

1 Allgemeines

1.1 Binomische Formeln

(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2
a^2 - b^2 = (a + b) · (a - b)

1.2 Potenzgesetze

a^m · a^n = a^{m+n}
a^n · b^n = (ab)^n
a^n / a^m = a^{n-m}
a^n / b^n = (a/b)^n
(a^n)^m = a^{n·m}
a^{-n} = 1/a^n
log\_b(1) = 0

1.3 Logarithmus-Gesetze

x = log\_a(y) ⇔ y = a^x
log(x) + log(y) = log(xy)
log(x) - log(y) = log(x/y)
log\_a(x) = log\_b(x) / log\_b(a)
log(u^r) = r · ln(u)

ln(1) = 0
ln(e) = 1
ln(e^x) = x
e^{ln(x)} = x

1.4 Komplexe Zahlen

(a + bi) ± (c + di) = (a ± c) + (b ± d)i
(a + bi) · (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

(a + bi) / (c + di) = (ac + bd) / (c^2 + d^2) + (cb - ad) / (c^2 + d^2) i

1.5 Sin-Cos-Tan Tabelle

Table with 10 columns: x, Grad, 0, 1/6 pi, 1/4 pi, 1/3 pi, 1/2 pi, 2/3 pi, 3/4 pi, 5/6 pi, 7/6 pi. Rows include sin, cos, tan values.

2 Integralrechnung

e^foo u.ä. muss vorher substituiert werden!

Table with 2 columns: Funktion, Auflleitung. Rows include c, x^a, x^-1, e^x, a^x, sin(x), cos(x) and their derivatives.

2.1 Partielle Integration

Wenn u und v zwei differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:
f u' · v = (u · v) - f u · v'

2.2 Substitutionsregel

∫ f(g(x)) · g'(x) dx = ∫ f(y) dy

∫ 1 / (5x - 7) dx = ?
z = 5x - 7
dz/dx = 5
dz/5 = dx
∫ 1/z · dz = 1/5 ∫ 1/z · dz
= 1/5 ln(z)
= 1/5 ln(5x - 7)

3 Ableitung

3.1 Typische Ableitungen

(x^a)' = a · x^{a-1}
(x^-1)' = -1/x^2
(e^x)' = e^x
(a^x)' = a^x · ln(a)
(ax^2)' = 2ax
(1/x)' = -1/x^2
(√x)' = 1/(2√x)
(ax^b)' = abx^{b-1}
ln(|x|)' = 1/x
ln(cos(x))' = -sin(x)
(tan(x))' = 1/(cos(x)^2)

3.2 Verknüpfungsfunktionen

Summenregel: (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)
Produktregel: (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)
Quotientenregel: (f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - g'(x)f(x)) / g(x)^2

Kettenregel: (f(g(x)))' = f'(g(x)) · g'(x)

4 Stochastik

Ω = {...} beschreibt den Ereignisraum und somit die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments.
A, B, C, ... ⊆ Ω beschreiben Ereignisse des Zufallsexperimentes.
P: Ω → ℝ ist eine Abbildung, welche jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung listet alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments und ihre Wahrscheinlichkeiten auf.

4.1 Gesetze/Axiome/...

P(A) > 0 für alle A ⊆ Ω
P(Ω) = 1
P(A1 ∩ A2) = P(A1) · P(A2), A1 ∩ A2 = ∅
P(A1 ∪ A2) = P(A1) + P(A2), A1 ∩ A2 = ∅
P(Ω \ A) = 1 - P(A)
P(∅) = 0
A ⊆ B ⇔ P(A) ≤ P(B)
P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B)
= P(B|A) · P(A) / P(B)
P(A ∩ B) = P(B) · P(A|B)
= P(A) · P(B|A)
P\_B(A) = P(A|B)

4.2 Dichtefunktion

w: ℝ → ℝ ist eine integrierbare, nicht negative Funktion.
Es gilt: ∫\_{-∞}^x w(t) dt = F(x) = P(X ≤ x)

4.3 Verteilungsfunktion

F: ℝ → [0, 1] heißt Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion ist Auflleitung der Dichtefunktion.
F ist rechtsseitig stetig und es gilt:

lim\_{x→-∞} F(x) = 0
lim\_{x→∞} F(x) = 1
P(X ≥ x) = 1 - P(X ≤ x)
= ∫\_x^∞ w(t) dt
P(a ≤ X ≤ b) = P(X ≤ b) - P(X ≤ a)
= F(b) - F(a)
= ∫\_a^b w(t) dt

