Rullebevegelsen til en homogen sylinder i bunnen av en halvsirkelformet rampe

J. Solbakken[a], A. Homme[b]

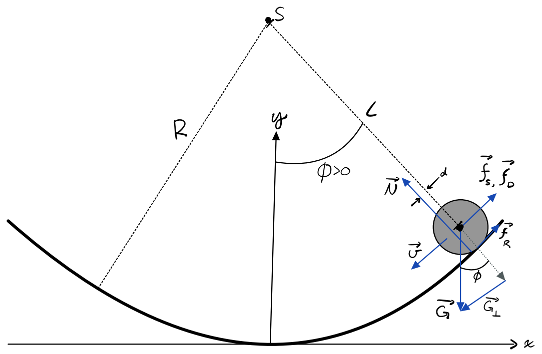
[a]*Institutt for datateknologi og informatikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Univeritet, 7034 Trondheim, Norway.*
[b]*Institutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.*

Sammendrag

I denne rapporten skulle vi finne hvilke dempningskrefter som påvirker rullebevegelsen til en sylinder i bunnen av en halvsirkelformet rampe. Først målte vi bevegelsen fysisk og autotracket bevegelsen ved hjelp av programmet Tracker. Deretter modellerte vi bevegelsen teoretisk, med tre dempningskrefer: rullefriksjon, luftmotstand og dempningskraften. Vi fant ut rullefriksjonen var av størst betydning og at sylinderen ruller svært rent i og med at energitapet var svært lite.

1. Innledning

Vi skal se på hvilke dempningsfaktorer som påvirker rullebevegelsen av en sylinder i bunnen av en sirkelformet bane (se figur 1). Vi skal filme rullebevegelsen fysisk og autotracke den i programmet Tracker. Deretter skal vi finne en nummeriske løsning og variere ulike bremsefaktorer for å se hvilke bremsefaktorer som har en innvirkning på bevegelsen.



Figur 1: Modell som viser en syllinder som ruller i en sirkelformet bane. De ulike dempningskreftene er også tegnet inn.

2. Teori og metode

2.1. Utledning av likninger

Treghetsmomentet til syllinderen er gitt ved

$$I = cmr^2. \tag{1}$$

Vi antar sylinderen er tilnærmet homogen, som gir at er $c = \frac{1}{2}$.

Dempningskraften er

$$\boldsymbol{f}_S = -\tilde{\delta}\boldsymbol{v}, \tag{2}$$

der $\tilde{\delta} \geq 0$. Denne kraften kommer av ujevnheter på syllinderen og banen. Vi antar at denne virker i massesenteret til sylinderen. Dempningskraften skalerer med v

Luftmotstanden gir et dempingsbidrag lik

$$\boldsymbol{f}_D = -\tilde{\beta}|\boldsymbol{v}|^2\hat{\boldsymbol{v}} \tag{3}$$

Luftmotstanden skalerer med v^2

Rullefriksjonen er gitt ved

$$\boldsymbol{f}_R = -|\boldsymbol{f}_R|\hat{\boldsymbol{v}}. \tag{4}$$

rullefriksjonen er motsatt rettet av bevegelsen. Ved ren rulling vil rullefriksjonen ikke føre til tap av mekanisk energi. Her antar vi at vi har flere kontaktpunkter under rullingen, noe som gjør at rullefriksjonen fører til et tap av mekanisk energi.

Til sist har vi tyngdekraften $\boldsymbol{G}$ og en normalkraft $\boldsymbol{N}$. Vi anvender Newtons andre lov

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -mg\hat{\boldsymbol{y}} - \tilde{\delta}\boldsymbol{v} - \tilde{\beta}|\boldsymbol{v}|^2\hat{\boldsymbol{v}} - |\boldsymbol{f}_R|\hat{\boldsymbol{v}} \tag{5}$$

