

## Laboration 2

Simon Johansson johsim-0,  
Henrik Johansson ehioja-0 ,  
Harald Andersson harand-0

### Implementation

Implementationen består av en hash-funktion som efterliknar "Open Addressing". Detta betyder att varje element kommer sparas till funktionens "hash-table", som i detta fall består av två listor, "t1" och "t2". Hash-funktionerna "h1" och "h2" används för att räkna ut vilken address elementen ska sparas till.

#### *Hash funktioner*

- "h1" räknar ut vilken plats värdet "x" ska sparas till genom att använda  $(x \bmod m)$ , i vilket "x" är värdet som ska sparas och  $m$  är hur stora listorna ska vara.
- "h2" har samma uppgift i åtanke, men istället använder den sig av  $\lfloor m \times (x \times \frac{(5^{0.5}-1)}{2} \bmod 1) \rfloor$  för att räkna ut sparplatsen för x.

### Tidskomplexitet

Funktionen kommer sträva mot en average-case av:

$$1 + \sum_{n=1}^{2t} \alpha_1^n \times \alpha_2^{n-1}$$

I boken, *Introduction to Algorithms*, finns det en detaljerad beskrivning över Open Addressings uppbyggnad. Med såväl den generella beskrivningen och analysdelen, som finns i *Chapter 11 Hash Tables*, kom vi fram till formeln ovan. I analysdelen beskrivs hur load-faktorn " $\alpha$ " påverkar prestandan av hash-funktionen. Med  $1/(1-\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots$  ser vi hur " $\alpha$ " påverkar insättning av ett element beroende på hur många insättningar det har varit innan. Vi lade till ytterligare en instans av " $\alpha$ ", då exemplet i boken endast har en lista att spara till istället för två.

I formeln adderar vi med ett på grund av att "h1" kräver minst en sökning för att hitta en sparplats. Tidskomplexiteten kommer bero på två load-faktorer då vi har två listor som vi sparar till. "2t" är max antal sökningar som ska utföras innan insättningen klassas som misslyckad.

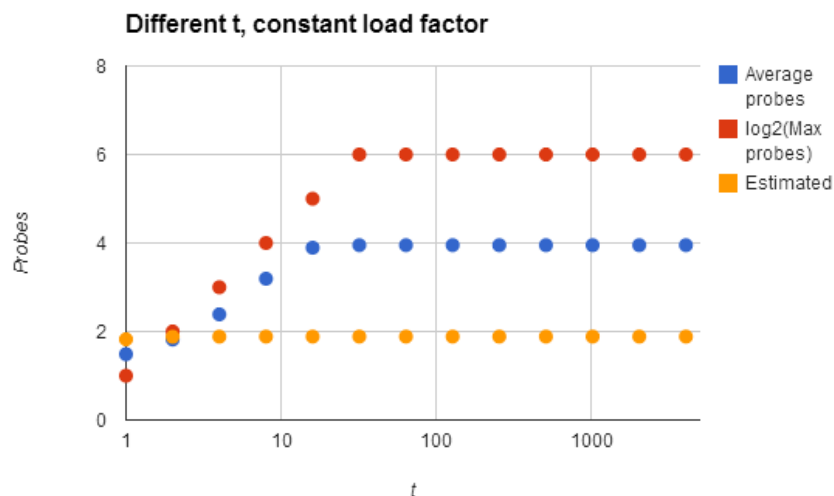
Best-case kommer ligga på  $O(1)$  då minst en sökning krävs. Worst-case blir  $O(2 \times t)$  då hash-funktionerna måste söka igenom både "t1" och "t2".

## Testning

Viktigt att nämna är att i samtliga fall använde vi oss av testdata med samma längd. I det första testet varierade vi värdet på variabeln "t" för att se hur max antal körningar kan påverka resultatet. I det andra testet uppskattade vi hur många probes det skulle krävas för varje körning och plottade allt för att få en överblick på vad som händer.

