COLLECTION
SIGMA

BTS SIO

NOUVEAU PROGRAMME

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Nathalie Rodriguez
Marie Tignon
Bernard Verlant

FOUCHER

Crédits photographiques

p. 22, 30, 32, 52, 197, 198, 209, © Marie-Claude Hugues et Bernard Verlant

ISBN 978-2-216-12747-4

Sommaire

Partie 1 : Mathématiques

Présentation

Cette nouvelle édition est strictement conforme au programme de mathématiques des **BTS SIO** en application en première année depuis la rentrée 2013.

Chacun des quatre chapitres propose :

■ Un ***Cours***

Le cours s'appuie sur des situations issues de l'économie et de la gestion.

■ Des ***Exercices*** corrigés et non corrigés

Ils sont nombreux et variés. Ceux qui sont à support concret ou liés au domaine de l'économie et de la gestion ne nécessitent aucune connaissance autre que mathématique.

Ils sont classés par thèmes et difficultés croissantes :

- \+ désigne des exercices d'application directe du cours ;
- ++ désigne des exercices pour s'entraîner ;
- +++ désigne des exercices ou problèmes qui, par leur niveau de difficulté et (ou) leur longueur, correspondent au niveau d'exigences du BTS SIO ;
- ++++ désigne des exercices pour « aller plus loin » ou des exercices comportant moins d'indications que les exercices pour le BTS.

■ À la fin de chaque chapitre, figurent de nombreux ***Exercices pour le BTS*** avec des corrigés détaillés.

■ À la fin de cette partie figurent ***huit épreuves d'entraînement aux BTS***. Elles recouvrent l'ensemble du programme de mathématique obligatoire du BTS SIO. Un index et des réponses à la fin de l'ouvrage permettent un travail autonome pendant les deux années de formation.

CHAPITRE 1

Suites numériques

Les résultats à connaître figurent dans la rubrique Ce qu'il faut savoir de ce chapitre.

Les suites arithmétiques et géométriques sont un outil indispensable pour l'étude de nombreux phénomènes discrets (placements, prêts, évolution de prix ou de population, …) c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une consolidation des acquis.

- Calculer une liste de termes ou un terme de rang donné d'une suite à l'aide d'un logiciel, d'une calculatrice ou d'un algorithme.
- Réaliser et exploiter à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel une représentation graphique.
- Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison.
- Calculer avec la calculatrice ou le tableur la somme de *n* termes consécutifs d'une telle suite.
- Utiliser un tableur ou une calculatrice pour obtenir un seuil avec une suite géométrique.

COURS

1 Mode de génération d'une suite et comportement global

A. Exemples de génération d'une suite

Voir notamment les exercices **40** à **44**.

Les exercices de ce chapitre, où sont privilégiées les situations issues de la vie économique et sociale, permettent d'observer différents exemples de génération de suites : suites données par l'expression de u_n en fonction de n, suites données à l'aide d'une relation de récurrence,…

Voici deux autres exemples introduits à des époques très différentes.

Exemple 1 : suite de Fibonacci

La relation de récurrence lie ici chaque terme de la suite aux deux termes qui le précèdent : c'est aussi $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ valable pour tout entier n tel que $n \geq 2$.

Leonardo Fibonacci est un mathématicien italien du XIII[e] siècle qui a modélisé, avec la suite qui porte son nom, la croissance d'une population de lapins se reproduisant dans un certain contexte.

Considérons la suite définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ valable pour tout n de $\mathbb{N}$.
Nous obtenons :
$u_2 = u_1 + u_0$ en remplaçant n par 0 dans la relation de récurrence (on obtient $u_2 = 2$),
$u_3 = u_2 + u_1$ en remplaçant n par 1 dans la relation de récurrence (on obtient $u_3 = 3$),
$u_4 = u_3 + u_2$ (on obtient $u_4 = 5$), et ainsi de suite.

Exemple 2 : suite de Conway « look and say », « regarde et dit »

John Horton Conway, mathématicien anglais, a créé cette suite en 1986.
La relation de récurrence est donnée par une phrase.

Cette suite est définie de la façon suivante :
- le premier terme est $u_0 = 1$,
- chaque terme est obtenu en indiquant combien de fois chaque chiffre (de 1 à 9) apparaît dans le terme précédent, dans l'ordre où ces chiffres apparaissent à la lecture du nombre.

Ainsi, dans $u_0 = 1$, il apparaît une fois 1, donc $u_1 = 11$.

De même, dans $u_1 = 11$, il apparaît deux fois 1, donc $u_2 = 21$.

Dans $u_2 = 21$, il apparaît une fois 2 et une fois 1, donc $u_3 = 1211$.

Écrire les valeurs de u_4 et u_5.

B. Suites croissantes, suites décroissantes

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)^2$,
donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$.

Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^2 + 2n + 1 > n^2$ car $2n + 1 > 0$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Chaque terme de la suite (u_n) est strictement supérieur au précédent ; on dit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Comme pour les fonctions, on définit une suite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $\mathbb{N}$ en remplaçant $\geq$ par $>$ (respectivement $\leq$ par $<$).

Remplacez $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$ pour une suite définie à partir de $n = 1$.

DÉFINITION

- Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, alors la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, alors la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
- Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, alors la suite (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$.
- Une suite monotone est une suite croissante sur $\mathbb{N}$ ou décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exemples

Méthode : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs quelconques de la suite.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

On en déduit que le sens de variation de (u_n) dépend du signe de r.

PROPRIÉTÉ

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
- Si $r = 0$, (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$.

Méthode : comme les termes de la suite (q^n) sont strictement positifs, on compare à 1 le quotient de deux termes consécutifs de la suite.

- Soit q un nombre réel strictement positif.

La suite (q^n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q car $q^0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q$.

Nous en déduisons, suivant les valeurs de q, le sens de variation de cette suite.

PROPRIÉTÉ

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante (ou stationnaire).
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.

- Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = n^2$.

La fonction carré étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)^2 > n^2$, donc $t_{n+1} > t_n$.

La suite (t_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Dans cet exemple, nous avons utilisé le sens de variation de la fonction f pour étudier le sens de variation de la suite définie par $u_n = f(n)$.

Nous admettons le théorème suivant qui lie le sens de variation d'une fonction f sur $[0, +\infty[$ et celui de la suite de terme général $f(n)$.

THÉORÈME

Si f est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$, alors la suite de terme général $f(n)$ est croissante.

On dispose d'énoncés analogues avec décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

Remarques

Vérifiez-le.

- La réciproque de ce théorème est fausse : en effet la suite de terme général $2n^2 - n$ est croissante mais la fonction $x \mapsto 2x^2 - x$ n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$.
- Ce théorème ne s'applique pas aux suites (u_n) définies par u_0 et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par exemple la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais pour $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_1 = f(u_0)$, donc $u_1 = 2$. Ainsi $u_1 < u_0$: la suite (u_n) n'est pas croissante.

- Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme 1 et de raison – 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

La suite (w_n) n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{N}$.

2 Suites arithmétiques et géométriques

Les acquis sur les suites arithmétiques et géométriques peuvent être consolidés par la résolution du problème ci-dessous : s'appuyant sur un contexte de gestion et intégrant l'utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice, il comporte un corrigé détaillé permettant de développer l'autonomie dans la rédaction d'une réponse aux questions posées.

Énoncé du problème

On se propose de comparer le montant des loyers de deux locaux commerciaux, notés 1 et 2, de même superficie, dans une même ville moyenne, pour un bail de 9 ans.

A. Étude du montant du loyer du local 1

	A	B	C	D	E	F
1	Local 1	6 156,00 €	6 156,00 €	Local 2	6 000,00 €	
2		6 300,00 €				
3		6 444,00 €				
4		6 588,00 €				
5		6 732,00 €				
6		6 876,00 €				
7		7 020,00 €				
8		7 164,00 €				
9		7 308,00 €				
10						
11		Total				Total
12						
13						

1. Reproduire la feuille de calcul ci-dessus donnant, en colonne B, le montant du loyer annuel du local 1 de 2014, la première année, à 2022, la neuvième année.

Les colonnes B, C, E et F sont au format monétaire à deux décimales.

2. Calculer, en cellule B12, la somme de ces 9 loyers annuels.

3. On note u_n le montant du loyer annuel, en euros, du local 1 en 2013 + n.

a) Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

4. Quelle formule, entrée en C2 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les nombres $u_2, u_3, \ldots, u_9$?

5. À l'aide du formulaire figurant à la fin de l'énoncé, indiquer quelle formule entrée en B13 permet de retrouver la somme des 9 loyers annuels pour le local 1.

B. Étude du montant du loyer du local 2

On note v_n le montant du loyer annuel, en euros, du local 2 en 2013 + n.

Pour 2014, le loyer annuel s'élève à 6 000 €. Chaque année, le montant de ce loyer augmente de 2,7 %.

1. a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire la nature de la suite (v_n) et préciser sa raison.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

2. Quelle formule, entrée en E2 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les nombres v_2, v_3, …, v_9 ?

3. Calculer en F12 la somme de ces 9 loyers annuels.

4. À l'aide du formulaire figurant à la fin de l'énoncé, indiquer quelle formule entrée en F13 permet de retrouver la somme des 9 loyers annuels pour le local 2.

C. Comparaison des deux formules de location

1. En quelle année le loyer annuel du local 2 devient-il supérieur à celui du local 1 ?

2. Quelle est la proposition la plus avantageuse pour le locataire pour la période de 9 ans ?

3. a) Déterminer par le calcul à partir de quelle valeur entière de n on a $u_n \geq 11\,000$.

b) Vérifier le résultat en prolongeant les valeurs de u_n dans la colonne C.

4. En prolongeant les valeurs de V_n dans la colonne E, déterminer à partir de quelle valeur entière n on a $V_n \geq 11\,000$.

Conformément au programme du BTS :

« Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique est donnée si nécessaire ».

FORMULAIRE

• Pour une suite arithmétique (u_n) :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}.$$

• Pour une suite géométrique (u_n) de raison q, où $q \neq 1$:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Corrigé

A. 2. Voir la feuille de calcul ci-après où la valeur 60 588 € est obtenue avec la formule =SOMME(B1:B9).

3. a) On passe de chaque nombre de la colonne B au suivant, c'est-à-dire de u_n à u_{n+1} en ajoutant le même nombre 144. Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 144$.

b) $u_n = u_1 + (n - 1)\, r$. (Ce résultat est rappelé dans **Ce qu'il faut savoir**.)
Donc ici $u_n = 6\,156 + (n - 1)\, 144$,
$u_n = 6\,012 + 144\, n$.

4. = C1 + 144.

5. D'après le formulaire, $u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = 9 \times \dfrac{u_1 + u_9}{2}$ qui correspond à la formule =9*(B1+B9)/2.

B. 1. a) $v_{n+1} = v_n + \frac{2,7}{100} v_n$,

$v_{n+1} = v_n + 0,027\, v_n$,

$v_{n+1} = 1,027\, v_n$.

b) $v_{n+1} = q v_n$ avec $q = 1,027$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,027$.

c) $v_n = v_1 q^{n-1}$. (Ce résultat est rappelé dans **Ce qu'il faut savoir**.)

Donc ici $v_n = 6\,000 \times 1,027^{n-1}$.

2. =E1*1,027.

3. Voir la feuille de calcul ci-après où la valeur 60 214,71 € est obtenue avec la formule =SOMME(E1:E9).

4. D'après le formulaire, $v_1 + v_2 + \ldots + v_9 = v_1 \times \frac{1-q^9}{1-q}$ qui correspond à la formule =E1*(1–1,027^9)/(1–1,027).

C. 1. $u_6 = 6\,876$ et $v_6 = 6\,854,94$; donc $u_6 > v_6$.

$u_7 = 7\,020$ et $v_7 = 7\,040,02$;

donc $u_7 < v_7$.

Le loyer annuel du local 2 devient supérieur à celui du local 1 pour $n = 7$, c'est-à-dire en $2013 + 7 = 2020$.

2. D'après **A.2.** et **B.3.**, la proposition la plus avantageuse pour le locataire pour la période de 9 ans est le local 2 car $60\,214,71 < 60\,588$.

3. a) Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$u_n \geq 11\,000$;

$6\,012 + 144\,n \geq 11\,000$ d'après **A.3.b)** ;

$144\,n \geq 4\,988$;

$n \geq \frac{4\,988}{144}$;

$n \geq 34,638\ldots$

On a donc $u_n \geq 11\,000$ à partir de $n = 35$.

b) Voir la feuille de calcul ci-après.

4. Voir la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	Local 1	6 156,00 €	6 156,00 €	Local 2	6 000,00 €	
2		6 300,00 €	6 300,00 €		6 162,00 €	
3		6 444,00 €	6 444,00 €		6 328,37 €	
4		6 588,00 €	6 588,00 €		6 499,24 €	
5		6 732,00 €	6 732,00 €		6 674,72 €	
6		6 876,00 €	6 876,00 €		6 854,94 €	
7		7 020,00 €	7 020,00 €		7 040,02 €	
8		7 164,00 €	7 164,00 €		7 230,10 €	
9		7 308,00 €	7 308,00 €		7 425,31 €	
10			7 452,00 €		7 625,80 €	
11		Total	7 596,00 €		7 831,69 €	Total
12		60 588,00 €	7 740,00 €		8 043,15 €	60 214,71 €
13		60 588,00 €	7 884,00 €		8 260,31 €	60 214,71 €
14			8 028,00 €		8 483,34 €	
15			8 172,00 €		8 712,39 €	
16			8 316,00 €		8 947,63 €	
17			8 460,00 €		9 189,21 €	
18			8 604,00 €		9 437,32 €	
19			8 748,00 €		9 692,13 €	
20			8 892,00 €		9 953,82 €	
21			9 036,00 €		10 222,57 €	
22			9 180,00 €		10 498,58 €	
23			9 324,00 €		10 782,04 €	
24			9 468,00 €		11 073,16 €	
25			9 612,00 €			
26			9 756,00 €			
27			9 900,00 €			
28			10 044,00 €			
29			10 188,00 €			
30			10 332,00 €			
31			10 476,00 €			
32			10 620,00 €			
33			10 764,00 €			
34			10 908,00 €			
35			11 052,00 €			
36						

On a $V_n \geq 11\,000$ à partir de $n = 24$.

3 Limite d'une suite géométrique

Dans cette partie, à l'aide d'un tableur, nous étudions les puissances entières de deux nombres « voisins » : 0,99 et 1,01.

A. Approche par un problème

On considère les deux suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$v_n = 0{,}99^n$ et $w_n = 1{,}01^n$.

1. On rappelle que le terme général d'une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est $u_n = u_0 q^n$.

Démontrer que (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques en précisant leur premier terme et leur raison.

2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$v_{n+1} < v_n$ et $w_{n+1} > w_n$.

3. À l'aide d'une feuille de calcul où la colonne A représente les valeurs de n, la colonne B celles de v_n et la colonne C celles de w_n, indiquer à partir de quelle valeur de n on a :

a) $v_n \leq 10^{-1}$; $v_n \leq 10^{-3}$; $v_n \leq 10^{-6}$ (un millionième) ; $v_n \leq 10^{-9}$ (un milliardième).

b) $w_n \geq 10$; $w_n \geq 10^3$; $w_n \geq 10^6$ (un million) ; $w_n \geq 10^9$ (un milliard).

4. Proposer une conjecture pour chacune des suites (v_n) et (w_n) lorsque n prend de « grandes valeurs ».

B. Limite de (q^n), où $q > 0$

La résolution du problème ci-dessus permet d'observer à l'aide d'un tableur les deux comportements très différents des suites $(0{,}99)^n$ et $(1{,}01)^n$ quand n prend de « grandes » valeurs : la suite $(0{,}99)^n$ prend des valeurs très « proches » de 0 et la suite $(1{,}01)^n$ prend de « grandes » valeurs.

Nous admettons ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}1^n = +\infty$.

Plus généralement le théorème suivant est admis.

THÉORÈME

Soit q un nombre réel *strictement positif*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1\,; \\ 1 & \text{si } q = 1\,; \\ 0 & \text{si } 0 < q < 1. \end{cases}$$

$1^n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

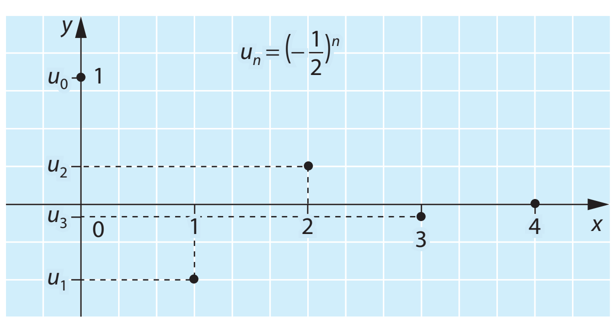
Exemple

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}917^n = 0$.

Remarque

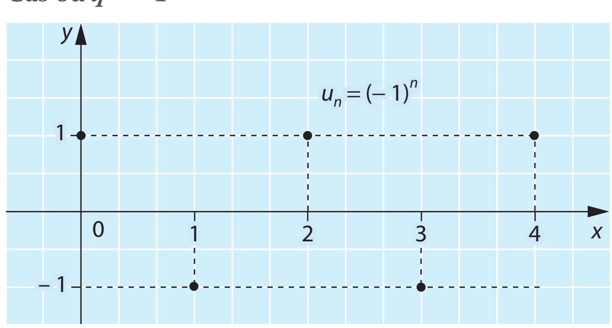
Observons graphiquement le comportement de la suite $(u_n) = (q^n)$ sur quelques exemples où q est négatif.

Cas où $q = -\dfrac{1}{2}$.



Nous admettons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0.$

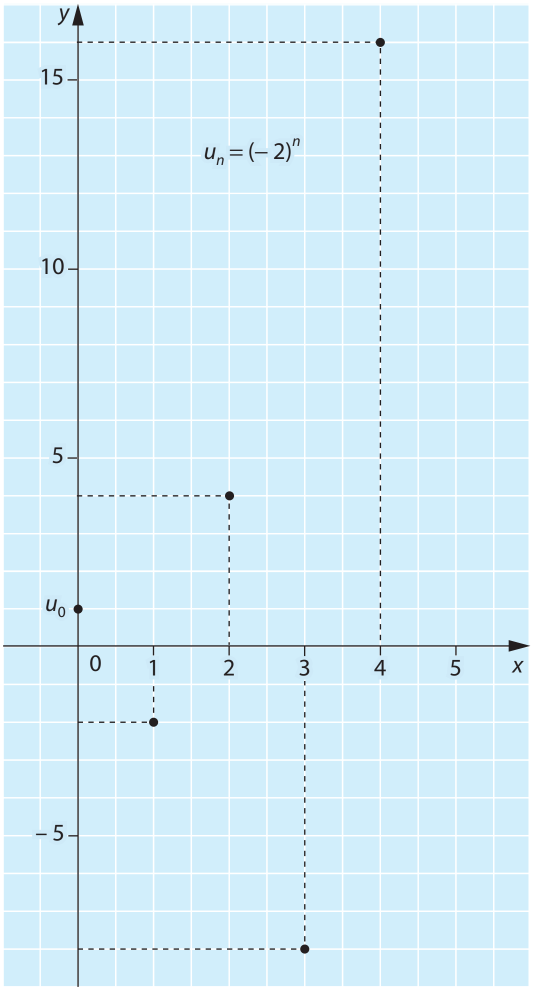
Cas où $q = -1$



$u_0 = u_2 = u_4 = 1$
$u_1 = u_3 = -1$

Pour tout n pair, $(-1)^n = 1$ et pour tout n impair, $(-1)^n = -1$.
La suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Cas où $q = -2$



$u_0 = 1$
$u_1 = -2$
$u_2 = 4$
$u_3 = -8$
$u_4 = 16$
$u_5 = -32$
$u_6 = 64$

La suite $(-2)^n$ n'a pas de limite.

Conséquence : limite d'une suite géométrique

- Si pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Ce qu'il faut savoir

Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques

• Une **suite arithmétique** est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en **ajoutant** au précédent un nombre réel constant r appelé **raison**.

Pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

• **Pour démontrer qu'une suite est arithmétique,** il suffit de vérifier que : pour tout entier n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ **est constant**. Cette constante est la raison r.

• **Sens de variation d'une suite arithmétique**
Une suite arithmétique de raison r est :
– croissante, si $r > 0$;
– décroissante, si $r < 0$;
– constante, si $r = 0$.

• **Expression de $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$**
– Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

• **Somme de $\boldsymbol{n}$ termes consécutifs**

Les deux formules suivantes, qui concernent la somme de termes successifs d'une suite arithmétique, doivent être rappelées dans tout exercice d'évaluation.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : $\boldsymbol{u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : $\boldsymbol{u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}}$.

– **Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique**, on peut retenir que :

$$\begin{pmatrix}\textbf{Somme de termes}\\ \textbf{successifs}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textbf{Nombre}\\ \textbf{de termes}\end{pmatrix} \times \frac{(\textbf{Premier terme}) + (\textbf{Dernier terme})}{\mathbf{2}}.$$

Suites géométriques

• Une **suite géométrique** est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en **multipliant** le précédent par une constante q appelée **raison**.

Pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}$.

• **Pour démontrer qu'une suite est géométrique,** il suffit de vérifier que : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante est la raison q.

• **Sens de variation d'une suite géométrique**
Une suite géométrique de raison q strictement positive et de premier terme strictement positif est :
– croissante, si $q > 1$;
– décroissante, si $0 < q < 1$;
– constante, si $q = 1$.

• **Expression de u_n en fonction de n**

– Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 q^n}$.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_n = u_1 q^{n-1}}$.

• **Somme de n termes consécutifs**

Les deux formules suivantes, qui concernent la somme de termes successifs d'une suite géométrique, doivent être rappelées dans tout exercice d'évaluation.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : $\boldsymbol{u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1}$.

– Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : $\boldsymbol{u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1}$.

– **Pour une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique**, on peut retenir que :

$$\left(\textbf{Somme de termes successifs}\right) = \left(\textbf{Premier terme}\right) \times \frac{\mathbf{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}}{\mathbf{1-(raison)}}.$$

Augmentation ou diminution de x %

• Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, un prix… augmente de x % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{x}{100}$.

• S'il s'agit d'une diminution de x %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\dfrac{x}{100}$.

Limite de q^n

• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

• Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q.

• Si, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• Si, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Applications des suites arithmétiques et géométriques à la gestion

Aucune connaissance n'est exigible sur ce thème en mathématiques.

Intérêts simples

• Placer un capital C_0 à x % par an **avec intérêts simples** signifie que, chaque année, on reçoit le même intérêt : $C_0 \times \frac{x}{100}$.

• Les capitaux disponibles successifs au bout d'une année…, *n* années : $C_1, \ldots, C_n$ sont alors des termes successifs d'une **suite arithmétique de premier terme C_0 et de raison** : $\boldsymbol{C_0 \times \frac{x}{100}}$.

• **Notation** : on note souvent $i = \frac{x}{100}$, *i* étant l'intérêt servi pour un capital de un euro.

• La **valeur acquise** est, à la fin du placement, le montant du capital augmenté de l'intérêt produit.

• Ce type de placement est notamment celui des emprunts d'État. L'épargnant perçoit l'intérêt chaque année ou en fin de contrat.

Intérêts composés

• Placer un capital C_0 à *x* % par an **avec intérêts composés** signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que, l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.

• Pour un placement avec intérêts composés à *x* %, on note $\boldsymbol{i = \frac{x}{100}}$; *i* est l'intérêt versé pour un capital de un euro ; les capitaux disponibles successifs au bout d'une année, …, *n* années : $C_1, \ldots, C_n$ sont alors des termes successifs d'une **suite géométrique de premier terme C_0 et de raison** : $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})$.

• La **valeur acquise** est, à la fin du placement, (comme pour les placements à intérêts simples) le montant du capital augmenté des intérêts produits.
Au bout de *n* années, avec les notations ci-dessus, la valeur acquise est
$\boldsymbol{C_n = C_0(1 + i)^n}$.

• Il existe également des placements semestriels, mensuels, journaliers à intérêts composés.

RÉPONSES P. 157

TP 1 Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique avec le tableur

Intérêts simples ou intérêts composés

Pour consolider les acquis

• Pour un placement avec **intérêts simples** de x %, on note $i = \frac{x}{100}$; les capitaux disponibles successifs C_0, C_1, …, C_n sont des termes successifs d'une suite arithmétique de raison $i\,C_0$.
(i est l'intérêt servi pour un capital de 1 €).
Ce type de placement est notamment celui des emprunts d'États.

• Pour un placement avec **intérêts composés** de x %, on note $i = \frac{x}{100}$; les capitaux disponibles successifs C_0, C_1,…, C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de raison $(1 + i)$.
Ce type de placement est notamment celui des « livrets A », des « LEP » (livrets d'épargne populaire), des « livrets jeunes », des « PEL » (plans d'épargne logement), des « LDD » (livrets de développement durable)…

Pour placer un capital $C_0 = 10\,000$ €, on a le choix entre deux possibilités : à intérêts simples au taux annuel de 5 %, ou à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %. On utilise le tableur pour comparer ces deux formules, pour une durée maximale de placement de 40 ans.

A. Intérêts simples

On note C_n le capital disponible au bout de n années. Si le capital $C_0 = 10\,000$ € de départ est placé à intérêts simples au taux de 5 %, on aura 500 € d'intérêts chaque année.

1. Calculer, à l'aide du tableur, les termes de la suite (C_n), pour n allant de 0 à 40.

2. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n, qui a été utilisée pour calculer à l'aide du tableur.

3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

B. Intérêts composés

On note C'_n le capital disponible au bout de n années lorsque le capital de départ $C_0 = 10\,000$ € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3,5%.

1. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de C'_{n+1} en fonction de C'_n ?

2. Quelle est la nature de la suite (C'_n) ?

3. Calculer, à l'aide du tableur, les termes de la suite (C'_n), pour n allant de 0 à 40.

4. Au bout de combien d'années, selon ce second placement, le capital initial aura-t-il doublé ?

C. Comparaison graphique

À l'aide du tableur, représenter les deux suites sur le même graphique.

Comparer la croissance des deux suites.

Fiche technique tableur

Calcul des termes d'une suite arithmétique

On veut calculer en colonne A les termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison 100.
En A1 on entre la valeur u_0.
En A2 on entre la **formule** = A1+100 . Puis on ***recopie*** vers le bas.

Calcul des termes d'une suite géométrique

On veut calculer en colonne B les termes de la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison 1,05.
En B1 on entre la valeur v_0.
En B2 on entre la **formule** = B1*1,05. Puis on ***recopie*** vers le bas.

TP 2 Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique avec la calculatrice

ALGO

Un TP pour approfondir.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type :
- une population, un prix… subit n diminutions successives de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\frac{t}{100}$;
- une population, un prix… subit n augmentations successives de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$.

Une entreprise doit honorer, en 12 mois, une commande de 20 000 pièces d'un certain produit. Elle possède déjà en stock la production du mois précédent de 900 pièces. Chaque mois, la production de ce produit augmente de t % par rapport à la production du mois précédent. On recherche, en utilisant un algorithme, la plus petite valeur entière de t permettant à l'entreprise d'honorer la commande.

1. On a programmé l'algorithme suivant, sur une calculatrice.

```
PROGRAM:COMMANDE
:Prompt T
:900→P
:P→S
:For(K,1,12)
:(1+T/100)*P→P
:S+P→S
:End
:Disp S
```

```
======COMMANDE======
"T":?→T↵
900→P↵
P→S↵
For 1→K To 12↵
(1+T÷100)×P→P↵
S+P→S↵
Next↵
S
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

Quel est le rôle de chacune des variables P, S et T ?

2. Quelle est la nature de la suite des valeurs successives de la variable P durant l'exécution de l'algorithme ?

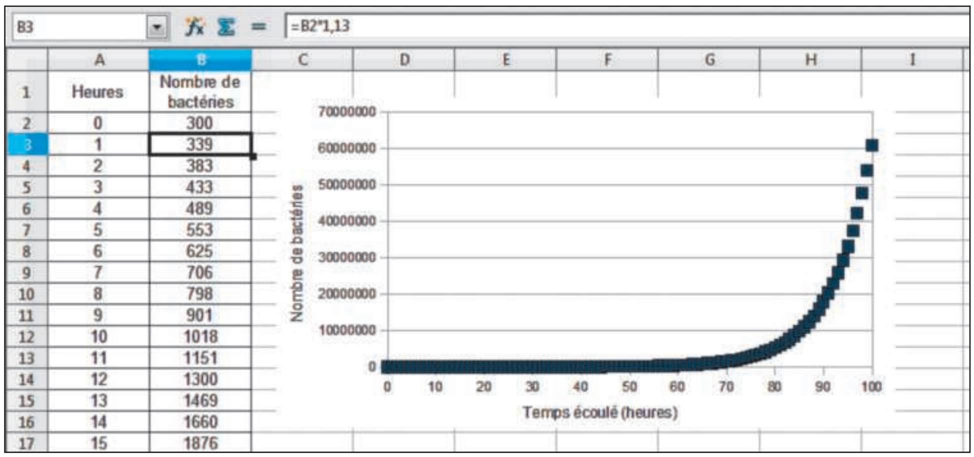
3. Implanter l'algorithme sur calculatrice. L'exécuter pour $T = 8$ puis pour $T = 9$. Conclure.

TP 3 Étudier des suites à l'aide d'un tableur et utiliser la limite de (q^n)

Dans un milieu de culture en laboratoire, une population microbienne évolue en fonction du temps. Au début de l'étude, le nombre de bactéries est de 300 et l'on estime qu'il augmente de 13 % chaque heure.

A. Évolution, heure par heure, du nombre de bactéries

On utilise le tableur pour étudier la population de bactéries (on pourra présenter la feuille de calcul comme ci-dessous, en plaçant la colonne B au format nombre avec 0 décimale).


B3 =B2*1,13

	A	B
1	Heures	Nombre de bactéries
2	0	300
3	1	339
4	2	383
5	3	433
6	4	489
7	5	553
8	6	625
9	7	706
10	8	798
11	9	901
12	10	1018
13	11	1151
14	12	1300
15	13	1469
16	14	1660
17	15	1876

1. Justifier la formule = B2*1,13 entrée en cellule B3.

2. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_0 = 300$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}13 \times u_n$ de sorte que u_n, arrondi à l'unité, correspond au nombre de bactéries au bout de n heures. Calculer et représenter à l'aide du tableur les valeurs de u_n pour n allant de 0 à 100.

3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?

4. Déterminer, d'abord graphiquement, puis à l'aide des valeurs u_n calculées, au bout de combien d'heures le nombre de bactéries dépasse 100 000.

B. Effet d'un antibiotique

En réalité, au bout de 15 heures, on verse dans le milieu de culture un antibiotique qui détruit progressivement les bactéries. Le nombre de bactéries, que l'on pouvait estimer à 1 876 au bout de 15 heures se met alors à diminuer et l'on admet que le nombre de bactéries vivantes dans le milieu au temps n, exprimé en heures, est donné, pour tout entier n, $n \geq 15$, par :

$$v_n = 1\,876 \times 0{,}85^{n-15}, \text{ arrondi à l'unité.}$$

1. Quelle formule peut-on entrer en cellule C17 (correspondant à $n = 15$), puis recopier vers le bas, pour obtenir les valeurs de v_n parmi les trois formules suivantes ?

=B17*0,85^(A17-15) ;

=B$17*0,85^(A17-15) ;

=B17*0,85^(A$17-15).

2. Quelle est la limite de la suite $(0{,}85^n)$? En écrivant $v_n = 1\,876 \times 0{,}85^{-15} \times 0{,}85^n$, en déduire la limite de la suite (v_n).

3. À partir de quelle valeur n du temps, les bactéries sont-elles toutes mortes ($v_n < 1$) ?

TP 4 Mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un seuil avec la calculatrice, Algobox, Scilab

La désintégration de l'atome de radium donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, qui elle-même se désintègre avec le temps selon la formule :

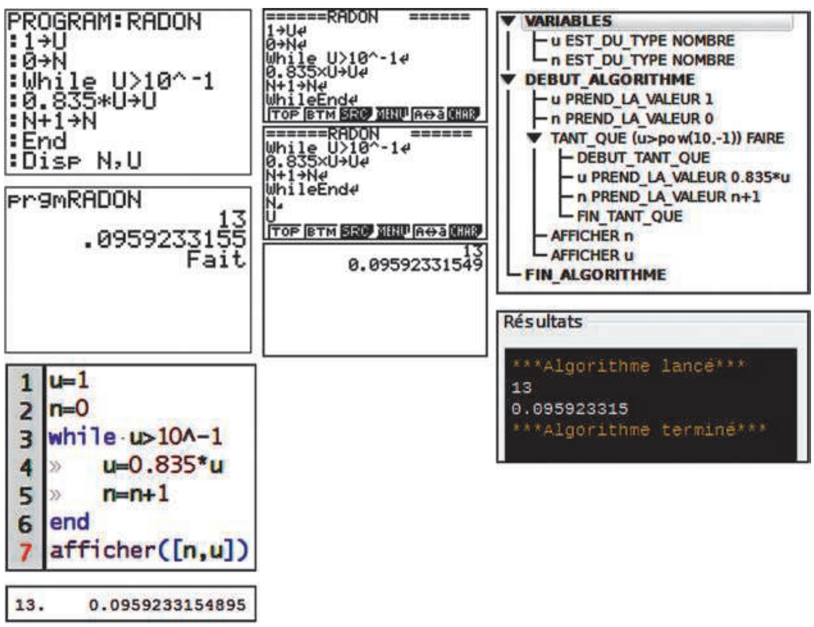
$$u_{n+1} = 0{,}835 \times u_n,$$

où u_n désigne la masse du gaz au bout du n-ième jour. On considère qu'au début de l'expérience on a $u_0 = 1$.

A. Analyse d'un algorithme

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. L'algorithme suivant a été exécuté sur calculatrices, Algobox et Scilab.



a. À quoi correspond la variable n ? la variable u ?

b. Quelle est la condition d'arrêt de la boucle « Tant que » ?

3. Interpréter les résultats affichés.

B. Modification de l'algorithme

On souhaite programmer un algorithme permettant d'obtenir la première valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle $u_n \leq 10^{-p}$, p étant un entier naturel donné.

1. Modifier l'algorithme précédent de façon à répondre à ce problème puis le programmer, par exemple avec une calculatrice, AlgoBox ou Scilab.

2. Déterminer, à l'aide de votre programme, au bout de combien de jours la masse de radon est inférieure à 10^{-2}, à 10^{-3}, à 10^{-6}.

Algorithmique

Boucle conditionnelle « Tant que »

Structure

Dans une boucle « **Tant que** », le *traitement* est répété tant que la *condition* est vraie. Quand la condition est fausse, on sort de la boucle.

Tant que *condition*
| *traitement*
FinTantque

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	AlgoBox	Scilab
:While *condition* :Then :*traitement* :End	While *condition* ↵ Then ↵ *traitement* ↵ WhileEnd	Ajouter TANT QUE...	while *condition* *traitement* end

Exemple

Rechercher, à partir de $n = 0$, le plus petit entier n tel que $1{,}05^n \geq 2$.

Texas Instruments

```
PROGRAM:TANTQUE
:0→N
:While 1.05^N<2
:N+1→N
:End
:Disp N
```

Casio

```
======TANTQUE ======
0→N↵
While 1.05^N<2↵
N+1→N↵
WhileEnd
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

AlgoBox

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (pow(1.05,n)<2) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Scilab

```
n=0
while 1.05^n<2
    n=n+1
end
disp(n)
```

Boucle « Pour »

Structure

Dans une boucle « **Pour** », le *traitement* est répété un nombre fixé de fois (ici n fois). Un compteur (noté ici k) s'incrémente automatiquement de 1 à chaque itération.

Pour k **de** 1 **à** n
| *traitement*
FinPour

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	AlgoBox	Scilab
:For(K,1,N) :*traitement* :End	For 1 → K To N ↵ *traitement* ↵ Next	Ajouter POUR...DE...A	for k=1:n *traitement* end

Exemple

Calculer la somme 1 + 2 + … + 100 des 100 premiers nombres entiers.

Texas Instruments

```
PROGRAM:POUR
:0→S
:For(K,1,100)
:S+K→S
:End
:Disp S
```

Casio

```
======POUR      ======
0→S↵
For 1→K To 100↵
S+K→S↵
Next↵
S◢
COM CTL JUMP ? ◢ ▷
```

AlgoBox

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+k
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Scilab

```
S=0
for k=1:100
    S=S+k
end
disp(S)
```

TP 5 Comparer deux suites et calculer la somme de termes consécutifs, avec le tableur

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

Contrat d'entretien

Une entreprise a le projet de souscrire un contrat d'entretien pour une chaudière à partir de janvier 2015. Elle contacte l'entreprise Chaufeco et l'entreprise Chaufmax. Chacune d'entre elles propose une évolution différente des versements pour un contrat offrant les mêmes prestations.

A. Contrat Chaufeco

L'entreprise Chaufeco propose un contrat sur 10 ans avec un versement de 150 € la première année puis une augmentation du versement de 3,25 € par an jusqu'à la fin du contrat.

1. Sur une feuille de calcul, déterminer pour chacune des dix années, selon ce contrat, le versement annuel ainsi que le cumul des sommes versées depuis la première année (arrondir l'affichage au centime d'euro).

Appelez le professeur pour présenter votre feuille de calcul.

2. Quelle est la nature de la suite correspondant aux versements annuels ?

3. Quelle sera la somme totale versée à l'entreprise Chaufeco à la fin du contrat ?

B. Contrat Chaufmax

L'entreprise Chaufmax propose un contrat sur 10 ans avec un versement de 150 € la première année puis une augmentation du versement de 2 % par an jusqu'à la fin du contrat.

1. Compléter la feuille de calcul pour déterminer, pour chacune des dix années, selon ce second contrat, le versement annuel ainsi que le cumul des sommes versées depuis la première année (arrondir l'affichage au centime d'euro).

2. Quelle est la nature de la suite correspondant aux versements annuels ?

3. Quel est, des deux contrats, celui pour lequel la somme totale versée à la fin du contrat est la moins importante ?

Appelez le professeur pour présenter votre réponse.

LES CAPACITÉS ATTENDUES

	Exercices corrigés
• Comportement global d'une suite	
Calculer une liste de termes ou un terme de rang donné à l'aide d'un logiciel, d'une calculatrice, d'un algorithme.	20, 22, 25, 27, 29, 31, 57, 62
Réaliser et exploiter une représentation graphique.	1, 6
• Suites arithmétiques et géométriques	
Écrire le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique définie par son premier terme et sa raison.	1, 6, 7, 14, 20, 22, 25, 54
Calculer la somme de n termes consécutifs avec une calculatrice ou le tableur.	14, 25, 28
• Limite d'une suite géométrique	
Déterminer lorsque cela est possible un seuil à partir duquel $u_n > a$ ou $\lvert u_n \rvert \leq 10^{-p}$.	31, 36, 37, 59, 62

Les exercices 1 à 22 permettent de consolider des acquis des années précédentes.

Suites arithmétiques

1. ++ **Suite arithmétique de premier terme u_0**

La suite arithmétique (u_n) est définie par :

$u_0 = -2$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{25}.
4. Représenter graphiquement la suite (u_n).
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
6. On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer S_{25}.

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut être calculée avec une calculatrice ou un tableur.

CORRIGÉ P. 158

2. ++ **Suite arithmétique de premier terme u_0, calcul de termes, calcul de la somme de termes successifs**

La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 11$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10} et u_{20}.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer S_{20}.

Dans les exercices **3** à **5**, (u_n) désigne une **suite arithmétique** de raison r, de premier terme u_0 et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

3. + **On donne le premier terme et la raison**

$u_0 = -1$ et $r = \dfrac{1}{4}$; calculer u_{12} et S_{12}.

4. + **On donne un terme et la raison**

$u_{71} = 326$ et $r = 2$.

1. Calculer u_0.
2. Calculer S_{71}.

5. ++ **Reconnaître une suite arithmétique**

1. Démontrer que les nombres 6, 12, 18 peuvent être, dans cet ordre, les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 d'une suite arithmétique (u_n) dont on précisera la raison.
2. Démontrer que 60 est un terme u_n de cette suite en précisant la valeur correspondante de n.

Suites géométriques

6. ++ **Suite géométrique de premier terme u_0**

La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 16$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-3}.
4. Représenter graphiquement la suite (u_n).
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
6. On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer S_{10}. Arrondir à 10^{-3}.

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique peut être calculée avec une calculatrice ou un tableur (voir les **TP2** et l'exercice **25**).

CORRIGÉ P. 158

Dans les exercices **7** à **9**, (u_n) désigne une **suite géométrique** de raison q, de premier terme u_0 et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

7. + **On donne le premier terme et la raison**

$u_0 = 1\,000$ et $q = 1{,}022\,5$.

Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de u_{10} et de S_{10}.

CORRIGÉ P. 158

8. ++ **On donne un terme et la raison**

a) $u_5 = 32\,768$ et $q = 0{,}8$; calculer u_0.

b) $u_4 = 20\,736$ et $q = 1{,}2$; calculer u_0.

9. ++ **Reconnaître une suite géométrique**

1. Démontrer que les nombres 50 000, 48 000, 46 080 peuvent être, dans cet ordre, les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison.