4.4 Formeln

E = Erwartungswert, V = Varianz

E(X) = ∑\_{x∈X(Ω)} x · P(X = x)
E(X) = ∫\_{-∞}^∞ x · w(x) dx
V(X) = ∑\_{x∈X(Ω)} (x - E(X))^2 · P(X = x)
= (∑\_{x∈X(Ω)} x^2 · P(X = x)) - E(X)^2
V(X) = ∫\_{-∞}^∞ (x - E(X))^2 · w(x) dx
= (∫\_{-∞}^∞ x^2 w(x) dx) - E(X)^2

p-Quantile:

Sortieren, n · p, Einsetzen & Index suchen, Formel anwenden:

χ\_p = { 1/2 (x\_{np} + x\_{np+1}) falls n ganzz.
x\_{[np]} falls n nicht ganzz.

4.5 Verschiedene Verteilungen

4.5.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung. Jede Möglichkeit hat die glei-

che Wahrscheinlichkeit. Ein Würfel ist gleichverteilt mit P(x\_i) = 1/6.

P(X = x\_i) = 1/N

Dabei ist N = |Ω| und X eine Zufallsvariable, welche gleichverteilt ist.

4.5.2 Binominalverteilung

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Experiment, welches nur zwei mögliche Ausgänge A und B hat. Eine Binominalverteilung ist eine Aneinanderreihung von Bernoulli-Experimenten. Dabei muss der Ereignisraum unabhängig sein. Ein Experiment kann beliebig oft, n-Mal, wiederholt werden.

X = B(n, p)
Ω = {A, B}^n
P(A) = p
P(B) = 1 - p = q

Es ist ein LaPlace-Experiment, wenn p = q gilt.

P(X = k) = (n choose k) · p^k · (1 - p)^{n-k}
(n choose k) = n! / (k!(n - k)!)

4.5.3 Hypergeometrische Verteilung

N = Grundmenge, n = Stichprobe, k = gewünscht, M = gewünschte Eigenschaft

P(X = k) = (M choose k) · (N - M choose n - k) / (N choose n)

4.5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung eignet sich für seltene Ereignisse in einem fest definierten Zeitraum.

X = P(λ)
Ω = {x ∈ ℝ | x ≥ 0}
P(X = k) = λ^k · e^{-λ} / k!

Die Poisson-Verteilung kann, wenn  $n \geq 50$  und  $p \leq 0.1$ , eine Binominalverteilung annähern.

$$X = B(n, p) \\ \lambda = n \cdot p$$

$$P(X = k) \sim \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

4.6 Normalverteilung

$N(\mu, \sigma^2)$  ist eine Normalverteilung. Für  $\mu = 1$  und  $\sigma = 1$  ist es eine Standardnormalverteilung.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \\ P(a \leq x \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Für  $\Phi$  siehe Standardnormalverteilungstabelle.  
 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Wenn gilt, dass  $X = N(\mu, \sigma^2)$  und  $Z = N(0, 1)$ , dann folgt  $\frac{X-\mu}{\sigma}$ .  
 $X_B$  ist binominalverteilt. Wenn  $np(1 - p) \geq 9$ , dann  $F_B(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ .  
 $X_P$  ist poissonverteilt. Wenn  $\lambda \geq 9$ , dann  $F_P(x) \sim \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$ .

4.7 Tabelle Erwartungswert/Varianz

	$E(x)$	$V(x)$
$B(n, p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p(1 - p)$
$H(n, M, N)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{N-n}{N-1}$
$P(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
$N(x)$	$\mu$	$\sigma^2$

4.8 Konfidenzintervall

Vertrauensgrad =  $1 - \alpha$

4.8.1 Normalverteilung

$[\frac{k}{n} - z(1-\frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \frac{k}{n} + z(1-\frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$   
z Werte in Normalverteilungstabelle nachschlagen.

4.8.2 T-Verteilung

Keine Varianz gegeben. Stichprobe muss vorhanden sein.

$\bar{x}$  = arithmetisches Mittel =  $\frac{\sum x}{n}$   
 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}}$   
 $[\bar{x} - t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t(1-\frac{\alpha}{2}, n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$   
T Werte in T-Verteilungstabelle nachschlagen.