### Ökning av variabel "t"

Vi skapade två tabeller som var delvist fyllda med element ( $T1 \alpha = 0.653$ ,  $T2 \alpha = 0.401$ ) som skiljde sig ifrån indatan (tabellerna innehöll helt unika element). Därefter kör vi testdata på hash-funktionerna och räknar antal probes som krävs för en lyckad insättning. Sedan beräknar vi medelvärde för antal probes som behövdes för en lyckad insert vid det specifika värdet på t. Varje gång vi gjorde en insert skrev vi över listorna för att få load faktorerna konstanta.



Graf 1. Antal probes för insättning. Varierar variabel t.

Average probes: antal probes (medel) som behövdes för en lyckad insert vid det specifika värdet av t.

Log2(max probes): log2 av maximala antalet probes som en lyckad insättning tagit ( $6 = \log_2(64) \Rightarrow \text{max probes} = 64$ )).

Estimated: estimerat antal probes som en lyckad insert kommer ta i medelfallet.

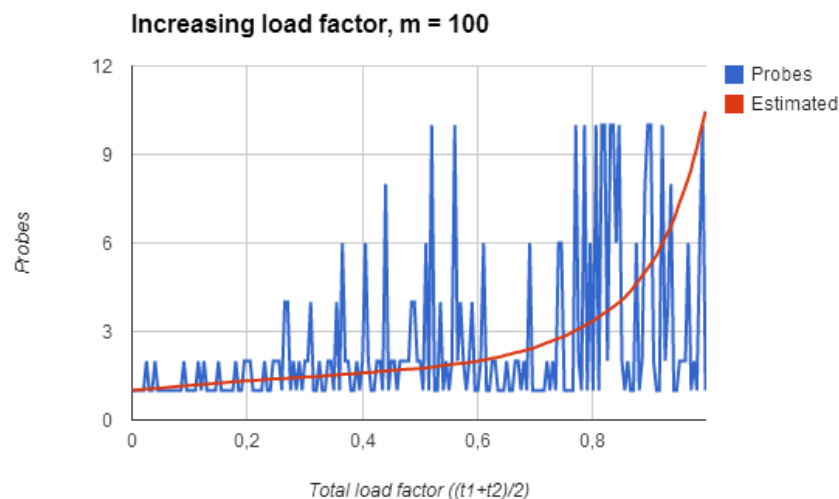
I *Graf 1* kan vi se att antalet probes påverkas endast av  $t$  i ett tidigt skede. När värdet på  $t$  når punkten  $2t=64$  ( $t=32$ , se *Tabell 1*) planar antalet probes ut och  $t$  har ingen fortsatt påverkan på antalet probes för en lyckad insert.

t	Average probes	log2(Max probes)	Estimated
1	1.48691877575	1	1.824
2	1.81836878074	2	1.88
4	2.38649238458	3	1.884
8	3.19246504752	4	1.885
16	3.89312663467	5	1.885
32	3.95086690745	6	1.885
64	3.95086690745	6	1.885
128	3.95086690745	6	1.885
256	3.95086690745	6	1.885
512	3.95086690745	6	1.885
1024	3.95086690745	6	1.885
2048	3.95086690745	6	1.885
4096	3.95086690745	6	1.885

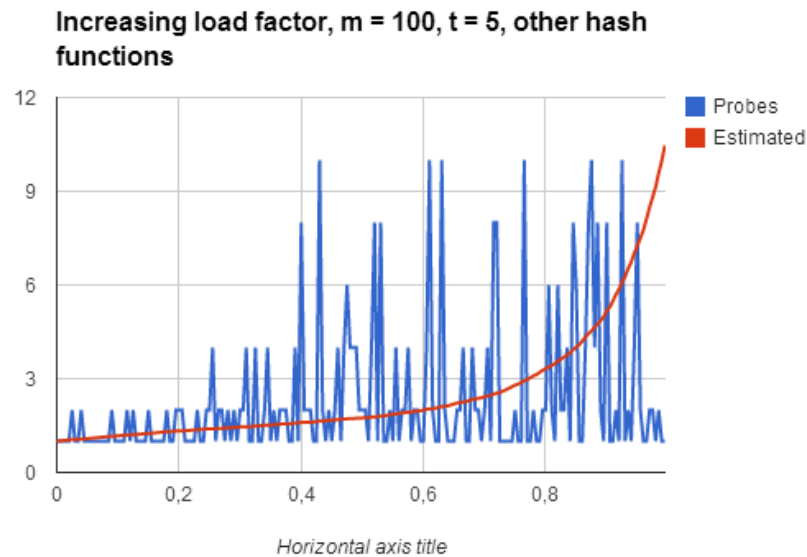
Tabell 1. Varierar t.