2. Calculer u_{10} et S_{10}. Arrondir à 10^{-2}.

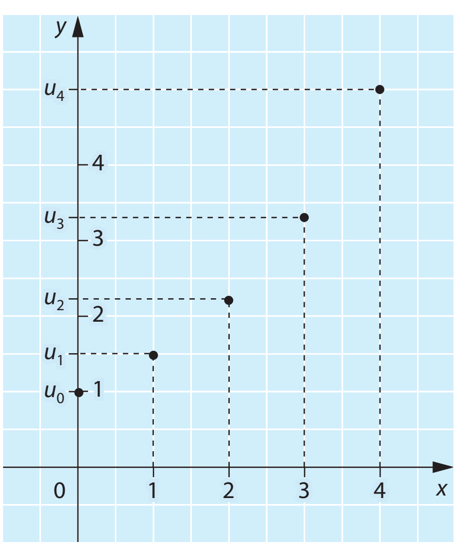
10. ++ **Représentation graphique d'une suite géométrique**

Dans chacun des deux cas suivants, la figure donne la représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q.

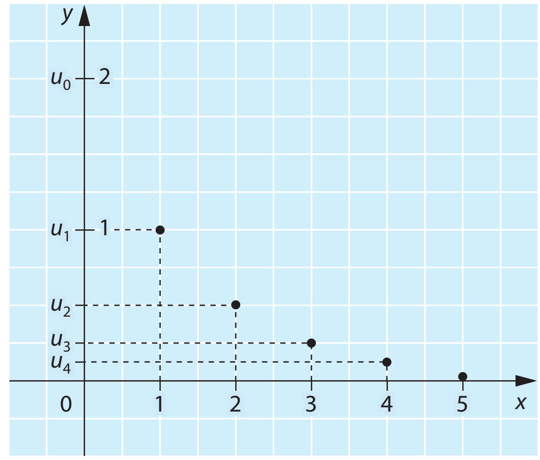
a) Déterminer graphiquement u_0 et q.

b) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-3}.

1.



2.



Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

11. ++ **Chiffre d'affaires**

Le chiffre d'affaires d'une entreprise de sous-traitance pour l'aéronautique s'accroît tous les ans de 50 000 €.

En 2010, le chiffre d'affaires était de 500 000 €. On note $C_0 = 500\,000$ et C_n le chiffre d'affaires au cours de l'année $(2010 + n)$.

1. Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

2. a) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2..., C_n sont des termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.

b) Calculer C_5. Que représente C_5 ?

c) Calculer le chiffre d'affaires prévisible pour 2016.

3. Déterminer en quelle année on peut prévoir un chiffre d'affaires de 1 050 000 €.

12. +++ **Somme de termes successifs d'une suite arithmétique**

On souhaite amortir un matériel acheté 100 000 € avec cinq annuités qui soient les termes consécutifs a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 d'une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 25\,000$.

Déterminer a_1, a_2, a_3, a_4.

▶ • *Amortir en cinq annuités signifie que la somme des cinq annuités est égale à 100 000 €.*
• *L'amortissement enregistre la perte de valeur d'un équipement due à l'usage ou au temps. On calcule chaque année une annuité d'amortissement qui est enregistrée comme une charge pour l'entreprise, et vient en déduction du bénéfice imposable. En fin de vie, le bien est totalement amorti : la somme des amortissements est égale à la valeur d'achat.*
• *Utiliser un résultat rappelé dans* **Ce qu'il faut savoir**.

13. +++ Forage d'un puits

On dispose d'un crédit de 414 000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine. Le coût du forage est fixé à 1 000 euros pour le premier mètre creusé, 1 200 pour le deuxième, 1 400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.

On pose $u_0 = 1\,000$, $u_1 = 1\,200$… u_n désigne donc le coût en euros du $(n + 1)$-ième mètre creusé.

1. **a)** Calculer u_5.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

c) Déduire du **b)** la nature de la suite (u_n).

d) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier non nul n, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres (par exemple le coût total d'un puits de 3 mètres est $S_3 = u_0 + u_1 + u_2$, c'est-à-dire $S_3 = 3\,600$ euros). Montrer que le coût total d'un puits de n mètres est $100\,n^2 + 900\,n$.

3. Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414 000 euros.

14. +++ Augmentation de *t* % par an, calcul de la somme de termes successifs

En janvier 2011, une firme offrait sur le marché 2 000 unités d'un nouveau produit, avec une perspective d'augmentation de cette production de 5 % par an pendant 7 ans.

On pose $p_0 = 2\,000$. On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $(2011 + n)$.$(2011 + n)$ désigne les années 2012 pour $n = 1$; 2013 pour $n = 2$…

1. Calculer p_1, p_2, p_3.

2. Exprimer, pour tout entier n, p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n).

> **Méthode :** *Pour établir qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$; q, constant, est la raison de la suite géométrique.*

3. Exprimer p_n en fonction de n.

4. Calculer la production totale prévisible entre janvier 2011 et janvier 2018.

On rappelle que la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

> **▶ Augmentation ou diminution de *t* %**
>
> • *Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix … augmente de t % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.*
>
> • *S'il s'agit d'une diminution de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1 - \frac{t}{100}$.*

CORRIGÉ P. 158

15. +++ Augmentation annuelle de 1,5 %

Le responsable d'un magasin de téléphonie mobile a embauché un technicien le 1er juillet 2014, avec les conditions suivantes :

– salaire mensuel : $u_0 = 2\,200$ € le 1er juillet 2014 ;

– augmentation de 1,5 % par an.

On note : u_1 : le salaire le 1er juillet 2015 ;

u_2 : le salaire le 1er juillet 2016 ;

…

u_n : le salaire le 1er juillet de l'année $(2014 + n)$.

1. Calculer le salaire mensuel u_1 au cours de la deuxième année puis le salaire mensuel u_2 au cours de la troisième année.

2. Les salaires successifs de ce technicien forment une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2\,200$ €.

S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Justifier votre réponse et calculer la raison de cette suite.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Si le salaire du technicien devait augmenter tous les ans de 1,5 % pendant 5 ans, quel serait son montant le 1er juillet 2019 ? Arrondir au centime d'euro.

16. +++ Le premier terme de la suite est P_1

Un sous-traitant pour l'industrie automobile augmente chaque année sa production d'un certain type de pièces de 6 %. La production P_1 de la première année est de 45 000 pièces.

1. Déterminer la nature de la suite des productions annuelles en précisant le premier terme et la raison.

2. Calculer la production P_2 pour la deuxième année, P_3 pour la troisième année, P_4 pour la quatrième année ; les valeurs seront arrondies à l'unité.

3. On désigne par P_n la production de l'année n. Exprimer P_n en fonction de n.

4. Calculer la production de la douzième année (arrondir à l'unité).

5. Déterminer, avec la calculatrice ou le tableur, en quelle année la production P_n dépassera 100 000 pièces.

17. ++ Une diminution annuelle de 4 % pour protéger l'environnement

Pour répondre à une nouvelle norme antipollution, un important groupe industriel de l'agroalimentaire doit ramener progressivement sa quantité de rejets, qui était de 50 000 tonnes par an en 2014, à une valeur inférieure ou égale à 30 000 tonnes en 10 ans au plus, soit une réduction de 40 %.

Il s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets de 4 % (soit un taux annuel de diminution de 4 %).

1. S'il rejette 48 000 tonnes en 2015, respecte-t-il son engagement ?

2. Pour tout entier n, on note r_n la quantité de rejets de l'année « $2014 + n$ ».

a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
b) Quelle est la nature de la suite (r_n) ?
c) Exprimer r_n en fonction de n.
3. Calculer, à la tonne près, la quantité de rejets prévue pour l'année 2024. La norme sera-t-elle respectée en 2024 ?
4. Un taux annuel de diminution de 5 % permettrait-il de respecter la norme ?

18. ++ Évolution d'une production

Une entreprise commence cette semaine la fabrication de systèmes d'alarme pour les entrepôts et les locaux industriels. La production, la première semaine, sera $u_1 = 2\,000$. Puis l'entreprise prévoit d'augmenter sa production chaque semaine de 10 %.
On désigne par u_n, le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine.
1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. a) Quel coefficient multiplicatif permet de passer de u_1 à u_2 ? de u_2 à u_3 ? de u_n à u_{n+1} ?
b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
3. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines. Le résultat sera donné arrondi à l'unité.

> **Conseil :** *on peut se reporter à la rubrique* **Ce qu'il faut savoir** *de ce chapitre pour les formules donnant la somme de termes successifs d'une suite arithmétique ou géométrique.*

19. ++ Payer en quatre fois

Une entreprise achète un équipement 6 800 €. Les conditions de paiement sont les suivantes : les montants des quatre remboursements, notés u_0, u_1, u_2, u_3 sont des termes successifs de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q = 0{,}6$. Calculer les montants des quatre remboursements : u_0, u_1, u_2, u_3.

> **Méthode :** *de $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 6\,800$, déduire une équation d'inconnue u_0, à l'aide d'une formule rappelée à l'exercice* **14**.

20. ++ Placement avec intérêts simples

On place un capital $C_0 = 1\,000$ € à 4 % par an avec intérêts simples. Cela signifie, que chaque année, on reçoit le même intérêt : $C_0 \times \frac{4}{100}$. On note C_n le capital obtenu, ou « valeur acquise », au bout de n années.
1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. a) Donner, pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, …, C_n sont des termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.
c) Donner l'expression de C_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

CORRIGÉ P. 158

> **Placements avec intérêts simples**
> • *Placer un capital C_0 à x % par an* ***avec intérêts simples*** *signifie que, chaque année, on reçoit le même intérêt : $C_0 \times \frac{x}{100}$.*
> • *Les capitaux disponibles successifs au bout d'une année…, n années : C_1, …, C_n sont alors des termes successifs d'une* ***suite arithmétique de premier terme C_0 et de raison*** *: $C_0 \times \frac{x}{100}$.*
> • ***Notation*** *: on note souvent $i = \frac{x}{100}$, i étant l'intérêt servi pour un capital de un euro.*
> • *La* ***valeur acquise*** *est, à la fin du placement, le montant du capital augmenté de l'intérêt produit.*
> • *Ce type de placement est notamment celui des emprunts d'État. L'épargnant perçoit l'intérêt chaque année ou en fin de contrat.*

21. ++ Emprunt d'État

On place un capital $C_0 = 1\,000$ € en emprunts d'État à 3,673 % par an avec intérêt simple. Cela signifie que, chaque année, on reçoit le même intérêt : $C_0 \times \frac{3{,}673}{100}$. On note C_n le capital disponible (ou « valeur acquise ») au bout de n années.
1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. a) Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, …, C_n sont des termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.
c) Donner l'expression de C_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

22. +++ Placement avec intérêts composés

Dans cet exercice, on donnera éventuellement des valeurs arrondies au centime des résultats.
On place un capital $C_0 = 1\,000$ € à 4 % par an avec intérêts composés. Ce qui signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital, et que l'année suivante ils rapportent eux aussi des intérêts. C'est ce que les financiers appellent « l'effet cliquet ». On note C_n le capital obtenu, ou « valeur acquise », au bout de n années.
1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. a) Donner, pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, …, C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.
c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{17} et C_{18}.
3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

CORRIGÉ P. 159

▶ Placements avec intérêts composés

• *Placer un capital C_0 à x % par an* ***avec intérêts composés*** *signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que, l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.*

• *Pour un placement avec intérêts composés à x %, on note* $i = \frac{x}{100}$ *; i est l'intérêt versé pour un capital de un euro ; les capitaux disponibles successifs au bout d'une année, …, n années : C_1, …, C_n sont alors des termes successifs d'une* ***suite géométrique de premier terme C_0 et de raison :*** $(1 + i)$.

• *La* **valeur acquise** *est, à la fin du placement, (comme pour les placements à intérêts simples) le montant du capital augmenté des intérêts produits.*
Au bout de n années, avec les notations ci-dessus, la valeur acquise est $C_n = C_0(1 + i)^n$.

23. ++ Déterminer le meilleur placement

Deux sociétés A et B proposent à leurs clients les placements suivants :
– A propose un intérêt de 4,8 % par an.
– B propose un intérêt de 0,40 % par mois.
Dans les deux cas, les intérêts sont ajoutés au capital à la fin de chaque période de référence : année pour A, mois pour B.

1. Si un client place un capital de 100 000 euros, que sera devenu ce capital au bout d'une année dans les deux cas ?

2. Laquelle des deux sociétés offre le placement le plus avantageux pour les clients ?

24. ++ Deux placements

1. Un capital C_0 d'un montant de 30 000 € est placé au taux annuel de 3,5 % à intérêts composés.

a) Calculer les valeurs acquises C_1 et C_2 de ce capital, respectivement au bout de la première année et de la deuxième année.

b) On note C_n la valeur acquise de ce placement au bout de la n-ième année. Montrer que la suite (C_n) est géométrique et que $C_n = C_0 \times (1{,}035)^n$.

2. Un autre capital Q_0 d'un montant de 25 000 € est placé à la même date que C_0 au taux annuel de 4,5 % à intérêts composés.

a) Calculer la valeur acquise Q_n de ce placement au bout de la n-ième année.

b) Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur le nombre n d'années à partir duquel Q_n dépassera C_n.

25. +++ Calculer une liste de termes et la somme de *n* termes consécutifs d'une suite géométrique à l'aide d'un tableur

TICE

Le responsable d'une PME possède depuis le 1er janvier 2013 une messagerie électronique professionnelle, sur laquelle il conserve tous les messages reçus ou envoyés, en les classant par année.

Il a constaté au 31 décembre 2013 que la taille du dossier contenant les messages de l'année 2013 était de 4 mégaoctets (Mo).

Une étude a montré que la taille des messages électroniques professionnels augmentait en moyenne de 5 % par an. On fait l'hypothèse que cette augmentation se maintient au moins jusqu'en 2019.

On note u_n la taille, en mégaoctets, du dossier contenant les messages de l'année $(2013 + n)$ selon le modèle décrit précédemment. On a donc $u_0 = 4$.

On utilise une feuille de calcul d'un tableur *(voir l'annexe)* pour observer l'évolution de la taille de l'ensemble des dossiers de cette PME depuis 2013.

Annexe

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Taille de l'ensemble des dossiers (en Mo)
2	2010	0	4,00	4,00
3	2011	1	4,20	8,20
4	2012	2	4,41	12,61
5	2013	3		
6	2014	4		
7	2015	5		
8	2016	6		

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Selon ce modèle, calculer la taille du dossier de l'année 2019. Arrondir à 0,01 Mo.

4. a) Donner une formule qui, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C.

b) Parmi les formules suivantes, indiquer toutes celles qui, saisies dans la cellule D3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne D.

=SOMME(C2:C3) =SOMME($C$2:C3) =D2+C3
=$D$2+C3

5. a) Calculer la taille de l'ensemble des dossiers au 31 décembre 2019. Arrondir à 0,01 Mo.

b) La capacité de stockage de la messagerie est limitée à 30 mégaoctets. Peut-on estimer que le responsable pourra conserver la totalité de ses messages ? Justifier.

On pourra utiliser le formulaire suivant :

– La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) est donnée par :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

– La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q $(q \neq 1)$ est donnée par :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

CORRIGÉ P. 159

26. +++ Suite arithmétique et suite géométrique

TICE

Un industriel souhaite installer un chauffage géothermique dans un atelier de son entreprise. Une société spécialisée lui propose une étude. Un forage initial de 100 mètres doit être réalisé et des échangeurs de chaleur doivent être installés dans l'atelier.

Le coût de cette réalisation serait pour l'entreprise de 3 500 €.

1. Pour améliorer le rendement de l'installation, la société qui installe ce chauffage suggère de réaliser un forage plus profond. Chaque décamètre supplémentaire est facturé 55 € (1 décamètre se note 1 dam et 1 dam = 10 m). La société remet à l'industriel la feuille de calcul reproduite ci-dessous qui met en relation les forages supplémentaires, le coût de l'installation et les économies annuelles en chauffage par rapport à une installation « classique ».

	A	B	C	D	E
1	Profondeur du forage	Profondeur suppl. (dam)	Coût de l'installation	Économie réalisée/an	Amortie en (ans)
2	100 + 0	0	3 500 €	500 €	7,0
3	100 + 10	1	3 555 €	525 €	
4	100 + 20	2	3 610 €	551 €	
5	100 + 30	3	3 665 €	579 €	
6	100 + 40	4	3 720 €	608 €	
7	100 + 50	5	3 775 €	638 €	
8	100 + 60	6	3 830 €	670 €	

Le coût de l'installation est représenté par une suite (u_n) où n désigne le nombre de décamètres supplémentaires du forage.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser les éléments caractéristiques de cette suite.

b) Justifier la phrase « le coût de l'installation pour un forage de 260 mètres de profondeur est représenté par u_{16} ».

c) Quel est le coût de l'installation pour un forage de 260 mètres de profondeur ?

2. La société donne, dans la colonne D, une modélisation de l'économie annuelle en chauffage selon la profondeur du forage que fera l'industriel. Pour une profondeur de 100 mètres l'économie est de 500 € par an et pour tout décamètre supplémentaire elle est augmentée de 5 %. Cette économie est représentée par une suite (v_n) où n désigne le nombre de décamètres supplémentaires.

a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser les éléments caractéristiques de cette suite.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Quelle formule, écrite en D3 puis, recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs qui figurent dans la colonne D ?

3. L'industriel a souhaité calculer en combien de temps son installation sera amortie. Ainsi pour un forage minimal de 100 mètres, il aura amorti son installation en 7 ans (car $\frac{3\,500}{500} = 7$).

L'industriel opte pour une profondeur de forage de 260 mètres. Au bout de combien d'années son installation sera-t-elle amortie ?

27. +++ Algorithmique « à la main » : calcul d'un terme d'une suite arithmétique ou géométrique

ALGO

On considère l'algorithme suivant, où n est un entier naturel non nul.

> Saisir n
> u prend la valeur 2
> Pour i allant de 1 à n
> u prend la valeur $u + 5$
> FinPour
> Afficher u

1. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme pour $n = 3$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche le terme v_n de la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison 1,3.

CORRIGÉ P. 159

28. +++ Algorithmique « à la main » : calcul d'une somme de termes consécutifs

ALGO

On considère l'algorithme suivant, où n est un entier naturel non nul.

> Saisir n
> u prend la valeur 4
> S prend la valeur u
> Pour i allant de 1 à n
> u prend la valeur $u + 2$
> S prend la valeur $S + u$
> FinPour
> Afficher S

1. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme pour $n = 3$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 4 et de raison 3.

CORRIGÉ P. 159

29. +++ Calculer à l'aide d'un algorithme un terme de rang donné avec la calculatrice

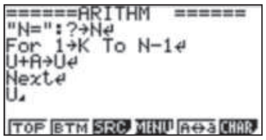
ALGO

1. Le programme suivant fournit le n-ième terme d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_1 et de raison a.

TI :

```
PROGRAM:ARITHM
:Input "U=",U
:Input "A=",A
:Input "N=",N
:For(K,1,N-1)
:U+A→U
:End
:Disp U
```

Casio :



a) Saisir ce programme sur une calculatrice.

b) Déterminer, « à la main », le quatrième terme de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3.

Tester votre programme avec cet exemple.

2. a) Modifier le programme précédent pour créer, sur calculatrice ou sur tableur, un programme fournissant le n-ième terme d'une suite géométrique (v_n) de premier terme v_1 et de raison q.

b) Déterminer, « à la main », le quatrième terme de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

Tester votre nouveau programme avec cet exemple.

CORRIGÉ P. 159

30. +++ Algorithme à trous

ALGO

On place un capital C, à intérêts composés, au taux annuel i, c'est-à-dire qu'après chaque année, le capital présent en début d'année est multiplié par $(1 + i)$.

> ▶ **Placements avec intérêts composés**
> *Voir l'information à la fin de l'énoncé de l'exercice **22**.*

1. Reproduire et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche la valeur du capital après n années de placement.

```
Saisir C
Saisir i
Saisir n
Pour k allant de ...... à ......
   C prend la valeur ..............
FinPour
Afficher C
```

2. a) On place $C = 10\,000$ € à intérêts composés au taux de 3 %. Quelle est la valeur du capital après deux années de placement ?

b) Vérifier votre algorithme à l'aide de l'exemple précédent, en fournissant un tableau indiquant les valeurs successives des variables k et C.

CORRIGÉ P. 159

Premier terme d'une suite géométrique franchissant un seuil donné

31. +++ Abonnement et suite géométrique

En 2012, le prix de l'abonnement annuel pour une lettre d'information hebdomadaire pour les entreprises était de 200 euros.

Chaque année, ce prix augmente de 2 %. Pour tout entier naturel n, on appelle P_n le prix de l'abonnement pour l'année $(2012 + n)$. On a donc $P_0 = 200$.

1. a) Calculer P_1 et P_2. Arrondir P_2 à l'euro.

b) Démontrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer P_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

d) Calculer P_{10}. Arrondir à l'euro.

2. Une entreprise dispose d'un budget annuel maximal de 250 euros pour payer cet abonnement.

a) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, le plus petit nombre entier positif n tel que $1{,}02^n \geq 1{,}25$.

b) À partir de quelle année l'entreprise ne pourra-t-elle plus financer l'abonnement avec un budget de 250 euros ?

CORRIGÉ P. 160

32. +++ Augmentation de salaire

Le salaire mensuel net d'un employé est de 1 700 euros en 2014. Au 1er janvier de chaque année, il augmente de 2 % par rapport au salaire mensuel de l'année précédente.

1. Quel sera son salaire mensuel en 2016 ?

2. Quel sera son salaire mensuel en 2019 ?

3. À partir de quelle année son salaire mensuel net sera-t-il supérieur à 2 000 euros ?

33. +++ Premier terme d'une suite géométrique franchissant un seuil donné

Tous les 5 ans, on effectue un relevé de la population d'une ville. En 1975, ce relevé a donné 125 milliers d'habitants ; les relevés suivants ont montré une augmentation régulière de 3 %.

Soit R_n la valeur (en milliers d'habitants) du relevé de rang n ($R_0 = 125$ en 1975, R_1 relevé en 1980, etc.).

1. Calculer R_1, R_2 et R_3 (arrondir à 10^{-1}).

2. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n. En déduire la nature de la suite (R_n), on précisera le premier terme et la raison.

3. Exprimer R_n en fonction de n.

4. En admettant que cette évolution se poursuive, déterminer la population que l'on peut prévoir pour l'année 2015.

Donner la valeur approchée en milliers d'habitants arrondie à 10^{-1} de cette population.

5. Déterminer le rang du premier relevé pour lequel la population dépasse 165 milliers d'habitants. En déduire l'année correspondante.

34. +++ L'évolution du nombre de clients

TICE

En 2010, le nombre de clients d'une entreprise de maintenance des ascenseurs était égal à 1 700. Depuis, on estime que le nombre de clients augmente de 2 % par an.

On note u_0 le nombre de clients de l'entreprise en 2010 et u_n le nombre de clients pour l'année $2010 + n$.

1. Donner la nature de la suite (u_n).

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer le nombre de clients de l'entreprise en 2016.

4. Le document figurant en annexe est un extrait d'une feuille de calcul dans laquelle on veut faire afficher, selon ce modèle, le nombre de clients attendus à partir de 2010. On cherche une formule qui, entrée dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas d'obtenir le contenu des cellules de la plage C3 : C8.

Parmi les propositions ci-dessous, écrire sur la copie toutes celles qui peuvent convenir (on ne demande pas de justification).

=C2*D$2	=C2*1+D2	=C2*(1+D$2)
=C2*(1,02)	=C2*(1+$D2)	C$2*1,02^B3

5. Déterminer, selon ce modèle, à partir de quelle année le nombre de clients sera supérieur à 2 000.

Annexe

Nombre de clients de l'entreprise depuis 2010

	A	B	C	D
1	Année	Rang n de l'année	Nombre de clients u_n	Taux d'augmentation
2	2010	0	1700	2 %
3	2011	1		
4	2012	2		
5	2013	3		
6	2014	4		
7	2015	5		
8	2016	6		

La plage C2 : C8 est au format nombre à zéro décimale.
La cellule D2 est au format pourcentage à zéro décimale.

35. +++ **Algorithmique « à la main » : recherche d'un seuil**

On considère l'algorithme suivant.

Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 5
Tant que $u < 100$
    Affecter à n la valeur $n + 1$
    Affecter à u la valeur $u \times 2$
FinTantque
Afficher n

1. Reproduire et compléter le tableau suivant jusqu'à arrêt de l'algorithme.

n	0	1						
u	5	10						

2. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme ?

3. Quel est le rôle de cet algorithme ?

36. +++ **Algorithmique avec la calculatrice : placement à intérêts composés** ALGO

On possède un capital de 20 000 € que l'on place à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.

On considère l'algorithme suivant.

1 Saisir S
2 C prend la valeur 20 000
3 n prend la valeur 0
4 Tant que $C < S$ faire
5   n prend la valeur $n + 1$
6   C prend la valeur $1{,}025 \times C$
7 FinTantque
8 Afficher n

1. a) Justifier la ligne 6 de l'algorithme.

b) Quelle est la nature de la suite des valeurs de la variable C ?

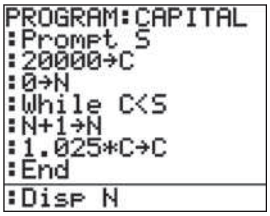
c) À quoi correspond la variable C dans l'algorithme ?

d) À quelle condition sort-on de la boucle ?

2. Implanter l'algorithme sur une calculatrice et vérifier que, lorsqu'on entre pour S la valeur 30 000, l'algorithme affiche la valeur 17.

Quel est le rôle de l'algorithme ?

Texas Instruments



Casio

3. Déterminer à l'aide de l'algorithme le nombre d'années nécessaires pour au moins doubler le capital initial.

CORRIGÉ P. 160

37. **+++ Avec la calculatrice ou le tableur : temps de doublement d'un capital** ALGO

On place un capital initial $C_0 = 10\,000$ € à intérêts composés au taux annuel i. On note C_n le capital disponible au bout de n années.

On recherche un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle le capital disponible C_n est supérieur ou égal à 20 000 €.

1. On suppose dans cette question que le taux d'intérêt annuel est de 4 %, c'est-à-dire que $i = 0{,}04$. Calculer C_1 et C_2.

2. Soit i un nombre réel positif.

a) Exprimer C_1 en fonction de i, puis C_2 en fonction de i et de C_1.

b) Soit n un nombre entier non nul. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et de i.

Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

3. On considère l'algorithme suivant.

> ***Entrée :***
> Saisir i
> ***Initialisation :***
> n prend la valeur 0
> C prend la valeur 10 000
> ***Traitement :***
> **Tant que** $C < 20\,000$
> n prend la valeur $n + 1$
> C prend la valeur $(1 + i) \times C$
> **Fin Tant que**
> ***Sortie :***
> Afficher n

a) Quel est le test d'arrêt de la boucle de cet algorithme ? Quand sort-on de la boucle ?

b) Reproduire et compléter le tableau suivant, en indiquant les valeurs de la variable C et du test lorsqu'on saisit dans l'algorithme $i = 0{,}04$.

		C	$C < 20\,000$
Initialisation	$n = 0$	10 000	VRAI
Boucle	$n = 1$		
	$n = 2$		

4. Saisir l'algorithme sur calculatrice ou sur tableur.

Texas Instruments

```
PROGRAM:DOUBLE
:Prompt I
:0→N
:10000→C
:While C<20000
:N+1→N
:(1+I)*C→C
:End
```

Casio

```
======DOUBLE  ======
"I":?→I↵
0→N↵
10000→C↵
While C<20000↵
N+1→N↵
(1+I)×C→C↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
======DOUBLE  ======
10000→C↵
While C<20000↵
N+1→N↵
(1+I)×C→C↵
WhileEnd↵
N
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

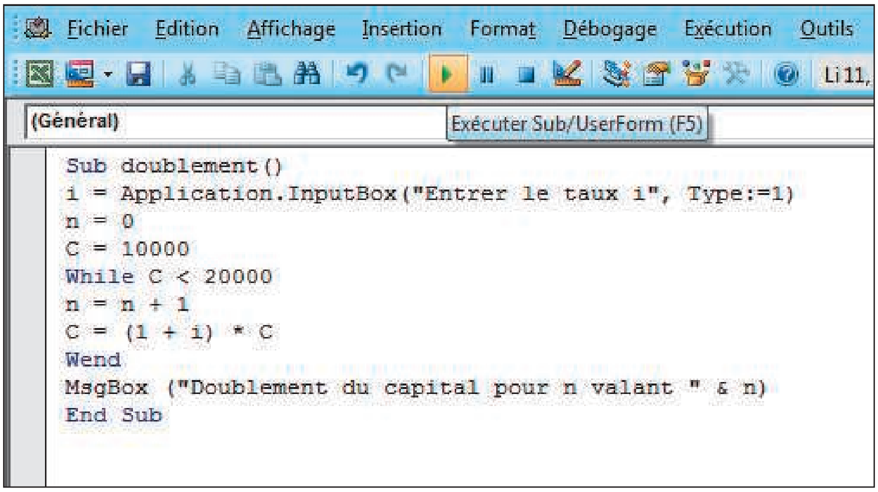
OpenOffice Calc

```
Fichier  Édition  Affichage  Outils  Fenêtre  Aide
[Mes macros et boîtes de dialogue].Standar
<Non localisé>
Exécuter le BASIC (F5)

REM  *****  BASIC  *****

Sub doublement
i=CDbl(InputBox("Entrer le taux i"))
n=0
C=10000
While C<20000
n=n+1
C=(1+i)*C
Wend
MsgBox("Doublement du capital pour n valant : "&n)
End Sub
```

Excel



Tester votre programme en vérifiant que pour $i = 0{,}04$, l'affichage est $n = 18$.

5. Au bout de combien d'années le capital initial est-il doublé lorsque le taux de placement à intérêts composés est 3,25 % ? 4,5% ?

CORRIGÉ P. 160

Limites de suites géométriques

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (exercices **38** et **39**).

38. +

a) $u_n = (1{,}3)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = (0{,}2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_n = 300(1{,}05)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
d) $u_n = 100(0{,}95)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ P. 161

39. +

a) $u_n = (1{,}2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = (0{,}8)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_n = 200(1{,}1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
d) $u_n = 500(0{,}99)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Autres exemples de génération d'une suite

40. + **Calculer des termes d'une suite de la forme $u_n = f(n)$**

On définit la suite (u_n) par une relation de la forme $u_n = f(n)$. Déterminer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Arrondir éventuellement à 10^{-2}.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 3n$;

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1{,}02)^n$;

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (0{,}2)^n$;

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$.

41. + Même énoncé qu'à l'exercice 40.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2n + 4$;

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(1{,}1)^n$;

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 100(0{,}9)^n$;

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{n+2}$.

42. + Suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 5,\ \ u_1 = \frac{13}{6}\ \ \text{et}\ \ u_{n+2} = \frac{5}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n.$$

Calculer les termes u_2, u_3, u_4 et u_5 de cette suite.

43. ++++ Suite de Robinson

Cette suite, qui ressemble à la suite de Conway, est définie de la façon suivante :

– le premier terme est un nombre entier positif donné.

– chaque terme est obtenu en indiquant combien de fois chaque chiffre (de 9 à 0 **dans cet ordre**) apparaît dans le terme précédent.

1. On prend $u_0 = 0$

Dans u_0 il apparaît une fois 0, donc $u_1 = 10$.

Dans u_1 il apparaît une fois 1 et une fois 0, donc u_2 : 1110

Dans u_2 il apparaît trois 1 et une fois 0, donc $u_3 = 3110$

Dans u_3 il apparaît une fois 3, deux fois 1 et une fois 0, donc $u_4 = 132110$.

Dans u_4 il apparaît une fois 3, une fois 2, trois fois 1 et une fois 0, donc $u_5 = 13123110$. (Attention : il faut commencer par compter les 3, puis les autres chiffres par ordre décroissant : 2 puis 1, puis 0).

Calculer les termes suivants et indiquer ce que l'on constate à partir de u_{10}.

2. On prend $u_0 = 40$.

Calculer les termes suivants et indiquer ce que l'on constate à partir de u_{10}.

44. +++ Calculer une liste de termes à l'aide d'un logiciel

TICE

Un entrepreneur place un capital de 3 000 euros sur un compte rémunéré à intérêts composés.

Le taux de placement est de 3 % l'an.

Tous les ans, au premier janvier, il ajoute 50 euros sur ce compte.

Soit C_n le capital, en euros, après n années de placement. On a ainsi $C_0 = 3000$.

1. Justifier que $C_1 = 3140$.

2. Déterminer C_2.

3. Justifier que pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}03C_n + 50$.

4. Cet industriel veut utiliser une feuille de calcul d'un tableur pour déterminer son capital en fonction du nombre d'années de placement.

	A	B
1	Taux de placement en %	3
2	Ajout annuel (en euros)	50
3		
4	Nombre d'années de placement	Capital en euros au bout de n années
5	0	3 000,00
6	1	
7	2	
8	3	
9	4	

Le format des cellules B5 à B9 est monétaire avec 2 décimales.

a) Indiquer une formule à entrer en B6 qui, par recopie vers le bas, permet de compléter la plage de cellules B6:B9.

b) Quel est le capital au bout de 4 années de placement ?

45. ++++ Suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

A. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 200$. Calculer u_1 et u_2.

B. À la fin 2012, la société A détenait 90 % du marché des télécommunications dans un pays et la société B, 10 %. On estime que, chaque année, 20 % de la clientèle de A change pour B, et de même 20 % de la clientèle de B change pour A.

On considère 1 000 clients en 2012. 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1. Vérifier que la société A compte 740 clients en 2013. Calculer le nombre de clients de A en 2014.

2. On note a_n le nombre de clients de A de l'année $(2012 + n)$.

Établir que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}2(1\,000 - a_n)$.

En déduire que $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 200$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 500$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de a_{n+1}, puis u_{n+1} en fonction de a_n, enfin, u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

c) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

FAITES le POINT

RÉPONSES P. 161

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

46. + Suite arithmétique de premier terme u_0

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0, de raison r. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

		a	b	c
1	$u_0 = -2$ et $r = 3$, alors u_4 est égal à :	7	12	10
2	$u_1 = -5$ et $u_2 = 2$, alors r est égal à :	7	– 3	– 7
3	$u_4 = 2$ et $u_5 = 5$, alors u_6 est égal à :	7	8	9
4	$u_0 = 3$ et $r = -1$, alors S_5 est égal à :	5	3	0

47. + Sens de variation

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $r = -15$.

	a	b	c
La suite (u_n) est :	croissante	décroissante	constante

48. + Suite géométrique de premier terme u_0

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

		a	b	c
1	$u_0 = 3$ et $q = 4$, alors u_3 est égal à :	12	48	192
2	$u_1 = 5$ et $u_2 = 2$, alors q est égal à :	10	0,4	2,5
3	$u_1 = 2$ et $q = 4$, alors S_5 est égal à :	682	680	2 730

49. + Sens de variation

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2\,000$ et de raison $q = 0{,}95$.

	a	b	c
La suite (u_n) est :	croissante	décroissante	constante

50. + Variations successives de t %

		a	b	c
1	La production d'une entreprise augmente de 5 % chaque année. Au bout de 5 ans, elle aura augmenté d'environ	25 %	27 %	28 %
2	Un équipement informatique perd 20 % de sa valeur chaque année. Au bout de 5 ans, il aura perdu	100 % de sa valeur	environ 33 % de sa valeur	environ 67 % de sa valeur
3	Le salaire annuel d'un employé est de 15 240 €. Ce salaire sera augmenté de 0,7 % par an. Le salaire annuel après trois ans est, en euros arrondi à l'euro près, de :	5 454	15 562	18 670

51. ++ Intérêts composés et valeur acquise

		a	b	c
1	Dans un placement à intérêts composés à 2 % par an, les capitaux disponibles au bout d'un an, deux ans…, n ans, sont les termes successifs d'une suite géométrique de raison :	2	0,02	1,02
2	On place un capital de 10 000 € à 4 % par an avec intérêts composés. Au bout de deux ans le capital disponible est :	10 800 €	10 816 €	10 400 €

52. ++ Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 0{,}9$.

	a	b	c
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est égal à :	0	1	$+\infty$

53. +++ Avec un tableur

TICE

La feuille de calcul ci-dessous est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 8 000 et de raison 1,06.

Quelle formule, à recopier vers bas, peut-on entrer dans la cellule B3 ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	8 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

a) =8000*1,06 **b)** =$B$2*1,06

c) =B2*1,06 **d)** =1,06^A3

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS, avec, si nécessaire, un formulaire joint pour la somme des termes consécutifs.

Suites arithmétiques ou suites géométriques terme général, somme de termes consécutifs

54. +++ **Suite arithmétique et suite géométrique**

A. En 1998, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1999.

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1998 + n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier terme u_0 et la raison a de cette suite.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2014 de l'entreprise A.

B. En 1998, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1999.

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1998 + n. Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2014 de l'entreprise B.

C. 1. Que constate-t-on en 2014 pour les entreprises A et B ?

2. En 2014, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

CORRIGÉ P. 161

55. +++ **Suite arithmétique**

Pour moderniser son usine, un industriel achète 910 000 € de matériel. Ce matériel est amorti annuellement ; pour les dix premières années, les amortissements, exprimés en euros, forment une suite arithmétique (u_n) de raison – 20 000. Le premier amortissement u_1 est de 190 000.

1. Calculer la valeur nette après le premier amortissement, puis après le deuxième.

2. Calculer l'amortissement u_n en fonction de n.

3. Montrer que le total des n premiers amortissements est : $S(n) = 200\,000n - 10\,000n^2$.

4. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le matériel soit amorti, c'est-à-dire déterminer n pour que $S(n) = 910\,000$.

> **Formulaire**
> *Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique on a :*
> $$u_1 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

56. +++ **Calculer avec le tableur la somme de n termes consécutifs** TICE

Les dépenses annuelles de fonctionnement de deux services d'une entreprise, nommés ici A et B, ont été étudiées sur une assez longue période, ce qui a conduit à la modélisation suivante.

Les dépenses du service A augmentent de 4 000 € chaque année, tandis que celles du service B augmentent de 15 % chaque année.

Cette année (qui sera prise dans la suite comme année 1), les deux services ont effectué des dépenses identiques : 20 000 €.

On note a_n les dépenses du service A et b_n les dépenses du service B la n-ième année. On s'intéresse aussi au cumul de ces dépenses sur plusieurs années. Le tableau de l'annexe, extrait d'une feuille automatisée de calcul, donne les résultats pour les premières années.

A. *Étude des dépenses du service A*

1. a) Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite (a_n) des dépenses annuelles du service A ?

b) Exprimer a_n en fonction de n.

c) Calculer a_{10}.

2. Proposer une formule qui, entrée dans la cellule R3, permet par recopie vers le bas de calculer le cumul des dépenses du service A.

3. Calculer la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 + a_{10}$. Que représente cette somme ?

B. *Étude des dépenses du service B*

1. Quelle formule entrée dans la cellule S3 permet par recopie vers le bas de calculer les dépenses annuelles du service B ?

2. a) Quelle est la nature et quelle est la raison de la suite (b_n) des dépenses du service B ?

b) Exprimer b_n en fonction de n.

3. Calculer les dépenses annuelles prévisibles pour le service B lors de la dixième année. On arrondira le résultat à la centaine d'euros.

C. *Comparaison des deux services*

Lequel des deux services aura le plus dépensé en 10 ans pour son fonctionnement ?

Annexe

	P	Q	R	S	T
1	Numéro de l'année : n	Dépenses du service A : a_n	Cumul des dépenses du service A	Dépenses du service B : b_n	Cumul des dépenses du service B
2	1	20 000	20 000	20 000	20 000
3	2	24 000	44 000	23 000	43 000
4	3	28 000	72 000	26 450	69 450
5	4	32 000		30 417,50	99 867,50
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				
10	9				
11	10				

57. +++ Comparer une suite arithmétique et une suite géométrique

TICE

Deux villes A et B ont décidé de lancer un programme ambitieux de construction de logements sociaux neufs.

En 2009, il y avait 3 460 logements sociaux dans la ville A et 2 740 dans la ville B.

Le projet de la ville A consiste en la construction à partir de 2010 de 160 logements sociaux supplémentaires chaque année. Celui de la ville B consiste à augmenter à partir de 2010 le nombre de logements sociaux de 7 % chaque année.

Pour comparer les deux projets, on utilise une feuille de calcul dont on donne un extrait ci-dessous. Les colonnes C et D sont au format nombre à zéro décimale.

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Ville A	Ville B
2	2009	0	3 460	2 740
3	2010	1	3 620	2 932
4	2011	2	3 780	3 137
5	2012	3	3 940	3 357
6	2013	4	4 100	3 592
7	2014	5		
8	2015	6		
9	2016	7		
10	2017	8		
11	2018	9		
12	2019	10		

A. 1. Calculer le nombre de logements sociaux dans les villes A et B en 2014.

2. Donner des formules qui, entrées dans les cellules C3 et D3, permettent par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellule C3:D12.

3. Calculer le nombre de nouveaux logements sociaux construits dans la ville A durant la période 2010-2013.

B. 1. Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre total de logements sociaux dans la ville A au cours de l'année $2009 + n$. On a donc $a_0 = 3\,460$.

a) Donner la nature de la suite (a_n).

b) En 2019, le nombre de logements sociaux de la ville A aura-t-il doublé ? Justifier.

2. On considère la suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, $b_n = 2\,740 \times (1{,}07)^n$. On a donc $b_0 = 2\,740$.
Indiquer la nature de la suite (b_n).

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Durant les dix années de 2010 à 2019, le nombre de logements sociaux de la ville B dépassera-t-il celui de la ville A ? Justifier.

CORRIGÉ P. 161

58. +++ Intérêts composés

A. *Avec un tableur*

On place 1 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On appelle u_n le capital obtenu au bout de n années de placement. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

On a reproduit ci-dessous une feuille de calcul incomplète réalisée avec un tableur pour calculer les capitaux successifs disponibles.

	A	B
1	Années	Capital
2	0	1 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

1. Déterminer la nature et la raison de la suite (u_n).

2. Déterminer le capital obtenu au bout de 8 ans de placement. Arrondir au centime d'euro.

3. Déterminer le montant total des intérêts perçus en 8 ans de placement.

4. Écrire la formule, à recopier vers le bas, à entrer dans la cellule B3 pour obtenir les capitaux successifs disponibles.

B. *Algorithmique*

On considère l'algorithme suivant.

> **Initialisation**
> u prend la valeur 1 000
> n prend la valeur 1
> **Traitement**
> **Tant que** $n < 5$
> u prend la valeur $u + 50$
> n prend la valeur $n + 1$
> Écrire u
> **FinTantQue**

1. Faire fonctionner cet algorithme « à la main ». Quels résultats obtient-on ?

2. On place un capital de 1 000 € sur un livret à 3 % d'intérêts par an, avec intérêts composés, pendant 4 ans.

Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche les sommes obtenues, capital et intérêts compris, à la fin de chacune des 4 années.

Premier terme d'une suite géométrique franchissant un seuil donné

59. +++ Problème de production

Une unité de production fabrique des chargeurs pour téléphones mobiles.

En 2013, la production annuelle a été de 5 000 unités.

On fait l'hypothèse que l'objectif d'augmentation de 4 % par an sera réalisé chaque année.

Tous les résultats de production seront arrondis à l'unité.

1. Calculer la production en 2014.

2. Calculer les prévisions de production en 2015 et 2016.

3. On désigne par P_0 la production de 2013, par P_1 celle de 2014 et par P_2 celle de 2015…

D'une façon générale, on désigne par P_n la production en $2013 + n$.

Démontrer que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. Exprimer P_n en fonction de n.

5. Quelle sera la production en 2020 ?

6. Déterminer avec la calculatrice en quelle année la production dépassera 10 000 unités.

CORRIGÉ P. 161

60. +++ Gestion de déchets

Le responsable d'un site de compostage fait un bilan de l'évolution des quantités de déchets compostés dans son entreprise.

Il a constaté qu'en 2002, sur le site, 5 900 tonnes de déchets ont été traitées et qu'ensuite les quantités traitées augmentent régulièrement de 15 % par an.

On admet que la progression se poursuivra au même rythme jusqu'en 2020.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en tonnes, de déchets traités durant l'année $2002 + n$. On a ainsi $u_0 = 5\,900$.

1. a) Préciser la nature, le premier terme et la raison de la suite (u_n).

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. Calculer la quantité de déchets traités en 2006. Arrondir à l'unité.

3. Déterminer à l'aide de la calculatrice à partir de quelle année la quantité de déchets traités a dépassé les 20 000 tonnes. Justifier votre réponse.

4. Calculer la quantité totale de déchets traités depuis le début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2020. Arrondir à l'unité.

> **Formulaire**
> *Pour une suite géométrique (u_n) de raison q, avec $q \neq 1$:*
> $$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

61. +++ Placement — TICE

A. Un artisan décide de se constituer une épargne. Le 1er juillet 2014, il a déposé sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % la somme de 500 €. Ensuite, le 1er juillet de chacune des années suivantes, il déposera 100 € sur ce compte.

On a reproduit ci-dessous une feuille de calcul réalisée à l'aide d'un tableur, qui donne la valeur, au centime d'euro près, du capital qui sera acquis par l'artisan au 1er juillet de chaque année jusqu'en 2018.

	A	B	C	D	E	F
1	Date	01/07/2014	01/07/2015	01/07/2016	01/07/2017	01/07/2018
2	Valeur en euros	500	612,50	727,81	846,01	967,16

1. a) Expliquer quel calcul permet d'obtenir la valeur du capital au 01/07/2015.

b) Calculer la valeur du capital au 01/07/2019 après le dépôt de 100 €.

2. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C2 pour que, en recopiant vers la droite, on obtienne les valeurs indiquées dans la ligne 2 ?

B. L'artisan veut maintenant calculer les montants des capitaux qu'il obtiendra chaque année s'il n'effectue qu'un seul versement initial d'un montant de 800 € le 1er juillet 2014 sur ce compte rémunéré au taux annuel de 2,5 %.

On note u_n le capital acquis au 1er juillet de l'année $2014 + n$. Ainsi $u_0 = 800$.

1. Calculer u_1.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3. Comparer le capital acquis grâce à ce placement au 01/07/2018 avec celui acquis à la même date grâce au placement de la Partie A.

4. Déterminer avec la calculatrice en quelle année le capital acquis dépassera pour la première fois 1 000 € avec cette deuxième formule de placement.

CORRIGÉ P. 161

62. +++ Norme européenne et algorithmique ALGO

Depuis 2000, l'Union européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 milligrammes par kilomètre en conduite normalisée. L'objectif de l'Union européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 milligrammes par kilomètre.

La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de 11,7 % par an.

1. a) Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 milligrammes par kilomètre en 2001.

b) Un véhicule émettait 500 milligrammes par kilomètre en 2002.

Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme tolérée cette année-là.

2. Dans le cadre d'une recherche, un technicien supérieur de l'industrie automobile se propose de déterminer à partir de quelle année l'Union européenne atteindra son objectif.

Le technicien a amorcé l'algorithme suivant :