Siden

$$v = l\dot{\phi} \tag{6}$$

Og det totalt dreiemoment gir oss

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{r}_R \times \boldsymbol{f}_R + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{N}, \tag{7}$$

som blir

$$-I\ddot{\phi}\frac{l}{r} = -r|\boldsymbol{f}_R|sgn(\dot{\phi}) + dNsgn(\dot{\phi}), \tag{8}$$

kan vi ved å definere

$$\gamma = \frac{1}{1+c} \tag{9}$$

og innføre konstantene

$$\omega_0^2 = \gamma \frac{g}{l}, \tag{10}$$

$$\delta = \gamma \frac{\tilde{\delta}}{2m}, \tag{11}$$

$$\beta = \frac{4\gamma}{3\pi} \frac{\omega_0 l}{m} \tilde{\beta}, \tag{12}$$

$$\phi_R = \frac{d}{r} \frac{2\omega_0}{\pi}, \tag{13}$$

slik at 5 og 8 gir oss diffligningen

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi} = -\omega_0^2 sin(\phi) - 2\delta\dot{\phi} \\ &-\tfrac{\pi\phi_R}{2\omega_0}(\omega_0^2 cos(\phi) + \gamma\dot{\phi}^2)sgn(\dot{\phi}) \\ &-\beta\tfrac{3\pi}{4\omega_0}\dot{\phi}^2 sgn(\dot{\phi}). \end{aligned} \tag{14}$$

2.2. Grensetilfeller

Hvis $\delta > 0$ og $\phi_R, \beta = 0$ reduseres likning 14 til

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \tag{15}$$

slik at vår analytiske løsning blir en **eksponensielt dempet harmonisk svingning**

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\delta t} cos(\omega_d t). \tag{16}$$

Hvis $\beta > 0$ og $\phi_R, \delta = 0$ reduseres likning 14 til

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi + \beta \frac{3\pi}{4\omega_0} \dot{\phi}^2 sgn(\dot{\phi}) = 0 \tag{17}$$

slik at vår analytiske løsning blir en 14 en **hyperbolsk dempet harmonisk svingning**

$$\phi(t) \approx \frac{cos(\omega_0 t)}{\phi_0^{-1} + sgn(\phi_0)\beta t} \tag{18}$$

Hvis $\phi_R > 0$ og $\beta, \delta = 0$ reduseres likning 14 til

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2[\phi + (\pi\phi_R)/(2\omega_0) sgn(\dot{\phi})] = 0 \tag{19}$$

slik at vår analytiske løsning blir en **lineært dempet svingning**

$$\phi(t) \approx [\phi_0 - sgn(\phi 0)\phi_R t] cos(\omega_0 t) \tag{20}$$

2.3. Målemetode

Vi hadde den sirkelformede rampen på et bord. Intill rampen lå en meterstokk. Vi satt opp et kamera slik at vi kunne filme bevegelsen til syllinderen.

Videre brukte vi programvaren Tracker til å spore posisjonen til syllinderen slik at vi fikk generert diskrete verdier vi kunne regne på ved bruk av Python-skript.

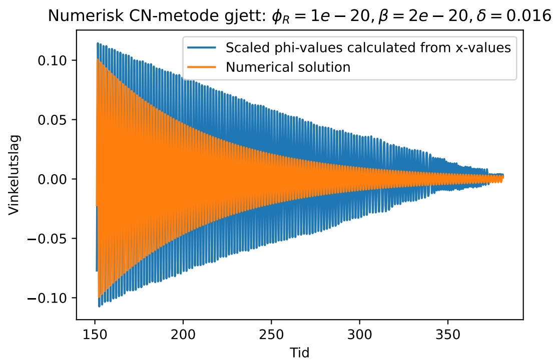
Resultatet etter målingen var en tabell med kolonnene tid (sekunder), x-posisjon (meter) og y-posisjon(meter).