### Test av hash-funktioner

Vi skapade två tomma listor för testfallet där vi använde oss av  $t=5$  och  $m=100$ . Variabel  $t$  och  $m$  hålls konstanta. Med hjälp av  $\alpha$  beräknades estimerade antalet probes som krävs för varje insert. Det faktiska antalet probes som en lyckad insert tog räknades också.



Graf 2. Använde oss av  $(x \bmod m)$  och  $\lfloor m \times (x \times \frac{(5^{0.5}-1)}{2} \bmod 1) \rfloor$ .



Graf 3. Antal probes. Ekvationerna  $((3x + 3) \bmod m)$  och  $\lfloor m \times (\pi \times x \times \frac{(5^{0.5}-1)}{2} \bmod 1) \rfloor$ .

Om vi jämför *Graf 3* med *Graf 2* se vi att det spelar nästan ingen roll vilka hash funktioner som vi använder oss av. Antalet probes är i stort sett oberörd mellan graferna.

Kolumnförklaring Tabell 2:

Total load:  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$

Probes: Antal probes som inserten behövde

Load T1: Load factor för tabell 1

Load T2: Load factor för tabell 2

Estimated: Estimerat antal probes som skulle behövas för en lyckad insert beräknat

enligt  $1 + \sum_{n=1}^{2t} \alpha_1^n \times \alpha_2^{n-1}$

Tabell 2: Insättning av unika element tills load factor = 1.0 med t = 5  
(Visar endast lyckade insättningar)

total load	Probes	load T1	load T2	Estimated
0	1	0	0	1
0.005	1	0.01	0	1.01
0.01	1	0.02	0	1.02
0.015	1	0.03	0	1.03
0.02	1	0.04	0	1.04
0.025	2	0.05	0	1.05
0.03	1	0.05	0.01	1.05002501251
0.035	1	0.06	0.01	1.06003602161
0.04	2	0.07	0.01	1.07004903432
0.045	1	0.07	0.02	1.07009813739
0.05	1	0.08	0.02	1.08012820513
0.055	1	0.09	0.02	1.09016229213
0.06	1	0.1	0.02	1.1002004008
0.065	1	0.11	0.02	1.11024253357
0.07	1	0.12	0.02	1.12028869286
0.075	1	0.13	0.02	1.13033888109
0.08	1	0.14	0.02	1.14039310068
0.085	1	0.15	0.02	1.15045135406
0.09	2	0.16	0.02	1.16051364366
0.095	1	0.16	0.03	1.16077170418
0.1	1	0.17	0.03	1.17087144437
0.105	1	0.18	0.03	1.1809772773
0.11	1	0.19	0.03	1.19108920849
0.115	2	0.2	0.03	1.20120724346
0.12	1	0.2	0.04	1.20161290323
0.125	2	0.21	0.04	1.21177894312
0.13	1	0.21	0.05	1.21222839818
0.135	1	0.22	0.05	1.22244691608
0.14	1	0.23	0.05	1.23267577137
0.145	1	0.24	0.05	1.24291497976
0.15	2	0.25	0.05	1.25316455696