```
Variables
  n : un nombre entier naturel
  p : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 0
  Affecter à p la valeur 635
Traitement
  Tant que...
    Affecter à n la valeur n + 1
    Affecter à p la valeur 0,883 × p
  Fin Tant que
Sortie :
  Afficher...
```

a) Expliquer l'instruction « Affecter à p la valeur $0{,}833 \times p$ ».

b) Deux lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter afin de permettre au technicien de déterminer l'année recherchée.

3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la norme tolérée, exprimée en milligrammes l'année $(2000 + n)$.

On a ainsi $u_0 = 635$.

a) Établir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer u_{12}. Arrondir à l'entier. Donner une interprétation de u_{12}.

4. Déterminer à partir de quelle année l'Union européenne atteindra son objectif.

CORRIGÉ P. 162

63. +++ Un QCM pour le BTS TICE

Pour chacune des questions de ce questionnaire à choix multiples, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}1$.

Le troisième terme de la suite est égal à :

a) 1 004,4 ; **b)** 1 210 ; **c)** 1 331.

2. Une entreprise fabrique des armoires pour une chaîne de grandes surfaces. En 2013, elle a fabriqué 5 000 unités. La production doit augmenter de 4 % par an jusqu'en 2019. Entre 2013 et 2019, la production totale sera d'environ :

a) 40 000 unités ; **b)** 33 135 unités ; **c)** 27 164 unités.

3. La feuille de calcul ci-dessous est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 400 et de raison 0,8.

Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on entrer dans la cellule C3 ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	u_n	400										
3												

a) =B2^0,8 **b)** =400*0,8 **c)** =B2*0,8

4. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $r = 20$; u_{10} est égal à :

a) 1 020 ; **b)** 1 219 ; **c)** 1 200.

5. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5{,}2$ et de raison $r = 2{,}5$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	5,2
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

La formule à entrer en B3 et à recopier vers le bas pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) est :

a) =B2+2,5*A3

b) =B$2+2,5

c) =B$2+2,5*A3

CHAPITRE 2

Calcul matriciel

Dans ce chapitre, il s'agit d'introduire un mode de représentation facilitant l'étude de phénomènes issus de la vie courante ou d'exemples concrets.

1 Matrices

- Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

2 Inverse d'une matrice

- Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'inverse d'une matrice inversible.
- Résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues à l'aide d'une inversion de matrice.

1 Matrices

A. Introduction

Exemple

Un fournisseur de matériel pour la téléphonie mobile commercialise trois composants, notés A, B et C, chacun existant en quatre versions : « classique », « plus », « ultra + » et « optimum ».

Les tarifs de ce fournisseur sont indiqués dans le tableau suivant :

Composant / Version	*A*	*B*	*C*
Classique	0,54 €	0,86 €	1,30 €
Plus	3,04 €	3,36 €	3,80 €
Ultra +	3,64 €	3,96 €	4,40 €
Optimum	4,54 €	4,66 €	5,30 €

Le tableau de ces $4 \times 3 = 12$ nombres, sans unité, est appelé une **matrice** et se note entre parenthèses :

$$\begin{pmatrix} 0,54 & 0,86 & 1,30 \\ 3,04 & 3,36 & 3,80 \\ 3,64 & 3,96 & 4,40 \\ 4,54 & 4,66 & 5,30 \end{pmatrix}$$

Cas général

Une matrice est un tableau de nombres.

Ces nombres sont appelés les coefficients, les éléments ou les termes de la matrice.

Le premier indice correspond à la ligne et le second à la colonne.

On la désigne habituellement par une lettre majuscule, par exemple A, et on note alors a_{ij} le nombre situé à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$ est une matrice à n lignes et p colonnes.

Une écriture symbolique de la matrice A est :
$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Les nombres a_{ij} sont les coefficients de la matrice A.

Exemple

Pour la matrice A ci-dessus, $a_{11} = 0,54$; $a_{12} = 0,86$; $a_{21} = 3,04$; $a_{43} = 5,30$.

A est une matrice rectangulaire à 4 lignes et 3 colonnes.

Remarques

• Si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$, alors A est une **matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$**.

Ainsi $\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}86 \\ 3{,}04 & 3{,}36 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 extraite de la matrice A de l'exemple des tarifs.

• Si $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$, alors A est une **matrice ligne**.

Ainsi $(3{,}64 \quad 3{,}96 \quad 4{,}40)$ est une matrice ligne extraite de la matrice A de l'exemple des tarifs.

• Si $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$, alors A est une **matrice colonne**.

Ainsi $\begin{pmatrix} 3{,}36 \\ 3{,}96 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne extraite de la matrice A des tarifs.

Égalité de matrices

Deux matrices sont égales si et seulement si ces matrices sont de même taille, c'est-à-dire ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes et si leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

B. Calcul matriciel élémentaire

Addition

Voir le paragraphe **A**.

Exemple

Reprenons la matrice A donnant les tarifs et supposons que ces tarifs subissent une augmentation.

Soit B la matrice donnant les augmentations pour chacun des tarifs envisagés :

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}31 \\ 0{,}30 & 0{,}32 & 0{,}37 \\ 0{,}39 & 0{,}41 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

Soit C la matrice donnant les nouveaux tarifs.

Chaque nouveau tarif étant la somme de l'ancien tarif et de son augmentation, on convient de noter $C = A + B$.

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}86 & 1{,}30 \\ 3{,}04 & 3{,}36 & 3{,}80 \\ 3{,}64 & 3{,}96 & 4{,}40 \\ 4{,}54 & 4{,}66 & 5{,}30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}31 \\ 0{,}30 & 0{,}32 & 0{,}37 \\ 0{,}39 & 0{,}41 & 0{,}44 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}92 & 1{,}39 \\ 3{,}29 & 3{,}64 & 4{,}11 \\ 3{,}94 & 4{,}28 & 4{,}77 \\ 4{,}93 & 5{,}07 & 5{,}74 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B doivent avoir le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

DÉFINITION

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices à n lignes et p colonnes. La matrice somme de A et B est la matrice $A + B = (c_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ces propriétés rappellent celles de l'addition des nombres réels ou celles de l'addition des vecteurs.

On démontre, et nous admettons, les propriétés suivantes de l'addition des matrices.

Pour additionner trois matrices, on peut commencer par calculer la somme des deux premières ou celle des deux dernières ; ceci permet de noter $A + B + C$ sans parenthèses.

PROPRIÉTÉS

Soit A, B et C des matrices à n lignes et p colonnes.

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O =$ A où O est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont égaux à 0. La matrice O est appelée **matrice nulle**.
- $A + (-A) = O$ où $-A$ est la matrice opposée de $A = (a_{ij})$ et $-A = (-a_{ij})$.

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ on a : $-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

A et B ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

DÉFINITION

On définit la soustraction de deux matrices par :

$A - B = A + (-B)$ où $-B$ est la matrice opposée de B.

Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Exemple

Considérons l'exemple de la matrice A donnant des tarifs au paragraphe **A**.

Supposons que les tarifs soient augmentés uniformément de 10 %. Chaque coefficient de la matrice A est donc multiplié par 1,1 et on convient de noter la matrice D donnant les nouveaux tarifs :

Ces nouveaux tarifs seront ensuite arrondis au centième.

$D = 1{,}1 \cdot A.$

$$D = 1{,}1\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}86 & 1{,}30 \\ 3{,}04 & 3{,}36 & 3{,}80 \\ 3{,}64 & 3{,}96 & 4{,}40 \\ 4{,}54 & 4{,}66 & 5{,}30 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}594 & 0{,}946 & 1{,}43 \\ 3{,}344 & 3{,}696 & 4{,}18 \\ 4{,}004 & 4{,}356 & 4{,}84 \\ 4{,}994 & 5{,}126 & 5{,}83 \end{pmatrix}$$

On note traditionnellement λA le produit de la matrice A par le réel λ, comme on note $2{,}3\,\vec{u}$ le produit d'un vecteur $\vec{u}$ du plan par le nombre 2,3.

DÉFINITION

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et λ un nombre réel. Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice $\lambda A = (d_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

On démontre, et nous admettons, les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

Soit A et B des matrices à n lignes et p colonnes et soit λ et μ deux nombres réels.

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)\, A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda\, (\mu A) = (\lambda\mu)\, A.$

Multiplication

Exemple

Voir le paragraphe **A**.

Deux clients X et Y du fournisseur passent une commande de composants A, B et C, chaque quantité étant indiquée dans le tableau de gauche, celui de droite rappelant les tarifs.

Composant \ Client	X	Y
A	50	7
B	35	3
C	15	4

Version \ Composant	A	B	C
Classique	0,54 €	0,86 €	1,30 €
Plus	3,04 €	3,36 €	3,80 €
Ultra +	3,64 €	3,96 €	4,40 €
Optimum	4,54 €	4,66 €	5,30 €

Notons B la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 50 & 7 \\ 35 & 3 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculons le coût global de chacune de ces deux commandes suivant les quatre versions possibles (classique, plus, ultra +, optimum), tous les composants d'un même client étant de la même version.

Disposition des calculs :

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 7 \\ 35 & 3 \\ 15 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,54 & 0,86 & 1,30 \\ 3,04 & 3,36 & 3,80 \\ 3,64 & 3,96 & 4,40 \\ 4,54 & 4,66 & 5,30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 76,60 & 11,56 \\ 326,60 & 46,56 \\ 386,60 & 54,96 \\ 469,60 & 66,96 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Donnons deux exemples de calcul des coefficients de la nouvelle matrice donnant les résultats demandés :

Premier coefficient :
$0,54 \times 50 + 0,86 \times 35 + 1,30 \times 15 = 76,60$.

Coefficient cerclé :
$3,64 \times 7 + 3,96 \times 3 + 4,40 \times 4 = 54,96$.

Les montants des coûts cherchés peuvent être précisés dans le tableau ci-contre qui reprend les coefficients de la matrice de droite ci-dessus.

Version \ Client	X	Y
Classique	76,60 €	11,56 €
Plus	326,60 €	46,56 €
Ultra +	386,60 €	54,96 €
Optimum	469,60 €	66,96 €

On convient d'appeler **matrice produit de *A* par *B*** et de noter $A \times B$ ou AB la matrice donnant le coût global des commandes pour chacun des clients X et Y, et on écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0,54} & \mathbf{0,86} & \mathbf{1,30} \\ 3,04 & 3,36 & 3,80 \\ 3,64 & 3,96 & 4,40 \\ 4,54 & 4,66 & 5,30 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{50} & 7 \\ \mathbf{35} & 3 \\ \mathbf{15} & 4 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{76,60} & 11,56 \\ 326,60 & 46,56 \\ 386,60 & 54,96 \\ 469,60 & 66,96 \end{pmatrix}}_{AB}$$

> Remarquer que le produit de A par B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

DÉFINITION

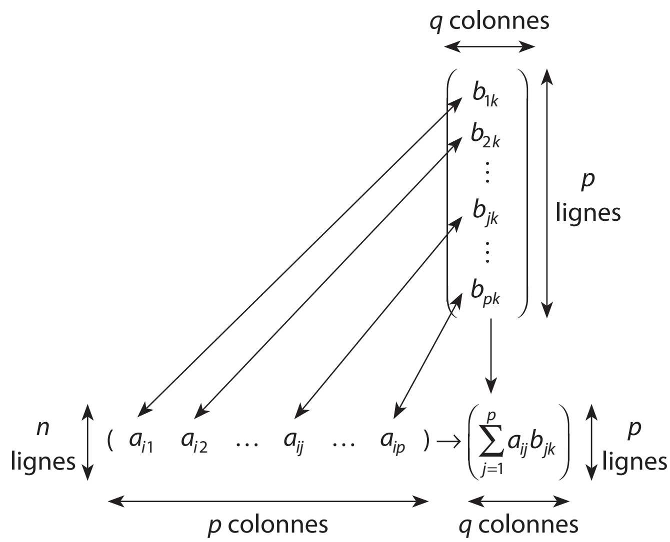
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{jk})$ une matrice à p lignes et q colonnes.

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{ik})$ à n lignes et q colonnes, définie par :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk}.$$

> **Pour effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice, voir le TP1.**

Disposition pratique :



> **Pour effectuer des calculs matriciels à l'aide d'un logiciel, voir le TP2.**

$$n \text{ lignes} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}}_{q \text{ colonnes}} p \text{ lignes} = n \text{ lignes} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\dots+a_{1p}b_{p1} & \dots \\ . & \dots \\ . & \dots \\ . & \dots \end{pmatrix}}_{q \text{ colonnes}}$$

Exemples

> La multiplication s'effectue ligne par colonne : le premier coefficient s'obtient à partir de **la première ligne** de la première matrice et de **la première colonne** de la deuxième matrice.

- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{1} \times \mathbf{1} + \mathbf{3} \times \mathbf{0}) & (1 \times 0 + 3 \times 1) \\ (2 \times 1 + 4 \times 0) & (2 \times 0 + 4 \times 1) \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 1 + 1 \times 4) & (1 \times 1 + 1 \times 5) \\ (-1 \times 1 + 2 \times 4) & (-1 \times 1 + 2 \times 5) \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -7 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On démontre, et nous admettons, les propriétés suivantes.

Les matrices A, B, C, sont quelconques sous réserve que les produits indiqués existent et λ est un nombre réel quelconque.

PROPRIÉTÉS

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = AB + AC$
- $(B + C) \times A = BA + CA$
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda \cdot (AB)$.

On écrit de même abc le produit de trois nombres réels quelconques.

La première propriété, appelée associativité de la multiplication des matrices, permet d'écrire sans parenthèses le produit ABC de trois matrices.

Dans le cas où A est une matrice carrée, on note :

n est un entier positif normal.

$A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ et plus généralement $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ matrices } A}$ est la **puissance n-ième de A**.

Attention !

Remarque

La multiplication des matrices n'a pas toutes les propriétés de la multiplication des nombres réels.

Observez que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cet exemple permet de constater que :

Pour deux matrices A et B, on peut avoir $AB \neq BA$.

- **Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB \neq BA$.**

Ceci explique que les propriétés 2 et 3 ci-dessus soient distinctes.

La multiplication des matrices n'est pas commutative, alors que la multiplication des nombres réels est commutative : $ab = ba$ pour tous réels a et b.

- **Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A \neq O$, $B \neq O$ et $AB = O$,**

où $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.

Avec des nombres réels a et b : si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Un produit de deux matrices peut être la matrice nulle sans qu'une de ces matrices soit la matrice nulle.

Notez l'analogie avec $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout nombre réel a.

PROPRIÉTÉ

Pour toute matrice carrée A d'ordre n,

$A \times I = I \times A = A$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice carrée d'ordre n constituée de 1 sur une diagonale et de 0 partout ailleurs.

I peut être notée I_n s'il est nécessaire de préciser l'ordre de cette matrice carrée.

Cette matrice I est appelée **matrice unité** ou **matrice identité**.

2 Inverse d'une matrice

A. Définition

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $AB = I$.

$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $BA = I$.

> $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.

Pour la matrice carrée A, nous constatons qu'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle la seule à posséder cette propriété ?

S'il existe une matrice B' telle que $AB' = B'A = I$, calculons le produit $B'AB$ des trois matrices B', A et B de deux façons :

> Cette démonstration a une portée générale car elle ne fait pas intervenir les valeurs des coefficients des matrices.

$B'AB = B'(AB) = B'I = B'$.

$B'AB = (B'A)B = IB = B$.

Donc $B' = B$.

Ainsi, pour la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, il existe une matrice **unique** B telle que $AB = BA = I$.

Par analogie avec les nombres réels, la matrice B est appelée **matrice inverse de A** et **notée A^{-1}**.

La **matrice** A est dite **inversible**.

> Pour tout nombre réel a non nul, le nombre unique a' tel que $aa' = a'a = 1$ est l'inverse de a noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Remarque

Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Une matrice $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ vérifie $CD = I$

si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 & (1) \\ 2y - 2t = 0 & (2) \\ -x + z = 0 & (3) \\ -y + t = 1 & (4) \end{cases}.$$

Or il n'existe pas de réels x et z vérifiant (1) et (3), c'est-à-dire $2(x - z) = 1$ et $-(x - z) = 0$.
Donc il n'existe pas de matrice D telle que $CD = I$.

La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Il existe donc des matrices carrées autres que la matrice nulle O qui ne sont pas inversibles.

B est unique d'après la démonstration générale rédigée dans l'exemple ci-dessus.

DÉFINITION

Soit A une matrice carrée.

S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$, alors la matrice A est **inversible** et B est sa **matrice inverse** notée A^{-1}.

$(A^{-1})^{-1} = A$.

Extrait du programme de mathématiques des BTS.

Remarques

- A et B jouant des rôles symétriques dans $AB = BA = I$, si A est inversible il en est de même de $B = A^{-1}$ et la matrice inverse de A^{-1} est A.
- **« La notion de déterminant n'est pas au programme. Aucune condition d'inversibilité d'une matrice n'est à connaître. »**
- **Pour déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'inverse d'une matrice inversible, voir le TP1 ou le TP2.**

B. Résolution d'un système linéaire de *n* équations à *n* inconnues à l'aide d'une inversion de matrice

Exemple

Le système $\begin{cases} 2x - 1{,}5y = 3 \\ -x + y = 2{,}5 \end{cases}$ a pour écriture matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients des inconnues, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des inconnues et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des seconds membres.

Voir l'exemple du paragraphe A ci-dessus.

Nous savons que la matrice A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On passe de $AX = B$ à $A^{-1}AX = A^{-1}B$ en multipliant à gauche par A^{-1} et le passage inverse se fait en multipliant à gauche par A.

Or $AX = B$ est équivalent à $A^{-1}AX = A^{-1}B$,

c'est-à-dire à $X = A^{-1}B$.

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$,

donc $x = 13{,}5$ et $y = 16$.

Remarque

Le TP3 donne un exemple de résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues à l'aide d'une inversion de matrice avec les logiciels Maxima, Scilab et Python.

RÉPONSES P. 162

TP 1 Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice

A. Somme et puissance

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

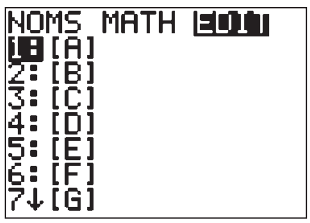
1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, $C = A + B$ puis C^3.

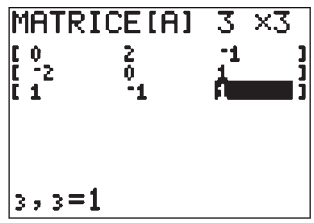
2. En déduire C^6.

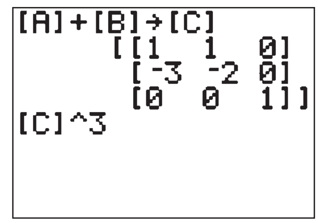
Avec une calculatrice T.I.

Pour saisir une matrice, accéder au menu « matrice » par 2nde [matrice] puis choisir [EDIT] et le nom de la matrice, [A] par exemple. Choisir la dimension (nombre de lignes et nombre de colonnes) puis saisir les coefficients par lignes. Quitter par 2nde [quitter].

Pour afficher une matrice, faire 2nde [matrice] puis choisir [NOMS] et le nom de la matrice, [A] par exemple. On peut alors effectuer les opérations.



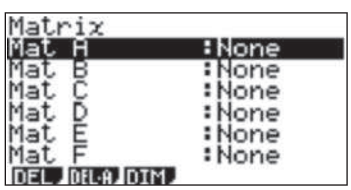


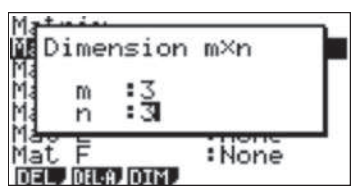


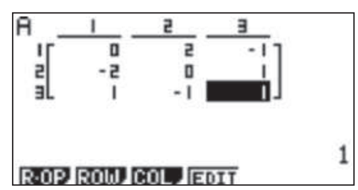
Avec une calculatrice Casio

Pour saisir une matrice, accéder au [MENU] [RUN-MAT].

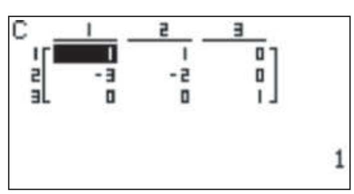
Activer l'option matrice [►MAT] par F1. Faire [DIM] pour définir la dimension de la matrice puis saisir les coefficients par lignes. Revenir au menu RUN-MAT par [EXIT] [EXIT].







Pour calculer avec des matrices dans le menu RUN-MAT, utiliser la fonction Mat par [OPTN] [MAT] [Mat] puis le nom de la matrice par [ALPHA] [A] par exemple pour Mat A.



B. Produit

On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, le produit DE. Que remarque-t-on ?

2. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, le produit ED. Que remarque-t-on ?

On considère la matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, le produit FD.

4. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, le produit DF. Que remarque-t-on ?

C. Inverse

On considère les matrices $G = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

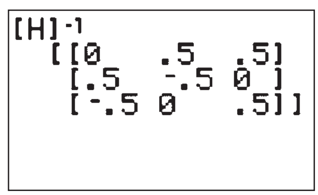
1. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, l'inverse de la matrice H.

2. Calculer, à l'aide d'une calculatrice, le produit $H^{-1}GH$.

On obtient une matrice « diagonale ».

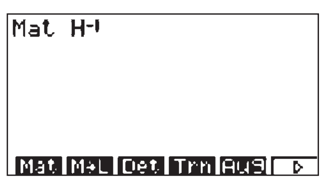
Avec une calculatrice T.I.

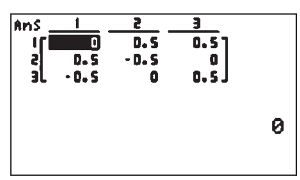
Pour obtenir l'inverse de la matrice H, saisir la matrice, puis 2nde matrice NOMS [H] et faire x^{-1}.



Avec une calculatrice Casio

Pour obtenir l'inverse de la matrice H, saisir la matrice, puis OPTN MAT Mat Mat H et faire SHIFT x^{-1}.





TP 2 Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'un logiciel : Maxima, Scilab ou Python

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Traiter les questions suivantes à l'aide du logiciel Maxima, Scilab ou Python (voir les instructions correspondantes ci-dessous).

1. Calculer M^2 puis M^3.

2. Déterminer la matrice A telle que $M^2 + A = M^3$.

3. Déterminer $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour que $MV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

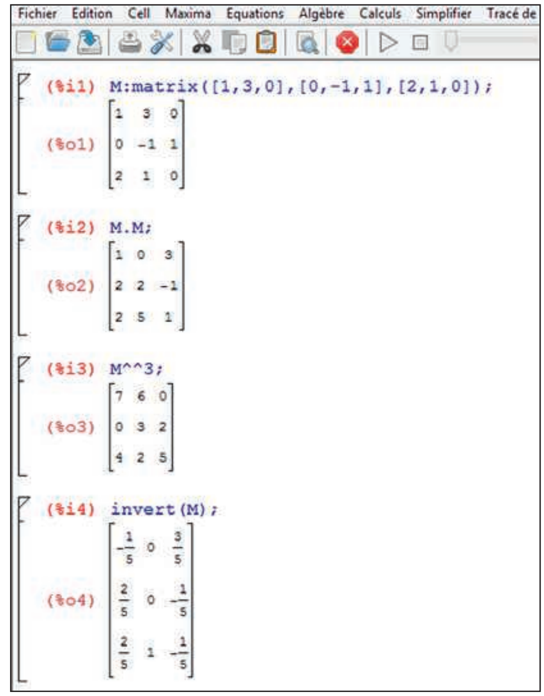
Calcul matriciel avec Maxima

Pour **définir** la matrice M entrer **M:matrix([1,3,0],[0,-1,1],[2,1,0])** ou utiliser le menu Algèbre/Générer une matrice.

Pour effectuer un **produit** de matrices, utiliser l'opérateur . (ne pas utiliser *) par exemple **M.M** multiplie M par elle-même.

Pour effectuer une **puissance** de matrice utiliser l'opérateur ^^ (attention à doubler le symbole ^) par exemple **M^^3** calcule M^3.

Pour calculer l'**inverse** de la matrice M saisir **invert(M)**.



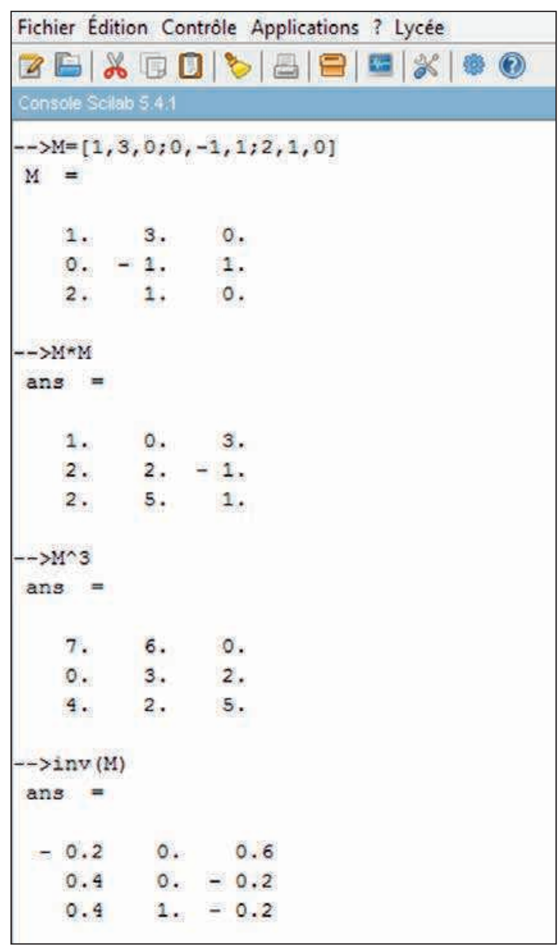
Calcul matriciel avec Scilab

Pour **définir** la matrice M entrer : **M=[1,3,0;0,-1,1;2,1,0]**

Pour effectuer un **produit** de matrices, utiliser l'opérateur * , par exemple **M*M** multiplie M par elle-même.

Pour effectuer une **puissance** de matrice utiliser l'opérateur ^ par exemple **M^3** calcule M^3.

Pour calculer l'**inverse** de la matrice M saisir **inv(M)**.



Calcul matriciel avec Python

Importer les fonctions du module Numpy en saisissant :

from numpy import *

Pour **définir** la matrice M entrer :

M=array[(**1,3,0**),(**0,-1,1**),(**2,1,0**)]

Pour effectuer un **produit** de matrices, utiliser la fonction **dot** , par exemple **dot**(**M,M**) multiplie M par elle-même.

Pour effectuer une **puissance** de matrice, effectuer des produits successifs (ou programmer une fonction puissance).

Pour calculer l'**inverse** de la matrice M saisir **linalg.inv**(**M**).

```
Python Interpreter
*** Python 3.2.5 (default, May 15 2013,
*** Remote Python engine  is active ***
>>> from numpy import*
>>> M=array([(1,3,0),(0,-1,1),(2,1,0)])
>>> M
array([[ 1,  3,  0],
       [ 0, -1,  1],
       [ 2,  1,  0]])
>>> M2=dot(M,M)
>>> M2
array([[ 1,  0,  3],
       [ 2,  2, -1],
       [ 2,  5,  1]])
>>> M3=dot(M2,M)
>>> M3
array([[7, 6, 0],
       [0, 3, 2],
       [4, 2, 5]])
>>> linalg.inv(M)
array([[-0.2,  0. ,  0.6],
       [ 0.4,  0. , -0.2],
       [ 0.4,  1. , -0.2]])
>>> |
```

TP 3 Résoudre un système linéaire à l'aide d'une inversion de matrice avec Maxima, Scilab ou Python

Une entreprise produit des pièces pour l'ameublement.

Pour trois types de pièces, les quantités x, y, z, en centaines, à produire pour répondre au mieux à la demande sont solutions du système S suivant :

$$\begin{cases} 0,9x - 0,4y - 0,2z = 75 \\ -0,2x + 0,7y - 0,1z = 50 \\ -0,5x - 0,3y + 0,9z = 80. \end{cases}$$

1. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,5 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que le système S est équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.

2. On désigne par A^{-1} la matrice inverse de A.

a. Vérifier que $X = A^{-1} \cdot B$.

b. Déterminer, à l'aide d'un logiciel, la solution du système S. Arrondir les valeurs de x, y, z à 10^{-1}.

Pour mener les calculs avec Maxima, Scilab ou Python, on peut s'appuyer sur les images d'écran suivantes.

```
Fichier  Edition  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs  Simplifier  Tracé de courbes  Numérique  Aide

-->  A:matrix([0.9,-0.4,-0.2],[-0.2,0.7,-0.1],[-0.5,-0.3,0.9]);

-->  B:matrix([75],[50],[80]);

-->  invert(A).B;
```

```
-->A=[0.9,-0.4,-0.2;-0.2,0.7,-0.1;-0.5,-0.3,0.9]
 A  =

    0.9   - 0.4  - 0.2
  - 0.2     0.7  - 0.1
  - 0.5   - 0.3    0.9

-->B=[75;50;80]
 B  =

    75.
    50.
    80.

