a(x) = log_b(x) / log_b(a)
log(u^r) = r · ln(u)
ln(1) = 0
ln(e) = 1
ln(e^x) = x
e^{ln(x)} = x

1.4 KOMPLEXE ZAHLEN

(a + bi) ± (c + di) = (a ± c) + (c ± d)i
(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

(a + bi) / (c + di) = (ac + bd) / (c^2 + d^2) + (cb - ad) / (c^2 + d^2)i

1.5 BINOMINALKOEFFIZIENT

(n k) = n! / (k!(n-k)!)

1.6 SIN-COS-TAN TABELLE

α	0	1/6 π	1/4 π	1/3 π	1/2 π
α	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan	0	√3/3	1	√3	±∞

2 ABLEITUNG

2.1 TYPISCHE ABLEITUNGEN

(x)' = 1
(ax)' = a
(ax^2)' = 2ax
(1/x)' = -1/x^2
(√x)' = 1/(2√x)
(ax^b)' = abx^{b-1}
(e^x)' = e^x
(e^{ax})' = ae^{ax}
(a^x)' = a^x * log(a)
(ln(x))' = 1/x
(sin x) = cos x
(cos x) = -sin x
(tan x) = 1/(cos x)^2

2.2 VERKNÜPFUNGSFUNKTIONEN

2.2.1 SUMMENREGEL
(f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'

2.2.2 PRODUKTREGEL
(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + g(x)'f(x)

2.2.3 QUOTIENTENREGEL
(f(x)/g(x))' = (f(x)'g(x) - g(x)'f(x)) / g(x)^2

2.2.4 KETTENREGEL
(f(g(x)))' = f(g(x))'g(x)'

3 INTEGRALRECHNUNG

e^{F ∘ o} u.ä. muss vorher substituiert werden!

∫ 0dx = c
∫ adx = ax + c
∫ x^a dx = x^{a+1} / (a + 1) + c
∫ e^x dx = e^x
∫ a^x dx = a^x / ln(a) + c
∫ x^{-1} dx = ln(|x|) + c
∫ ln(x) dx = x ln(x) - x + c
∫ sin(x) dx = -cos(x) + c
∫ cos(x) dx = sin(x) + c

∫ cf(x)dx = c ∫ f(x)dx
∫ (f(x) + g(x))dx = ∫ f(x)dx + ∫ g(x)dx

3.1 PARTIELLE INTEGRATION
Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
∫ u' · v = (u · v) - ∫ u · v'

3.2 SUBSTITUTIONSREGEL
∫ f(x)dx = ∫ f(g(u)) · g'(u)du
F(x) = ∫ e^{2x} dx
2x = u
x = 1/2 u
g(u) = 1/2 u
g'(u) = 1/2
dx = g'(u)du

Substitution:
F(u) = ∫ e^u 1/2 du
F(u) = 1/2 e^u + c

Resubstitution:
F(x) = 1/2 e^{2x} + c

4 STOCHASTIK

Ω = {...} beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.
A, B, C, ... ⊆ Ω beschreiben ein Ereignisse des Zufallsexperimentes.
P : Ω → [0, 1] ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

4.1 GESETZE/AXIOME/...

P(∅) = 0
P(Ω) = 1
P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)
P(A ∩ B) = P(A) · P(B)
P(A ∩ B) = P(B) · P(A|B)
= P(A) · P(B|A)
P(B \ A) = P(B) - P(A), A ⊆ B
A ⊆ B ⇔ P(A) ≤ P(B)
P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B)
P(A|B) = P(B|A) · P(A) / P(B)

4.1.1 UNABHÄNGIGKEIT

Wenn gilt:
P(A|B) = P(A) so wie P(B|A) = P(B)
Cov(A, B) = 0

4.2 DICHTEFUNKTION

w : ℝ → ℝ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.
Es gilt: ∫_{-∞}^x w(t)dt = F(x) = P(X ≤ x)

4.3 VERTEILUNGSFUNKTION
F : ℝ → [0, 1] heißt Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion ist Aufleitung der Dichtefunktion.