2.4. Målefeil

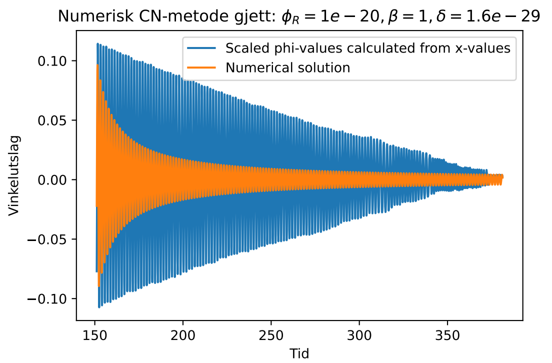
I prosjektet kan det også være målefeil på grunn av Tracker. I Tracker brukte vi autotracker for å måle bevegelsen. Dette kan være en potensiell feilkilde. For å forhindre dette best mulig målte vi over lang tid (6 min).

3. Resultat

Først testet vi med kun høy verdi for δ i figur 2 og kun høy verdi for β i figur 3.



Figur 2: Målt x-verdi omgjort til vinkel (blått), gjettet på at δ er størst (oransje).

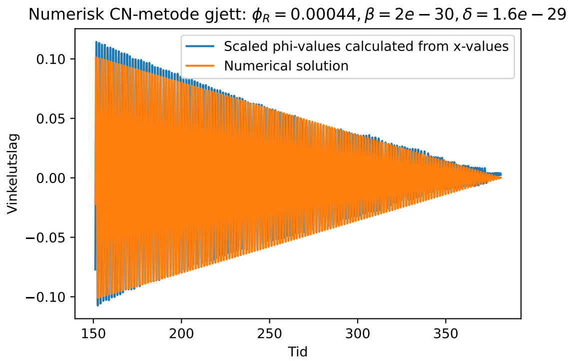


Figur 3: Målt x-verdi omgjort til vinkel (blått), gjettet på at β er størst (oransje).

Til slutt satt vi $\beta = 2{*}10^{-30} \approx 0$ og $\delta = 1.6{*}10^{-29} \approx 0$ og ved prøving og feiling kom frem til at $\phi_R = 3.9 * 10^{-3}$ ga en god løsning, som vist på figur 4.

4. Diskusjon

Det er tydelig at ϕ_R er dempningskonstanten som har størst innvirkning på den faktiske rullebevegelsen. Først lot vi ϕ_R og β være betydelig mindre enn δ for å se hvilke innvirkning denne dempningsfaktoren hadde på bevegelsen (se figur 2). Den nummeriske løsningen for høy verdi av δ samsvarte ikke med den faktiske dempningsutviklingen. Med en høy verdi for δ og β, $\phi_R \approx 0$ blir ligning 14



Figur 4: Målt x-verdi omgjort til vinkel (blått), gjettet på at ϕ_R er størst (oransje).

redusert til ligning 16, som har en eksponetiel dempning. Den faktiske dempningen er imdiderltid tilnærmet lineær.

Deretter lot vi β være betydelig mye større enn ϕ_R og δ (se figur 3). Denne dempningen samsvarer heller ikke med den faktiske dempningen. Med $\beta > 0$ ϕ_R, $\delta \approx 0$ blir ligning 14 redusert til 18, som har en hyperbolsk dempning.

Til sist lot vi ϕ_R være betydelig større enn δ og β. Da vil 14 reduseres til 20. Denne har en lineær dempning. Dette svarer godt til den faktiske dempningen.

I utgangspunktet tok vi med tre dempningskrefter: dempningskraften, luftmostanden og rullefriksjon, som avhenger henholdsvis av δ, β og ϕ_R. Vi har dermed funnet ut at rullefriksjonen er av størst betydning for rullebevegelsen til sylinderen. Vi modellerte mer enn ett kontaktpunkt med underlaget, noe som gir et tap av mekanisk energi. I og med at rullebevegelsen varte så lenge, betyr det at sylinderen ruller svært rent.

5. Konklusjon

I denne rapporten fant vi ut at rullefriksjon var dempningskraften som hadde størst innvirkning på rullebevegelsen til en sylinder i bunnen av en sirkelformet bane. Tapet av mekanisk energi er meget lite, noe som betyr at rullebevegelsen er svært ren.