-->inv(A)*B
```

```
Python Interpreter
*** Python 3.2.5 (default, May 15 2013, 23:06:03) [MSC v.1500 32
*** Remote Python engine  is active ***
>>> from numpy import*
>>> A=array([(0.9,-0.4,-0.2),(-0.2,0.7,-0.1),(-0.5,-0.3,0.9)])
>>> B=array([75,50,80])
>>> dot(linalg.inv(A),B)
```

LES CAPACITÉS ATTENDUES

	Exercices corrigés
• Matrices	
Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.	1, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 18, 20, 33, 34, 36, 40
Représenter puis traiter une situation simple à l'aide d'une écriture matricielle.	19, 42
• Inverse d'une matrice	
Montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre.	20
Déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'inverse d'une matrice inversible.	23, 37, 45
Résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues à l'aide d'une inversion de matrice.	25, 31, 38, 42, 45

Matrices

▶ *Pour chacun des exercices* **1** *à* **12**, *vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel. Voir les* **TP1** *et* **2** TICE

Addition, multiplication par un nombre réel

1. + Addition et multiplication par un nombre réel

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & -3\end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes :

$A+B$; $B+A$; $3A$; $-2B$; $3A-2B$.

CORRIGÉ P. 164

2. + Avec des matrices carrées d'ordre 2

Soit les matrices à deux lignes et deux colonnes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -6 & -5\end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice $M=2A-3B+C$.

3. ++ Combinaisons linéaires de matrices

Calculer les combinaisons linéaires de matrices suivantes.

a) $A=2\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$;

b) $B=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

c) $C=3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$;

d) $D=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

e) $E=2\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

Produit de matrices

4. + Produits de deux matrices carrées d'ordre 2

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices AB et BA.

2. A-t-on $AB=BA$?

CORRIGÉ P. 164

5. + Produits de matrices

On note :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} ; Q=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} ; D=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Calculer les produits $P\cdot Q$, $Q\cdot P$ et $P\cdot D\cdot Q$.

6. + Produits de matrices carrées d'ordre 3

On donne les matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice AB. Que peut-on remarquer ?

CORRIGÉ P. 164

7. + Produits de matrices de tailles différentes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A\times B$, puis $(A\times B)\times C$.

2. Calculer $B\times C$, puis $A\times(B\times C)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

CORRIGÉ P. 164

8. + **Produits de matrices**

Calculer les produits de matrices suivants.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. + **Produits de matrices**

Calculer les produits de matrices suivants.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

10. + **Où on observe que le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune ne le soit**

On donne les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A \cdot B$.

2. Calculer le produit $C \cdot D$.

Puissances d'une matrice

11. + **Puissances d'une matrice**

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 = A \times A$;

b) Calculer $A^3 = A^2 \times A$.

CORRIGÉ P. 164

12. + **Somme, produits et carré de matrices**

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + AB + 2B$.

CORRIGÉ P. 164

Pour les exercices **13** à **17** les calculs de puissances sont à effectuer avec une calculatrice ou un logiciel.

13. + **Puissances d'une matrice** *(suite)* TICE

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer F^2 et F^3.

CORRIGÉ P. 164

14. + **Puissances d'une matrice** TICE

Soit $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, puis A^3.

15. + TICE

On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $B = A - I$, puis B^4.

16. + TICE

On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $C = A + B$.

2. Calculer la matrice C^3.

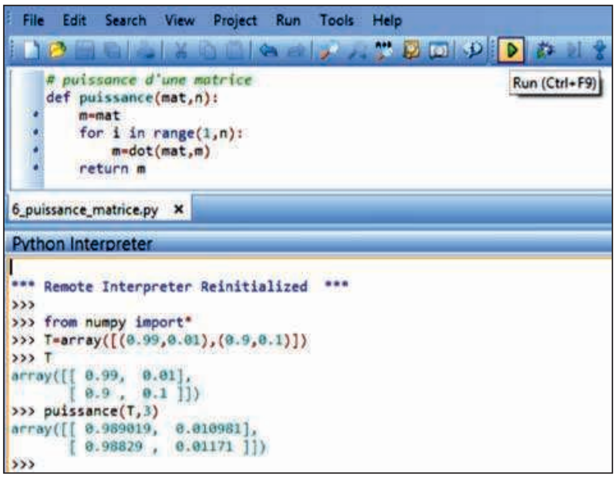
17. + **Puissances d'une matrice** *(suite)* TICE

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^5.

18. +++ **Un algorithme de calcul de puissance d'une matrice avec Python**

1. Implanter la fonction puissance (mat,n) suivante dans Python puis la mettre en œuvre en calculant T^3 avec $T = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ comme ci-dessous.



2. Effectuer à l'aide de Python les calculs matriciels suivants : $U_0\,T^3$; $U_0\,T^5$; T^{10} ; T^{20} avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ P. 165

Représenter puis traiter une situation simple à l'aide d'une écriture matricielle

19. ++ **Interprétation du produit de deux matrices**

L'inventaire des téléviseurs de type A et de type B, en stock dans trois points de vente de la grande chaîne Tardy, est donné par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 15 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

où les lignes indiquent les stocks de téléviseurs disponibles dans chacun des trois points de vente.

Le prix de vente des téléviseurs de type A et de type B est donné par la matrice à une seule colonne :

$$N = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $M \times N$.

2. Que représentent les nombres obtenus dans la matrice $M \times N$?

CORRIGÉ P. 165

Inverse d'une matrice

Déterminer l'inverse d'une matrice

20. + **Matrices inverses**

Soit les deux matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Calculer $M_1 \times M_2$ et $M_2 \times M_1$.

▶ *Deux matrices M et M′ telles que MM′ = M′M = I sont dites inverses.*

CORRIGÉ P. 165

21. + **Montrer qu'une matrice est inverse d'une autre**

Soit les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices M et P sont inverses l'une de l'autre.

▶ *Utiliser le résultat rappelé dans l'énoncé du* **20**.

22. ++ ***A* étant une matrice donnée, on recherche *A'* telle que *AA'* = *I***

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O$.

(O est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. En remarquant que $A = AI$, vérifier que l'égalité du **1.** peut s'écrire $I = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right)$.

3. En déduire qu'il existe une matrice A' telle que : $A \times A' = I$.

On donnera d'abord l'expression de A' en fonction de A et de I, puis sous forme d'un tableau de nombres.

23. + **Déterminer l'inverse d'une matrice** TICE

Déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice M dans chacun des cas suivant, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}2 \\ 0 & -1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ P. 165

24. +

Même question qu'à l'exercice **23**.

1. $M = \begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. **2.** $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Résoudre un système linéaire à l'aide d'une inversion de matrice

25. ++ Résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues

TICE

On se propose de résoudre le système S d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} -4x + y + 0{,}1z = 1 \\ 11x - 3y - 0{,}2z = 1 \\ -6x + 2y + 0{,}1z = 2. \end{cases}$$

1. On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0{,}1 \\ 11 & -3 & -0{,}2 \\ -6 & 2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que le système S est équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.

2. **a)** On désigne par A^{-1} la matrice inverse de A. Déterminer A^{-1} avec une calculatrice ou un logiciel.

b) Vérifier que $X = A^{-1} \cdot B$.

c) En déduire la solution du système S.

CORRIGÉ P. 165

26. ++

On se propose de résoudre le système S d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 14 \\ 2x - y + z = 21 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

1. On considère les matrices :

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice carrée A d'ordre 3 telle que le système S soit équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.

2. On désigne par A^{-1} la matrice inverse de A.

Vérifier avec une calculatrice ou un logiciel que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. **a)** Vérifier que $X = A^{-1} \times B$.

b) En déduire la solution du système S.

27. +++

TICE

Pour chacun des systèmes S suivants d'inconnues x, y, z,

- déterminer trois matrices A, X et B telles que le système S soit équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$;
- déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'inverse A^{-1} de A ;
- en déduire la solution de S.

a) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 15 \\ 3x + 4y + z = 17 \\ -2x + 2y + 3z = 10 \,; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 2x + 7y + 6z = 8 \,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - 4y - 2z = 1 \\ x + 5y - 2z = 3 \,; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 12 \\ x + 3y + z = 6 \\ -x - 2y + 3z = -8. \end{cases}$

28. +++

TICE

Même énoncé qu'à l'exercice **27**.

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + 2z - t = -5 \\ -x + 7y - z + 2t = -9 \\ 3x + 5y - 3z + t = -10. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 5z + t = 5 \\ x + y - 3z - 4t = -1 \\ 3x + 6y - 2z + t = 8 \\ 2x + 2y + 2z - 3t = 2. \end{cases}$

29. +++

TICE

Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y, z, à l'aide d'une inversion de matrice.

a) $\begin{cases} 3x + 3y + 6z = 39 \\ -x + 2y + 10z = 43 \\ x - 3y + 4z = 9 \,; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 7z = 7 \\ 2x + 4y + 9z = 15. \end{cases}$

30. ++ Recherche d'une fonction

TICE

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les nombres réels a, b, c tels que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

passe par les points A (2, – 3), B (3, – 4), C (6, 5).

31. ++++ Résolution de systèmes dans le domaine technologique avec Maxima, Scilab ou Python

TICE

Dans les deux situations technologiques suivantes :

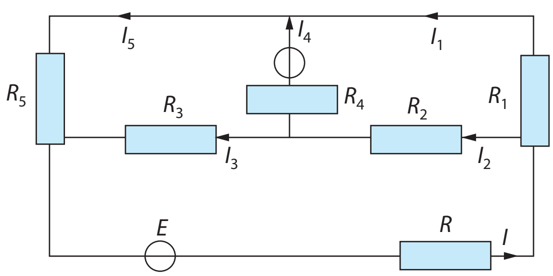
a) traduire le système d'équations par une égalité matricielle du type $AX = B$, où X est une matrice à une colonne dont les coefficients sont les inconnues du système ;

b) à l'aide de Maxima, Scilab ou Python, résoudre le système sachant que : $X = A^{-1}B$.

Le tableau suivant rappelle la syntaxe correspondant à chacun de ces trois logiciels.

Maxima	A:matrix([a,b,c...],...,[d,e,f,...]) B:matrix([g],[h],...,[i]) invert(A).B
Scilab	A=[a,b,c,...;...;d,e,f,...] B=[g;h;...;i] inv(A)*B
Python	from numpy import* A=array([(a,b,c,...),...,(d,e,f,...)]) B=array([g,h,...,i]) dot(linalg.inv(A),B)

1. *Un système en électricité*



Dans le système suivant, les six inconnues I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 sont les intensités respectives des courants des diverses branches du réseau de la figure.

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ I_2 = I_3 + I_4 \\ I = I_5 + I_3 \\ I + 3I_2 + 2I_3 = 240 \\ I_4 + 3I_2 - 7{,}5I_1 = -2 \\ I_4 - 2I_3 + I_5 = 2. \end{cases}$$

2. *Un système en résistance des matériaux*

Dans le système suivant, les sept inconnues A_x, B_x, B_y, C_x, C_y, D_x, E_y, sont des composantes d'efforts dans une structure en résistance des matériaux.

$$\begin{cases} A_x + B_x - C_x = 0 \\ A_x - C_y = 1\,650 \\ C_x - 2B_x = 0 \\ 2D_x - B_x = 0 \\ C_x - D_x = 0 \\ C_y + E_y = 1\,060 \\ -2D_x + 2E_y = 1\,540. \end{cases}$$

CORRIGÉ P. 165

32. +++ **Programme de production** TICE

Une usine fabrique, chaque jour, trois produits A, B, C en quantités respectives x_1, x_2, x_3 à partir de pièces de modèles m_1, m_2, m_3.

Le nombre de pièces de modèles m_1, m_2, m_3 nécessaires à la fabrication des produits A, B, C est donné par le tableau suivant :

	A	B	C
m_1	2	3	5
m_2	1	4	2
m_3	1	2	6

Un « programme de production » journalier s'exprime par une matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(Par exemple le programme de production $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ correspond pour la journée concernée à une production de 3 produits A, 5 produits B et 7 produits C).

Pour réaliser un « programme de production » $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ on utilise y_1 pièces de modèle m_1, y_2 pièces de modèle m_2 et y_3 pièces de modèle m_3, ce que l'on représente par la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On a l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres de pièces de modèles respectifs m_1, m_2, m_3 dont il faut disposer pour pouvoir fabriquer dans une journée 3 produits A, 4 produits B et 5 produits C.

2. On dispose un certain jour d'un stock de 31 pièces de modèle m_1, 24 pièces de modèle m_2 et 28 pièces de modèle m_3. Combien de produits A, B, C peut-on fabriquer ce jour-là ?

▶ *Dans cette question on utilise une calculatrice ou un logiciel pour résoudre un système linéaire.*

FAITES le POINT

RÉPONSES P. 167

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

▶ *Vérifier avec une calculatrice ou un logiciel.*

33. + Combinaison linéaire de matrices

On donne des matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&0\\2&6&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&3&2\end{pmatrix};\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Alors on a :

a) $A=2B+I$; **b)** $A=B-2I$; **c)** $A=2B-I$.

34. + Produits de matrices

On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}2{,}5&3{,}5&1{,}5\\2&2&1{,}5\\1&1&1\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}-1&4&-4{,}5\\1&-2&1{,}5\\0&-2&4\end{pmatrix}.$$

Alors on a :

a) $B\times A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; **b)** $B\times A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

c) $B\times A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

35. ++ Carré d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit a un nombre réel non nul.

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}0&a\\-a&1\end{pmatrix}$.

La matrice M^2 est égale à :

$A=\begin{pmatrix}0&2a\\-2a&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&a^2\\-a^2&1\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}-a^2&a\\-a&-a^2+1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}-a^2&a\\-a&1\end{pmatrix}$.

36. + Carré d'une matrice carrée d'ordre 3

On donne la matrice $M=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

Alors on a :

a) $M^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\9&16&9\\1&1&0\end{pmatrix}$; **b)** $M^2=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-6&8&-6\\-2&2&0\end{pmatrix}$;

c) $M^2=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-9&10&-9\\-3&3&-2\end{pmatrix}$; **d)** $M^2=\begin{pmatrix}2&3&3\\9&10&9\\3&3&2\end{pmatrix}$.

37. + Inverse d'une matrice

On donne la matrice $A=\begin{pmatrix}-4&1&0{,}1\\11&-3&-0{,}2\\-6&2&0{,}1\end{pmatrix}$.

L'inverse de la matrice A est :

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&1&10\\\frac{1}{11}&-\frac{1}{3}&-5\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&10\end{pmatrix}$;

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\40&20&10\end{pmatrix}$;

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&40\\1&2&20\\1&3&10\end{pmatrix}$.

38. + Système d'équations linéaires

Le système suivant : $\begin{cases}2x+y+3z=4\\x-3y+2z=13\\4x+y+z=6\end{cases}$

a pour solution :

a) $(1,\ -3,\ 2)$; **b)** $(-2,\ 3,\ -1)$; **c)** $(2,\ -3,\ 1)$.

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS.

39. +++ Produits de matrices

1. Soient les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

Déterminer a pour que le produit AB soit égal à :

$$\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que l'on ait l'égalité matricielle suivante : $A \times B = C$.

40. +++ Produit nul et calcul formel matriciel avec Maxima

TICE

On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & 8 \end{pmatrix}$,

où a est un nombre réel et la matrice O de dimension 3×3 dont tous les coefficients sont nuls.

1. Utiliser l'image d'écran suivante pour déterminer le nombre réel a pour lequel :

$$M \times A = O.$$

```
(%i1) A:matrix([-9,9,-18],[1,-1,2],[5,-5,10]);
       [-9   9  -18]
(%o1)  [ 1  -1    2]
       [ 5  -5   10]

(%i2) M:matrix([1,-1,2],[2,a,1],[3,-a,8]);
       [1  -1  2]
(%o2)  [2   a  1]
       [3  -a  8]

(%i3) M.A;
       [  0      0      0    ]
(%o3)  [a-13   13-a   2 a-26 ]
       [13-a   a-13   26-2 a ]
```

2. Calculer le produit $A \times M$ pour la valeur de a obtenue.

CORRIGÉ P. 167

41. +++ Le prix d'un voyage

Une agence de voyage propose un circuit touristique pour visiter 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée de séjour dans chacune des villes.

L'agence propose des tarifs qui diffèrent selon la période. Il existe 3 périodes touristiques :

- une période haute (tarifs plus élevés) ;
- une période moyenne ;
- une période basse.

Les prix journaliers, en centaines d'euros par personne, dans les différents lieux sont donnés dans le tableau suivant :

	Ville A	Ville B	Ville C
Période haute	2,5	3,5	1,5
Période moyenne	2	2	1,5
Période basse	1	1	1

On appelle P la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui représente les prix journaliers par ville et par période.

1. Monsieur $\mathcal{M}$ choisit un circuit de 14 jours qui comprend 6 jours dans la ville A, 5 jours dans la ville B et 3 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représente les termes de la matrice obtenue ?

b) Monsieur $\mathcal{M}$ dispose d'un budget de 2 600 euros. À quelle période pourra-t-il faire son voyage ?

2. On donne les matrices $Q = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4{,}5 \\ 1 & -2 & 1{,}5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice unté $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

b) Montrer que pour toutes matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, si $P \times X = Y$ alors $X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyage affirme qu'un circuit complet de 14 jours est possible au prix de 2 600 euros en période haute, 2 250 euros en période moyenne et 1 400 euros en période basse.

Comment se compose ce voyage ?

42. +++ Problème de production avec Maxima, Scilab ou Python

TICE

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : L, C et V.

Pour un appareil de type L, on a besoin de 10 kg d'acier, 2 kg de peinture et 10 heures de travail.

Pour un appareil de type C, on a besoin de 4 kg d'acier, 1 kg de peinture et 6 heures de travail.

Pour un appareil de type V, on a besoin de 10 kg d'acier, 1 kg de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareils de type L, C et V fabriqués, et a, p, t les quantités d'acier (en kg), de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a \\ p \\ t \end{pmatrix}.$$

Montrer que $Y = MX$.

2. Un logiciel fournit une expression de la matrice M^{-1}, inverse de la matrice M (les images suivantes correspondent, dans cet ordre, aux logiciels Maxima, Scilab et Python).

Exprimer la matrice X en fonction des matrices M^{-1} et Y.

```
(%i1) M:matrix([10,4,10],[2,1,1],[10,6,12]);
```

$$(\%o1) \begin{bmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) invert(M);
```

$$(\%o2) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

```
-->M=[10,4,10;2,1,1;10,6,12]
 M  =

    10.    4.    10.
    2.     1.    1.
    10.    6.    12.

-->inv(M)
 ans  =

    0.25                0.5              - 0.25
  - 0.5833333333333    0.8333333333333    0.4166666666667
    0.0833333333333  - 0.8333333333333    0.0833333333333
```

```
>>> from numpy import*
>>> M=array([(10,4,10),(2,1,1),(10,6,12)])
>>> M
array([[10,  4, 10],
       [ 2,  1,  1],
       [10,  6, 12]])
>>> linalg.inv(M)
array([[ 0.25      ,  0.5       , -0.25      ],
       [-0.58333333,  0.83333333,  0.41666667],
       [ 0.08333333, -0.83333333,  0.08333333]])
```

3. Utiliser un de ces logiciels pour en déduire les quantités d'appareils de chaque type L, C et V fabriqués en un mois sachant que 4 200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5 000 heures de travail ont été nécessaires.

CORRIGÉ P. 167

43. +++ Résoudre un système linéaire à l'aide d'une inversion de matrice

On se propose de résoudre le système S, d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = -3. \end{cases}$$

1. On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Déduire du système S une relation entre les matrices M, X et A.

2. On désigne par M^{-1} la matrice inverse de M. Exprimer la matrice X en fonction de M^{-1} et A.

3. Un logiciel de calcul formel donne :

$$M^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système S.

44. +++

Soit les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

où x, y, z, a, b et c sont des nombres réels.

On considère le système d'équations

$$S : \begin{cases} -x - 3y = a \\ x - y = b \\ x + 3y + 2z = c. \end{cases}$$

1. Vérifier que résoudre le système S à trois inconnues réelles x, y et z équivaut à résoudre l'équation E : $MX = Y$ où l'inconnue est la matrice X.

2. a) Calculer M^2 et M^3.

b) Exprimer M^3 en fonction de I.

3. a) Montrer que : $MX = Y$ équivaut à $X = \frac{1}{8}M^2Y$.

b) En déduire la résolution du système S.

c) Donner les solutions de S lorsque :

$a = 3, \quad b = -5 \quad$ et $\quad c = 4$.

4. On désigne par M^{-1} la matrice inverse de M. Donner l'expression de M^{-1}.

45. +++ Problème de fabrication

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z.

La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant :

	X	Y	Z
Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en euros	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N des pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en euros.

1. Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2. On se propose de résoudre le système S d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = N \\ 2{,}5x + 2y + z = M \\ x + 1{,}5y + 0{,}5z = C \end{cases}$$

a) On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}.$$

Vérifier que le système S est équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.

b) On désigne par A^{-1} la matrice inverse de A. Déterminer A^{-1} avec une calculatrice ou un logiciel.

c) Vérifier que $X = A^{-1}B$.

d) En déduire la solution du système S.

3. L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 euros.

Dans ces conditions, calculer les nombres de pièces de chacun des types X, Y et Z, qui seront utilisées pour cette fabrication.

CORRIGÉ P. 168

46. +++ Programme de production

Une entreprise assure la production de trois types d'objets A_1, A_2, et A_3, en quantités (hebdomadaires) respectives x_1, x_2, x_3.

Un programme de production hebdomadaire s'exprime par une matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. (Par exemple le programme de production $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$ correspond, pour la semaine concernée, à une production de 20 objets A_1, 10 objets A_2 et 30 objets A_3).

Pour réaliser un programme de production $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on utilise y_1 kilogrammes de matière première, y_2 heures de travail et y_3 kilowatts heures d'énergie, ce que l'on représente par la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

On a l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, que l'on notera : $Y = MX$.

1. Calculer la matrice Y lorsque $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Traduire le résultat obtenu par une phrase en français.

2. On désigne par M^{-1} la matrice inverse de M.

Vérifier avec une calculatrice ou un logiciel de calcul formel que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Exprimer la matrice X en fonction des matrices M^{-1} et Y.

4. Déterminer la matrice X lorsque $Y = \begin{pmatrix} 230 \\ 130 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Traduire le résultat obtenu par une phrase en français.

47. +++ Problème de fabrication *(bis)*

Une usine fabrique trois types de pièces,dans un même matériau. Le nombre total de pièces fabriquées est désigné par N, leur masse totale (en kg) par M, le coût total d'expédition (en euros) par C.

On peut synthétiser cette situation par un tableau :

Type de pièces	P_1	P_2	P_3
Coût d'expédition d'une pièce, en euros			
Masse d'une pièce, en kg			
Nombre de pièces fabriquées	x	y	z

Le système (S) ci-dessous fournit des informations complémentaires sur cette fabrication :

$$(S)\begin{cases} x + y + z = N \\ x + 2y + 3z = M \\ 40x + 20y + 10z = C \end{cases}$$

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

2. Soient les matrices $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$.

Quelle doit être la matrice A pour que le système (S) s'écrive : $A \times V = B$?

3. On désigne par A^{-1} la matrice inverse de A. Vérifier avec une calculatrice ou un logiciel de calcul formel que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0{,}1 \\ 11 & -3 & -0{,}2 \\ -6 & 2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

4. Exprimer la matrice V en fonction des matrices A^{-1} et B.

5. En déduire la solution du système (S).

6. Dans cette question : $C = 8\,100$ € ; $M = 360$ kg ; $N = 250$.
Combien a-t-on fabriqué de pièces de chaque catégorie ?

48. +++ Un QCM pour le BTS

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.

Chaque réponse rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soit A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $A + B$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Avec les mêmes données qu'au **1.**,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $A \times B$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3. Soit C la matrice définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La matrice C^2 est :	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Soit D la matrice définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par D^{-1} la matrice inverse de D.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La matrice D^{-1} est :	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. On considère le système S :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 8 \\ x + 4y + 5z = 2 \\ x + y - 10z = 2 \end{cases}$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La solution du système est :	$(5 ; -1 ; 5)$	$(5 ; 1 ; 1)$	$(5 ; -1 ; 0{,}2)$

CHAPITRE 3

Arithmétique

Ce chapitre concerne les notions les plus utiles à l'informatique.

COURS

1 Systèmes de numération

L'écriture des nombres suivant l'époque et le lieu fut très diverse : pensez, par exemple, aux chiffres romains I, II, III, IV, V, VI,...

A. Base d'un système de numération

Numération en base 10

Dans la vie courante, nous utilisons des nombres écrits en **base 10**.

Rappelons sur quelques exemples comment ils sont constitués à partir des puissances de 10.

Observez que c'est la **position** des deux 5 figurant dans 5 615 qui définit le rôle de chacun.

$5\,615 = 5\,000 + 600 + 10 + 5$,
$5\,615 = 5 \times 1\,000 + 6 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1$,
$5\,615 = 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

De même $304 = 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$.

Ainsi les nombres entiers positifs sont écrits à l'aide des dix chiffres 0, 1, 2, …, 9, la position de chaque chiffre indiquant à quelle puissance de 10 il est associé.

Les nombres négatifs sont précédés du signe moins (–).

Ce procédé est étendu aux nombres réels positifs en écriture décimale en utilisant les exposant négatifs des puissances de 10.

$3{,}14 = 3 + 1 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}01$,
$3{,}14 = 3 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$.

Numération en base 2

bit : binary digit.

En informatique, le plus petit élément d'information utilisé, appelé **bit**, est obtenu en associant soit 0, soit 1 à un signal, par exemple une tension électrique, suivant la valeur de ce signal.

On est alors amené à représenter les nombres en **base 2**.

Le système de numération en base 2 est aussi appelé système **binaire** et celui en base 10 système **décimal**.

Dans la numération en base 2, on dispose de deux chiffres : 0 et 1.

Les nombres entiers positifs sont écrits suivant la même méthode positionnelle que dans la numération en base 10, en remplaçant les puissances de 10 par les puissances de 2.

Ainsi $3 = 2 + 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ est noté 11 en base 2 et lu « un un ».

$3 = 11_2$ où la base 2 est rappelée en indice pour éviter la confusion avec le nombre onze.

De même $6 = 4 + 2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ est noté 110 en base 2.

$6 = 110_2$ lu « un un zéro ».

Comme dans la numération en base 10, les puissances de 2 d'exposant négatif permettent des nombres avec virgule en base 2.

$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; donc $0{,}5 = 1 \times 2^{-1}$ est noté 0,1 en binaire et lu « zéro virgule un ».

$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; donc $0{,}25 = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$ est noté 0,01 en binaire et lu « zéro virgule zéro un ».

$2^{-1} + 2^{-2} = 0{,}5 + 0{,}25$; donc $0{,}75 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$ est noté 0,11 en binaire et lu « zéro virgule un un ».

Remarques

- Quelle que soit la base utilisée, les nombres négatifs sont précédés du signe moins (–).
- L'écriture 101101 en binaire correspond en décimal à :

$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45.$

Nous observons ainsi que l'écriture d'un nombre entier, réalisée avec deux chiffres dans le système décimal, peut nécessiter six bits en système binaire.

Le programme de mathématiques n'aborde pas l'étude des codes.

Numération en base 16

Nous venons de voir que le système de numération binaire présente, à côté de ses nombreux avantages pour l'informatique, un inconvénient important : il nécessite l'utilisation d'un nombre relativement élevé de bits pour écrire un nombre entier dès que celui-ci atteint quelques dizaines.

L'intérêt essentiel du système binaire en informatique provient du lien entre le calcul binaire (voir le paragraphe **C**) et le calcul booléen (voir le chapitre **4**).

Pour remédier à cela, tout en conservant la bonne adaptation du binaire aux signaux intervenant en informatique, on utilise un système de numération dont la base est une puissance de 2 : le système hexadécimal qui est le système de numération positionnelle en base $16 = 2^4$.

hexa vient du mot grec signifiant 6 et **décimal** du mot latin signifiant 10.

Pour obtenir les 16 symboles nécessaires, on ajoute aux dix chiffres 0, 1, 2,… 9 les six lettres majuscules A, B, C, D, E, F.

Nous obtenons ainsi le tableau de correspondance entre les systèmes décimal, hexadécimal et binaire, ce dernier étant ici exprimé à l'aide de quatre bits.

Observez que quatre bits sont nécessaires et suffisants pour représenter en binaire les seize symboles de l'hexadécimal.

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire à quatre bits	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Dans le système hexadécimal, les nombres entiers positifs sont écrits à l'aide des seize symboles 0, 1,… 9, A,… F, la position de chacun correspondant à une puissance de 16.

$16^2 = 256$, $16^3 = 4\,096$,…

Ainsi $38 = 32 + 6 = 2 \times 16^1 + 6 \times 16^0$ est 26 en hexadécimal et noté 26_{16}.

De même $164 = 160 + 4 = 10 \times 16^1 + 4 \times 16^0$ est noté A4 en hexadécimal.

Ici encore les puissances de 16 d'exposant négatif permettent d'écrire des nombres avec virgule en hexadécimal.

$16^{-1} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$; donc $0{,}062\,5 = 1 \times 16^{-1}$ est 0,1 en hexadécimal et noté $0{,}1_{16}$.

$16^{-2} = \dfrac{1}{256} = 0{,}0039065$; donc $0{,}003\,906\,5 = 0 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2}$ est 0,01 en hexadécimal et noté $0{,}01_{16}$.

Inversement A2C en hexadécimal correspond au nombre
$10 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = 2\,560 + 32 + 12 = 2\,594.$

De même 0,3B en hexadécimal correspond au nombre
$3 \times 16^{-1} + 11 \times 16^{-2} = 3 \times 0{,}062\,5 + 11 \times 0{,}003\,906\,5 = 0{,}230\,471\,5.$

B. Conversions entre bases

Nous admettons la portée générale des méthodes ainsi introduites.

Nous venons de voir, sur quelques exemples particuliers, des correspondances entre les écritures d'un même nombre dans les systèmes de numération en base 10, 2 et 16. Il s'agit maintenant d'introduire des méthodes générales de conversion entre bases à partir de l'étude détaillée d'un exemple.

Passage du binaire au décimal

Exemple

On n'écrit ici ni les puissances de 2 multipliées par 0, ni les facteurs 1 et on remplace 2^0 par 1.

$101{,}0101_2 = 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4}$

$101{,}0101_2 = 4 + 1 + 0{,}25 + 0{,}0625.$

Donc $101{,}0101_2 = 5{,}3125.$

MÉTHODE

Le calcul est effectué dans le système décimal.

Passage du binaire au décimal :
exprimer le nombre à l'aide des puissances de 2.

Remarque

Rappelons que pour 5,3125 :
- l'arrondi par défaut à 10^{-3} est 5,312,
- l'arrondi par excès à 10^{-3} est 5,313,
- l'arrondi (au plus près) à 10^{-3} est 5,313 car la première décimale abandonnée est 5,
- l'arrondi (au plus près) à 10^{-2} est 5,31 car la première décimale abandonnée est 2.

Ici la précision de l'arrondi est 10^{-3}.

L'expression « au plus près » est en général sous-entendue.

Ici la précision de l'arrondi est 10^{-2}.

D'une manière générale, l'arrondi (au plus près) est effectué :
- **par défaut si la première décimale abandonnée est 0, 1, 2, 3 ou 4,**
- **par excès si la première décimale abandonnée est 5, 6, 7, 8, ou 9.**

L'arrondi **par défaut** correspond à une **troncature** : on coupe l'écriture en enlevant des décimales.
L'arrondi **par excès** consiste à **ajouter** 1 à la dernière décimale conservée.

Passage du décimal au binaire

Exemple

Le nombre 13,375 a pour partie entière (avant la virgule) 13 et pour partie décimale (après la virgule) 0,375.

- Pour la **partie entière** 13, nous allons effectuer des **divisions successives par 2** jusqu'à obtenir 0 pour quotient, en les présentant de la façon suivante.

La division « posée » avec un calcul « à la main » figure dans les programmes de l'école et du collège.

Les restes successifs sont notés en vert.

$$\begin{array}{r|l}
13 & 2 \\ \hline
1 & 6 \;|\; 2 \\
 & 0 \;\;\; 3 \;|\; 2 \\
 & \quad\; 1 \;\;\; 1 \;|\; 2 \\
 & \qquad\quad 1 \;\;\; 0
\end{array}$$

Sens de la lecture

$13 = 6 \times 2 + 1,$

$6 = 3 \times 2,$ donc $13 = 3 \times 2^2 + 1,$

$3 = 2 + 1,$ donc $13 = (2 + 1)2^2 + 1,$

$13 = 2^3 + 2^2 + 1.$

Donc $13 = 1101_2.$

Nous observons que la liste des restes successifs lus dans le sens de la flèche donne l'écriture en binaire de 13.

- Pour la **partie décimale** 0,375, nous allons effectuer des **multiplications successives par 2** ne portant que sur les parties décimales jusqu'à obtenir 1, en les présentant de la façon suivante.

Pour 1,5 nous ne retenons que sa partie décimale 0,5 pour la multiplication suivante.

Sens de la lecture

$0{,}375 \times 2 = 0{,}75$ donc $0{,}375 = \dfrac{0{,}75}{2} = 2^{-1} \times 0{,}75$

$0{,}75 \times 2 = 1{,}5$ donc $0{,}75 = 2^{-1} \times 1{,}5$ et
$0{,}375 = 2^{-1}(2^{-1} \times 1{,}5) = 2^{-2} \times 1{,}5$,
$0{,}375 = 2^{-2}(1 + 0{,}5)$

$0{,}5 \times 2 = 1$ donc $0{,}5 = 2^{-1}$ et $0{,}375 = 2^{-2}(1 + 2^{-1})$,
$0{,}375 = 2^{-2} + 2^{-3}$.

Donc $0{,}375 = 0{,}011_2$.

Nous observons que la liste des parties entières des produits successifs lus dans le sens de la flèche donne l'écriture en binaire de 0,375.

- En définitive $13{,}375 = 13 + 0{,}375$ a pour écriture en binaire $1101{,}011_2$.

Nous venons de démontrer que $13 = 1101_2$.

Remarque

Reprenons ces calculs avec 13,4 à la place de 13,375 : seule la partie décimale a changé.

$0{,}4 \times 2 = 0{,}8$ donc $0{,}4 = 2^{-1} \times 0{,}8$

$0{,}8 \times 2 = 1{,}6$ donc $0{,}8 = 2^{-1} \times 1{,}6$ et $0{,}4 = 2^{-2} \times 1{,}6$

$0{,}6 \times 2 = 1{,}2$ donc $0{,}6 = 2^{-1} \times 1{,}2$ et $0{,}4 = 2^{-2}(1 + 2^{-1} \times 1{,}2)$,
$0{,}4 = 2^{-2} + 2^{-3} \times 1{,}2$.

$0{,}2 \times 2 = 0{,}4$ donc $0{,}2 = 2^{-1} \times 0{,}4$ et $0{,}4 = 2^{-2} + 2^{-4} \times 0{,}4$,

$0{,}4 \times 2 = 0{,}8$ À partir de cette ligne, nous retrouvons la succession des quatre égalités précédentes sans jamais obtenir 1 comme produit.

$0{,}4 \times 2$ est le premier membre de la première égalité ci-dessus.

Nous observons le même phénomène dans le système décimal où $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ et $\dfrac{1}{7} = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots$

Il y a donc une infinité de symboles 0 et 1 après la virgule, la séquence 0110 se reproduisant indéfiniment.
Dans ce cas c'est le nombre de bits disponibles après la virgule qui va fixer le nombre de symboles à retenir, c'est-à-dire la précision.
Se pose alors le problème de l'**arrondi** (au plus près) **en binaire**, qui est géré comme dans la numération en base 10 :
– **si le premier symbole abandonné est 0, on fait une troncature** : on abandonne les symboles suivants (arrondi par défaut) ;
– **si le premier symbole abandonné est 1, on ajoute 1 au dernier symbole conservé** (arrondi par excès).

L'addition en binaire est présentée au paragraphe **C**.

Ainsi 13,4 a pour écriture arrondie en binaire avec quatre bits après la virgule 1101,0110 qui est aussi l'écriture en binaire de 13,375.

MÉTHODE

Passage du décimal au binaire :

- Pour la **partie entière** du nombre :

– effectuer des **divisions successives par 2**, la dernière ayant pour quotient 0 ;
– écrire la liste des **restes** dans le sens inverse de leur obtention.

- Pour la **partie décimale** du nombre :

– effectuer des **multiplications successives par 2 ne portant que sur les parties décimales** jusqu'à obtenir soit 1, soit la précision demandée ;
– écrire la liste des **parties entières** des produits dans l'ordre où ils sont apparus ;
– appliquer éventuellement la règle d'arrondi en binaire.

Voir ci-dessus la démarche détaillée pour 13,375 et 13,4.

1 est le seul entier non nul qui peut ainsi être obtenu.

Voir la remarque ci-dessus.

Passage de l'hexadécimal au binaire

Exemple

$3C{,}1A_{16} = 3 \times 16 + 12 + 16^{-1} + 10 \times 16^{-2}$ car $C_{16} = 12$ et $A_{16} = 10$.

$3C{,}1A_{16} = (2+1)2^4 + (2^3 + 2^2) + (2^4)^{-1} + (2^3 + 2)(2^4)^{-2}$ en exprimant 3, 12 et 10 à l'aide des puissances de 2 et car $16 = 2^4$.

$3C{,}1A_{16} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7}$,

$3C{,}1A_{16} = 111100{,}0001101_2$.

Regroupons ces symboles 0 et 1 par paquets de 4 bits autour de la virgule et rajoutons (en vert) des 0 pour compléter les paquets aux deux extrémités :

$3C{,}\ 1A_{16} = \underbrace{0011}\ \underbrace{1100},\underbrace{0001}\ \underbrace{1010}_2$

Or $0011_2 = 3_{16}$, $1100_2 = C_{16}$, $0001_2 = 1_{16}$ et $1010_2 = A_{16}$.

Nous constatons que l'écriture en binaire d'un nombre écrit en hexadécimal est obtenue par la méthode suivante.

Le calcul est effectué dans le système décimal.

$(2^4)^{-1} = 2^{-4}$ et $(2^4)^{-2} = 2^{-8}$.

$16 = 2^4$.

Voir le tableau de correspondance à la fin du paragraphe **A** ou en bas de cette page.

MÉTHODE

Passage de l'hexadécimal au binaire :

– Exprimer en **binaire à 4 bits** chaque symbole du nombre en hexadécimal.

– Supprimer les éventuels 0 (inutiles) à gauche de la partie entière et à l'extrémité droite après la virgule.

Cette correspondance entre les systèmes de numération de base 2 et 16 et la correspondance inverse ci-dessous reposent sur l'égalité $16 = 2^4$.

Passage du binaire à l'hexadécimal

C'est le passage inverse du précédent, d'où la méthode.

MÉTHODE

Passage du binaire à l'hexadécimal :

– Regrouper les symboles du nombre binaire en paquets de 4 bits à partir de la virgule en complétant avec des 0 si nécessaire.

– Remplacer alors chaque regroupement par sa valeur en hexadécimal.

Voir le tableau de correspondance à la fin du paragraphe **A** ou ci-dessous.

Exemple

$1101101{,}111011_2 = \underbrace{0110}_{6}\underbrace{1101}_{D},\underbrace{1110}_{E}\underbrace{1100}_{C}$

$1101101{,}111011_2 = 6D{,}\ EC_{16}$

Passage de l'hexadécimal au décimal

C'est la même méthode que pour passer du binaire au décimal, en remplaçant 2 par 16 et en utilisant éventuellement le tableau de correspondance par A, B,… F.

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

MÉTHODE

Passage de l'hexadécimal au décimal :
Exprimer le nombre à l'aide des puissances de 16.

Le calcul est effectué dans le système décimal.

Exemple

$3C{,}1A_{16} = 3 \times 16 + 12 + 16^{-1} + 10 \times 16^{-2}$

$3C{,}1A_{16} = 48 + 12 + 0{,}0625 + 0{,}0390625$

$3C{,}\ 1A_{16} = 60{,}1015625$.

Passage du décimal à l'hexadécimal

On adapte la méthode de passage du décimal au binaire.

MÉTHODE

Passage du décimal à l'hexadécimal

- Pour la **partie entière** du nombre :
  – effectuer des **divisions successives par 16**, la dernière ayant pour quotient 0 ;
  – écrire la liste des **restes** dans le sens inverse de leur obtention.
- Pour la **partie décimale** du nombre :
  – effectuer des **multiplications successives par 16 ne portant que sur les parties décimales** jusqu'à obtenir soit un entier (non nul), soit la précision demandée ;
  – écrire la liste des **parties entières** des produits dans l'ordre où ils sont apparus.

La règle d'arrondi en base 16 n'est pas au programme de mathématiques du BTS SIO.

A	B
10	11

Exemple

Exprimons 2 656,718 75 en hexadécimal.

$$\begin{array}{r|l} 2\,656 & 16 \\ \hline 0 & 166 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 166 & 16 \\ \hline 6 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 16 \\ \hline 10 & 0 \end{array}$$

A60

$0{,}718\,75 \times 16 = 11{,}5$
$0{,}5 \times 16 = 8$

B8

$2\,656{,}718\,75 = \text{A60,B8}_{16}$.

Remarque

Le **tableur** permet d'effectuer directement les conversions entre systèmes de numération de base 10, 2 et 16, mais **uniquement pour des nombres entiers**.

Formule	Résultat	Égalité
=BINDEC (11011)	27	$11011_2 = 27$
=DECBIN (17)	1001	$17 = 10001_2$
=HEXBIN ("3C")	111100	$3C_{16} = 111100_2$
=BINHEX (110011)	33	$110011_2 = 33_{16}$
=HEXDEC (23)	35	$23_{16} = 35$
=DECHEX (203)	CB	$203 = CB_{16}$

BIN pour binaire,
DEC pour décimal et
HEX pour hexadécimal.

La présence d'une lettre dans 3C oblige à mettre " " dans la parenthèse.

C. Opérations sur les entiers naturels

Nous nous limitons ici aux « capacités attendues » figurant dans le programme de mathématiques du BTS SIO.

Additions en base 2

MÉTHODE

Les **additions en base 2** s'effectuent de la même façon que dans le système décimal, avec notamment la notion de **retenue** (ici en rouge), en utilisant la table d'addition suivante.

Dans le système décimal, en notant la retenue en rouge :

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 85 \\ +\ 39 \\ \hline 124 \end{array}$$

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	$^{1}0$

L'égalité 1 + 1 = 2 en système décimal se traduit en système binaire par :

1 +1 = 10 noté $^{1}0$ où ^{1} est la **retenue**.

> En pratique, on n'écrit pas les retenues et on donne directement le résultat.

Exemple

$$\begin{array}{r} {\color{red}{\scriptstyle 1}} \\ 1\,101 \\ +\quad 110 \\ \hline 10\,011 \end{array}$$

où ${\color{red}{}^{1}}$ est la retenue avec $1 + 1$.

Additions en base 16

MÉTHODE

Les **additions en base 16** s'effectuent de la même façon que dans le système décimal, avec notamment la notion de **retenue** (ici en rouge), en utilisant la table d'addition suivante.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	1	2	3	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$
8	8	9	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$
9	9	A	B	D	C	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$
A	A	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$
B	B	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$	^{1}A
C	C	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$	^{1}A	^{1}B
D	D	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$	^{1}A	^{1}B	^{1}C
E	E	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$	^{1}A	^{1}B	^{1}C	^{1}D
F	F	$^{1}0$	$^{1}1$	$^{1}2$	$^{1}3$	$^{1}4$	$^{1}5$	$^{1}6$	$^{1}7$	$^{1}8$	$^{1}9$	^{1}A	^{1}B	^{1}C	^{1}D	^{1}E

Exemple

$$\begin{array}{r} {\color{red}{\scriptstyle 1\;\;1}} \\ \mathrm{B\,A\,3\,E} \\ +\quad 7\,5\,2 \\ \hline \mathrm{C\,1\,9\,0} \end{array}$$

Multiplications et divisions par une puissance de deux, en base 2

• Rappelons que dans le **système décimal**, c'est-à-dire **en base 10**, multiplier un nombre par 10 revient à décaler tous ses chiffres d'un rang vers la gauche (en ajoutant un zéro ou en déplaçant la virgule).

> $56 = 5 \times 10 + 6$
> $56 \times 10 = 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 0$

Ainsi $56 \times 10 = 560$ et $23{,}17 \times 10 = 231{,}7$.

De façon plus générale, multiplier un nombre par 10^n, où n est un entier naturel, revient à décaler tous ses chiffres de n rangs vers la gauche (en ajoutant des 0 ou en déplaçant la virgule).

Ainsi $56 \times 10^3 = 56\,000$ et $23{,}17 \times 10^4 = 231\,700$.

Inversement, diviser un nombre par 10^n, où n est un entier naturel, revient à décaler tous ses chiffres de n rangs vers la droite (en supprimant des 0 ou en déplaçant la virgule).

Ainsi $\dfrac{56}{10^3} = 0{,}056$ et $\dfrac{23{,}17}{10} = 2{,}317$.

Nous pouvons observer un phénomène analogue dans le **système binaire**, c'est-à-dire **en base 2**, pour la multiplication et la division par une puissance de deux.

Ainsi pour $101_2 \times 10_2$, nous avons $101_2 = 2^2 + 1$ et $10_2 = 2$,
donc $101_2 \times 10_2 = (2^2+1)2 = 2^3 + 2$,
donc $101_2 \times 10_2 = 1010_2$.

Nous constatons que pour multiplier 101_2 par $10_2 = 2$, il suffit de décaler tous les chiffres de 101_2 d'un rang vers la gauche et d'ajouter un zéro.

De même $110{,}01_2 \times 1\,000_2 = 110\,010_2$ avec une démonstration analogue : la multiplication par $1\,000_2 = 2^3$ revient à décaler tous les chiffres de 3 rangs vers la gauche en déplaçant la virgule et en ajoutant un zéro.

Dans le cas inverse d'une division, nous obtenons :

$$101_2 : 10_2 = \frac{2^2+1}{2} = 2 + 2^{-1}, \text{ donc } 101_2 : 10_2 = 10{,}1_2.$$

Nous constatons que pour diviser 101_2 par $10_2 = 2$, il suffit de décaler tous les chiffres de 101_2 d'un rang vers la droite, ce qui entraîne l'apparition d'une virgule.

De même $110{,}01_2 : 1\,000_2 = 0{,}110\,01_2$ avec une démonstration analogue : la division par $1\,000_2 = 2^3$ revient à décaler tous les chiffres de 3 rangs vers la droite en déplaçant la virgule.

Les démonstrations détaillées ci-dessus sur des exemples ont une portée générale et permettent d'énoncer la méthode suivante.

Système décimal	*Système binaire*
2	10_2
$2^2 = 4$	100_2
$2^3 = 8$	$1\,000_2$
…	…
2^n	$\underbrace{10\ldots 0_2}_{n \text{ zéros}}$

MÉTHODE

Pour **multiplier** (respectivement **diviser**) **par** $\mathbf{2^n} = \underbrace{\mathbf{10\ldots 0_2}}_{n \text{ zéros}}$ un nombre écrit en base 2, **on décale tous ses chiffres de n rangs vers la gauche** (respectivement **vers la droite**).

On peut être ainsi amené à supprimer (resp. introduire) ou déplacer la virgule et à ajouter (resp. supprimer) des 0.

Exemples

$10\,010_2 \times 100_2 = 1\,001\,000_2$
$11{,}001_2 \times 10_2 = 110{,}01_2$
$10\,010_2 : 100_2 = 100{,}1_2$
$11{,}011_2 : 10_2 = 1{,}100\,1_2$.

2 Arithmétique modulaire

La signification de l'adjectif « modulaire » apparaîtra au paragraphe D ci-après.