F ist rechtsseitig stetig und es gilt:
P(X ≤ x) = F(x)

lim_{x → -∞} F(x) = 0
lim_{x → ∞} F(x) = 1
P(X ≥ x) = 1 - P(X ≤ x)
= ∫_x^∞ w(t)dt
P(a ≤ X ≤ b) = P(X ≤ b) - P(X ≤ a)
= F(b) - F(a)
= ∫_a^b w(t)dt

4.4 FORMELN

E(X) = Erwartungswert, V(X) = Varianz, Cov(X, Y) = Kovarianz, Cor(X, Y) = Korrelation

E(X) = ∑_{x ∈ X(Ω)} x · P(X = x)
E(X) = ∫_{-∞}^∞ x · w(x)dx
V(X) = E((X - E(X))^2)
= ∑_{x ∈ X(Ω)} (x - E(X))^2 · P(X = x)
= E(X^2) - E(X)^2
= (∑_{x ∈ X(Ω)} x^2 · P(X = x)) - E(X)^2
V(X) = ∫_{-∞}^∞ (x - E(X))^2 · w(x)dx
= (∫_{-∞}^∞ x^2 w(x)dx) - E(X)^2
Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))
Cor(X, Y) = Cov(X, Y) / (√V(X)√V(Y))

Markov:
P(|X| ≥ c) ≤ E(|X|) / c

Tschebyscheff:
P(|X - E(X)| ≥ c) ≤ V(X) / c^2

4.4.1 P-QUANTILE:
Sortieren, n · p, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:
X̃_p = { 1/2(x_{np} + x_{n(p+1)}) falls n ganzz.
x_{[np]} falls n nicht ganzz.

4.5 VERSCHIEDENE VERTEILUNGEN

4.5.1 GLEICHVERTEILUNG
Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit P(x_i) = 1/6.

P(X = x_i) = 1/N
Dabei ist N = |Ω| und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

4.5.2 BINOMIALVERTEILUNG
Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Experiment, welches nur **zwei** mögliche Ausgänge A und B hat. Eine **Binominalverteilung** ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei **muss** der Ereignisraum **unabhängig** sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

X = B(n, p)
Ω = {A, B}^n
P(A) = p
P(B) = 1 - p = q

Es ist ein **LaPlace**-Experiment, wenn $p = q$ gilt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = pn$$

$$V(X) = p(1 - p)n$$

4.5.3 HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = gewünschte Eigenschaft

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4.5.4 POISSON-VERTEILUNG

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

$$X = P(\lambda)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$V(X) = \lambda$$

Die Poisson-Verteilung kann, wenn $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$, eine Binomialverteilung annähern.

$$X = B(n, p)$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X = k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

4.5.5 EXPONENTIALVERTEILUNG

$$P_{\lambda}(X = x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \lambda^{-2}$$

4.5.6 NORMALVERTEILUNG

$N(\mu, \sigma^2)$ ist eine Normalverteilung. Für $\mu = 1$ und $\sigma = 1$ ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(X) = \Phi(X)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Für Φ siehe Tabelle.

Quantile der S.N.V.

$$\Phi(p)^{-1} = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)$$

Wenn gilt, dass $X = N(\mu, \sigma^2)$ und $Z = N(0, 1)$, dann folgt $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$X = N(\mu, \sigma^2) \wedge Z = N(0, 1) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}$$

X_B ist binominalverteilt.

Wenn $np(1 - p) \geq 9$,

$$\text{dann } F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

X_P ist poissonverteilt. Wenn $\lambda \geq 9$, dann

$$F_P(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

4.6 KONFIDENZINTERVALL

$a = \frac{\alpha}{2}$ -Quantil, $b = (1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil, $\alpha \in [0, 1]$

$1 - \alpha$ = Vertrauensgrad

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

4.6.1 NORMALVERTEILUNG

$$z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

\bar{X} = Schätzer von $E(X)$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z\right) = 2\Phi(z) - 1$$

$$\left[\bar{X} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Für z siehe Tabelle.

4.6.2 T-VERTEILUNG

Keine Varianz gegeben. Stichprobe muss vorhanden sein.

$$\bar{x} = \text{arithmetisches Mittel} = \frac{1}{n} \sum x$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2}$$

$$\left[\bar{x} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

T Werte in T-Verteilungstabelle nachschlagen.

5 NUMERIK

5.1 LAGRANGE'SCHES INTERPOLATIONSPOLYNOM

n = Anzahl der Stützstellen

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 NEWTON'SCHES INTERPOLATIONSPOLYNOM

n + 1 = Anzahl der Stützstellen

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren:

$$y_0 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

5.3 TAYLORPOLYNOM

a = Entwicklungstelle, n -te Taylerpolynom

$$T_n(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

5.4 AUSGLEICHSRECHUNG

A ist gegeben, n=Grad, x=Stützstellen

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot A \cdot c = A^T \cdot y$$

Gleichungssystem lösen

5.4.1 NEWTON-VERFAHREN FÜR NULLSTELLEN

Voraussetzung: Muss stetig sein (hinschreiben!)