0.155	1	0.25	0.06	1.2538071066
0.16	1	0.26	0.06	1.26412027631
0.165	1	0.27	0.06	1.27444602561
0.17	1	0.28	0.06	1.28478437754
0.175	1	0.29	0.06	1.29513535518
0.18	2	0.3	0.06	1.30549898167
0.185	1	0.3	0.07	1.3064351379
0.19	1	0.31	0.07	1.31687621384
0.195	2	0.32	0.07	1.32733224223
0.2	2	0.32	0.08	1.32840722496
0.205	2	0.32	0.09	1.3294892916
0.21	1	0.32	0.1	1.3305785124
0.215	1	0.33	0.1	1.34126163392
0.22	1	0.34	0.1	1.35196687371
0.225	1	0.35	0.1	1.36269430052
0.23	2	0.36	0.1	1.3734439834
0.235	1	0.36	0.11	1.37484381508
0.24	1	0.37	0.11	1.38569790472
0.245	2	0.38	0.11	1.39657691505
0.25	2	0.38	0.12	1.39815590947
0.255	2	0.38	0.13	1.39974752788
0.26	1	0.38	0.14	1.40135192226
0.265	4	0.39	0.14	1.41252379945
0.27	4	0.39	0.15	1.41423260754
0.275	1	0.39	0.16	1.4159556314
0.28	2	0.4	0.16	1.42735042735
0.285	1	0.4	0.17	1.42918454936
0.29	2	0.41	0.17	1.44071804794
0.295	1	0.41	0.18	1.44266896998
0.3	2	0.42	0.18	1.45434876676
0.305	2	0.42	0.19	1.45642251684
0.31	4	0.42	0.2	1.45851528383
0.315	1	0.42	0.21	1.46062733054
0.32	1	0.43	0.21	1.47268330217
0.325	2	0.44	0.21	1.48479506388
0.33	1	0.44	0.22	1.48715677587
0.335	1	0.45	0.22	1.499445061
0.34	2	0.46	0.22	1.51179350239
0.345	2	0.46	0.23	1.51442630275
0.35	1	0.46	0.24	1.5170863308
0.355	4	0.47	0.24	1.52975653724
0.36	1	0.47	0.25	1.53257790342
0.365	6	0.48	0.25	1.54545454512
0.37	2	0.48	0.26	1.54844606897
0.375	2	0.48	0.27	1.5514705875

0.38	1	0.48	0.28	1.55452864958
0.385	1	0.49	0.28	1.56791840385
0.39	2	0.5	0.28	1.58139534716
0.395	1	0.5	0.29	1.58479531923
0.4	2	0.51	0.29	1.59852129732
0.405	6	0.51	0.3	1.60212514335
0.41	2	0.51	0.31	1.60577265117
0.415	1	0.51	0.32	1.60946461898
0.42	1	0.52	0.32	1.62380037372
0.425	2	0.53	0.32	1.63824661556
0.43	2	0.53	0.33	1.64234636505
0.435	1	0.53	0.34	1.64649912279
0.44	8	0.54	0.34	1.66144044157
0.445	1	0.54	0.35	1.66584459753
0.45	2	0.55	0.35	1.68111450349
0.455	2	0.55	0.36	1.68578547265
0.46	1	0.55	0.37	1.6905209454
0.465	2	0.56	0.37	1.70635711191
0.47	2	0.56	0.38	1.71138197836
0.475	2	0.56	0.39	1.7164788405
0.48	2	0.56	0.4	1.72164925502
0.485	4	0.56	0.41	1.72689482349
0.49	4	0.56	0.42	1.7322171939
0.495	2	0.56	0.43	1.73761806234
0.5	2	0.56	0.44	1.74309917469
0.505	1	0.56	0.45	1.7486623284
0.51	6	0.57	0.45	1.76664330509
0.515	1	0.57	0.46	1.77256590487
0.52	10	0.58	0.46	1.79105147306
0.525	1	0.58	0.47	1.79735865511
0.53	1	0.59	0.47	1.81638081338
0.535	4	0.6	0.47	1.83565193833
0.54	1	0.6	0.48	1.84269332098
0.545	2	0.61	0.48	1.86255256626
0.55	1	0.61	0.49	1.87005637987
0.555	2	0.62	0.49	1.89054272894
0.56	10	0.62	0.5	1.89854335986
0.565	2	0.62	0.51	1.90668880585
0.57	4	0.62	0.52	1.91498299565
0.575	2	0.62	0.53	1.92342999621
0.58	1	0.62	0.54	1.93203401834
0.585	2	0.63	0.54	1.95481497077
0.59	4	0.63	0.55	1.96401573509
0.595	1	0.63	0.56	1.97339490066
0.6	1	0.64	0.56	1.99747135288