A. Division euclidienne

Euclide est un mathématicien de la Grèce antique dont les « Éléments » constituent un texte fondateur des mathématiques.

Le résultat exact ou approché de la division d'un nombre entier naturel par un nombre entier naturel non nul est généralement obtenu par calcul mental dans les cas élémentaires ou à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Exemples

$6 : 3 = 2$ ou $\dfrac{6}{3} = 2$; $\dfrac{15}{2} = 7,5$;

$\dfrac{13}{3} = 4,333\ldots$ avec une infinité de 3 ou $\dfrac{13}{3} \approx 4,3$ en arrondissant à 10^{-1}.

$\dfrac{136}{17} = 8$; $\dfrac{153}{17} = 9$ et $\dfrac{149}{17} \approx 8,765$ en arrondissant à 10^{-3}.

Remarque

À l'école, puis au collège, la division « posée » avec un calcul « à la main » a aussi été introduite et utilisée.

$$\begin{array}{r|l} 149 & 17 \\ \cline{2-2} -136 & 8 \\ \cline{1-1} 13 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} 149 & 17 \\ \cline{2-2} 13 & 8 \end{array}$$

Cette division peut être prolongée

$$\begin{array}{r|l} 149 & 17 \\ \cline{2-2} 130 & 8,7 \\ 11 & \end{array}$$

mais dans la suite nous ne considérerons que des nombres entiers naturels.

Rappelons sur cet exemple le vocabulaire utilisé :
149 est le **dividende**, 17 est le **diviseur**, 8 est le **quotient** et 13 est le **reste**.

Les derniers exemples ci-dessus nous permettent de remarquer que la partie entière de $\dfrac{149}{17} \approx 8,765$ est 8 et que $17 \times 8 = 136$.

Donc $149 = 17 \times 8 + 13$ où $0 \leq 13 < 17$.

$149 - 136 = 13$.

De même :

$152 = 17 \times 8 + 16$ où $0 \leq 16 < 17$,
$151 = 17 \times 8 + 15$ où $0 \leq 15 < 17$,
$150 = 17 \times 8 + 14$ où $0 \leq 14 < 17$,

$137 = 17 \times 8 + 1$ où $0 \leq 1 < 17$,
$136 = 17 \times 8 + 0$ où $0 \leq 0 < 17$.

Dans chaque cas, 8 est le plus grand entier naturel tel que 17×8 soit inférieur ou égal au nombre figurant dans le membre de gauche de l'égalité.

En continuant au-delà de 152 et en deçà de 136, nous obtenons :

$153 = 17 \times 9 + 0$ où $0 \leq 0 < 17$,
$154 = 17 \times 9 + 1$ où $0 \leq 1 < 17$,

$135 = 17 \times 7 + 16$ où $0 \leq 16 < 17$,
$134 = 17 \times 7 + 15$ où $0 \leq 15 < 17$.

Tous ces résultats sont du type : $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$.

Nous venons de démontrer que, pour tout entier naturel a compris entre 134 et 135 et pour $b = 17$, **il existe deux entiers naturels uniques q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$** :
q est le plus grand nombre entier naturel tel que $bq \leq a$ et $r = a - bq$.

Nous admettons ici que ce résultat est général.

Conformément au programme du BTS SIO, « *on se limite aux entiers naturels* ».

THÉORÈME

Pour tout entier naturel a et pour tout entier naturel non nul b, il existe des entiers naturels uniques q et r tels que :

$$\boldsymbol{a = bq + r} \ \textbf{ avec } \ \boldsymbol{a \leq r < b}.$$

DÉFINITION

L'entier naturel q est le **quotient** de la **division euclidienne** de a par b et l'entier naturel r est le **reste** de cette division.

B. Nombres premiers

Diviseurs et multiples d'un nombre entier naturel

Ici le mot diviseur a un sens différent de celui figurant dans une division euclidienne.

Rappelons sur un exemple le vocabulaire concernant les diviseurs et les multiples d'un nombre entier naturel.

$12 = 2 \times 6$ et $12 = 1 \times 12$.
Donc 12 a aussi pour diviseurs 2, 6, 1 et 12.

$12 = 3 \times 4$, donc 3 et 4 sont des **diviseurs** de 12 et 12 est un **multiple** de 3 et de 4.

DÉFINITION

Soit a et b des nombres entiers naturels.

a est un **multiple** de b s'il existe un entier naturel q tel que $a = bq$.

Alors, si $b \neq 0$, b est un **diviseur** de a (ou a est **divisible** par b).

Le reste r de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

Remarques

- 1 a pour seul diviseur 1.
- Tout nombre entier naturel n tel que $n \geq 2$ a au moins deux diviseurs : 1 et n.
- Tout nombre entier naturel non nul a une infinité de multiples.
- 0 a pour seul multiple 0.
- 0 est un multiple de tout nombre entier naturel.

Par exemple, les multiples de 2 sont les nombres pairs.

$0b = 0$, pour tout b.

Rappelons quelques critères de divisibilité pour un nombre entier naturel n :

– n est **divisible par 2** s'il est pair (son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8) ;

– n est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;

– n est **divisible par 4** si le nombre formé par ses deux chiffres de droite est divisible par 4 ;

1 712 est divisible par 4 car 12 est divisible par 4.

– n est **divisible par 5** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

– n est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Définition des nombres premiers

DÉFINITION

Un nombre entier naturel n est **premier** s'il a **exactement deux diviseurs** : 1 et n.

Exemples

0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs : tous les entiers naturels non nuls.

1 n'est pas premier car il a un seul diviseur : 1.

2 est premier.

2 est le seul entier pair premier.

3, 5 et 7 sont premiers.

Ce résultat est démontré dans les Éléments d'Euclide (IIIe siècle avant notre ère ?).

Remarque

L'ensemble des nombres premiers a une infinité d'éléments.
L'étude de cet ensemble fait toujours l'objet de recherches : ainsi le 25 janvier 2013 le plus grand nombre premier connu devenait $2^{57\,885\,161} - 1$ qui comporte 17 425 170 chiffres dont l'écriture nécessite environ 4 000 pages format A4 polices Times New Roman en taille 12.

Recherche de nombres premiers

• Le théorème suivant, que nous admettons, permet de tester si un nombre entier naturel donné est premier.

THÉORÈME

Si un nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors il a au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

En conséquence, **si un nombre entier naturel n, avec $n \geq 2$, n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier**.

Exemple

Les nombres 221 et 223 sont-ils premiers ?

$\sqrt{221} \approx 14{,}9$ et $\sqrt{223} \approx 14{,}9$.

Les nombres premiers inférieurs à 14,9 sont : 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

221 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 mais $221 = 13 \times 17$.

Donc 221 n'est pas un nombre premier.

223 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13. Donc 223 est un nombre premier.

Ératosthène (276-194 avant J.-C.) est un mathématicien grec, mais aussi un poète, un astronome,…

	1	2		8	9
10	11	12		18	19
20	21	22		28	29

Vérifiez le !

• On peut obtenir la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre n donné à l'aide du **crible d'Ératosthène** :

– on écrit la liste des nombres compris entre 1 et n, par exemple sous la forme d'un tableau où les lignes correspondent aux dizaines ;

– on barre successivement 1, les multiples de 2, les multiples de 3, les multiples de 5,… c'est-à-dire les multiples de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$;

– les nombres non barrés ainsi obtenus sont les nombres premiers inférieurs à n.

Par exemple, pour $n = 100$, les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{100} = 10$ sont 2, 3, 5, 7 et on obtient ainsi 25 nombres premiers inférieurs à 100.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Le théorème suivant, que nous admettons, montre l'importance des nombres premiers en arithmétique.

THÉORÈME

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique (à l'ordre des facteurs près) **en un produit de facteurs premiers.**

Exemple

Décomposons 150 en produit de facteurs premiers.

La méthode consiste à diviser 150 par son plus petit diviseur premier et à recommencer avec chaque quotient jusqu'à obtenir 1, les calculs étant présentés comme ci-contre.

Nous obtenons $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

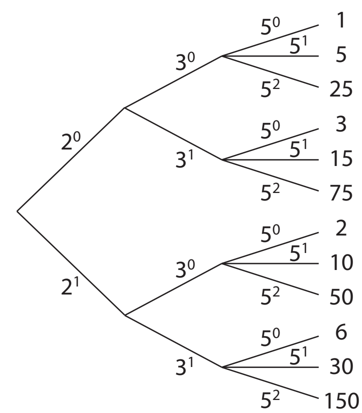
$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Cette méthode est à retenir.

Nous admettons ici que **le théorème précédent permet d'obtenir l'ensemble des diviseurs de tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2**.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus les diviseurs de 150 sont les nombres $2^i \times 3^j \times 5^k$ avec $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 1$ et $0 \leq k \leq 2$.

Nous pouvons dresser leur liste à l'aide d'un arbre.



150 a 12 diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.

C. PGCD de deux entiers

Définition et propriétés

Exemple

Voir le fin du paragraphe **B**.

Cherchons les diviseurs communs à 12 et 30.

La décomposition de 12 et 30 en facteurs premiers donne :
$12 = 2^2 \times 3$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$.

12	2
6	2
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, $2^2 = 4$, $2 \times 3 = 6$, $2^2 \times 3 = 12$.

Les diviseurs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Les diviseurs communs à 12 et 30 sont donc : 1, 2, 3, 6.

6 est le plus grand diviseur commun à 12 et 30 : on note 6 = PGCD (12, 30).

Plus Grand Commun Diviseur.

Plus généralement, tout nombre entier naturel non nul *n* a au moins 1 pour diviseur et tous ses diviseurs sont inférieurs ou égaux à *n*.

Donc deux nombres entiers naturels non nuls *a* et *b* ont au moins 1 pour diviseur commun et tous leurs diviseurs communs sont inférieurs ou égaux à *a* et *b*.

Nous admettons qu'il en résulte **qu'il existe un diviseur commun à *a* et *b* plus grand que tous les autres : il est noté PGCD (*a*,*b*)**.

Remarques

• 2 et 3 n'ont aucun diviseur premier commun, leur seul diviseur commun étant 1.
Donc PGCD (2,3) = 1

• $12 = 2^2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et PGCD $(12,30) = 6 = 2 \times 3$.
Nous observons que 6 est le produit des facteurs premiers communs à 12 et 36, chacun étant affecté de l'exposant le plus faible.

Nous admettons que ces remarques ont une portée générale.

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

- S'ils n'ont aucun facteur premier commun, alors PGCD $(a,b) = 1$.
- Sinon PGCD (a,b) est le produit des facteurs premiers communs, chacun étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans les deux décompositions.

Nous admettons aussi les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉS

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$.

PGCD (a,b) = PGCD $(a - b, b)$.

PGCD (a,b) = PGCD (r,b) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

$a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$: voir le paragraphe **A**.

Ces deux égalités permettent, dans la recherche du PGCD de deux nombres, de remplacer le plus grand (ici a) par un nombre plus petit : $a - b$ ou r.

On peut alors itérer le procédé jusqu'à obtenir une différence ou un reste nul.

Entiers premiers entre eux

Exemple

Les diviseurs de 10 sont 1, 2, 5, 10.

Les diviseurs de 21 sont 1, 3, 7, 21.

Donc 10 et 21 ont 1 pour seul diviseur commun.

DÉFINITION

Deux nombres entiers naturels sont **premiers entre eux** si et seulement si **leur seul diviseur commun est 1**.

10 et 21 sont premiers entre eux.

Remarque

Deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1.

D. Congruences

Cette limitation réduit le champ d'intervention des congruences, notamment dans le cas d'un décodage où une différence négative peut apparaître.

Le programme de mathématiques du BTS SIO limitant l'étude de la division euclidienne aux nombres entiers naturels, nous sommes amenés ici à limiter cette initiation aux congruences aux seuls nombres entiers naturels bien que celles-ci peuvent s'appliquer plus généralement aux nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs).

Définition

$17 = 7 \times 2 + 3$
$31 = 7 \times 4 + 3$

Nous pouvons observer que les divisions euclidiennes de 17 et 31 par 7 ont le **même reste** : $r = 3$.

DÉFINITION

Soit a et b des nombres entiers naturels et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

a* est congru à *b* modulo *n si et seulement si ***a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par *n***.

Les mots congru et modulo viennent du latin *congruus* (convenable) et *modus* (mesure).

Notation : $a \equiv b$ (modulo n).

Cette notation peut être abrégée en : $a \equiv b$ (mod n) ou $a \equiv b$ (n).

Exemples

$17 \equiv 31\ (7)$

$31 \equiv 17\ (7)$

$17 \equiv 17\ (7)$ et $31 \equiv 31\ (7)$

$17 \equiv 3(7)$ et $31 \equiv 3(7)$.

3 est le reste des divisions euclidiennes de 13 et 31 par 7.

Plus généralement, pour tout entier naturel a et tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $\boldsymbol{a \equiv a\ (n)}$ et

$a \equiv r(n)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par n.

Remarques

- Par définition, **si $a \equiv b(n)$, alors $b \equiv a(n)$.**

On dit que a et b sont congrus modulo n.

- Par définition, **si $a \equiv b(n)$ et si $b \equiv c(n)$, alors $a \equiv c(n)$.**

Propriétés

$31 \equiv 17\ (7)$ et $31 - 17 = 14 = 2 \times 7$, donc $31 - 17$ est un multiple de 7.

Plus généralement nous admettons la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ

Soit a et b des entiers naturels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a est congru à b modulo n si et seulement si $|a - b|$ est un multiple de n.

$|a - b|$ est la valeur absolue de $a - b$.

$|31 - 17| = 31 - 17 = 4$.

$|17 - 31| = -(17 - 31) = 4$.

Nous avons introduit ici une valeur absolue car, conformément au programme, nous nous limitons aux nombres entiers naturels.

D'autres propriétés des congruences font intervenir les opérations sur les nombres entiers naturels.

PROPRIÉTÉS

Soit a, a', b et b' des entiers naturels et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $a \equiv b\ (n)$ et $a' \equiv b'\ (n)$, alors :

- $a + a' \equiv b + b'\ (n)$,
- $aa' \equiv bb'\ (n)$,
- $a^m \equiv b^m(n)$ pour tout entier naturel non nul m.

Si, de plus, $a \geq a'$ et $b \geq b'$, alors $a - a' \equiv b - b'\ (n)$.

Les propriétés sont exploitées dans les exercices corrigés sur les congruences de ce chapitre.

Une dernière propriété figure au programme.

PROPRIÉTÉ

Modulo n, les multiples de a sont les multiples de PGCD (a, n).

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES	Exercices corrigés
• Systèmes de numération	
Passer de l'écriture d'un nombre dans une base à une autre.	1, 4, 7, 10, 11, 16, 19, 22, 25
Arrondir un entier ou un réel (par défaut, par excès, au plus près…) et se conformer à un nombre de chiffres significatifs.	11
Calculer à la main : – des additions en base 2 et 16, – des multiplications et des divisions par une puissance de deux, en base 2.	28, 31 34
• Arithmétique modulaire	
Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers et déterminer tous ses diviseurs.	46
Mettre en œuvre un algorithme : – recherche de nombres premiers, – décomposition en produit de facteurs premiers, – de recherche de PGCD.	38, 41 43, 46, 50 50, 53, 56, 59, 62
Mener un calcul de congruences modulo n.	65, 68, 71, 75

Systèmes de numération

Du binaire au décimal

Écrire dans le système décimal les nombres suivants (exercices **1** à **6**).

1. + **Nombres entiers**

a) 110_2 ; **b)** 1011_2.

CORRIGÉ P. 168

2. + **Nombres entiers**

a) 10011_2 ; **b)** 11011_2.

3. + **Nombres entiers**

a) 110110_2 ; **b)** 1010101_2.

4. + **Nombres avec virgule**

a) $10{,}01_2$; **b)** $100{,}011_2$.

CORRIGÉ P. 168

5. + **Nombres avec virgule**

a) $110{,}11_2$; **b)** $1010{,}101_2$.

6. + **Nombres avec virgule**

a) $1001{,}110_2$; **b)** $10110{,}001_2$.

Du décimal au binaire

Écrire dans le système binaire les nombres suivants (exercices **7** à **15**).

7. + **Nombres entiers**

a) 21 ; **b)** 41.

CORRIGÉ P. 168

8. + **Nombres entiers**

a) 29 ; **b)** 51.

9. + **Nombres entiers**

a) 43 ; **b)** 85.

10. + **Nombres décimaux**

a) 15,75 ; **b)** 62,625.

CORRIGÉ P. 168

11. ++ **Arrondis**

0,333 en arrondissant à 2^{-3}

a) par défaut ;

b) par excès ;

c) au plus près.

CORRIGÉ P. 169

12. + **Nombres décimaux**

a) 17,375 ; **b)** 71,312 5.

13. ++ **Nombres décimaux**

a) 17,375 ; **b)** 71,312 5.

14. ++ **Arrondis**

7,432 1 en arrondissant à 2^{-4}.

a) par défaut ;

b) au plus près.

15. ++ **Arrondis**

23,23 en arrondissant à 2^{-4}.

a) par excès ;

b) au plus près.

De l'hexadécimal au binaire

Écrire dans le système binaire les nombres suivants (exercices **16** à **18**).

16. + **Nombres avec des lettres**
a) $2A7_{16}$; b) $B3C{,}09_{16}$.
CORRIGÉ P. 169

17. + **Nombres avec des lettres**
a) $C00C_{16}$; b) $A8F{,}B4_{16}$.

18. + **Nombres avec des lettres**
a) ACE_{16} ; b) $ABC{,}DEF_{16}$.

Du binaire à l'hexadécimal

Écrire dans le système hexadécimal les nombres suivants (exercices **19** à **21**).

19. + **Écriture condensée**
a) 10011_2 ; b) $110110{,}101_2$.
CORRIGÉ P. 169

20. + **Écriture condensée**
a) 1100101_2 ; b) $100011010{,}00111_2$.

21. + **Écriture condensée**
a) 1011011_2 ; b) $1001111100{,}1010101_2$.

De l'hexadécimal au décimal

Écrire dans le système décimal les nombres suivants (exercices **22** à **24**).

22. + **Des lettres aux chiffres**
a) BAC_{16} ; b) $DE{,}F31_{16}$.
CORRIGÉ P. 169

23. + **Des lettres aux chiffres**
a) $E1C2_{16}$; b) $7D0{,}3A_{16}$.

24. + **Des lettres aux chiffres**
a) $6BF_{16}$; b) $5C9{,}4D_{16}$.

Du décimal à l'hexadécimal

Écrire dans le système hexadécimal les nombres suivants (exercices **25** à **27**).

25. + **Des chiffres aux lettres**
a) 4 000 ; b) 3 840,289 062 5.
CORRIGÉ P. 169

26. + **Des chiffres aux chiffres**
a) 2 392 ; b) 2 199,437 5.

27. + **Des chiffres aux lettres**
a) 11 525 ; b) 6 926,796 875.

Additions en base 2

Effectuer dans le système binaire les additions suivantes et donner l'équivalent de ces additions dans le système décimal (exercices **28** à **30**).

28. ++ **Gérer les retenues**
a) $1100 + 101$; b) $101{,}01 + 11{,}101$.
CORRIGÉ P. 169

29. ++ **Gérer les retenues**
a) $10101 + 1100$; b) $1110{,}11 + 100{,}01$.

30. ++ **Gérer les retenues**
a) $110011 + 1010$; b) $10001{,}011 + 111{,}001$.

Additions en base 16

Effectuer dans le système hexadécimal les additions suivantes et donner l'équivalent de ces additions dans le système décimal (exercices **31** à **33**).

31. ++ **Des lettres et des retenues**
a) $A2C3 + D58$; b) $4B{,}6 + 0{,}A$.
CORRIGÉ P. 169

32. ++ **Des lettres et des retenues**
a) $897 + 798$; b) $AB{,}C + DE{,}F$.

33. ++ **Des lettres et des retenues**
a) $BAC + CAB$; b) $75{,}B09 + 19{,}197$.

Multiplications et divisions par une puissance de deux, en base 2

Effectuer dans le système binaire les multiplications et les divisions suivantes et donner l'équivalent de ces opérations dans le système décimal (exercices **34** à **36**).

34. + **Multiplication et division**
a) 101×100 ; b) $101{,}1 : 100$.
CORRIGÉ P. 169

35. + **Multiplication et division**
a) 1011×1000 ; b) $10{,}01 : 1000$.

36. + **Multiplication et division**
a) $11{,}11 \times 10$; b) $11{,}101 : 100$.

Arithmétique modulaire

Division euclidienne

37. + **Les chocolats**
Une boîte contient 41 chocolats identiques à répartir entre 8 enfants.
Le plus âgé propose de les répartir de façon égale entre les 7 autres enfants, lui prenant le reste.
1. Quelle est la part de chacun ?
2. Après vérification, la boîte contient 43 chocolats. L'enfant le plus âgé veut alors changer la règle de répartition. Pourquoi ?

Nombres premiers

38. ++ **Nombres premiers ?**
Déterminer si les nombres suivants sont premiers :
87 – 89 – 91.
CORRIGÉ P. 169

39. ++ **Nombres premiers ?**
Déterminer si les nombres suivants sont premiers :
457 – 459 – 461.

40. ++ **Nombres premiers ?**
Déterminer si les nombres suivants sont premiers :
337 – 447 – 557.

41. ++ **Liste de nombres premiers**
Déterminer les nombres premiers compris entre 100 et 150 à l'aide du crible d'Ératosthène, en cherchant à alléger la présentation.
CORRIGÉ P. 170

42. ++ **Liste de nombres premiers**
Même exercice que le précédent pour les nombres premiers entre 150 et 200.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer les nombres entiers suivants en produits de facteurs premiers (exercices **43** à **45**).

43. +
a) 450 ; b) 1 617.
CORRIGÉ P. 170

44. +
a) 605 ; b) 6 552.

45. +
a) 1 296 ; b) 2 431.

Déterminer la liste des diviseurs de chacun des nombres entiers suivants (exercices **46** à **48**).

46. +
a) 24 ; b) 60.
CORRIGÉ P. 170

47. +
a) 50 ; b) 90.

48. +
a) 28 ; b) 120.

49. ++ **Longueur et largeur**
Un rectangle a pour aire 12 m^2. Sa longueur L et sa largeur l sont des nombres entiers (en mètres).
1. Déterminer toutes les dimensions possibles de ce rectangle.
2. Même question en remplaçant 12 m^2 par :
a) 221 m^2 ; b) 311 m^2.

Recherche de PGCD par décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposer les nombres entiers m et n suivants en produits de facteurs premiers et en déduire leur PGCD (exercices **50** à **52**).

50. + **Décomposition**
a) $m = 15$ et $n = 24$; b) $m = 140$ et $n = 98$.
CORRIGÉ P. 170

51. + **Décomposition**
a) $m = 198$ et $n = 363$; b) $m = 180$ et $n = 225$.

52. + **Décomposition**
a) $m = 200$ et $n = 60$; b) $m = 1\,911$ et $n = 2\,366$.

Recherche de PGCD par l'algorithme des différences

Déterminer le PGCD des deux nombres entiers m et n suivants en mettant en œuvre l'algorithme des différences (exercices **53** à **55**).

53. ++ **Algorithme des différences**
a) $m = 1\,448$ et $n = 1\,086$; b) $m = 1\,788$ et $n = 2\,235$.
CORRIGÉ P. 170

54. ++ **Algorithme des différences**
a) $m = 580$ et $n = 348$; b) $m = 1\,926$ et $n = 2\,996$.

55. ++ **Algorithme des différences**
a) $m = 296$ et $n = 703$; b) $m = 1\,065$ et $n = 852$.

Recherche de PGCD par l'algorithme d'Euclide

Déterminer le PGCD des deux nombres entiers m et n suivants en mettant en œuvre l'algorithme des divisions euclidiennes (exercices **56** à **58**).

56. ++ **Algorithme d'Euclide**

a) $m = 1\,448$ et $n = 1\,086$; b) $m = 1\,788$ et $n = 2\,235$.

CORRIGÉ P. 170

57. ++ **Algorithme d'Euclide**

a) $m = 580$ et $n = 348$; b) $m = 1\,926$ et $n = 2\,996$.

58. ++ **Algorithme d'Euclide**

a) $m = 296$ et $n = 703$; b) $m = 1\,065$ et $n = 852$.

Exploitation du PGCD

59. +++ **Les dragées**

On veut répartir la totalité de 760 dragées au chocolat et de 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et aux amandes.

1. Peut-on faire 76 sachets ? Justifier la réponse.

2. a) Quel nombre maximum de sachets peut-on réaliser ?

b) Combien de dragées de chaque sorte y a-t-il alors dans chaque sachet ?

CORRIGÉ P. 171

60. +++ **Les étudiants sont sportifs**

Un lycée organise un tournoi sportif par équipe pour tous ses étudiants en BTS. Chaque équipe doit comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Les professeurs souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes. Il y a 210 filles et 294 garçons.

1. Quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut constituer ?

2. Combien y a-t-il alors de filles et de garçons dans chaque équipe ?

61. +++ **Découpe optimisée**

Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur.

Il a reçu la consigne suivante :

« *Découpe dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte.* »

1. Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier la réponse.

2. Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier la réponse.

3. On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.

a) Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

b) Combien y aura-t-il de carrés par plaques ?

Nombres entiers premiers entre eux

Déterminer si les deux entiers suivants sont premiers entre eux (exercices **62** à **64**).

62. +

a) $m = 45$ et $n = 93$; b) $m = 63$ et $n = 52$.

CORRIGÉ P. 171

63. +

a) $m = 77$ et $n = 87$; b) $m = 209$ et $n = 114$.

64. +

a) $m = 56$ et $n = 65$; b) $m = 1\,001$ et $n = 42$.

Congruences

Compléter les résultats suivants avec le plus petit entier naturel possible (exercices **65** à **67**).

65. +

a) $11 \equiv \ldots$ (modulo 2) ; b) $135 \equiv \ldots$ (modulo 11).

CORRIGÉ P. 171

66. +

a) $89 \equiv \ldots$ (modulo 7) ; b) $212 \equiv \ldots$ (modulo 5).

67. +

a) $75 \equiv \ldots$ (modulo 6) ; b) $311 \equiv \ldots$ (modulo 4).

68. ++

Démontrer que $47^{900} - 25^{900}$ est un multiple de 11.

CORRIGÉ P. 171

69. ++

Démontrer que $393^{500} \equiv 1 \pmod 7$.

70. ++

Déterminer le reste de la division de 142^{142} par 3.

71. +++ **Congruences et puissances**

1. a) Compléter le résultat suivant :

$2^3 \equiv \ldots$ (modulo 7).

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$2^{3n} \equiv 1$ (modulo 7).

2. a) Compléter le résultat suivant :

$2\,011 \equiv \ldots$ (modulo 7)

b) En déduire que $2\,011^{2012} \equiv 2^{2012}$ (modulo 7).

3. a) Écrire la division euclidienne de 2 012 par 3.

b) En déduire que $2^{2012} \equiv (2^3)^{670} \times 2^2$.

c) Déduire de ce qui précède que

$2\,011^{2012} \equiv 4 \pmod 7$

et donner le reste de la division euclidienne de $2\,011^{2012}$ par 7.

CORRIGÉ P. 171

72. +++ Congruences et puissances

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 9 de :
a) 7 ; **b)** $7^2 = 49$; **c)** $7^3 = 343$.

2. Exprimer les trois résultats précédents à l'aide de congruences.

3. En déduire que $7^4 \equiv 7$ (modulo 9), puis compléter et justifier les résultats suivants :
$7^5 \equiv \ldots$ (modulo 9) ; $7^6 \equiv \ldots$ (modulo 9) ;
$7^7 \equiv \ldots$ (modulo 9).
Dans la suite on admet que si $n \equiv 1$ (modulo 3), alors $7^n \equiv 7$ (modulo 9).

4. a) Démontrer que $2\,014 \equiv 7$ (modulo 9) et que $2\,014 \equiv 1$ (modulo 3).
b) Déduire de ce qui précède que $2014^{2014} \equiv 7$ (modulo 9).
c) Exprimer ce résultat par une phrase concernant le reste d'une division euclidienne à préciser.

73. +++ Congruences et puissances

1. a) Calculer $2\,009^2$.
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
c) Compléter le résultat suivant :
$2\,009^2 \equiv \ldots$ (modulo 16).

2. On rappelle que $2\,009^{8001} \equiv (2\,009^2)^{4000} \times 2009$.
Déduire de ce qui précède que :
$2\,009^{8001} \equiv 2\,009$ (modulo 16).

74. +++ Congruences et puissances

1. a) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 2012 par 6.
b) En déduire que $3^{2012} \equiv (3^6)^{335} \times 3^2$.

2. a) Compléter les résultats suivants :
$3^2 \equiv \ldots$ (modulo 7) et $3^6 \equiv \ldots$ (modulo 7).
b) Déduire de ce qui précède que $3^{2012} \equiv 2$ (modulo 7) et déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7.