stetig = an jeder Stelle definiert

$$\text{Allgemeine Formel: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5.5 NEWTON-COTES-FORMELN

a = untere Grenze

b = obere Grenze

$\alpha_{i,n}$ Tabelle:

n	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
1	1/2	1/2		
2	1/6	4/6	1/6	
3	1/8	3/8	3/8	1/8

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i \cdot h$$

$$p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$$

5.6 SEKANTEN-VERFAHREN

Nur bei stetigem Intervall bestimmen

1. Startwerte bestimmen: x_0 und x_1
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

5.7 QR-ZERLEGUNG

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\operatorname{rg}(A) = n$.

Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A .

Die Vektoren $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$$

$$u'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_j, a_i \rangle \cdot u_j$$

$$u_i = \frac{u'_i}{|u'_i|}$$

$$Q = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$Q^{-1} \cdot A = R$$

5.8 LU-ZERLEGUNG

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:

Step 1: L1 Matrix aufbauen:

$$x \in \{2, 3\} \\ L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$$

Step 2: $\tilde{A} = L1 \cdot A$

Step 3: L2 Matrix aufbauen:

$$L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$$

Step 4: $U = L2 \cdot \tilde{A}$

Step 5: $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$ (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

5.8.1 LÖSUNG VON PLUX = B

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$$P = \text{Einheitsmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1}$$

$$Ux = y$$

5.9 JACOBI-VERFAHREN

Voraussetzungen: (Schwach) Diagonaldominant und Diagonalelemente nicht null. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen.

$$a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

Um dieses zu lösen, wird die i -te Gleichung nach der i -ten Variablen x_i aufgelöst, $x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, \dots, n$

und diese Ersetzung, ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$, iterativ wiederholt.

5.10 CHOLESKY-ZERLEGUNG

Voraussetzung: symmetrische Matrix(alles außer Hauptdiagonale gespiegelt) & positiv definit ($A_{1,1} > 0, \det(A) > 0$).

$$A = GG^T$$

$$A = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{11}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{11}g_{31} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

6 DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\text{Nett-to-know: } y' = \frac{d}{dx} \cdot y, y'' = \frac{d^2}{dx^2} \cdot y$$

6.1 DGL 1. ORDNUNG

Für homogene DGL nehmen wir nur y_1

6.1.1 VARIATION DER KONSTANTEN (INHOMOGEN)

Wenden wir an wenn wir die Variablen nicht geteilt bekommen:

$$y' + b(x) \cdot y = 0 \text{ für } y_1$$

$$y' + b(x) \cdot y = a(x) \text{ für } y_2$$

$$y_1 = c \cdot e^{-\int b(x) dx}$$

$$y_2 = \int (a(x) e^{\int b(x) dx}) dx \cdot e^{-\int b(x) dx}$$

$$y(x) = y_1 + y_2 = \text{allgemeine Lösung}$$

6.2 ANFANGSWERTPROBLEM

Siehe oben (homogen oder inhomogen)

6.3 DGL 2. ORDNUNG

1. Umstellen nach:

$$y'' + a_0 \cdot y' + a_1 \cdot y = b(x)$$

2. Fälle für a_0 und a_1 anschauen:

1 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 > a_1$

$$\rightarrow y_1(x) = e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2(x) = x e^{\lambda_2 x}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - a_1}$$

2 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 = a_1$

$$\rightarrow y_1(x) = e^{\lambda x},$$

$$y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a_0}{2}$$

3 Fall: $(\frac{a_0}{2})^2 < a_1$

$$\rightarrow y_1(x) = \cos(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x},$$

$$y_2(x) = \sin(w \cdot x) \cdot e^{\lambda x}$$

$$\text{mit } \lambda = -\frac{a_0}{2},$$

$$w = \sqrt{a_1 - \frac{a_0^2}{4}}$$

3. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bestimmen:

$$y_h = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

4. Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen:

$$y_p = w_1 \cdot y_1(x) + w_2 \cdot y_2(x)$$

$$w_{1/2} \rightarrow \text{Wronski Determinanten}$$

$$w_1(x) = \int -\frac{y_2(x) \cdot b(x)}{w(x)}$$

$$w_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot b(x)}{w(x)}$$

$$w(x): \text{ Fall 1: } (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

$$\text{Fall 2: } e^{2\lambda x}$$

$$\text{Fall 3: } w \cdot e^{2\lambda x}$$

5. Partikuläre Lösung: $y(x) = y_h + y_p$