5 Numerik

5.1 Lagrange'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen} \\ P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x) \\ L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton'sches Interpolationspolynom

$$n = \text{Anzahl der Stützstellen} \\ P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Auflösen nach a für die einzelnen Faktoren:

$$y_0 = a_0 \\ y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

5.2.1 Newton-Verfahren für Nullstellen

Voraussetzung: Muss stetig sein (hinschreiben!)  
stetig = an jeder Stelle definiert  
Allgemeine Formel:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

5.3 Newton-Cotes-Formeln

a = untere Grenze  
b = obere Grenze  
 $\alpha_{i,n}$  Tabelle:  

n	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
1	1/2	1/2		
2	1/3	4/3	1/3	
3	3/8	9/8	9/8	3/8

  
 $h = \frac{b-a}{n}$   
 $x_i = a + i \cdot h$   
 $p_n(x) = h \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \cdot f(x_i)$

5.4 QR-Zerlegung

Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$  und  $rg(A) = n$ .  
Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$  die Spaltenvektoren von A.  
Die Vektoren  $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$  sind die Gram-Schmidt orthogonalisierten Vektoren.

$$u_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1 \\ u'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, u_j \rangle u_j \\ u_i = \frac{u'_i}{|u'_i|}$$

$$Q = (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ Q^{-1} \cdot A = R$$

5.5 LU-Zerlegung

L Matrizen sind Einheitsmatrizen plus:  
Step 1: L1 Matrix aufbauen:  
 $x \in \{1, 2\}$   
 $L_{x,1} = -\frac{A(x,1)}{A(1,1)}$   
Step 2:  $\tilde{A} = L1 \cdot A$   
Step 3: L2 Matrix aufbauen:  
 $L_{3,2} = -\frac{\tilde{A}(3,2)}{\tilde{A}(2,2)}$   
Step 4:  $U = L2 \cdot \tilde{A}$

Step 5:  $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$  (=Vorzeichen außerhalb Diagonale ändern.)

5.5.1 Lösung von PLUx = b

Wir berechnen zunächst ein y, welches ein Zwischenergebnis ist. Die Schritte sind sehr einfach, da L und U Dreiecksmatrizen sind.

$$P = \text{Einheitsmatrix} \\ \text{Lineares Gleichungssystem:} \\ Ly = P^T b \text{ mit } P^T = P^{-1} \\ Ux = y$$

5.6 Cholesky-Zerlegung

Voraussetzung: symmetrische Matrix & Determinante jeder Teilmatrix > 0  
 $A = GG^T$

$$A = \begin{pmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{21} & g_{11}g_{31} \\ g_{21}g_{21} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{31}g_{31} & g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} & g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \end{pmatrix} \\ G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

5.7 Matrixnormen

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right|_1 = \sum_{i=1}^n x_i \\ \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$|A|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{ Spaltens.} \\ |A|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ Zeilens.}$$

6 Differentialgleichung

6.1 DGL 1. Ordnung

6.1.1 Variation der Konstanten

- Alle Ableitungen  $y'$  umformen:  
 $y' = \frac{dy}{dx}$
- Umstellen durch Integration und  $e^{\ln(x)}$ -Trick nach y

6.2 Anfangswertproblem

Wir haben unsere aufgelöste DGL:  $y = C_1 \cdot \dots$  Beim AWP haben wir eine Zusatzbedingung, die ähnlich zu  $y(0) = 2$  ist. AWP löst sich, indem wir einsetzen und zur Konstante umformen.

6.3 DGL 2. Ordnung

Eine DGL kann eine Störfunktion enthalten. Störfunktionen sind für den inhomogenen Teil der Lösung verantwortlich. Jeder Teil, welcher nicht abhängig von  $y^{(n)}$  ist, ist eine Störfunktion.  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

6.3.1 Charakteristisches Polynom

Umformen der Ableitungen:  $y^{(n)} = \lambda^n$  Anschließend werden die Lösungen für  $\lambda$  bestimmt.

Einfache Nullstelle:  
 $e^{\lambda \cdot x}$

k-fache Nullstelle:  
 $x^{k-1} e^{\lambda x}$

Komplexe Nullstelle:  
 $(a \pm bi) \rightarrow e^{ax} \cdot \sin(b), e^{ax} \cdot \cos(b)$

Bsp.:  $y_h(t) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{4x}$

Bei inhomogenen DGL muss ein Ansatz gefunden werden, der zur Lösung führt, wenn man ihn samt Ableitungen in die ursprüngliche DGL einsetzt.

1. Aufstellen des Ansatzes für y = {Ansatz}
2. Ableiten und Einsetzen als homogenen Teil der DGL.
3. Parameter des Ansatzes ausrechnen und als  $y_p$  angeben.