75. +++ Algorithmes, division et codage ALGO

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        a est un entier naturel
                   b est un entier naturel
                   c est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à c la valeur 0
                   Demander la valeur de a
                   Demander la valeur de b
Traitement :       Tant que a ≥ b
                     | Affecter à c la valeur c + 1
                     | Affecter à a la valeur a – b
                   Fin de tant que
Sortie :           Afficher c
                   Afficher a
```

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. a) Écrire la division euclidienne de 13 par 4.
b) Qu'a permis de calculer cet algorithme ?

Dans la suite on admet que l'observation effectuée à la question **2.** dans le cas particulier où $a = 13$ et $b = 4$ reste valable pour tous entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

CORRIGÉ P. 171

76. ++ Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 : Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers (x_1, x_2) où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 : (x_1, x_2) est transformé en (y_1, y_2) tel que :

$$(S_1)\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \text{ (mod 26)} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \text{ (mod 26)} \end{cases}$$

avec $0 \leq y_1 \leq 25$ et $0 \leq y_2 \leq 25$.

Étape 3 : (y_1, y_2) est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape 1}}{\Rightarrow} (19, 4) \overset{\text{étape 2}}{\Rightarrow} (13, 19) \overset{\text{étape 3}}{\Rightarrow} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.

2. On admet que le système (S_1) est équivalent au système

$$(S_2)\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

Décoder le mot YJ.

77. ++ Codage et décodage

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.

On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « ★ », considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

• Premièrement : on associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc $a \to 0$, $b \to 1$,… $z \to 25$.

On associe au séparateur « ★ » le nombre 26.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	★
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1,…, z a pour rang 25 et le séparateur « ★ » a pour rang 26.

• Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.

On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

• Troisièmement : le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :

$s \to 18$, $g(18) = 21$ et $21 \to v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1. Coder :

a) le mot « *tu* »,

b) le mot « *es* »,

c) le début de phrase « *tu es* » constitué des deux mots « *tu* », « *es* » et du séparateur de mots.

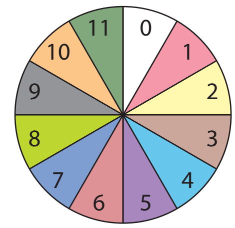
2. On admet que pour le décodage, on procède comme pour le codage en remplaçant la fonction g par la fonction f qui, à chaque élément y de E, associe le reste de la division euclidienne de $7y + 6$ par 27.

Décoder le mot « *vfv* ».

78. +++ Parcours d'une liste circulaire par sauts d'amplitude constante

Une puce, initialement placée sur la case 0 du plateau ci-contre, effectue des sauts successifs de p cases.

Dans le cas où $p = 1$, la puce va évidemment se poser successivement sur les 12 cases du plateau.



1. Dans le cas où $p = 2$, compléter le tableau suivant.

Saut n° k	1	2	3	4	5	6
Numéro m de la case atteinte						

Que se passe-t-il après le saut n° 6 ?

2. Dans le cas où $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$, $p = 6$, $p = 7$, compléter le tableau suivant en s'arrêtant dès que la puce revient à la case n° 0.

Saut n° k	1	2	…
Numéro m de la case atteinte avec $p = 3$			
Numéro m de la case atteinte avec $p = 4$			
…			

3. a) Pour quelles valeurs de p, avec $1 \leq p \leq 7$, la puce passe par toutes les cases du tableau ?

b) Déterminer PGCD $(12, p)$ pour chaque valeur de p comprise entre 1 et 7.

c) Que peut-on dire des nombres 12 et p, avec $1 \leq p \leq 7$, lorsque la puce passe par toutes les cases du plateau ?

4. On démontre, et on l'admet ici, que la propriété observée ci-dessus dans des cas particuliers est générale.

Compléter l'énoncé de cette propriété :

En parcourant une liste circulaire de n cases par sauts d'amplitude constante p, on passe par toutes les cases si et seulement si n et p sont…

Remarque

Dans le cas où $p = 5$, observer qu'à partir du troisième saut, le numéro m de chaque case occupée est tel que $5k \equiv m$ (modulo 12) : par exemple,
$5 \times 3 \equiv 3$ (modulo 12).
Il en est de même dans le cas où $p = 7$.

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS.

79. +++ QCM

Indiquer, pour chaque question, la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. $N = 101101_2$ dans le système binaire.
Dans le système décimal, N est égal à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
29	34	45

2. $N = \text{A7C}_{16}$ dans le système hexadécimal.
Dans le système décimal, N est égal à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
1 082	2 642	2 684

3. Dans le système binaire, la somme 110101 + 10011 est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
1000110	1001000	100100

80. +++ Souvenir de Polynésie

Un vendeur possède un stock de 120 flacons de parfum au tiaré et de 144 savonnettes au monoï.

Il veut écouler tout ce stock en confectionnant le plus grand nombre de coffrets « Souvenirs de Polynésie » de sorte que :

- le nombre de flacons de parfum au tiaré soit le même dans chaque coffret ;
- le nombre de savonnettes au monoï soit le même dans chaque coffret ;
- tous les flacons et savonnettes soient utilisés.

1. Déterminer le nombre de coffrets à préparer et la composition de chacun d'eux. Justifier la réponse.

2. Après vérification le vendeur constate qu'il n'a que 119 flacons de parfum au tiaré.

Reprendre la question **1** en remplaçant 120 par 119.

81. +++ Codage et décodage

Le but de cet exercice est l'étude d'un procédé de cryptage des lettres majuscules de l'alphabet français. Chacune des 26 lettres est associée à l'un des entiers de 0 à 25, selon le tableau de correspondance suivant.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le cryptage se fait à l'aide d'une clé, qui est un nombre entier k fixé, compris entre 0 et 25.

Pour crypter une lettre donnée :
– on repère le nombre x associé à la lettre, dans le tableau de correspondance précédent ;
– on multiplie ce nombre x par la clé k ;
– on détermine le reste r de la division euclidienne de $k \times x$ par 26 ;
– on repère la lettre associée au nombre r dans le tableau de correspondance ; c'est la lettre cryptée.

Par exemple, pour crypter la lettre « R » avec la clé $k = 5$:
– le nombre x associé à la lettre « R » est le nombre 17 ;
– on multiplie 17 par la clé k ce qui donne $5 \times 17 = 85$;
– on détermine le reste de 85 dans la division par 26 : on trouve 7 ;
– on repère enfin la lettre associée à 7 dans le tableau : c'est « H ».

Ainsi, avec la clé $k = 5$, la lettre « R » est cryptée en la lettre « H ».

On crypte un mot en cryptant chacune des lettres de ce mot.

Partie A – *Cryptage d'un mot avec la clé $k = 5$*

Dans cette partie, la clé de cryptage est $k = 5$. Le but de cette partie est de crypter le mot « BTS ».

1. Déterminer en quelle lettre est cryptée la lettre « S ». On détaillera les différentes étapes du processus de cryptage.

2. Crypter le mot « BTS ». On ne demande pas le détail du cryptage.

Partie B – *Décryptage avec la clé $k = 5$*

Dans cette partie, la clé de cryptage est toujours $k = 5$.

Le but de cette partie est de retrouver une lettre initiale connaissant la lettre cryptée.

1. Prouver que $21 \times 5 \equiv 1$ modulo 26.

2. Une lettre associée à un nombre x a été cryptée. Le nombre associé à la lettre cryptée est noté y.

a) Justifier que $5 \times x \equiv y$ modulo 26.

b) Montrer que $21 \times y \equiv x$ modulo 26.

Ces propriétés montrent que pour décrypter une lettre codée y avec la clé $k = 5$, il suffit de crypter cette lettre avec la clé de cryptage $k' = 21$.

Exemple : si une lettre est codée par $y = 12$ on multiplie 12 par 21 et on prend le reste du résultat dans la division euclidienne par 26 ; on obtient $x = 18$. Donc la lettre de départ est S.

3. Utiliser les résultats précédents pour décrypter le mot « WGA ».

CHAPITRE 4

Algèbre de Boole Éléments de la théorie des ensembles Graphes et ordonnancement

L'objectif des différentes parties de ce chapitre est de favoriser les liaisons avec l'informatique en mettant en œuvre des algorithmes.

COURS

1 Calcul des propositions et des prédicats

En informatique, on est amené à considérer un langage formel ou un système formel constitué notamment d'un alphabet (un ensemble de symboles) et d'un ensemble de règles de formation de formules et de preuves constituées à partir de cet alphabet.

On est alors conduit à introduire des propositions et des prédicats.

A. Calcul propositionnel

Proposition

Exemples

Considérons les trois énoncés suivants A, B, C concernant des nombres entiers.

$A : 2^{10} = 1\,024$.

$B : 5 < 4$.

C : 3 est un nombre impair.

Le contenu de A est vrai, celui de B est faux et celui de C est vrai. A, B, C sont trois exemples de **propositions** d'arithmétique.

Les chiffres permettent d'écrire des nombres comportant éventuellement un exposant.

Remarques

- Les deux propositions A, B sont constituées de symboles (chiffres, =, <) appartenant à l'alphabet utilisé en arithmétique.
En revanche, la proposition C comporte le chiffre 3 et des mots de la langue française ; nous verrons au paragraphe **B** ci-dessous qu'il s'agit de la traduction, en français, d'une suite de symboles appartenant à l'alphabet utilisé en arithmétique.
- Tout assemblage de symboles d'un alphabet n'a pas nécessairement de sens dans une théorie donnée ; par exemple $\sqrt{-1}$ n'est pas défini dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement nous pouvons retenir deux aspects d'une **proposition**.

En informatique, on note généralement 1 pour V et 0 pour F : c'est cette notation qui est privilégiée dans la suite.

À RETENIR

Une **proposition** a un sens dans la théorie où l'on se place.
À toute proposition on peut associer une valeur de vérité, soit vrai (noté V ou 1), soit faux (noté F ou 0).

Nous écartons de cette brève étude, d'une part, le cas d'une proposition indécidable, c'est-à-dire ni vraie ni fausse dans la théorie considérée et, d'autre part, le cas d'une proposition à la fois vraie et fausse, ce qui rendrait la théorie contradictoire.

Remarque

En mathématiques, sauf exception, on n'écrit que des propositions vraies ; lorsqu'on est amené à considérer une proposition fausse, on le précise.

Négation

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

À partir de la proposition $A : 2^{10} = 1\,024$ dont la valeur de vérité est V (ou 1), on peut définir la nouvelle proposition $2^{10} \neq 1\,024$ dont la valeur de vérité est F ou 0.

On remplace = par ≠.

On remplace < par ≥.

On met la phrase entre guillemets à la forme négative.

De même, à partir de la proposition $B : 5 < 4$ dont la valeur de vérité est F ou 0, on peut définir la nouvelle proposition $5 \geq 4$ dont la valeur de vérité est V ou 1.

Enfin, à partir de la proposition C : « 3 est un nombre impair » dont la valeur de vérité est V ou 1, on peut définir la nouvelle proposition « 3 n'est pas un nombre impair » dont la valeur de vérité est F ou 0.

Plus généralement on peut procéder de même.

$\neg P$ se lit « non P ».
$\neg P$ se note aussi, soit non P, soit $\overline{P}$.
Les valeurs de vérité de P et de $\neg P$ sont toujours différentes.

À RETENIR

À toute proposition P, on peut associer une nouvelle proposition, notée $\neg P$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.
$\neg P$ est la **négation** de P.
$\neg$ est le **connecteur négation**.

P	$\neg P$
1	0
0	1

Observez que pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de démontrer que sa négation est vraie.

Remarque
La négation est un **connecteur unaire** car il agit sur une seule proposition.
On peut définir des **connecteurs binaires** qui associent à deux propositions une nouvelle proposition.
Nous allons introduire, à l'aide de tables de vérité, les connecteurs binaires les plus usuels.

Conjonction

$P \wedge Q$ se lit « P et Q ».
$P \wedge Q$ se note aussi P et Q.
$P \wedge Q$ est vrai dans le seul cas où P est vrai et où Q est vrai.

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), la **conjonction** associe la proposition, notée $P \wedge Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

$A \wedge B : 2^{10} = 1\,024$ et $5 < 4$.
C'est une proposition fausse car B est faux.

Voir la deuxième ligne de la table.

$A \wedge C : 2^{10} = 1\,024$ et 3 est un nombre impair.
C'est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Voir la première ligne de la table.

Remarque
En français le mot *et* exprime parfois une succession d'événements dans le temps : il peut alors être remplacé par *puis*.
C'est le cas, par exemple, dans la phrase « Entre et ferme la porte ! ».
Cette extension du sens du mot *et* ne figure pas dans la table de vérité définissant le connecteur $\wedge$ intervenant en logique mathématique et en informatique.

Disjonction

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \vee Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$P \vee Q$ se lit « P ou Q ».

$P \vee Q$ se note aussi P ou Q.

$P \vee Q$ est faux dans le seul cas où P est faux et où Q est faux.

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

A ∨ B : $2^{10} = 1\,024$ ou $5 < 4$.

C'est une proposition vraie car A est vrai.

A ∨ C : $2^{10} = 1\,024$ ou 3 est un nombre impair.

C'est une proposition vraie

Voir la deuxième ligne de la table.

Voir la première ligne de la table.

Remarque

En français le mot *ou* a deux sens, selon qu'il est exclusif ou inclusif.

- Ainsi lorsque, sur un menu, vous lisez « fromage *ou* dessert », le *ou* est **exclusif** car « vous avez droit à un fromage » *ou* « vous avez droit à un dessert », mais vous n'avez pas droit aux deux.

Le *ou* utilisé dans ce cas ne correspond pas à ∨ à cause de la première ligne de la table de vérité car, avec ce *ou*, P *ou* Q est faux alors que P ∨ Q est vrai.

- En revanche, dans le célèbre conseil donné aux jardiniers « Qu'il pleuve ou qu'il vente, arrose quand tu plantes »,

le *ou* est inclusif car il est conseillé d'arroser soit quand il pleut, soit quand il fait du vent, mais aussi lorsqu'il y a à la fois de la pluie et du vent.

C'est ce **ou inclusif** qui correspond à ∨.

Essayez si vous n'êtes pas convaincu(e) !

Nous reviendrons à l'exercice **21** sur le ou exclusif, appelé xor pour eXclusive OR.

Voir la première ligne de la table.

Implication

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), l'**implication** associe la proposition, notée $P \Rightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q ».

$P \Rightarrow Q$ se note aussi $P \rightarrow Q$; en mathématiques, c'est la notation $P \Rightarrow Q$ qui est utilisée.

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

- A ⇒ B : $2^{10} = 1\,024 \Rightarrow 5 < 4$.
  A ⇒ B est une proposition fausse car A est vrai et B est faux.
- A ⇒ C : $2^{10} = 1\,024 \Rightarrow$ (3 est un nombre impair).
  A ⇒ C est une proposition vraie car A est vrai et B est vrai.

Voir la deuxième ligne de la table.

Voir la première ligne de la table.

Il ne faut cependant pas chercher un lien de cause à effet entre le fait que 2^{10} soit égal à 1 024 et le fait que 3 est un nombre impair.

Ici on a introduit l'implication indépendamment du contenu des propositions situées de part et d'autre du symbole ⇒.

En mathématiques, l'usage le plus fréquent de l'implication correspond à la première ligne de la table de vérité : on a P vrai et on démontre que $P \Rightarrow Q$ est vrai,

Il s'agit des raisonnements du type « **si *P*, alors *Q*** », où P est l'hypothèse et Q la conclusion.

le plus souvent en utilisant des théorèmes ; on peut alors en déduire que Q est vrai.

- $B \Rightarrow A : 5 < 4 \Rightarrow 2^{10} = 1\,024$.
  $B \Rightarrow A$ est une proposition vraie car B est faux et A est vrai.

Voir la troisième ligne de la table.

Le fait que $P \Rightarrow Q$ soit vrai lorsque P est faux peut surprendre ; il s'agit ici d'une nécessité pour éviter de rendre une théorie contradictoire. En mathématiques, la principale utilisation de ce cas se situe dans le raisonnement par l'absurde.

Équivalence

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), l'**équivalence** associe la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » ou « P est équivalent à Q ».

$P \Leftrightarrow Q$ se note aussi $P \leftrightarrow Q$; en mathématiques c'est la notation $P \Leftrightarrow Q$ qui est utilisée.

On rencontre aussi parfois la notation $P \equiv Q$ mais celle-ci a une autre signification en mathématiques.

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie dans les seuls cas où les propositions P, Q ont même valeur de vérité (soit V ou 1, soit F ou 0).

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

$A \Leftrightarrow B : 2^{10} = 1\,024 \Leftrightarrow 5 < 4$.

$A \Leftrightarrow B$ est une proposition fausse car A est vrai et B est faux.

Voir la deuxième ligne de la table.

$A \Leftrightarrow C : 2^{10} = 1\,024 \Leftrightarrow$ (3 est un nombre impair).

$A \Leftrightarrow C$ est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Voir la première ligne de la table.

Ici, comme pour l'implication, il ne faut pas chercher de lien entre les contenus des propositions A et C.

Premières propriétés des connecteurs

- ***Commutativité de $\vee$ et $\wedge$***

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q,

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,$$
$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P.$$

Il s'agit des équivalences
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
dont on a allégé l'écriture.

Il suffit d'observer que permuter l'ordre des propositions P, Q dans $P \vee Q$ revient à permuter la deuxième ligne et la troisième ligne de la table de vérité de $\vee$, ce qui ne change rien pour la colonne de droite.

Les propositions $P \vee Q$, $Q \vee P$ ont donc même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La démonstration est analogue avec $\wedge$.

- ***Double distributivité***

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q, R,

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$
$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Ici aussi il s'agit d'équivalences entre propositions dont l'écriture a été allégée.

Pensez à
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
avec des nombres réels.

Pour démontrer la première équivalence, nous allons construire dans un même tableau la table de vérité des propositions situées de part et d'autre du signe $\Leftrightarrow$.

Avec trois propositions P, Q, R, il y a huit cas à considérer ($2^3 = 8$).

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Nous remarquons que, dans chacun des huit cas, les deux propositions $P \vee (Q \wedge R)$, $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ ont même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La seconde équivalence peut se démontrer de la même façon.

• ***Élément neutre***

Soit P une proposition quelconque ; considérons les deux propositions $P \Leftrightarrow P$, $P \Leftrightarrow (\neg P)$.

$P \Leftrightarrow P$ est une proposition toujours vraie, car quelle que soit la valeur de vérité de P, P a évidemment même valeur de vérité que P.

$P \Leftrightarrow (\neg P)$ est une proposition toujours fausse, car quelle que soit la valeur de vérité de P, P d'une part et $\neg P$ d'autre part ont des valeurs de vérité différentes par définition de la négation.

$\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ existent d'après ci-dessus.

$\mathcal{V}$ est appelé une **tautologie**.

PROPRIÉTÉS

Soit $\mathcal{V}$ une proposition toujours vraie et soit $\mathcal{F}$ une proposition toujours fausse.

Pour toute proposition P, $\qquad P \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow P$, $\qquad P \wedge \mathcal{V} \Leftrightarrow P$.

P	$\mathcal{F}$	$P \vee \mathcal{F}$	
1	0	1	d'après la deuxième ligne de la table de vérité de $\vee$.
0	0	0	d'après la quatrième ligne de la table de vérité de $\vee$.

P	$\mathcal{V}$	$P \wedge \mathcal{V}$	
1	1	1	d'après la première ligne de la table de vérité de $\wedge$.
0	1	0	d'après la troisième ligne de la table de vérité de $\wedge$.

• ***Tiers exclu et non contradiction***

PROPRIÉTÉS

Pour toute proposition P,
$P \vee (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{V}$,
$P \wedge (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{F}$,
où $\mathcal{V}$ est une proposition toujours vraie et $\mathcal{F}$ une proposition toujours fausse.

P	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
1	0	1
0	1	1

d'après la table de vérité de $\neg$ et les lignes 2 et 3 de la table de vérité de $\vee$.

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$
1	0	0
0	1	0

d'après la table de vérité de $\neg$ et les lignes 2 et 3 de la table de vérité de $\wedge$.

Nous reviendrons sur ces quatre premières propriétés des connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ dans les parties **2** et **3**.

• ***Implication et équivalence***

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q),$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ est la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

On utilise les tables de vérité de $\Rightarrow$, $\neg$, $\vee$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

On utilise les tables de vérité de $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\wedge$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

La première équivalence ci-dessus permet de définir l'implication à partir des deux connecteurs $\neg$, $\vee$.

L'implication **réciproque** de P $\Rightarrow$ Q est Q $\Rightarrow$ P.

La deuxième équivalence justifie qu'en mathématiques on démontre certaines équivalences par double implication : théorème direct et réciproque.

L'ensemble de ces deux équivalences permet aussi de définir l'équivalence à partir des connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

La troisième équivalence sera utilisée au paragraphe **4C** en remarque sur l'injection.

D'autres propriétés des connecteurs sont énoncées et démontrées dans la partie **3** et en exercice.

B. Calcul des prédicats

Variable, constante

Exemples

C'est la proposition B du paragraphe **A**.

- Dans la proposition $5 < 4$, les deux nombres situés de part et d'autre du symbole $<$ sont des **constantes**.

  En mathématiques on rencontre des expressions du type $x < 4$; ici x peut varier, par exemple dans $\mathbb{R}$.

  Pour $x = 5$, $x < 4$ s'écrit $5 < 4$; c'est une proposition dont la valeur de vérité est F ou 0.

Pour $x = 0$, $x < 4$ s'écrit $0 < 4$; c'est une proposition dont la valeur de vérité est V ou 1.

Plus généralement, pour toute valeur numériquement fixée de x, $x < 4$ devient une proposition dont la valeur de vérité est V si la valeur de x appartient à $]-\infty, 4[$ et F si celle-ci appartient à $[4, +\infty[$.

On note $p(x)$ une expression telle que $x < 4$ dans laquelle figure une **variable** x.

À toute valeur numérique de x choisie dans $\mathbb{R}$, le **prédicat *p* à une variable** associe la proposition obtenue en remplaçant dans $p(x)$, x par sa valeur numérique.

Dans le cas où $p(x)$ est $x < 4$, p associe à 5 la proposition $5 < 4$; donc $p(5)$ est faux.

p associe à 0 la proposition $0 < 4$; donc $p(0)$ est vrai.

Un prédicat est parfois appelé **fonction propositionnelle**.

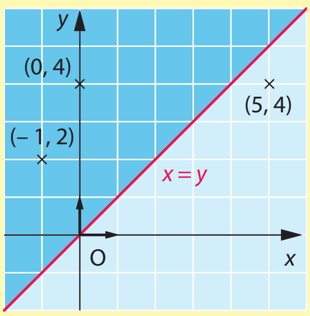


Figure 1

- Avec $x < y$, où x et y sont tous deux variables dans $\mathbb{R}$, on peut de même définir un **prédicat *q* à deux variables**.

Dans ce cas $q(x, y)$ est $x < y$.

Pour $x = 5$ et $y = 4$, $q(5, 4)$ est $5 < 4$ qui est faux.

Pour $x = 0$ et $y = 4$, $q(0, 4)$ est $0 < 4$ qui est vrai.

Pour $x = -1$ et $y = 2$, $q(-1, 2)$ est $-1 < 2$ qui est vrai.

Plus généralement, $q(x, y)$ est une proposition vraie lorsque le couple (x, y) appartient au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation graphique est coloriée en bleu foncé sur la figure 1.

On peut de même définir un prédicat à trois variables.

Quantificateurs

Exemples

Voir le début du paragraphe **B**.

Dans le cas où $p(x)$ est $x < 4$, où x est variable dans $\mathbb{R}$, nous pouvons définir deux nouvelles propositions.

Proposition 1

« Il existe x tel que $x < 4$ (soit vrai) ».

Ceci s'écrit à l'aide du symbole $\exists$ appelé **quantificateur existentiel** :

$$\exists x, \quad x < 4.$$

$\exists$ se lit « il existe » ; c'est un E inversé. La virgule se lit « tel que ».

En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs et on écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x < 4.$$

$\exists$ correspond à « il existe **au moins** un ».

Cette proposition est vraie car, par exemple, 0 convient comme valeur de x.

2, – 1, … conviennent aussi.

Proposition 2

« Pour tout x, (on a) $x < 4$ ».

Ceci s'écrit à l'aide du symbole $\forall$ appelé **quantificateur universel** :

$$\forall x, \quad x < 4.$$

$\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit » ; c'est un A inversé, première lettre du mot anglais *all*. La virgule se lit « on a ».

En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs et on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 4.$$

Cette proposition est fausse car, par exemple pour $x = 5$, $5 < 4$ est faux.

Voir le début du paragraphe **B**.

- Plus généralement, p étant un **prédicat à une variable**, on peut définir les deux propositions suivantes :

$$\exists \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}).$$

Dans ces écritures, x est une variable **muette** : elle peut être remplacée par une autre lettre, par exemple k comme dans l'exemple ci-après introduit au début du paragraphe **A**.

Observez que la proposition C « 3 est un nombre impair » peut s'écrire

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad 3 = 2k + 1.$$

Elle est vraie car $k = 1$ convient.

• Avec un **prédicat à deux variables** on peut, de même, définir de nouvelles propositions.

Voir le début du paragraphe **B**.

Par exemple, lorsque $p(x, y)$ est $x < y$ où x et y sont des variables réelles, nous pouvons notamment définir les propositions suivantes :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Cette proposition est vraie car $x = 0$ et $y = 1$ conviennent.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

En revanche $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \; x \leq y$ est une proposition vraie : $x = 0$ convient.

Cette proposition est fausse car, pour $x = 3$ et $y = 2$, la proposition $3 < 2$ est fausse.

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

C'est une proposition fausse car, dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre strictement inférieur à tous les nombres.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Par exemple, pour $x = -2$, $y = 3$ convient ;
pour $x = 0$, $y = 1$ convient ;
pour $x = 1$, $y = 2$ convient.

C'est une proposition vraie car, pour tout nombre réel x,
$y = |x| + 1$ est tel que $x < y$ puisque $x \leq |x|$, donc $x < |x| + 1$.

Remarques

Voir ci-dessus.

1. Permutons l'ordre des quantificateurs dans la proposition fausse

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Nous obtenons :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Par exemple, pour $y = 1$, $x = -2$ convient ;
pour $y = 0$, $x = -1$ convient ;
pour $y = -2$, $x = -3$ convient.

Cette proposition est vraie car, pour tout nombre réel y,
$x = -|y| - 1$ est tel que $x < y$ puisque $-|y| \leq y$, donc $|-y| - 1 < y$.

Ainsi en modifiant l'ordre des deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$, nous sommes passés, dans cet exemple, d'une proposition fausse à une proposition vraie.

Attention !

Dans une proposition comportant deux quantificateurs différents, ne pas modifier l'ordre des quantificateurs.

Ici l'étude d'un exemple suffit.

2. En mathématiques, pour démontrer qu'une proposition commençant par $\exists x \in E$ est vraie, il suffit de trouver un élément de E qui convient.

Ici l'étude de quelques cas particuliers ne suffit pas.

Pour démontrer qu'une proposition commençant par $\forall x \in E$ est vraie, on doit considérer un élément quelconque de E.

Négation d'une proposition commençant par un quantificateur

Exemple

Reprenons la proposition $\exists x \in \mathbb{R} \quad x < 4$.

C'est la **proposition 1** ci-dessus.

Elle est vraie ; sa négation est donc fausse.

$\exists x \in \mathbb{R} \quad x \geq 4$ est une proposition vraie car $x = 5$ convient.

Donc $\exists x \in \mathbb{R} \quad x \geq 4$ **n'est pas** la négation de $\exists x \in \mathbb{R} \; x < 4$.

Or « il n'existe pas de nombre réel strictement inférieur à 4 » signifie que « tous les nombres réels sont supérieurs (ou égaux) à 4 ».

La négation de $\exists x \in \mathbb{R} \; x < 4$ est donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 4$.

Un tel résultat est général.

La négation d'une proposition commençant par $\exists$ est une proposition commençant par $\forall$.

PROPRIÉTÉ

La **négation** de $\exists x, p(x)$ est $\forall x, \neg p(x)$.

De même soit la proposition $\forall x, p(x)$.

Elle signifie que tous les éléments x sont tels que $p(x)$ est vrai.

Un tel x s'appelle un **contre-exemple** pour $p(x)$.

Sa négation signifie qu'au moins un des éléments x n'est pas tel que $p(x)$ est vrai.

Cela peut se traduire encore de la façon suivante :
« il existe au moins un x tel que $p(x)$ est faux »
c'est-à-dire :
« il existe au moins un x tel que $\neg p(x)$ est vrai »
qui s'écrit avec des symboles de logique

$$\exists x,\ \neg p(x).$$

La négation d'une proposition commençant par $\forall$ est une proposition commençant par $\exists$.

PROPRIÉTÉ

La **négation** de $\forall x, p(x)$ est $\exists x, \neg p(x)$.

2 Langage ensembliste

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Vous avez déjà utilisé le langage ensembliste, notamment en probabilités.

Vous savez notamment qu'un ensemble peut être déterminé par la liste de ses éléments ou par une propriété caractéristique.

Dans cette écriture, x est une variable **muette**, c'est-à-dire qu'on peut remplacer x par n'importe quel autre nom de la variable :
$]-\infty, 4[= \{y ; y < 4\}$,
$]-\infty, 4[= \{t ; t < 4\}$.

Ainsi dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, 4[= \{x ; x < 4\}$.

0 est un élément de $]-\infty, 4[$; on note $0 \in\ ]-\infty, 4[$, où $\in$ se lit « appartient à ».

4 n'est pas un élément de $]-\infty, 4[$; on note $4 \notin\ ]-\infty, 4[$, où $\notin$ se lit « n'appartient pas à ».

$4 \notin\ ]-\infty, 4[$ est la négation de $4 \in\ ]-\infty, 4[$.

Voir le paragraphe **1B**.

L'écriture $\{x ; x < 4\}$ est de la forme $\{x ; p(x)\}$ où $p(x)$ est défini à partir d'un prédicat à une variable.

Voir le paragraphe **1A**.

Nous allons ainsi pouvoir déduire des propriétés des propositions certaines propriétés des ensembles.

A. Rappels et compléments

Dans tout ce paragraphe, E est un ensemble.

Inclusion

D'après la table de vérité de $\Rightarrow$ (voir **1A**), $A \subset E$ signifie que tout élément de A appartient à E.

DÉFINITION

Un ensemble A est **inclus** dans E si et seulement si

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E.$$

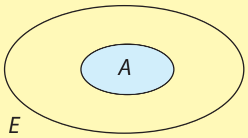


Figure 2

Un tel dessin d'ensembles s'appelle un diagramme de Venn.

Notation

$A \subset E$, ce qui se lit « A est inclus dans E ».

Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un **sous-ensemble** de E ou une partie de E.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples

- $E \subset E$ car $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in E$.
- $\varnothing \subset E$ car $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$.

En effet $x \in \varnothing$ est toujours faux, donc l'implication est toujours vraie d'après les deux dernières lignes de la table de vérité de $\Rightarrow$ (voir 1A).

- $E = \{a, b, c\}$. Alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E\}$.

> $\varnothing$ est l'**ensemble vide** ; il n'a pas d'élément.

> Les ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ qui ont chacun un seul élément sont appelés des **singletons**.

> Voir la fin du paragraphe 1A.

Remarques

1. $E = F$ si et seulement si $\forall x,\ x \in E \Leftrightarrow x \in F$.
Or nous avons vu le lien suivant entre équivalence et implication :

$$(\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow ((\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P})).$$

Donc $E = F$ si et seulement si

$$\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in F) \wedge (x \in F \Rightarrow x \in E)$$

ce qui se traduit par les deux inclusions :

$$E \subset F \wedge F \subset E.$$

Donc $\boldsymbol{E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)}$.

> Deux ensembles sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre.

2. Il convient de distinguer :
- le symbole d'appartenance $\in$ du symbole d'inclusion $\subset$,
- un élément x de l'ensemble $\{x\}$,
- l'ensemble E de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

> $\{x\}$ est un ensemble dont le seul élément est x ; c'est un **singleton**.

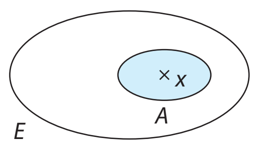


Figure 3

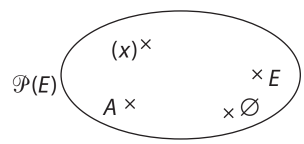


Figure 4

$x \in A$, $x \in E$,
$A \subset E$, $\{x\} \subset E$,
$E \subset E$, $\varnothing \subset E$.

$\{x\} \in \mathcal{P}(E)$,
$A \in \mathcal{P}(E)$,
$E \in \mathcal{P}(E)$, $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

> **Attention :** $x \notin \mathcal{P}(E)$.
> **Attention :** $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide ; c'est l'ensemble qui a pour seul élément l'ensemble vide.

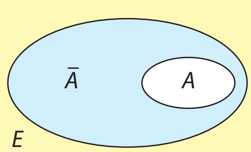
Complémentaire d'une partie

DÉFINITION

Soit A une partie de E.

Le complémentaire de A par rapport à E est l'ensemble

$$\{x \in E\ ;\ x \notin A\},\ \text{noté } \complement_E A \text{ ou } \bar{A}.$$



$A \in \mathcal{P}(E)$.

Figure 5

$\bar{A}$ est une partie de E ; donc $\bar{A} \in \mathcal{P}(E)$.

Exemples

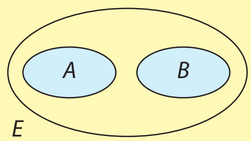
- $\bar{\varnothing} = E$ car tous les éléments x de E sont tels que $x \notin \varnothing$ puisque $\varnothing$ n'a pas d'élément.
- $\bar{E} = \varnothing$ car $\bar{E} = \{x \in E\ ; x \notin E\}$; cet ensemble n'a pas d'élément.
- $E = \{a, b, c\}$ et $A = \{a, b\}$. Alors $\bar{A} = \{c\}$.

> $\bar{\varnothing} = \{x \in E\ ; x \notin \varnothing\}$.

Intersection et réunion de deux parties

$A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à A **ou** à B (ou inclusif).

$A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à A **et** à B.



A et B **disjoints**

Figure 8

DÉFINITION

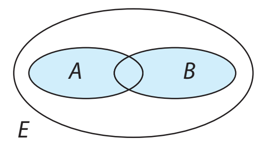
Soient A et B des parties de E.

L'union (ou la réunion) de A et B est l'ensemble

$$\{x \in E\,;\, x \in A \vee x \in B\},\ \text{noté } A \cup B.$$

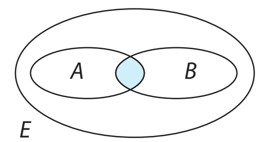
L'intersection de A et B est l'ensemble

$$\{x \in E\,;\, x \in A \wedge x \in B\},\ \text{noté } A \cap B.$$



$A \cup B$

Figure 6



$A \cap B$

Figure 7

DÉFINITION

Deux parties A et B de E sont **disjointes** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

B. Liaison entre logique et théorie des ensembles

Nous observons la correspondance suivante entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles.

$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$=$	$\subset$	$\overline{}$	$\cup$	$\cap$	E	$\varnothing$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés énoncées au paragraphe **1A**.

- **Commutativité de $\cup$ et $\cap$**

Pour toutes parties A et B de E,

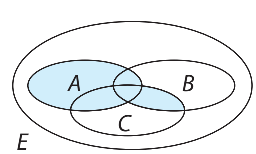
$$A \cup B = B \cap A$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

- **Double distributivité**

Pensez à $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ avec des nombres réels.

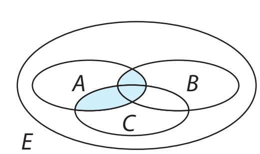
Pour toutes parties A, B et C de E,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) > (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Figure 9



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Figure 10

- **Élément neutre**

Pour toute partie A de E,

$$A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap E = A.$$

• Complément

Pour toute partie A de E,
$$A \cup \overline{A} = E,$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

D'autres propriétés sont énoncées et démontrées dans la partie **3** et en exercice.

3 Calcul booléen

Voir le paragraphe **2B**.

Reprenons la correspondance que nous avons observée entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles.

$\Leftrightarrow$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\mathscr{V}$	$\mathscr{F}$
$=$	$\overline{}$	$\cup$	$\cap$	E	$\varnothing$

Voir le paragraphe **1A** et **2B**.

La notion d'algèbre de Boole a été introduite en 1847 par deux mathématiciens et logiciens anglais : **George Boole** et **Augustus de Morgan**.

Pour les propositions d'une théorie et pour l'ensemble des parties d'un ensemble E, nous avons dégagé quatre mêmes types de propriétés.

Il s'agit de deux cas particuliers d'une structure appelée **algèbre de Boole**.

A. Définition

$\forall (a, b) \in B^2, a + b \in B$.
$\forall (a, b) \in B^2, ab \in B$.
$\forall a \in B, \overline{a} \in$ B.

En automatique, $a + b$ est lu « a ou b ».

$B_{1.1.}$ est la commutativité de l'addition.

$B_{2.1.}$ est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

0 est l'élément nul.
1 est l'élément unité.

$\overline{a}$ est le complément de a.

DÉFINITION

Un ensemble B (non vide) muni de deux lois de composition interne (notées additivement et multiplicativement), d'une opération unaire (notée $a \mapsto \overline{a}$) et possédant deux éléments privilégiés (notés 0 et 1) a **une structure d'algèbre de Boole** si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies :

$B_{1.1}$	$\forall (a, b) \in B^2$	$\boldsymbol{a + b = b + a}$,
$B_{1.2}$	$\forall (a, b) \in B^2$	$\boldsymbol{ab = ba}$;
$B_{2.1}$	$\forall (a, b, c) \in B^3$	$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$,
$B_{2.2}$	$\forall (a, b, c) \in B^3$	$\boldsymbol{a + bc = (a + b)\,(a + c)}$;
$B_{3.1}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a + 0 = a}$,
$B_{3.2}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a1 = a}$;
$B_{4.1}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a + \overline{a} = 1}$,
$B_{4.2}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a\overline{a} = 0}$.

Exemples

- L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble non vide E, muni des deux lois de composition interne $\cup$ et $\cap$, de l'opération unaire $A \mapsto \overline{A}$, avec pour éléments privilégiés $\varnothing$ et E, a une structure d'algèbre de Boole.
- L'ensemble des propositions d'une théorie, muni des deux connecteurs binaires $\vee$ et $\wedge$, du connecteur unaire $\neg$ de deux propositions $\mathscr{F}$ et $\mathscr{V}$ où $\mathscr{V}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ sont des tautologies, a une structure d'algèbre de Boole lorsqu'on remplace $=$ par $\Leftrightarrow$.
- L'ensemble $B = \{0, 1\}$ muni de l'addition booléenne et de la multiplication booléenne dont les tables sont données ci-après, de l'opération unaire définie par $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$, a une structure d'algèbre de Boole.

Par définition, une algèbre de Boole a au moins les deux éléments 0 et 1.

Attention : $1 + 1 = 1$ pour l'addition booléenne.

Pour les propriétés $B_{2.1}$ et $B_{2.2}$, on peut dresser une table avec les valeurs possibles de a, b et c.

	0	1
0	0	1
1	1	1

Table de l'**addition booléenne**

	0	1
0	0	0
1	0	1

Table de la **multiplication booléenne**

Cet exemple joue un rôle fondamental en automatique et en informatique car il permet de modéliser un circuit électrique avec **l'état 1** pour **le passage d'un courant de tension suffisante** et **l'état 0 dans le cas contraire**.

L'addition booléenne correspond alors au montage en parallèle et la multiplication booléenne au montage en série.

Remarques

- Dans la définition d'une algèbre de Boole nous avons adopté les conventions habituelles de priorité entre les opérations :
l'opération unaire $\bar{\ }$ a priorité sur la multiplication qui a, elle-même, priorité sur l'addition.
Ainsi $a + bc$ signifie $a + (bc)$.
- Pour les propriétés $B_{1.1}$, $B_{1.2}$, $B_{2.1}$, $B_{3.1}$, $B_{3.2}$, il y a une analogie complète avec le calcul algébrique portant sur les nombres réels.
Mais ceci n'est pas le cas pour la propriété $B_{2.2}$ qui est la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication :
$$\forall (a, b, c) \in B^3 \qquad a + bc = (a + b)(a + c).$$
- Dans la définition d'une algèbre de Boole, on observe que les propriétés $B_{1.2}$, $B_{2.2}$, $B_{3.2}$ et $B_{4.2}$ sont obtenues en permutant, d'une part, l'addition et la multiplication et, d'autre part, 0 et 1 respectivement dans $B_{1.1}$, $B_{2.1}$, $B_{3.1}$ et $B_{4.2}$.
Nous en déduisons que **dès qu'un résultat est établi comme conséquence de ces propriétés, le résultat dual est démontré**.

On commence par la multiplication !

ATTENTION !
Ce résultat est faux si on remplace B par $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles sur les nombres réels.

Chaque $B_{i.2}$ est la propriété **duale** de $B_{i.1}$, où i varie de 1 à 4.

C'est le **principe de dualité**.

B. Propriétés

Dans tout ce paragraphe, l'ensemble B est muni d'une structure d'algèbre de Boole.

Idempotence

PROPRIÉTÉS

$B_{5.1}$ $\quad \forall a \in B \quad \boldsymbol{a + a = a},$

$B_{5.2}$ $\quad \forall a \in B \quad \boldsymbol{aa = a}.$

Les propriétés $B_{5.1}$ et $B_{5.2}$ étant duales, il suffit de démontrer $B_{5.2}$.

Soit a un élément quelconque de B.

$a = a1$ d'après $B_{3.2}$,
donc $a = a\,(a + \bar{a})$ d'après $B_{4.1}$,
donc $a = aa + a\bar{a}$ d'après $B_{2.1}$,
donc $a = aa + 0$ d'après $B_{4.2}$,
donc $a = aa$ d'après $B_{3.1}$.

Remarques

- $\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad A \cup A = A,$