0.605	2	0.65	0.56	2.02197084653
0.61	6	0.65	0.57	2.03251520135
0.615	1	0.65	0.58	2.04327817216
0.62	1	0.66	0.58	2.06927318107
0.625	2	0.67	0.58	2.09575954502
0.63	2	0.67	0.59	2.10788420249
0.635	1	0.67	0.6	2.12027784712
0.64	1	0.68	0.6	2.14850182743
0.645	1	0.69	0.6	2.17730024014
0.65	2	0.7	0.6	2.2066904114
0.655	1	0.7	0.61	2.221394326
0.66	1	0.71	0.61	2.25213464553
0.665	2	0.72	0.61	2.28353728672
0.67	2	0.72	0.62	2.30016935949
0.675	1	0.72	0.63	2.317230053
0.68	2	0.73	0.63	2.351029441
0.685	1	0.73	0.64	2.36944124955
0.69	6	0.74	0.64	2.40497702107
0.695	1	0.74	0.65	2.42487370116
0.7	1	0.75	0.65	2.46230516918
0.705	1	0.76	0.65	2.50067631688
0.71	1	0.77	0.65	2.54002100784
0.715	1	0.78	0.65	2.58037457444
0.72	2	0.79	0.65	2.62177388516
0.725	1	0.79	0.66	2.64819660201
0.73	2	0.8	0.66	2.69206103576
0.735	1	0.8	0.67	2.72076334967
0.74	6	0.81	0.67	2.76734074431
0.745	6	0.81	0.68	2.79857139429
0.75	1	0.81	0.69	2.8308570829
0.755	1	0.82	0.69	2.88218092728
0.76	1	0.83	0.69	2.93505666846
0.765	1	0.84	0.69	2.98954834511
0.77	10	0.85	0.69	3.04572299761
0.775	2	0.85	0.7	3.08709374705
0.78	1	0.85	0.71	3.13001909168
0.785	10	0.86	0.71	3.19261592547
0.79	1	0.86	0.72	3.23969175862
0.795	6	0.87	0.72	3.30703521534
0.8	1	0.87	0.73	3.35876023933
0.805	10	0.88	0.73	3.43139636942
0.81	1	0.88	0.74	3.48833784989
0.815	10	0.89	0.74	3.56688656835
0.82	10	0.89	0.75	3.62969030084
0.825	2	0.89	0.76	3.69517527979



0.83	10	0.89	0.77	3.76348011958
0.835	10	0.89	0.78	3.83475075005
0.84	6	0.89	0.79	3.90914077184
0.845	10	0.89	0.8	3.98681182645
0.85	2	0.89	0.81	4.06793398129
0.855	1	0.89	0.82	4.15268613042
0.86	2	0.9	0.82	4.27048607387
0.865	1	0.9	0.83	4.36485778127
0.87	1	0.91	0.83	4.49413981037
0.875	6	0.92	0.83	4.62940820579
0.88	1	0.92	0.84	4.74165022688
0.885	2	0.93	0.84	4.89065967454
0.89	8	0.93	0.85	5.01616292388
0.895	10	0.93	0.86	5.14780906433
0.9	10	0.93	0.87	5.28592844653
0.905	2	0.93	0.88	5.43086851995
0.91	1	0.93	0.89	5.5829946198
0.915	1	0.94	0.89	5.78658207469
0.92	10	0.95	0.89	6.00089545803
0.925	2	0.95	0.9	6.18394255928
0.93	4	0.95	0.91	6.37638432532
0.935	8	0.95	0.92	6.5787286282
0.94	1	0.95	0.93	6.79150917611
0.945	1	0.96	0.93	7.07372627115
0.95	2	0.97	0.93	7.37187718697
0.955	2	0.97	0.94	7.62956749618
0.96	2	0.97	0.95	7.90092518831
0.965	6	0.97	0.96	8.18669015489
0.97	1	0.97	0.97	8.48763938005
0.975	2	0.98	0.97	8.88504823474
0.98	1	0.98	0.98	9.22586332525
0.985	6	0.99	0.98	9.67259931138
0.99	10	0.99	0.99	10.0589010944
0.995	1	0.99	1	10.4661745741