$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad A \cap A = A.$

- Pour toute proposition P,
  $P \vee P \Leftrightarrow P$,
  $P \wedge P \Leftrightarrow P$.

- En calcul algébrique portant sur des nombres réels, vous avez l'habitude d'écrire $a + a = 2a$ et $aa = a^2$.

2 est le coefficient de a dans $2a$.
2 est l'exposant de a dans a^2.

Les résultats $B_{5.1}$ et $B_{5.2}$ sont différents et expliquent pourquoi **il n'y a ni coefficients ni exposants dans des calculs dans une algèbre de Boole**.

Propriétés des éléments nul et unité

PROPRIÉTÉS

$B_{6.1}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a + 1 = 1}$,
$B_{6.2}$	$\forall a \in B$	$\boldsymbol{a0 = 0}$.

Attention : $B_{6.1}$ est faux en calcul algébrique dans $\mathbb{R}$.

Ces résultats sont démontrés à l'exercice corrigé **22**.

Absorption

PROPRIÉTÉS

$B_{7.1}$	$\forall (a, b) \in B^2$	$\boldsymbol{a + ab = a}$,
$B_{7.2}$	$\forall (a, b) \in B^2$	$\boldsymbol{a(a + b) = a}$.

Attention : ces résultats, très utiles pour simplifier des expressions booléennes, s'appuient sur $B_{2.2}$; ils sont faux en calcul algébrique dans $\mathbb{R}$.

Ces résultats sont démontrés à l'exercice corrigé **23**.

Associativité

PROPRIÉTÉS

$B_{8.1}$	$\forall (a, b, c) \in B^3$	$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$,
$B_{8.2}$	$\forall (a, b, c) \in B^3$	$\boldsymbol{(ab)c = a(bc)}$.

$B_{8.1}$ est la propriété duale de $B_{8.2}$.

Démonstration de $B_{8.2}$:

Soient a, b, c des éléments quelconques de B.

Cette démonstration n'a pas à être mémorisée.

Elle figure ici dans le cours comme exemple de démarche où chaque étape est justifiée avec un grand souci de rigueur, et où des résultats, vrais en algèbre de Boole et faux en calcul algébrique dans $\mathbb{R}$, sont mis en œuvre.

- Calcul de $a + (ab)c$

$a + (ab)c = (a + ab)(a + c)$ d'après $B_{2.2}$

donc $a + (ab)c = a(a + c)$ d'après $B_{7.1}$,

donc $a + (ab)c = a$ d'après $B_{7.2}$.

- Calcul de $a + a(bc)$

$a + a(bc) = (a + a)(a + bc)$ d'après $B_{2.2}$,

donc $a + a(bc) = a(a + bc)$ d'après $B_{5.1}$,

donc $a + a(bc) = a$ d'après $B_{7.2}$.

De ces deux calculs, nous déduisons que

$a + (ab)c = a + a(bc)$ (1).

- Calcul de $\bar{a} + (ab)c$

$\bar{a} + (ab)c = (\bar{a} + ab)(\bar{a} + c)$ d'après $B_{2.2}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = ((\bar{a} + a)(\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$ d'après $B_{2.2}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = ((a + \bar{a})(\bar{a} + b))(\bar{a} + c)$ d'après $B_{1.1}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = (1(\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$ d'après $B_{4.1}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = ((\bar{a} + b)1)(\bar{a} + c)$ d'après $B_{1.2}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = (\bar{a} + b)(\bar{a} + c)$ d'après $B_{3.2}$,

donc $\bar{a} + (ab)c = \bar{a} + bc$ d'après $B_{2.2}$.

• Calcul de $\overline{a} + a(bc)$

$\overline{a} + a(bc) = (\overline{a} + a)(\overline{a} + bc)$ d'après $B_{2.2}$,

donc $\overline{a} + a(bc) = (a + \overline{a})(\overline{a} + bc)$ d'après $B_{1.1}$,

donc $\overline{a} + a(bc) = 1(\overline{a} + bc)$ d'après $B_{4.1}$,

donc $\overline{a} + a(bc) = (\overline{a} + bc)1$ d'après $B_{1.2}$,

donc $\overline{a} + a(bc) = \overline{a} + bc$ d'après $B_{3.2}$.

De ces deux calculs, nous déduisons que

$$\overline{a} + (ab)c = \overline{a} + a(bc) \qquad (2).$$

• Conclusion

$(ab)c = (ab)c + 0$ d'après $B_{3.1}$,

donc $(ab)c = (ab)c + a\overline{a}$ d'après $B_{4.2}$,

donc $(ab)c = ((ab)c + a)((ab)c + \overline{a})$ d'après $B_{2.2}$,

donc $(ab)c = (a + (ab)c)(\overline{a} + (ab)c)$ d'après $B_{1.1}$,

donc $(ab)c = (a + a(bc))(\overline{a} + a(bc))$ d'après (1) et (2),

donc $(ab)c = (a(bc) + a)(a(bc) + \overline{a})$ d'après $B_{1.1}$,

donc $(ab)c = a(bc) + a\overline{a}$ d'après $B_{2.2}$,

donc $(ab)c = a(bc) + 0$ d'après $B_{4.2}$,

donc $(ab)c = a(bc)$ d'après $B_{3.1}$.

Notez la symétrie de cette partie de la démonstration par rapport à sa ligne centrale.

Remarque

L'associativité de l'addition et de la multiplication booléennes permet de ne plus indiquer dans quel ordre ces calculs doivent être effectués, c'est-à-dire de supprimer les parenthèses et de pouvoir écrire $a + b + c$ et abc.
Ainsi en logique on peut écrire $P \vee Q \vee R$ et $P \wedge Q \wedge R$.
Dans $\mathcal{P}(E)$ on peut écrire $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$, et plus généralement l'union de n parties A_i de E, notée $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et leur intersection notée $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
Cependant, avec l'intersection, il faut distinguer trois ensembles globalement disjoints (figure 11) et trois ensembles deux à deux disjoints (figure 12).

Voir à la fin du paragraphe **2A** la définition de deux ensembles disjoints.

Cette distinction est importante en probabilités à propos **d'événements indépendants**.

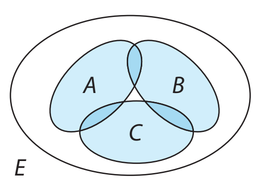


Figure 11

$A \cap B \cap C = \varnothing$

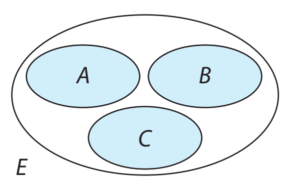


Figure 12

$A \cap B = \varnothing$
et $A \cap C = \varnothing$
et $C \cap A = \varnothing$

Propriétés du complément

PROPRIÉTÉS

B_9 Pour tout élément a de B, il existe un élément unique x de B tel que $a + x = 1$ et $ax = 0$: c'est $x = \overline{a}$.

B_{10} $\forall a \in B \quad \overline{(\overline{a})} = a$.

$B_{11.1}$ $\overline{0} = 1$

$B_{11.2}$ $\overline{1} = 0$

La propriété B_9 permet de démontrer les autres.

B_{10} est la propriété d'involution pour l'opération complément.

$B_{11.1}$ et $B_{11.2}$ sont duales.

Ces propriétés sont démontrées à l'exercice corrigé **24**.

D'après B_{10}, pour toute proposition P, $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.

Lois de Morgan

PROPRIÉTÉS

$B_{12.1}$ $\forall(a, b) \in B^2$ $\boldsymbol{\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}}$.

$B_{12.2}$ $\forall(a, b) \in B^2$ $\boldsymbol{\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}}$.

$B_{12.2}$ est la propriété duale de $B_{12.1}$.

Démonstration de $B_{12.1}$:

Soient a et b des éléments quelconques de B.

• Démontrons $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = 1$

$(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = b + (a + \bar{a}\bar{b})$ d'après $B_{1.1}$ et $B_{8.1}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = b + (a+\bar{a})(a+\bar{b})$ d'après $B_{2.2}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = b + 1\,(a+\bar{b})$ d'après $B_{4.1}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = b + (a+\bar{b})$ d'après $B_{1.2}$ et $B_{3.2}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = (b+\bar{b}) + a$ d'après $B_{1.1}$ et $B_{8.1}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = 1 + a$ d'après $B_{4.1}$,

donc $(a+b)+(\bar{a}\bar{b}) = 1$ d'après $B_{1.1}$ et $B_{6.1}$.

• On démontre de même $(a+b)(\bar{a}\bar{b}) = 0$.

$(a+b)(\bar{a}\bar{b}) = ((a+b)\bar{a})\bar{b}$ d'après $B_{8.2}$,

donc $(a+b)(\bar{a}\bar{b}) = (a\bar{a} + b\bar{a})\bar{b}$ d'après $B_{1.2}$ et $B_{2.1}$.

Par exemple $B_{4.1}$ devient $B_{4.2}$ et $B_{3.2}$ devient $B_{3.1}$.

On reprend chaque étape de la démonstration précédente en changeant le second indice de chaque propriété utilisée, c'est-à-dire en mettant en œuvre la propriété duale.

• Des deux résultats précédents et de la propriété B_9 nous déduisons que $\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$.

Exemples

Dans les deux cas particuliers de l'algèbre de Boole des propositions et de l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble, les lois de Morgan s'écrivent de la façon suivante.

La **négation** d'un **ou** est un **et**, et inversement.

Pour toutes propositions P, Q

$$\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P}) \wedge (\neg\boldsymbol{Q}),$$
$$\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P}) \vee (\neg\boldsymbol{Q}).$$

Figure 13.

Figure 14.

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), \quad \boldsymbol{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}},$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), \quad \boldsymbol{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}.$$

Le complémentaire d'une union est une intersection, et inversement.

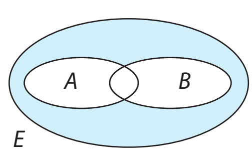


Figure 13

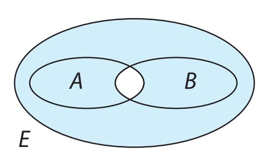


Figure 14

C. Tableaux de Karnaugh

Conformément au programme, nous nous limiterons ici au cas de deux ou trois variables.

Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter graphiquement des expressions booléennes comportant plusieurs variables booléennes. Ils ont été introduits en 1953 aux laboratoires Bell Telephone par l'ingénieur américain Maurice Karnaugh.

Cas de deux variables booléennes

ab	$a\overline{b}$
$\overline{a}b$	$\overline{a}\overline{b}$

Figure 15

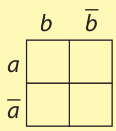


Figure 16

Dans ce cas un tableau de Karnaugh est un carré comportant quatre cases correspondant aux quatre produits ab, $a\overline{b}$, $\overline{a}b$, $\overline{a}\overline{b}$ obtenus avec a ou $\overline{a}$ en premier facteur et b ou $\overline{b}$ en second facteur.

La case représentant chaque produit est choisie pour permettre de visualiser facilement a, b, $\overline{a}$, $\overline{b}$ en assimilant ce tableau à un diagramme de Venn, la multiplication à l'intersection et l'addition à l'union.

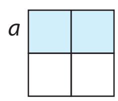


Figure 17

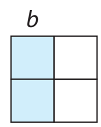


Figure 18

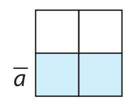


Figure 19

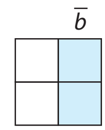


Figure 20

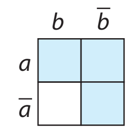


Figure 21

Démontrez cette égalité par le calcul.
Un tableau de Karnaugh permet aussi de vérifier des calculs.

Ainsi $ab + a\overline{b} + \overline{a}\overline{b}$ est représenté sur la figure 21 et on en déduit immédiatement que $ab + a\overline{b} + \overline{a}\overline{b} = a + \overline{b}$.

Inversement, en partant de $a + \overline{b}$ la figure 21 fournit l'expression $ab + a\overline{b} + \overline{a}\overline{b}$.

	bc	$b\overline{c}$	$\overline{b}\overline{c}$	$\overline{b}c$
a	abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}\overline{c}$	$a\overline{b}c$
$\overline{a}$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}c$

b : deux premières colonnes ; $\overline{b}$: deux dernières colonnes ; c, $\overline{c}$, c sous les colonnes.

Figure 22

Cas de trois variables booléennes

Le procédé précédent se généralise avec les huit produits abc, $ab\overline{c}$, $a\overline{b}c$, $a\overline{b}\overline{c}$, $\overline{a}bc$, $\overline{a}b\overline{c}$, $\overline{a}\overline{b}c$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ suivant les conventions de la figure 22.

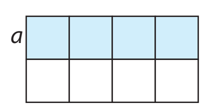


Figure 23

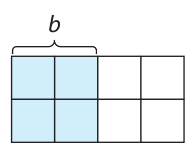


Figure 24

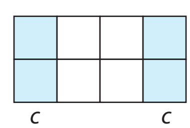


Figure 25

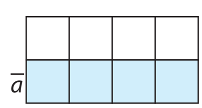


Figure 26

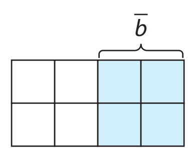


Figure 27

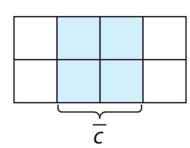


Figure 28

La variable c étant représentée par deux parties disjointes, il faut imaginer la figure 25 découpée, avec les deux largeurs du rectangle collées ensemble pour former un cylindre ; alors c correspond à une seule partie. Voir la figure 22.

Les quatre produits bc, $b\overline{c}$, $\overline{b}\overline{c}$, $\overline{b}c$, sont représentés dans cet ordre par les quatre colonnes du tableau, respectivement de la gauche vers la droite.

4 Éléments de la théorie des ensembles

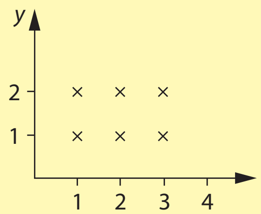


Figure 29

A. Produit cartésien de deux ensembles

Exemples

- Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et soit $F = \{1, 2\}$.

La figure 29 donne, dans un repère du plan, tous les points dont l'abscisse appartient à E et dont l'ordonnée appartient à F : ce sont les six points de coordonnées (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2).

L'ensemble de ces six couples (a, b) où a appartient à E et où b appartient à F est, par définition, le produit cartésien de l'ensemble E par l'ensemble F et se note $E \times F$.

Nous pouvons immédiatement remarquer qu'en permutant les ensembles E et F, c'est-à-dire les abscisses et les ordonnées des points, on obtient un nouvel ensemble $F \times E$.

$F \times E \neq E \times F$ car, par exemple, $(2, 3) \in F \times E$ et $(2, 3) \notin E \times F$.

- En remplaçant E par $\mathbb{N}$ et F par $\mathbb{N}$, nous obtenons de même l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, noté $\mathbb{N}^2$, des couples (a, b) de nombres entiers naturels.
- On définit de même $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples de nombres réels.

Dans un couple (a, b) l'ordre des deux éléments a et b intervient : (1, 2) et (2, 1) sont différents ; ils correspondent à deux points distincts du plan.

Aussi il faut distinguer le couple (a, b) de l'ensemble $\{a, b\}$ à deux éléments pour lequel l'ordre dans lequel sont écrits les éléments n'intervient pas : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

La représentation graphique de $\mathbb{N}^2$ est constituée de tous les points de coordonnées entières.

La représentation graphique de $\mathbb{R}^2$ est le plan tout entier.

Définition

DÉFINITION

Le produit cartésien d'un ensemble E par un ensemble F, noté $E \times F$, est l'ensemble de tous les **couples** (a, b) où a appartient à E et b appartient à F.

$(a, b) = (a', b')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Cette définition s'étend au produit cartésien de trois ensembles E, F, G dans cet ordre, en remplaçant couple (a, b) par triplet (a, b, c).

$a \in E$, $b \in F$, $c \in G$.

Par exemple $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble de tous les triplets de nombres réels.

Sa représentation graphique est l'espace tout entier.

Plus généralement on a la définition suivante.

DÉFINITION

Le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dans cet ordre est l'ensemble de tous les n– uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où a_1 appartient à E_1, a_2 appartient à E_2, …, a_n appartient à E_n.

Cardinal de $E \times F$

Reprenons le premier exemple du paragraphe A.

E a trois éléments et F a deux éléments. Nous observons que $E \times F$ a six éléments.

L'arbre suivant nous aidera à généraliser ce résultat.

Vous avez déjà rencontré de tels arbres en probabilités.

Choix du premier élément	Choix du deuxième élément	Couple
1	1	(1,1)
	2	(1,2)
2	1	(2,1)
	2	(2,2)
3	1	(3,1)
	2	(3,2)

Si nous ajoutons un quatrième élément à E, nous avons 4 choix possibles pour le premier élément du couple et 2 choix possibles pour le second élément du couple.

Nous obtenons alors $4 \times 2 = 8$ éléments dans $E \times F$.

D'une manière générale, supposons que E a n éléments et que F a p éléments.

Nous avons n choix possibles pour le premier élément d'un couple et, pour chacun de ces n choix, nous avons p choix possibles pour le second élément du couple.

Nous obtenons ainsi $n \times p$ couples, tous distincts par construction de ces couples.

L'ensemble $E \times F$ a donc $n \times p$ éléments car, par le procédé ci-dessus, nous avons obtenu tous les éléments de $E \times F$.

PROPRIÉTÉ

Si E est un ensemble de n éléments et si F est un ensemble de p éléments, alors **le produit cartésien E × F a $n \times p$ éléments**.

Cartésien est l'adjectif dérivé du nom du philosophe, physicien et mathématicien français René Descartes (1596-1650).

Remarques

- Ce résultat est à l'origine du choix de l'expression « **produit** cartésien » servant à désigner un ensemble de couples, et de la notation E × F.
- Ce résultat n'a de sens qu'avec des ensembles E et F finis. Il ne concerne pas des ensembles tels que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{R}^2$ car $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.
- Ce résultat peut s'écrire de façon plus condensée en introduisant **le cardinal d'un ensemble fini E, noté Card E, qui est son nombre d'éléments**.

PROPRIÉTÉ

E et F étant des ensembles finis, **Card $E \times F$ = Card $E \times$ Card F**.

Ce résultat se généralise au cas du produit cartésien de m ensembles finis.

B. Relations binaires

Introduction générale

Exemple

$E = \{a, b, c, d, e\}$.
$F = \{S, T, U, V\}$.

Considérons un ensemble E constitué de cinq PME notées a, b, c, d, e, et un ensemble F de quatre sociétés notées S, T, U, V commercialisant du matériel informatique pour les PME. L'équipement informatique de chacune de ces cinq PME provient d'une ou de plusieurs de ces sociétés, ou d'aucune de celles-ci.

Nous pouvons décrire cette situation à l'aide :

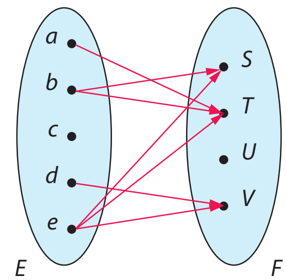
– d'un tableau :

a	b	c	d	e
T	S, T		V	S, T, V

La deuxième ligne indique les sociétés équipant les PME de la première ligne.

Le mot latin *sagitta* signifie flèche.

– d'un diagramme sagittal :



1 indique que la PME de la colonne est équipée par la société de la ligne et 0 traduit la situation contraire.

– d'une matrice :

$$\begin{array}{c} \\ S \\ T \\ U \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

– d'une liste de couples (x, Y) où x est une des cinq PME et Y une des quatre sociétés équipant x :

(a, T), (b, S), (b, T), (d, V), (e, S), (e, T), (e, V).

Voir le paragraphe **A**.

Chacun de ses sept couples appartient au produit cartésien $E \times F$.

Ainsi la relation « est équipé par » intervenant dans cet exemple est entièrement définie par :
– l'ensemble E, appelé ensemble de départ,
– l'ensemble F, appelé ensemble d'arrivée,
– un sous-ensemble G du produit cartésien $E \times F$, appelé graphe de la relation.

G a pour éléments les sept couples de la liste précédente.

Notant $\mathcal{R}$ cette relation, on écrit alors $x \mathcal{R} Y$ pour indiquer que la PME x est équipée par la société Y : par exemple $b \mathcal{R} S$.

E et F ne sont pas l'ensemble vide.

E est la **source** de $\mathcal{R}$.
F est le **but** de $\mathcal{R}$.

DÉFINITION

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par la donnée :
– de **l'ensemble de départ** E,
– de l'**ensemble d'arrivée** F,
– d'une partie G du produit cartésien $E \times F$, appelée **graphe** de la relation.

$x \mathcal{R} y$, où $x \in E$ et $y \in F$, signifie que le couple (x, y) appartient au graphe G.

Dans la suite nous étudions le cas particulier où $F = E$, c'est-à-dire des relations binaires définies sur un ensemble E, puis au paragraphe **C** des relations particulières d'un ensemble E dans un ensemble F.

Définition

Exemples

$E \neq \varnothing$

Vous connaissez plusieurs relations liant des éléments d'un même ensemble E :
- l'égalité dans E : $x = y$,
- l'inégalité dans $\mathbb{R}$: $x \leq y$,
- l'inégalité stricte dans $\mathbb{R}$: $x < y$,
- l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$: $A \subset B$,
- la divisibilité dans $\mathbb{N}^*$: p est un diviseur de n,
- la congruence modulo n dans $\mathbb{N}$: $a \equiv b$ (modulo n).

Voir le paragraphe **2A**.

2 est un diviseur de 14.

Voir le paragraphe **2D** du chapitre **3**.

Ces six exemples seront repris tout le long du paragraphe **B**.

À RETENIR

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est caractérisée par son graphe G qui est une partie de E^2.

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in \text{G}.$$

$E \times E = E^2$

Exemple

$\mathcal{R}$ est la relation binaire définie sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par son graphe $G = \{(0,0), (2,1), (4,2), (6,3)\}$.

On a $0 \mathcal{R} 0$, $2 \mathcal{R} 1$, $4 \mathcal{R} 2$, $6 \mathcal{R} 3$.

$\mathcal{R}$ est la relation « est le double de » définie sur E.

Propriétés

• ***Réflexivité***

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est **réflexive** si et seulement si :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{x} \mathcal{R} \boldsymbol{x}.$$

$0 < 0$ est faux.

Parmi les six exemples précédents, seule l'inégalité stricte $<$ (ou $>$) n'est pas réflexive.

• ***Symétrie***

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E^2} \qquad \boldsymbol{x} \mathcal{R} \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y} \mathcal{R} \boldsymbol{x}.$$

Parmi les six exemples précédents, seules l'égalité et la congruence modulo n dans $\mathbb{N}$ sont symétriques.

• ***Antisymétrie***

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est **antisymétrique** si et seulement si :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E^2} \qquad (\boldsymbol{x} \mathcal{R} \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{y} \mathcal{R} \boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

$(x < y) \wedge (y < x)$ est toujours faux, donc l'implication est vraie pour $<$ (ou pour $>$).

Parmi les six exemples précédents, seule la congruence modulo n dans $\mathbb{N}$ n'est pas antisymétrique.

• ***Transitivité***

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est **transitive** si et seulement si :

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{E^3} \qquad (\boldsymbol{x} \mathcal{R} \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{y} \mathcal{R} \boldsymbol{z}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \mathcal{R} \boldsymbol{z}.$$

Les six exemples précédents sont des relations transitives.

Relation d'équivalence

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Parmi les six exemples précédents, seules l'égalité et la congruence modulo *n* dans $\mathbb{N}$ sont des relations d'équivalence.

Relation d'ordre

DÉFINITION

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

Parmi les six exemples précédents seules l'inégalité stricte (< ou >) et la congruence modulo *n* dans $\mathbb{N}$ ne sont pas des relations d'ordre.

Remarque

La relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ et la relation $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$ sont toutes deux des relations d'ordre.
Avec la relation $\leq$, on a :
$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \leq y) \vee (y \leq x)$.
Cette propriété se transpose de la façon suivante pour la relation d'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$:
$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \vee (B \subset A)$.
Or cette proposition est **fausse** : pensez par exemple à deux parties disjointes A et B de E.
Pour distinguer ces deux situations, on introduit les définitions suivantes.

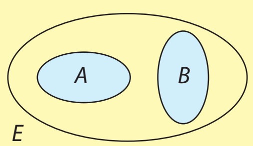


Figure 30

DÉFINITIONS

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est une relation **d'ordre total** si et seulement si :

$$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2 \qquad (\boldsymbol{x}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{y}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{x}).$$

Dans le cas contraire, $\mathcal{R}$ est une relation d'**ordre partiel**.

C'est le cas de $\leq$ dans $\mathbb{R}$.

C'est le cas de $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$.

C. Application d'un ensemble dans un ensemble

Rappels et compléments

Vous connaissez l'application *f* de $\mathbb{R}$ dans R définie par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est une parabole.

L'application *f* associe à tout nombre réel un nombre réel et un seul, son carré.

Plus généralement on définit une application de la façon suivante.

DÉFINITION

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation binaire de E vers F qui associe à tout élément de E **un élément et un seul** de F.

Voir le début du paragraphe **B**.

Notation

$$\begin{array}{rcl} f : x & \mapsto & f(x). \\ E & \to & F \end{array}$$

Notez la différence entre les deux flèches.

Remarques

• Une application est définie par la donnée d'un **ensemble de départ** E, d'un **ensemble d'arrivée** F et d'un **graphe** $G \subset E \times F$.
Alors $(x, y) \in G$ équivaut à $y = f(x)$.
y est **l'image** de x par f ; x est **un antécédent** de y pour f.

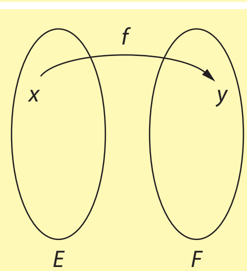


Figure 31

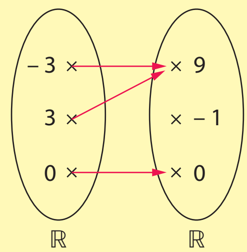


Figure 32

- Avec une application, chaque élément de l'ensemble de départ a une image unique et chaque élément de l'ensemble d'arrivée a zéro, un ou plusieurs antécédents.
  Ainsi pour $f : x \mapsto x^2$ où $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$,
  9 a deux antécédents : 3 et – 3,
  – 1 n'a pas d'antécédent,
  0 a un antécédent unique : 0.
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application de ℝ dans ℝ car 0 n'a pas d'image par f.
- Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
  À tout nombre x de [– 1, 1], on peut associer tout nombre réel y tel que le point M de coordonnées (x, y) appartienne à $\mathscr{C}$.
  On ne définit pas ainsi une application car à tout nombre réel x de]– 1, 1[, on peut associer **deux** nombres réels y opposés : les ordonnées des points M_1 et M_2 (voir la figure 33).

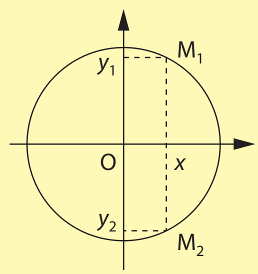


Figure 33

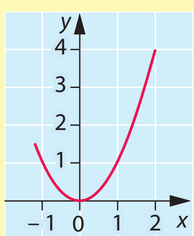
- En informatique de gestion on rencontre des applications : par exemple, à toute personne figurant dans un fichier on associe son numéro INSEE, ou à tout élément d'un fichier de clients on associe la date de sa dernière commande.

Image d'une partie de *E*

Reprenons l'application f de ℝ dans ℝ définie par $f(x) = x^2$.

Soit A = [– 1, 2]. A est une partie de l'ensemble de départ de f.

Les images $f(x)$ des nombres x de A sont les ordonnées des points de l'arc de parabole représenté sur la figure 34.



$f([-1, 2]) = [0, 4]$.

Figure 34

Lorsque x parcourt l'ensemble $A = [-1, 2]$, $f(x)$ parcourt l'ensemble [0, 4].

En notant $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A, on a $f(A) = [0, 4]$.

Plus généralement on définit de la façon suivante l'image par une application d'une partie de son ensemble de départ.

DÉFINITION

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et soit A une partie de E.
L'image (directe) de *A* par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images des éléments de A.

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

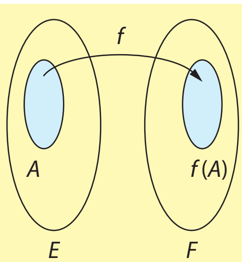


Figure 35

Cependant, pour les démonstrations des propriétés énoncées ci-dessous, il est préférable de préciser que $f(A)$ est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent dans A.

$$f(A) = \{y \in F\ ;\quad \exists x \in A \quad y = f(x)\}.$$

$f(A) \subset F$.
$f(x) \in F$.

Remarque

Il est important de distinguer $f(A)$ et $f(x)$.
$f(A)$ est une **partie** de F ; c'est un ensemble.
$f(x)$ est un **élément** de F.

Ainsi, dans l'ensemble précédent, $f(A)$ est intervalle [0, 4] tandis que $f(x) = x^2$ est un nombre réel.

Nous énonçons deux propriétés dont la démonstration n'est pas un objectif du programme.

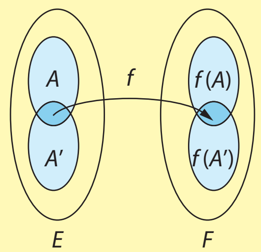


Figure 36

PROPRIÉTÉS

Soit f une application de E dans F et soit A, A' des parties de E.

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$
$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$

Observez que la seconde propriété est une **inclusion** et non une égalité.

Reprenons l'exemple de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Soit $A = [-1, 2]$ et soit $A' = [-2, 1]$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4 ↘	1 ↘	0	↗ 1	↗ 4

Nous savons déjà que $f(A) = [0, 4]$.

On démontre de même que $f(A') = [0, 4]$.

Donc $f(A) \cap f(A') = [0, 4]$.

Or $A \cap A' = [-1, 1]$, donc $f(A \cap A') = [0, 1]$.

Ainsi, dans ce cas particulier,

$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \quad \text{et} \quad f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A').$$

Image réciproque d'une partie de F

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1 ↘	0	↗ 1	↗

Reprenons l'exemple de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Soit $B = [0, 1]$; B est une partie de l'ensemble d'**arrivée** $\mathbb{R}$.

L'ensemble des éléments de l'ensemble de **départ** $\mathbb{R}$ dont l'image appartient à B est l'intervalle $[-1, 1]$.

C'est aussi l'ensemble des antécédents des éléments de B.

$f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

En notant $f^{-1}(B)$ cet ensemble, on a $f^{-1}(B) = [-1, 1]$.

Plus généralement on définit de la façon suivante l'image réciproque par une application d'une partie de son ensemble d'arrivée.

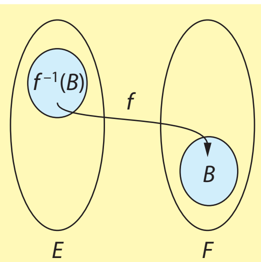


Figure 37

DÉFINITION

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et soit B une partie de F.

L'image réciproque de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, des éléments de E dont l'image appartient à B.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,;\, f(x) \in B\}.$$

Remarques

- $f^{-1}(B)$ est aussi l'ensemble des antécédents des éléments de B.
- Avec l'application f définie ci-dessus, pour $B = [-2, -1]$, on a $f^{-1}(B) = \varnothing$ car un nombre strictement négatif n'est le carré d'aucun nombre réel.
- La notation f^{-1} intervient pour désigner la fonction réciproque d'une fonction bijective.

Ici l'ensemble $f^{-1}(B)$ est défini même si l'application f n'est pas bijective.

Nous reviendrons ci-après sur les bijections.

Nous énonçons deux propriétés dont la démonstration n'est pas un objectif du programme.

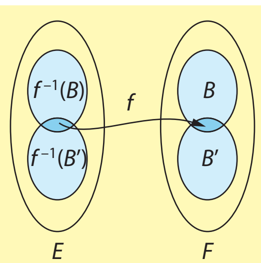


Figure 38

PROPRIÉTÉS

Soit f une application de E dans F et soit B, B' des parties de F.

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

Le connecteur $\wedge$ est lié à l'intersection de deux ensembles (voir le paragraphe **2A**).

Notez que la seconde propriété est ici une égalité. Elle permet, par exemple, de déterminer, dans une entreprise, l'ensemble des clients habitant un département donné **et** ayant passé au moins une commande une année donnée, à partir du fichier des adresses des clients et du fichier des commandes de l'année considérée.

Injection – surjection – bijection

Considérons les quatre applications suivantes :

$$g : \begin{array}{rcl} x & \mapsto & x^2 \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} x & \mapsto & x^2 \\ \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\end{array}$$

$$k : \begin{array}{rcl} x & \mapsto & x^2 \\ [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \end{array} \qquad \ell : \begin{array}{rcl} x & \mapsto & x^2 \\ [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\end{array}$$

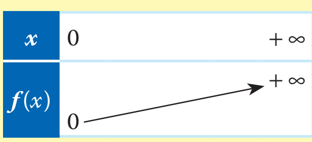
Voir la première remarque du début du paragraphe **C**.

Deux quelconques de ces quatre applications sont différentes car elles n'ont pas le même ensemble de départ et le même ensemble d'arrivée.

• $g(-1) = 1$ et $g(1) = 1$, donc $g(-1) = g(1)$.

Ainsi il existe deux éléments distincts de l'ensemble de départ de g ayant même image par g.

Il en est de même avec l'application h.



En revanche, k et ℓ étant strictement croissantes sur leur ensemble de départ $[0, +\infty]$, deux éléments distincts de $[0, +\infty[$ ont nécessairement deux images distinctes par k (respectivement par ℓ).

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall x' \in [0, +\infty[, \quad x \neq x' \Rightarrow k(x) \neq k(x').$$

Les applications k et ℓ sont dites injectives ; ce sont des injections.

Plus généralement on définit une injection de la façon suivante.

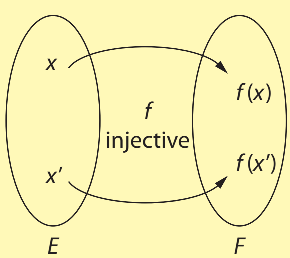


Figure 39

DÉFINITION

Soit f une application de E dans F.

f est une **injection**, ou une **application injective**, si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad \boldsymbol{x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}.$$

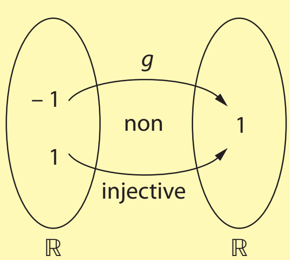


Figure 40

Remarques

1. Ce qui caractérise une **injection**, c'est que **deux éléments *distincts* de l'ensemble de départ ont nécessairement deux images *distinctes***.

2. Les applications g et h ci-dessus ne sont pas injectives.

3. Pour démontrer qu'une application est injective, on utilise le plus souvent l'implication contraposée (voir **1A**) :

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

4. Les injections interviennent pour coder des informations ; il est en effet très important que des informations différentes reçoivent des codes différents lorsque c'est nécessaire.

• -1 n'a pas d'antécédent pour l'application g car le carré de tout nombre réel est positif.

De même -1 n'a pas d'antécédent pour l'application k.

Pour h, $-\sqrt{y}$ convient aussi.

En revanche h et ℓ ayant pour ensemble d'arrivée $[0, +\infty]$, tout élément y de cet ensemble d'arrivée a au moins un antécédent pour h comme pour ℓ : $x = \sqrt{y}$ convient.

Ceci se traduit de la façon suivante, par exemple pour ℓ :

$$\forall y \in [0, +\infty], \quad \exists x \in [0, +\infty[, \qquad y = \ell(x).$$

Les applications h et ℓ sont dites surjectives; ce sont des surjections.

Plus généralement on définit une surjection de la façon suivante.

Sur un diagramme sagittal, tous les éléments de F sont les points d'arrivée d'au moins une flèche.

DÉFINITION

Soit f une application de E dans F.

f est une **surjection**, ou une **application surjective**, si et seulement si

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}, \quad \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Remarques

1. Ce qui caractérise une **surjection**, c'est que **tout élément de l'ensemble d'arrivée a *au moins* un antécédent**.

2. La négation de cette proposition est :

Voir la fin de la partie **1**.

$$\exists y \in F, \quad \forall x \in E, \qquad y \neq f(x).$$

Cette négation est vraie pour les applications g et k ci-dessus qui ne sont pas surjectives.

Sur un diagramme sagittal, -1 n'est le point d'arrivée d'aucune flèche.

• Nous pouvons alors définir une bijection.

DÉFINITION

Soit f une application de E dans F.

f est une **bijection** si et seulement si f est **une injection et une surjection**.

Parmi les quatre applications g, h, k, ℓ, seule ℓ est bijective.

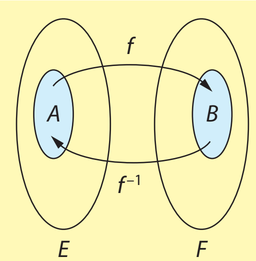


Figure 41

Remarques

1. Ce qui caractérise une **bijection**, c'est que tout **élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent *unique***.

2. Une bijection a une application réciproque, notée f^{-1},

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \mapsto & y \\ E & \rightarrow & F \\ x & \longleftarrow & y \\ & f^{-1} & \end{array}$$

f^{-1} est elle-même une bijection.

Il est important de distinguer $f^{-1}(y)$ qui est un élément de E et $f^{-1}(B)$ qui est une **partie** de E.

$B = f(A)$,
$A = f^{-1}(B)$.

Composition de deux applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.

Quel que soit x appartenant à E, l'image par f de x, notée $y = f(x)$, appartient à F ; l'image par g de y, notée $z = g(y)$ appartient à G.

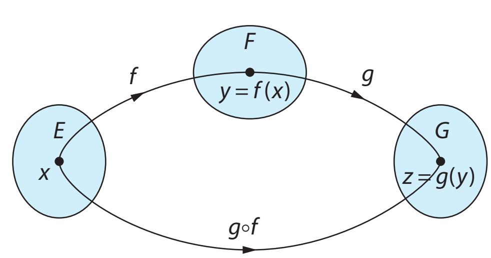


Figure 42

DÉFINITION

L'application composée de f par g est l'application h de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = g[f(x)].$$

Attention à l'inversion : $g \circ f$, lu « g rond f », est l'application composée de f suivie de g.

NOTATION

$$\forall x \in E, \qquad \boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}).$$

Exemple

On considère les applications f et g définies par :

$$f : \begin{array}{l} x \mapsto 2x+1 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{l} x \mapsto x^2 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$$

alors

$$g \circ f : \begin{array}{l} x \mapsto (2x+1)^2 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{array}$$

On démontre et nous admettons les théorèmes suivants.

THÉORÈMES

Soit f une application de E dans F et g une application de G dans H avec $f(E) \subset F$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Attention à l'ordre des applications réciproques.

5 Graphes

A. Modes de représentation

Conformément au programme du BTS SIO nous nous limitons ici aux graphes finis simples orientés.

Exemple

Dans une ville on considère quatre carrefours A, B, C, D reliés par des rues où la circulation s'effectue en double sens ou à sens unique.

Nous allons présenter de plusieurs façons les informations contenues dans le texte ci-dessous.

Une rue à sens unique va directement de A à B.

Une rue à sens unique va directement de A à C.

Une rue en double sens relie directement A et D.

Une rue en double sens relie directement B et C.

Une rue à sens unique va directement de C à D.

Enfin une rue à sens unique va de D à D sans passer par A, B ou C.

- Nous pouvons représenter cette situation à l'aide de l'un des deux graphiques suivants dont la lecture est évidente.

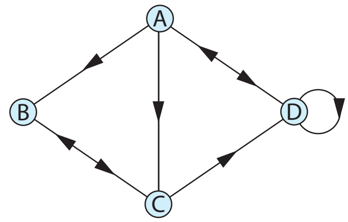


Figure 43

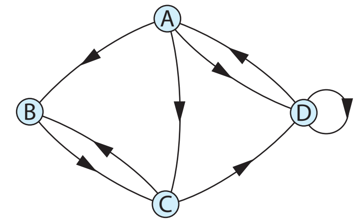


Figure 44

Ces deux graphiques, comme le texte en français, ne fournissent aucune indication sur les distances entre les carrefours ou les positions de ceux-ci, les uns par rapport aux autres.

• Nous pouvons aussi indiquer, pour chaque carrefour, quels carrefours peuvent être atteints directement ; ceux-ci sont appelés les **successeurs** du carrefour considéré.

Il y a en tout huit successeurs, autant que de trajets fléchés sur la figure 44, car ce sont les points d'arrivée de ces trajets.

Carrefours	Successeurs
A	B, C, D
B	C
C	B, D
D	A, D

• Inversement nous pouvons indiquer, pour chaque carrefour, quels carrefours permettent d'accéder directement à ce carrefour ; ceux-ci sont appelés les **prédécesseurs** du carrefour considéré.

Il y a en tout huit prédécesseurs, autant que de trajets fléchés sur la figure 44, car ce sont les points de départ de ceux-ci.

Carrefours	Prédécesseurs
A	D
B	A, C
C	A, B
D	A, C, D

• Nous pouvons dresser la liste des couples de carrefours dont le premier élément est le point de départ d'un trajet fléché et le second élément le point d'arrivée du même trajet fléché :

Ici encore nous obtenons huit couples.

(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, B), (C, D), (D, A), (D, D).

• Nous pouvons représenter graphiquement ces couples par huit points du plan en convenant de représenter les carrefours en abscisse et en ordonnée.

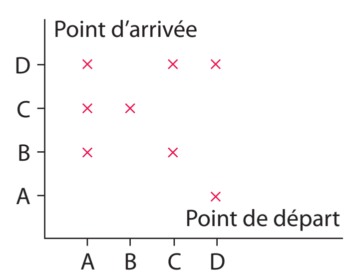


Figure 45

• Nous pouvons encore indiquer dans un tableau à double entrée le point de départ (ou origine) et le point d'arrivée (ou extrémité) de chaque trajet fléché en adoptant la convention suivante : si un trajet part du carrefour x et arrive au carrefour y, on met 1 à l'intersection de la ligne x et de la colonne y ; sinon on met 0.

Ici encore nous obtenons huit 1.

Origine \ Extrémité	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	0	1

• Nous pouvons associer, de façon évidente, la matrice suivante au tableau précédent.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice carrée a autant de lignes, ou de colonnes, qu'il y a de carrefours dans la situation étudiée.

Cette matrice carrée ne comporte que des 0 et des 1, et nous savons qu'il est possible de définir sur l'ensemble {0, 1} une structure d'algèbre de Boole.

C'est le troisième exemple indiqué au paragraphe **3A**.

L'exemple précédent nous permet d'introduire quelques définitions.

DÉFINITIONS

Un **graphe fini simple orienté** est défini par :
- un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**,
- un ensemble U de couples (x_i, x_j) d'éléments de X donc les éléments sont appelés **arcs**.

$U \subset X \times X$.
x_i est l'**extrémité initiale** de l'arc (x_i, x_j) ; x_j est son **extrémité terminale**.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

En général les sommets sont représentés par des cercles avec leur nom à l'intérieur.

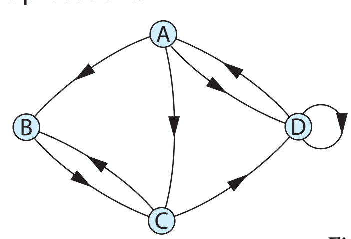


Figure 46

Les sommets sont les carrefours. $X = \{A, B, C, D\}$.

Un arc est un couple (x_i, x_j) tel qu'il existe une rue allant directement de x_i à x_j.

U = {(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, B), (C, D), (D, A), (D, D)}.

Ces huit couples ont été déterminés au début de ce paragraphe.

Parmi ces huit arcs, l'arc (D, D) a ses extrémités confondues ; c'est une **boucle**.

DÉFINITION

Une **boucle** est un arc dont les extrémités sont confondues.

Nous observons sur la figure que plusieurs arcs ont pour extrémité initiale A et que plusieurs arcs ont pour extrémité terminale D.

DÉFINITIONS

x_j est un **successeur** de x_i si et seulement si (x_i, x_j) est un arc du graphe.
On note $\Gamma^+(x_i)$ l'ensemble des successeurs du sommet x_i.

$(x_i, x_j) \in$ U.

$\Gamma^+(x_i)$ peut être l'ensemble vide.

x_i est un **prédécesseur** de x_j si et seulement si (x_i, x_j) est un arc du graphe.
On note $\Gamma^-(x_j)$ l'ensemble des prédécesseurs du sommet x_j.

$\Gamma^-(x_j)$ peut être l'ensemble vide.

Exemples

$\Gamma^+(A) = \{B, C, D\}$; $\Gamma^+(B) = \{C\}$.

$\Gamma^-(A) = \{D\}$; $\Gamma^-(D) = \{A, C, D\}$.

a_{ij} est l'élément de la ligne i et de la colonne j.

DÉFINITION

La **matrice d'adjacence** d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets est la matrice carrée (a_{ij}) à n lignes où

$a_{ij} = 1$ si (x_i, x_j) est un arc du graphe,

$a_{ij} = 0$ dans le cas contraire.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la matrice d'adjacence du graphe est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retrouvez $\Gamma^+(A)$, $\Gamma^+(B)$, $\Gamma^-(A)$, $\Gamma^-(D)$ obtenus précédemment.

Les 1 situés sur une ligne donnent les successeurs du sommet correspondant à cette ligne.

Les 1 situés sur une colonne donnent les prédécesseurs du sommet correspondant à cette colonne.

B. Chemin d'un graphe fini simple orienté

Définition

Exemple

Voir la figure précédente.

Reprenons l'exemple du paragraphe **A**.

Nous observons qu'il existe :

– un arc d'extrémité initiale A et d'extrémité terminale B,

– un arc d'extrémité initiale B et d'extrémité terminale C.

Alors la suite de sommets (A, B, C) est telle que B est un successeur de A et C est un successeur de B. Une telle suite de sommets est appelée un chemin.

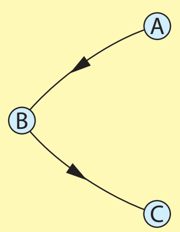


Figure 47

DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté, un **chemin** est une suite ordonnée de sommets dont chacun, sauf le premier, a le sommet suivant comme successeur.

Cela signifie que si x_i et x_j sont, dans cet ordre, deux sommets consécutifs de cette suite, alors (x_i, x_j) est un arc du graphe.

Un chemin correspond à une suite d'arcs tels que chacun, sauf le dernier, a pour extrémité terminale, l'extrémité initiale du suivant.

(A, C, D) est un chemin, mais (A, D, C) n'est pas un chemin car C n'est pas un successeur de D.

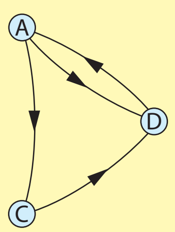


Figure 48

Un chemin peut comporter plusieurs fois un même sommet ; par exemple (A, C, D, A, C, D) est un chemin. (Voir la dernière figure du paragraphe **A**.)

Circuit

Voir la figure ci-dessus.

Considérons la suite de sommets (A, C, D, A).

C'est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques. Un tel chemin est appelé un *circuit*.

DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté, un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques.

Chemin hamiltonien

Considérons la suite de sommets (A, B, C, D).

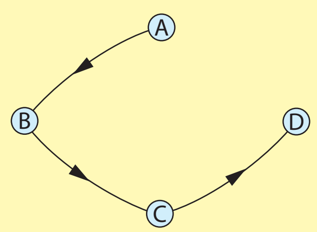


Figure 49

C'est un chemin d'après la figure ci-contre extraite de la dernière figure du paragraphe **A**.

Ce chemin passe une fois et une seule par tous les sommets du graphe. Un tel chemin est dit *hamiltonien*.

DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté, un **chemin hamiltonien** est un chemin passant une fois et une seule par tous les sommets du graphe.

Longueur d'un chemin

DÉFINITION

La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui constituent le chemin.

PROPRIÉTÉ

La longueur d'un chemin de ***n* sommets est *n* – 1**.

Exemple

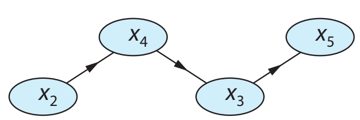


Figure 50

La longueur du chemin (x_2, x_4, x_3, x_5) est 3.

Chemins de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j

Voir l'exercice **51**.

On démontre, en généralisant le principe de démonstration mis en œuvre dans l'exercice **51**, le résultat suivant.

PROPRIÉTÉ

$1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets.

Le **nombre de chemins de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j** est le nombre situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^p.

Voir l'exercice **52** où le calcul d'une **puissance entière et booléenne de la matrice d'adjacence** est explicité.

De même on démontre que les observations effectuées à l'exercice **52** ont une portée générale.

PROPRIÉTÉ

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets.

Il existe (au moins) un chemin de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j si et seulement si le nombre situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice **booléenne** $M^{[p]}$ est 1.

$M^{[p]}$ est la p-ième puissance booléenne de M.

$M^{[p]} = \underbrace{M \otimes M \otimes \ldots \otimes M}_{p \text{ facteurs}},$

où $\otimes$ est la multiplication booléenne des matrices.

Remarque

Si M^n ou $M^{[n]}$ n'est pas la matrice nulle, alors il existe au moins un chemin de longueur n.
Par définition de la longueur d'un chemin, ce chemin a $(n + 1)$ sommets.
Comme le graphe ne comporte que n sommets, ce chemin passe au moins deux fois par un des sommets.
Ce graphe contient donc au moins un circuit.

Voir ci-dessus la définition d'un circuit.

C. Fermeture transitive d'un graphe fini simple orienté

DÉFINITION

La **fermeture transitive** d'un graphe fini simple orienté est le graphe obtenu en conservant les sommets et en ajoutant, si nécessaire, les arcs (x, y) pour lesquels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Aux exercices **53** et **54** nous remarquerons que la matrice adjacente $\widehat{M}$ de la fermeture transitive d'un graphe simple orienté de matrice adjacente M est $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$, où $\oplus$ est l'addition booléenne des matrices.

n est le nombre de sommets.

On démontre que ce résultat est général.

PROPRIÉTÉ

Un graphe fini simple orienté de matrice d'adjacence M a pour **fermeture transitive** un graphe de matrice d'adjacence

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{M}^{[2]} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{M}^{[n-1]}$$

où n est le nombre de sommets du graphe, où $\boxplus$ est l'addition booléenne des matrices et où $M^{[i]}$ est la i-ième puissance booléenne de la matrice M.

D. Niveaux d'un graphe fini simple orienté sans circuit

DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté sans circuit, **le niveau d'un sommet** x_i est 0 si x_i n'a pas de prédécesseur ; sinon c'est la longueur du chemin le plus long ayant x_i pour extrémité terminale.

DÉFINITION

Le niveau *k* d'un graphe fini simple orienté sans circuit est l'ensemble $N(k)$ de ses sommets de niveau k.

Voir à l'exercice **55** l'obtention des niveaux.

On démontre le résultat suivant.

PROPRIÉTÉ

Les niveaux non vides d'un graphe fini simple orienté sans circuit constituent une partition de l'ensemble des sommets du graphe.

Voir la définition d'une partition au début de l'exercice **19**.

Remarque

Un arbre généalogique simplifié peut être considéré comme un graphe fini simple orienté où chaque sommet est une personne.

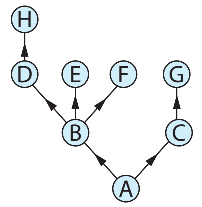


Figure 51

A a eu deux enfants : B et C.
B a eu trois enfants : D, E et F.
D a eu un enfant : H.
C a eu un enfant : G.

Un tel graphe est appelé une **arborescence**.
La figure ci-contre est une représentation d'une autre arborescence.

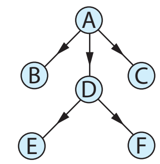


Figure 52

Ce n'est plus le cas si on inverse le sens d'une des flèches du graphe.

Dans ces deux graphes nous observons que le sommet A est tel que tout autre sommet peut être atteint par un chemin issu de A.
A est appelé la **racine** du graphe simple orienté.

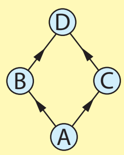


Figure 53

Il ne suffit pas qu'un graphe fini simple orienté possède une racine pour que ce soit une arborescence. Ainsi A est une racine du graphe représenté par la figure ci-contre, mais ce graphe n'est pas une arborescence.
Les arborescences sont présentes dans des fichiers de données ; la figure ci-dessous en donne un exemple.

La définition d'une arborescence n'est pas au programme de mathématiques du BTS SIO car elle s'appuie sur la notion de connexité qui est hors programme.

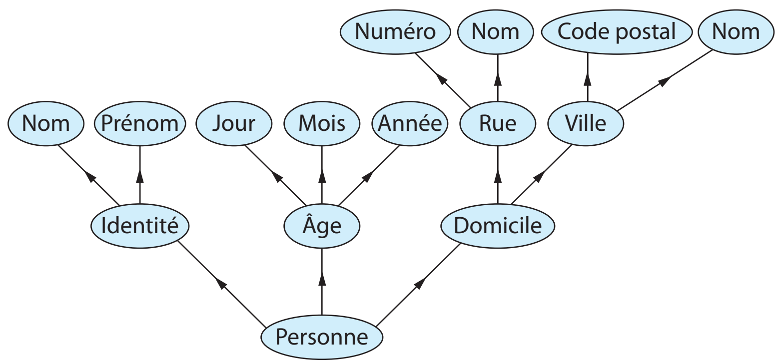


Figure 54

E. Graphe valué (pondéré)

On peut être amené à affecter une valeur à chaque arc d'un graphe simple orienté sans circuit.

Par exemple, si les sommets sont des lieux et les arcs des itinéraires routiers, on peut associer à chaque arc la durée moyenne du déplacement sur cet itinéraire.

À RETENIR

La **valeur d'un chemin** est la somme des valeurs affectées aux arcs qui constituent le chemin.

On peut alors chercher les chemins de valeur minimale (ou maximale) d'un sommet fixé à un autre.

Voir l'exercice **56**.

Pour cela on commence par ordonner le graphe par niveaux.

Voir l'exercice **55**.

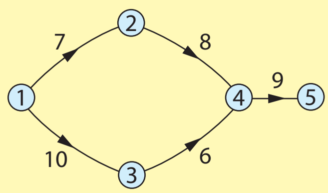


Figure 55

Remarque

Pour chercher le chemin de 1 à 5 ayant la valeur maximale, il suffit de chercher le sous-chemin de 1 à 4 ayant la valeur maximale.
En effet, par l'absurde, **tout sous-chemin d'un chemin optimal est optimal**.
Ici (1, 3, 4, 5) étant le chemin optimal de 1 à 5, (1, 3, 4) est le sous-chemin optimal de 1 à 4 car si c'était (1, 2, 4), alors (1, 2, 4, 5) serait optimal de 1 à 5, ce qui est faux.

6 Ordonnancement

L'ordonnancement consiste à déterminer et à présenter sous forme de graphe l'ordre dans lequel les différentes tâches constituant un projet doivent être exécutées, certaines en parallèle, afin d'optimiser le processus.

Ce projet peut être une construction dans le bâtiment ou les travaux publics, une fabrication dans l'industrie, une mise en service d'un dispositif informatique professionnel…

À partir de la liste des tâches, de leur durée et des contraintes d'antériorité de certaines par rapport à d'autres, il s'agit de préciser non seulement la chronologie détaillée des différentes tâches, certaines pouvant être effectuées en parallèle, et la durée totale minimale du processus, mais aussi les éventuelles conséquences d'un retard dans la réalisation d'une tâche ou les tâches dont la durée doit être réduite de façon prioritaire si l'on veut diminuer la durée totale du processus.

L'étude détaillée d'un exemple va nous permettre de présenter une méthode très répandue précédant la réalisation d'un diagramme de Gantt utilisé très largement pour visualiser la planification des opérations.

Exemple

Nous ne précisons pas ici la nature du projet et de chacune de ses tâches pour faciliter la transposition à des exemples concrets de nature très diverse.

Un projet est constitué de huit tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâches	Durée (en jours)	Tâches précédentes
A	1	
B	3	A
C	2	A
D	5	B
E	1	B, C
F	7	C
G	4	B, E, F
H	2	D, G

Ce tableau est appelé tableau des contraintes, les colonnes 1 et 3 constituant le tableau des prédécesseurs.

Remarque

Pour « tâches précédentes », il faut comprendre ici tâches **immédiatement** antérieures.
Ainsi pour la tâche H les tâches immédiatement antérieures sont uniquement D et G alors que, la tâche B étant immédiatement antérieure à D, il est évident que la tâche B doit précéder la tâche H : on a la chronologie $B \to D \to H$.

À la place de « tâches précédentes », on peut rencontrer les expressions « tâches antérieures », « opérations préalables », « tâches prérequises », « antécédents immédiats »…

A. Méthode MPM

La méthode des potentiels Métra (MPM) a été inventée par le chercheur français Bernard Roy en 1958 dans la société conseil Métra pour la construction du paquebot France et de la première centrale nucléaire EDF.

Voir le paragraphe 5D.

Voir le tableau des contraintes.

Classement et représentation des tâches par niveau

• On place au niveau 0 les tâches qui n'ont pas de tâches précédentes, c'est-à-dire ici la tâche *A* ; **niveau 0 : *A***.

• On obtient de même les tâches de chaque niveau en enlevant chaque fois les tâches déjà affectées à un niveau : elles n'ont alors plus de tâches précédentes.

Tâches restantes	Tâches précédentes
B	
C	
D	*B*
E	*B, C*
F	*C*
G	*B, E, F*
H	*D, G*

Niveau 1 : *B, C*

Tâches restantes	Tâches précédentes
D	
E	
F	
G	*E, F*
H	*D, G*

Niveau 2 : *D, E, F*

Tâches restantes	Tâches précédentes
G	
H	*G*

Niveau 3 : *G*

Tâche restante	Tâche précédente
H	

Niveau 4 : *H*

Nous obtenons ainsi le tableau de tâches par niveau.

Niveau	Tâches
0	*A*
1	*B, C*
2	*D, E, F*
3	*G*
4	*H*

Nous pouvons traduire ce tableau sous forme de graphe (fini, simple, orienté et valué) où :
– chaque tâche est représentée par un sommet, les sommets étant alignés verticalement par niveau ;
– les arcs entre les sommets indiquent l'antériorité des tâches ;
– le nombre associé à chaque arc donne la durée de la tâche à l'origine de l'arc ;
– deux sommets ne correspondant pas à des tâches concrètes sont placés aux extrémités du graphe : DÉBUT et FIN.

Ce nombre peut aussi intégrer un délai : Voir la remarque ci-après.

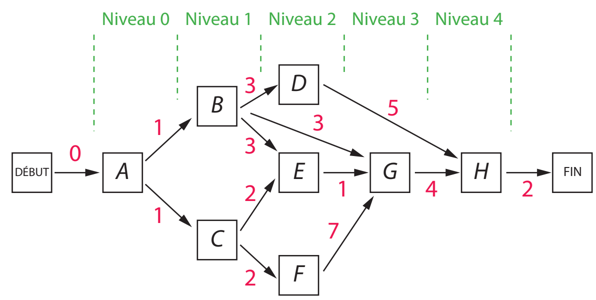


Figure 56

Remarques

1. Nous pouvons rencontrer des contraintes de succession autres que la durée d'une tâche ; en voici deux exemples avec leurs conséquences numériques et graphiques :

– La tâche B ne peut débuter au mieux que 2 jours après la fin de la tâche A. Dans ce cas la valeur associée à l'arc AB n'est plus la durée 1 jour de la tâche A mais $1 + 2 = 3$ jours. Cette valeur est appelée le **potentiel** de l'arc AB.

C'est cette notion de Potentiel qui figure dans le nom de la méthode MPM.

$$\boxed{A} \xrightarrow{1} \boxed{B} \quad \text{Devient} \quad \boxed{A} \xrightarrow{3} \boxed{B}$$

– La tâche D ne peut débuter au mieux que 5 jours après le début du processus.
Dans ce cas on ajoute un nouvel arc de **potentiel** 5 au graphe.

$$\boxed{\text{DÉBUT}} \xrightarrow{5} \boxed{D}$$

2. Dans cet exemple très simple, le graphe valué ci-dessus nous permet de donner tous les chemins permettant de réaliser le processus en dressant la liste des tâches de chacun, de calculer la valeur de chaque chemin, c'est-à-dire la durée totale associée à chacun et d'en déduire la durée minimale du processus.

La valeur d'un chemin d'un graphe valué est définie au paragraphe **5E**.

On commence par le chemin le plus « haut » sur le graphe et on « descend ».

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} D \xrightarrow{5} H \xrightarrow{2}$ FIN : 11 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 10 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 11 jours.

DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 10 jours.

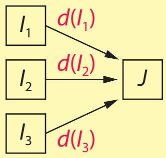
DÉBUT $\xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} F \xrightarrow{7} G \xrightarrow{4} H \xrightarrow{2}$ FIN : 16 jours.

Pour que toutes les tâches soient effectuées, nous constatons qu'il faut 16 jours : en effet, en 11 jours les tâches des quatre premiers chemins peuvent être réalisées, mais il manque alors la tâche F.
Ainsi, dans cet exemple très simple, **la durée minimale du processus correspond au chemin dont la valeur est la plus grande**.

Nous allons compléter ce graphe par quatre informations numériques associées à chaque tâche qui vont nous permettre notamment de déterminer (facilement) la durée totale minimale du processus, y compris dans le cas de processus complexes ne permettant pas de dresser aisément la liste des chemins les réalisant.

Ces informations permettent aussi de choisir les contraintes à modifier prioritairement pour améliorer le processus.

On peut aussi définir la date au plus tôt de la fin d'une tâche.



$T(J)$ est le plus grand des trois nombres $T(I_1)+d(I_1)$, $T(I_2)+d(I_2)$ et $T(I_3)+d(I_3)$.

Date au plus tôt de début d'une tâche

À RETENIR

La date au plus tôt *T*(*J*) de début d'une tâche *J* est la date à partir de laquelle toutes les tâches précédant (immédiatement) *J* sont terminées.

$T(J)$ est le plus grand des nombres $T(I)+d(I)$ où
I est une tâche précédant immédiatement *J*,
$T(I)$ est la date au plus tôt de début de la tâche *I*,
$d(I)$ est la durée de la tâche *I*.

Si on prend une autre valeur t_0 pour date au plus tôt de DÉBUT, on ajoute t_0 à toutes les valeurs $T(I)$ obtenues ici.

Exemples

Par convention on prend 0 pour date au plus tôt de DÉBUT.

$T(A)=0$ car *A* n'a pas de tâche antérieure.

$T(B)=T(A)+d(A)=0+1=1$ car *A* est la seule tâche précédant *B* (voir le tableau des contraintes ou le graphe ci-dessus).

De même $T(C)=T(A)+d(A)=1$ et $T(D)=T(B)+d(B)=4$.

B et *C* sont les deux tâches précédant E ;

$T(B)+d(B)=4$ et $T(C)+d(C)=3$, donc $T(E)=4$ car $4>3$.

$T(F)=T(C)+d(C)=3$.

B, *E* et *F* sont les trois tâches précédant *G* ;

$T(B)+d(B)=4$, $T(E)+d(E)=5$ et $T(F)+d(F)=10$,

donc $T(G)=10$ car c'est le plus grand des trois nombres 4, 5 et 10.

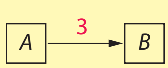
On peut noter $10=\max\{4, 5, 10\}$

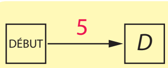
D et *G* sont les deux tâches précédant *H* ;

$T(D)+d(D)=9$ et $T(G)+d(G)=14$, donc $T(H)=14$ car $14>9$.

$T(\text{FIN})=T(H)+d(H)=14+2=16$ car *H* est la seule tâche précédant FIN.

Voir la remarque 1 du début du paragraphe **A**.



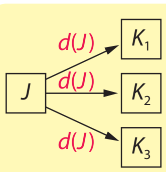


Remarque

Dans le cas où la tâche *B* ne peut débuter au mieux que 2 jours après la fin de la tâche *A*, on remplace la durée $d(A)=1$ par le potentiel $d(A, B)=3$ de l'arc *AB*.
On obtient alors $T(B)=T(A)+d(A, B)=0+3=3$.

De même dans le cas où la tâche *D* ne peut débuter au mieux que 5 jours après le début du processus, $T(D)$ est le plus grand des deux nombres $T(B)+d(B)$ et $0+d\,(\text{DÉBUT}, D)=5$.

On peut aussi définir la date au plus tard de la fin d'une tâche.



$t(J)$ est le plus petit des trois nombres $t(K_1)-d(J)$, $t(K_2)-d(J)$ et $t(K_3)-d(J)$.

Date au plus tard de début d'une tâche

À RETENIR

La date au plus tard *t*(*J*) de début d'une tâche *J* est la date la plus grande permettant de commencer la tâche sans retarder la fin du projet.

$t(J)$ est le plus petit des nombres $t(K)-d(J)$ où
K est une tâche succédant immédiatement à *J*,
$t(K)$ est la date au plus tard de début de la tâche *K*,
$d(J)$ est la durée de la tâche *J*.

Remarquez qu'on parcourt le graphe à l'envers.

On peut aussi s'aider en construisant d'abord le tableau des successeurs.

Tâche	Successeurs
H	
G	H
F	G
E	G
D	H
C	E, F
B	D, E, G
A	B, C

Exemples

Par convention la date au plus tard du début de FIN est sa date au plus tôt de début, c'est-à-dire ici 16.

$t(H) = t(\text{FIN}) - d(H) = 16 - 2 = 14$ car H a pour seul successeur FIN.

$t(G) = t(H) - d(G) = 14 - 4 = 10$ car G a H pour seul successeur.

De même $t(F) = t(G) - d(F) = 3$, $t(E) = t(G) - d(E) = 9$ et $t(D) = t(H) - d(D) = 9$.

E et F sont les deux successeurs de C ;
$t(E) - d(C) = 7$ et $t(F) - d(C) = 1$, donc $t(C) = 1$ car $1 < 7$.

D, E et G sont les trois successeurs de B ;
$t(D) - d(B) = 6$, $t(E) - d(B) = 6$ et $t(G) - d(B) = 7$, donc $t(B) = 6$ car $6 < 7$.

B et C sont les deux successeurs de A ;
$t(B) - d(A) = 5$ et $t(C) - d(A) = 0$, donc $t(A) = 0$.

Par convention on prend $t(A) = 0$ pour date au plus tard de DÉBUT.

C'est une conséquence immédiate des définitions de $T(J)$ et de $t(J)$.

Remarques

1. Observez que pour toute tâche J, $T(J) \leq t(J)$.
2. La remarque relative aux dates $T(J)$ se transpose aux dates $t(J)$: on remplace alors $d(J)$ par le potentiel $d(J, K)$ de l'arc JK.

Marge totale d'une tâche

À RETENIR

La marge totale $MT(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la fin du projet.

$$MT(J) = t(J) - T(J) \text{ où}$$

$t(J)$ est la date au plus tard de début de la tâche J,
$T(J)$ est la date au plus tôt de début de la tâche J.

Exemples

$MT(A) = t(A) - T(A) = 0$.
$MT(B) = t(B) - T(B) = 6 - 1 = 5$.

Marge libre d'une tâche

À RETENIR

La marge libre $ML(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement J.

$ML(J)$ est le plus petit des nombres $T(K) - T(J) - d(J)$ où
K est une tâche succédant immédiatement à J,
$T(K)$ et $T(J)$ sont les dates au plus tôt de début des tâches K et J,
$d(J)$ est la durée de la tâche J.

Exemples

B et C sont les deux successeurs de A.
$T(B) - T(A) - d(A) = 1 - 0 - 1 = 0$ et

$T(C) - T(A) - d(A) = 1 - 0 - 1 = 0$, donc $ML(A) = 0$.

D, E et G sont les trois successeurs de B.
$T(D) - T(B) - d(B) = 4 - 1 - 3 = 0$,
$T(E) - T(B) - d(B) = 4 - 1 - 3 = 0$ et
$T(G) - T(B) - d(B) = 10 - 1 - 3 = 6$, donc $ML(B) = 0$.

La **marge certaine** est aussi appelée **marge absolue**.

Remarques

1. On peut aussi définir **la marge certaine MC(J) d'une tâche J** : c'est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement J, et ceci **bien que la tâche J ait commencé à la date au plus tard $t(J)$**.

$$MC(J) = \begin{cases} \textbf{le plus petit des nombres } T(K) - t(J) - d(J) \\ \textbf{si ce nombre n'est pas négatif,} \\ \textbf{0 sinon,} \end{cases}$$

où K est une tâche succédant immédiatement à J,
$T(K)$ est la date au plus tôt de début de la tâche K,
$t(J)$ est la date au plus tard de début de la tâche J,
$d(J)$ est la durée de la tâche J.

Ainsi pour calculer $MC(B)$ où B a trois successeurs D, E et G, on calcule $T(D) - t(B) - d(B) = 4 - 6 - 3 = -5 < 0$.

Donc $MC(B) = 0$.

2. Pour toute tâche J, on a :

$$MT(J) \geq ML(J) \geq MC(J) \geq 0.$$

Graphe par la méthode MPM

Le graphe du projet par la méthode MPM est obtenu à partir du graphe précédent en complétant chaque sommet représentant une tâche J par les quatre nombres $T(J)$, $t(J)$, $MT(J)$ et $ML(J)$ présentés de la façon suivante.

Nom de la tâche			J	
Date au plus tôt	Date au plus tard	c'est-à-dire	$T(J)$	$t(J)$
Marge totale	Marge libre		$MT(J)$	$ML(J)$

Nous obtenons ainsi le graphe suivant.

Nous rappelons ici les niveaux des tâches.

La signification des flèches bleues est données à la fin de ce paragraphe.

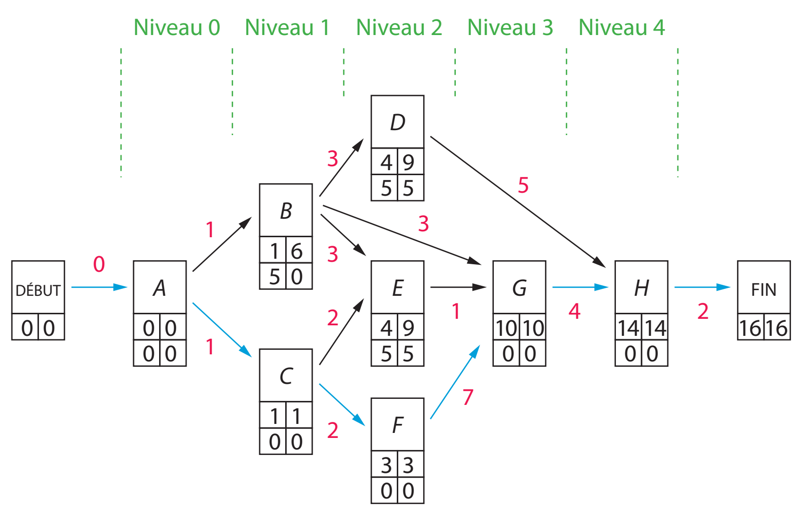


Figure 57

Tâches critiques, chemin critique, durée minimale

À RETENIR

Une tâche critique est une tâche de marge totale nulle.

Les dates de début au plus tôt et au plus tard sont égales.

Voir ci-dessus la définition de la marge totale.

En conséquence tout retard pour le début d'une tâche critique entraîne un retard pour l'achèvement du projet.

Exemple

A, C, F, G et H sont les tâches critiques du projet étudié ici.

À RETENIR

Un chemin critique est constitué d'une succession de tâches critiques reliant le début à la fin.

Il est représenté en bleu sur le graphe ci-dessus.

Exemple

$A \to C \to F \to G \to H$ est le chemin critique du projet étudié ici.

Remarques

Nous l'avons déjà observé en remarque au début de ce paragraphe.

1. Un graphe peut avoir plusieurs chemins critiques.

2. Un chemin critique est un chemin reliant le début à la fin dont la valeur (ici mesurée par la durée de ses tâches) est la plus grande.

À RETENIR

La durée minimale de réalisation d'un projet est la valeur d'un chemin critique, c'est-à-dire la somme des durées des tâches critiques qui le constituent.

Exemple

Pour le projet étudié ici, la durée minimale de réalisation est
$1 + 2 + 7 + 4 + 2 = 16$ jours.

Remarque

Si l'on veut diminuer la durée totale d'un projet, il faut prioritairement essayer de diminuer la durée des tâches **critiques**.

B. Méthode PERT

Le programme de mathématiques de BTS SIO sur l'ordonnancement précise : « méthode MPM **ou** méthode PERT », **le OU permettant un choix, y compris lors des évaluations**.

Compte tenu des difficultés propres à la méthode PERT, méthode plus ancienne que la méthode MPM, qui demande une prise d'initiative importante, notamment pour la construction d'un graphe comportant un certain nombre (ni trop, ni trop peu) de tâches dites fictives de durée nulle pour respecter les conditions d'antériorité, nous faisons le choix de réserver le temps d'apprentissage dans l'horaire de mathématiques sur l'agencement à la seule méthode MPM, méthode qui se prête mieux que la méthode PERT à un traitement informatique.

EXERCICES

LES CAPACITÉS ATTENDUES	Exercices corrigés
• Calcul des propositions et des prédicats	
Traiter un exemple simple de calcul portant sur un énoncé et utiliser des connecteurs logiques pour exprimer une condition.	1, 2, 3
Passer du langage courant au langage mathématique et inversement.	12, 66
Exprimer, dans un cas simple, la négation d'un prédicat.	12, 57
• Calcul booléen	
Mener des calculs portant sur des variables booléennes.	22, 23, 24, 33, 66
Simplifier une expression booléenne en utilisant un tableau de Karnaugh.	29, 58, 61, 62, 66
• Éléments de la théorie des ensembles	
Traiter un exemple de contrainte menant à une relation d'ordre	35
• Graphes et ordonnancement	
Passer d'un mode de représentation à un autre pour un graphe donné.	68, 70
Obtenir et interpréter, pour une matrice d'adjacence *M* donnée, les coefficients d'une puissance entière de *M* ou d'une puissance boolénne de *M*.	41, 59, 60, 67
Mettre en œuvre un algorithme.	51, 52, 53, 54, 55, 56
Résoudre un problème d'ordonnancement.	73

Calcul des propositions et des prédicats

Calcul propositionnel

1. ++ Beaucoup d'implications

1. Établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

a) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$; **b)** $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

2. Ces deux propositions sont-elles équivalentes?

CORRIGÉ P. 172

2. + Beaucoup d'équivalences

Mêmes questions qu'à l'exercice **1** en remplaçant $\Rightarrow$ par $\Leftrightarrow$.

CORRIGÉ P. 172

3. +++ Avec seulement $\neg$ et $\vee$

1. Déterminer une proposition équivalente à $P \wedge Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

2. Écrire une proposition équivalente à $P \Rightarrow Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

3. En déduire une proposition équivalente à $P \Leftrightarrow Q$ qui ne comporte que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

CORRIGÉ P. 172

4. +++ Négation d'une implication

1. La négation de l'implication P $\Rightarrow$ Q est-elle équivalente à l'une des implications suivantes :

$P \Rightarrow \neg Q$, $\neg P \Rightarrow Q$, $\neg P \Rightarrow \neg Q$, $Q \Rightarrow P$,
$Q \Rightarrow \neg P$, $\neg Q \Rightarrow P$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$?

2. Écrire une proposition équivalente à $P \Rightarrow Q$ ne comportant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

3. En déduire une proposition équivalente à $\neg(P \Rightarrow Q)$ ne comportant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

4. En déduire une proposition équivalente à la négation de $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ où p et q sont deux prédicats.

5. Appliquer ce qui précède à la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 > 1 \Rightarrow x > 1.$$

5. + Simplifications

1. a) Établir la table de vérité de la proposition suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q).$$

b) À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

2. Mêmes questions avec

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q).$$

6. ++ Le connecteur « nand »

La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée $P \mid Q$, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.

Ce connecteur est aussi appelé « nand », contraction de « no and », c'est-à-dire « non et ».

1. Établir la table de vérité de $P \mid Q$.

2. Démontrer que pour toute proposition P, $\neg P \Leftrightarrow P \mid P$.

3. Déduire de la définition de $P \mid Q$ et du résultat du **2** une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur $\mid$ apparaît.

4. Démontrer à l'aide d'une loi de Morgan que, pour toutes propositions P, Q, $P \vee Q \Leftrightarrow ((P|P)|(Q|Q))$.
Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nand ».

7. +++ Le connecteur *« nor »*

Le connecteur de Peirce est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée $P \downarrow Q$, équivalente à $\neg(P \vee Q)$.
Ce connecteur est aussi appelé « nor », contraction de « no or », c'est-à-dire « non ou ».
1. P étant une proposition quelconque, déterminer une proposition équivalente à $\neg P$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.
2. P, Q étant des propositions quelconques, déterminer une proposition équivalente à $P \vee Q$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.
3. Même question en remplaçant $\vee$ par $\wedge$.
Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nor ».

8. + Recherche d'associativité

Le connecteur « nand » est défini à l'exercice **6**.
1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
a) $(P|Q)|R$; **b)** $P|(Q|R)$.
2. Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

9. + Recherche d'associativité *(suite)*

Même exercice que le précédent en remplaçant le connecteur « nand » par le connecteur « nor » défini à l'exercice **7**.

10. + Recherche de distributivité

Les connecteurs « nand » et « nor » sont définis aux exercices **6** et **7**.
1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
a) $P \downarrow (Q|R)$;
b) $(P \downarrow Q)|(P \downarrow R)$.
Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?
2. Même question en permutant $|$ et $\downarrow$.

11. ++ Recherche d'équivalence

1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
a) $P \wedge Q) \Rightarrow R$;
b) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$;
c) $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$.
2. En déduire une équivalence entre deux des trois propositions ci-dessus.

Calcul des prédicats

12. +++ Traductions, quantificateurs et négation

1. a) Traduire en écriture symbolique la proposition suivante et déterminer sa valeur de vérité.
Il existe un nombre entier naturel inférieur ou égal à tout nombre entier naturel.
b) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de cette proposition.
2. a) Traduire en écriture symbolique la proposition suivante :
Il existe un nombre entier naturel supérieur ou égal à tout nombre entier naturel.
b) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de cette proposition.
c) Quelle est la valeur de vérité de cette négation ?
CORRIGÉ P. 172

13. + Traductions et quantificateurs

Traduire en écriture symbolique chacune des propositions suivantes et déterminer sa valeur de vérité.
1. Tout nombre réel a un carré positif.
2. Il existe un nombre réel dont le carré est positif.
(On rappelle que l'ensemble des nombres réels positifs est l'intervalle $[0, +\infty[$.)

14. ++ Traductions et quantificateurs *(suite)*

Traduire en écriture symbolique chacune des propositions suivantes et déterminer la valeur de vérité de la première.
1. Toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres.
2. Il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces nombres.

15. ++ Négation

Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de chacune des deux propositions figurant dans l'exercice **13**.

16. ++ Négation *(suite)*

1. Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de chacune des deux propositions figurant dans l'exercice **14**.
2. Déterminer la valeur de vérité de la négation de la première proposition.

17. +++ Ordre des quantificateurs

1. Donner un exemple de suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, possédant la propriété suivante :

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq M.$$

2. a) Écrire la négation de la proposition énoncée au **1.**.
b) Donner un exemple de suite pour laquelle cette négation est vraie.
3. Démontrer que toutes les suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ possèdent la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists M \in \mathbb{R} \qquad u_n \leq M.$$

Langage ensembliste

18. + Ne pas simplifier

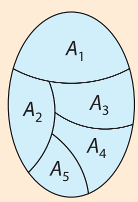
1. Donner un exemple de trois ensembles A, B, C tels que $A \cap C = B \cap C$ et $A \neq B$.
Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme.
2. Même question en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

19. ++ Partition

▶ *n sous-ensembles non vides $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E forment une **partition** de E si et seulement si chaque élément de E appartient à un A_i et à un seul (ce qui est équivalent à*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \text{ et } A_i \cap A_j = \varnothing$$

pour tout $i \neq j$).



1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
$A = \{a, c, f\}$, $\quad B = \{b, g\}$, $\quad C = \{d, h\}$.
Représenter ces ensembles à l'aide d'un diagramme.
A, B, C forment-ils une partition de E ?
2. Même question avec A, B, C' où $C' = \{d, e, f, h\}$.
3. Même question avec A, B', C où $B' = \{b, e, g\}$.

20. ++ Partitions

1. Trouver toutes les partitions de $E = \{1, 2, 3\}$.
2. Même question avec $E' = \{1, 2, 3, 4\}$.

21. +++ Différence symétrique

A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit $A \Delta B$ par

$$A \Delta B = \{x \in E ; \quad x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}.$$

1. Représenter $A \Delta B$ à l'aide d'un diagramme.
2. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta E$, $A \Delta \varnothing$.
3. Démontrer que pour tous sous ensembles A, B de E,

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

4. On se place dans le cas particulier où
$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, c, e, g, i\}$
et $C = \{c, d, e, h\}$.
Comparer $(A \Delta B) \Delta C$ et $A \Delta (B \Delta C)$.

▶ *$A \Delta B$ s'appelle la différence symétrique de A et B.*
$A \Delta B = \{x \in E ; x \in A \text{ xor } x \in B\}$
où xor est le « ou exclusif » dont la table de vérité est :

P	Q	P xor Q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Calcul booléen

22. ++ Élément nul et élément unité

L'ensemble B est muni d'une structure d'algèbre de Boole d'élément nul 0 et d'élément unité 1.
Démontrer les deux propositions suivantes :
$\forall a \in B, a + 1 = 1$;
$\forall a \in B, a0 = 0$.
CORRIGÉ P. 172

23. ++ Absorption

L'ensemble B est muni d'une structure d'algèbre de Boole d'élément nul 0 et d'élément unité 1.
Démontrer les deux propositions suivantes :
$\forall (a, b) \in B^2, a + ab = a$;
$\forall (a, b) \in B^2, a(a + b) = a$.
CORRIGÉ P. 173

24. +++ Complément

L'ensemble B est muni d'une structure d'algèbre de Boole d'élément nul 0 et d'élément unité 1.
1. Démontrer que pour élément a de B, il existe un élément unique x de B tel que

$$a + x = 1 \quad \text{et} \quad ax = 0.$$

(Pour l'unicité on pourra démontrer que si x convient, alors

$$x + \overline{a} = x \quad \text{et} \quad \overline{a} + x = \overline{a}.$$

2. En déduire les propriétés suivantes :
a) $\forall a \in B, \overline{(\overline{a})} = a$.
b) $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.
CORRIGÉ P. 173

Dans les exercices **25** et **27**, B est un ensemble muni d'une algèbre de Boole d'élément nul 0 et d'élément unité 1.

25. + Dual

1. Démontrer que, pour tout a de B,

$$(a1)(\overline{a} + 0) = 0.$$

2. Écrire la propriété duale.

26. + Multiple du complément

Démontrer que, pour tous a et b de B,

$$a + \overline{a}b = a + b.$$

27. ++ Redondance

Démontrer que, pour tous a, b, c de B,

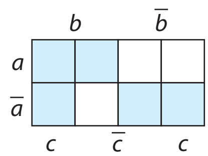
$$ac + \bar{a}b + bc = ac + \bar{a}b.$$

28. ++ Simplification

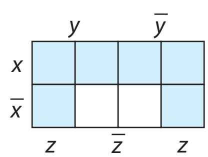
Écrire l'expression $\overline{(a+\bar{b})} + a\bar{b}$ sous la forme d'une somme de deux produits de deux variables booléennes prises parmi a, b, $\bar{a}$ et $\bar{b}$.

29. ++ Tableaux de Karnaugh

1. Écrire de deux façons possibles l'expression booléenne représentée par le tableau de Karnaugh suivant, chacune étant une somme de trois produits de deux variables booléennes prises parmi a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$, et $\bar{c}$.



2. Écrire l'expression booléenne représentée par le tableau de Karnaugh suivant sous la forme d'une somme de deux variables booléennes prises parmi x, y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$.



CORRIGÉ P. 173

30. +++ Simplification et tableau de Karnaugh

1. Écrire l'expression $\overline{y(xy+z)}$ sous la forme d'un produit de trois variables booléennes prises parmi x, y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

2. a) Écrire l'expression $(a+\bar{b}c)(b+\bar{c})$ sous la forme d'une somme de deux produits de deux variables booléennes prises parmi a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$.

b) Représenter cette expression dans un tableau de Karnaugh et en déduire une nouvelle écriture sous la forme d'une somme de trois produits de trois des variables booléennes énumérées au **a)**.

31. +++ Simplification et tableau de Karnaugh

1. a) Représenter l'expression

$$abc + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

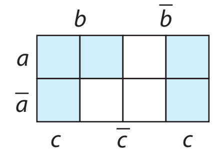
dans un tableau de Karnaugh.

b) En déduire une écriture sous la forme d'une somme de trois produits de deux variables booléennes prises parmi a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$.

2. Retrouver cette écriture par le calcul.

32. +++ Le tableau de Karnaugh est donné

On donne le tableau de Karnaugh suivant.



1. En déduire une première écriture de l'expression booléenne correspondante.

2. Déterminer graphiquement une nouvelle écriture de la même expression booléenne ne contenant que trois variables booléennes prises parmi a, b, c et leurs compléments.

3. Retrouver cette dernière écriture par le calcul.

33. +++ Somme disjonctive et équivalence

Soit B un ensemble non vide qui, muni d'une addition, d'une multiplication et d'une opération complément notée $a \mapsto \bar{a}$, possède une structure d'algèbre de Boole avec 0 pour élément nul et 1 pour élément unité.

On définit dans B la somme disjonctive, notée $\oplus$, et l'équivalence, notée $\leftrightarrow$, de la façon suivante.

Pour tous a, b de B, $a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$;

Pour tous a, b de B, $a \leftrightarrow b = ab + \bar{a}\bar{b}$.

1. Soit a un élément quelconque de B. Calculer :

a) $a \oplus a$, $a \oplus \bar{a}$, $a \oplus 1$, $a \oplus 0$;

b) $a \leftrightarrow a$, $a \leftrightarrow \bar{a}$, $a \leftrightarrow 1$, $a \leftrightarrow 0$.

2. Soit a et b des éléments quelconques de B.

Démontrer par le calcul les égalités suivantes :

a) $\overline{a \oplus b} = a \leftrightarrow b$;

b) $\overline{a \leftrightarrow b} = a \oplus b$.

c) Représenter sur un tableau de Karnaugh $a \leftrightarrow b$ et $a \oplus b$.

3. Soit a un élément quelconque de B.

Calculer $(a \leftrightarrow a) \leftrightarrow a$, $\quad (a \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow a$,

$(a \leftrightarrow 1) \leftrightarrow a$, $\quad (a \leftrightarrow 0) \leftrightarrow a$.

4. Soit a, b, c des éléments quelconques de B.

a) Démontrer par le calcul l'égalité

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}.$$

b) Calculer de même $a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$ et démontrer l'égalité $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$.

L'opération $\leftrightarrow$ étant associative, on peut noter sans parenthèses $a \leftrightarrow b \leftrightarrow c$ l'un quelconque des deux membres de l'égalité ci-dessus.

5. a) Démontrer de même que, pour tous éléments a, b, c de B,

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

b) Déduire de ce qui précède que, pour tous éléments a, b, c de B,

$$a \oplus b \oplus c = a \leftrightarrow b \leftrightarrow c.$$

Ce résultat est à comparer à ceux de la question **2.**

c) Représenter sur un tableau de Karnaugh $a \oplus b \oplus c$.

CORRIGÉ P. 173

Éléments de la théorie des ensembles

Relations binaires

34. ++ **Relation d'ordre dans $\mathbb{N}^2$**

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$\forall(x, y)\in\mathbb{N}^2, \forall(x', y')\in\mathbb{N}^2 \quad (x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$.

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est-elle totale ou partielle ?

35. +++ **Ordre lexicographique**

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$\forall(x, y)\in\mathbb{N}^2, \forall(x', y')\in\mathbb{N}^2$

$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

2. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

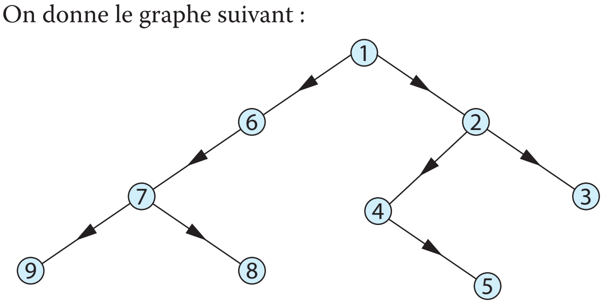
3. On admet que $\mathcal{R}$ est transitive. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est-elle partielle ou totale ?

4. La relation $\mathcal{R}$ permet de classer et de trier des chaînes de caractères à deux éléments ; elle correspond au début du classement alphabétique d'un dictionnaire. Proposer une définition étendant la relation $\mathcal{R}$ à $\mathbb{N}^3$.

CORRIGÉ P. 173

36. +++ **Arbre binaire**

On donne le graphe suivant :



Sur l'ensemble des sommets $S = \{1,2,\ldots, 9\}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$\forall(x, y)\in S^2 \qquad x\,\mathcal{R}\,y$ si et seulement si $(x = y)$ ou (il existe un chemin de x à y ou de y à x dont tous les arcs sont « orientés à droite »).

Ainsi, par exemple, $2\,\mathcal{R}\,3$ et $8\,\mathcal{R}\,7$, mais $7 \not\mathcal{R}\, 4$ et $2 \not\mathcal{R}\, 4$.

L'objectif de l'exercice est de justifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Sommets x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sommets y tels que $x\,\mathcal{R}\,y$									

2. Quelle partie de la définition de $\mathcal{R}$ justifie que $\mathcal{R}$ est réflexive ?

3. La définition de la relation $\mathcal{R}$ où x et y sont interchangeables suffit à justifier que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire :

$\forall(x, y, z)\in S^3 \qquad x\,\mathcal{R}\,y \;\text{ et }\; y\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$.

On pourra d'abord considérer le cas où $x = y = z$, puis le cas où $(x = y)$ ou $(y = z)$ ou $(z = x)$.

Dans le cas où les trois sommets x, y, z sont distincts, pour quels sommets du graphe $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z)$ est une proposition vraie ?

A-t-on alors $x\,\mathcal{R}\,z$?

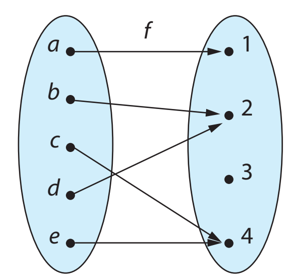
*Le graphe proposé est un cas particulier d'**arbre binaire**, c'est-à-dire d'une arborescence descendante dont le sommet initial unique est appelé **racine**, chaque sommet, ou **nœud**, ayant au plus deux successeurs appelés **fils** (fils droit et fils gauche), les sommets sans successeurs étant les **feuilles**.*

*En informatique, les **arbres binaires de recherche (ABR)** sont des arbres binaires particuliers utilisés pour effectuer des tris : chaque nœud possède une clé, c'est-à-dire un nombre satisfaisant à des conditions distinguant son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit.*

Application de *E* dans *F*

37. ++ **Image et image réciproque**

Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme ci-dessous.



1. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $A' = \{a, d, e\}$.

a) Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.

b) Comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.

c) Déterminer $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.

2. Soit $B = \{1, 2\}$ et $B' = \{3, 4\}$.

a) Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.

b) Déterminer $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B')$.

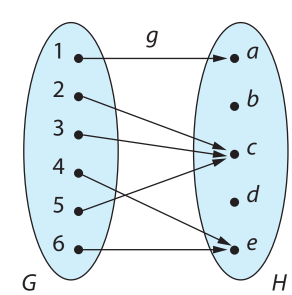
c) Déterminer $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cup B')$.

3. f est-elle injective ?

4. f est-elle surjective ?

38. ++ **Image et image réciproque**

Soit g l'application de G dans H définie par le diagramme ci-dessous.



1. Soit $C = \{1, 2\}$ et $C' = \{1, 3\}$.

a) Déterminer $g(C)$ et $g(C')$.

b) Comparer $g(C \cap C')$ et $g(C) \cap g(C')$.

c) Déterminer $g(C \cup C')$ et $g(C) \cup g(C')$.

2. Soit $D = \{a, b, c\}$, $D' = \{c, d, e\}$, $D'' = \{b, d\}$.

a) Déterminer $g^{-1}(D)$, $g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D'')$.

b) Déterminer $g^{-1}(D) \cap g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cap D')$.

c) Déterminer $g^{-1}(D) \cup g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cup D')$.

3. g est-elle injective ?

4. g est-elle surjective ?

39. ++ Composition

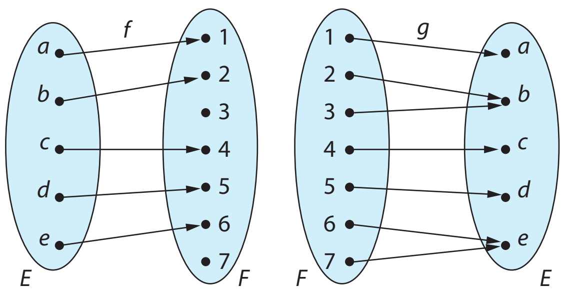
1. Déterminer l'application composée $g \circ f$ où f est définie dans l'exercice **37** et où g est définie dans l'exercice **38**.

2. $g \circ f$ est-elle injective ?

3. $g \circ f$ est-elle surjective ?

40. +++ Composition

Soit f l'application de E dans F et g l'application de F dans E définies par les diagrammes ci-dessous.



1. a) f est-elle injective ?

b) f est-elle surjective ?

2. Même question avec l'application g.

3. a) Déterminer l'application composée $g \circ f$.

b) $g \circ f$ est-elle injective ?

c) $g \circ f$ est-elle surjective ?

4. Reprendre la question **3.** avec $f \circ g$.

Graphes

41. ++ Matrice d'adjacence booléenne

La matrice d'adjacence booléenne d'un graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

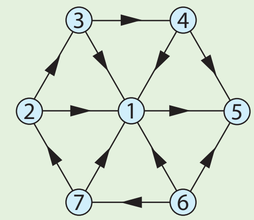
1. Calculer $M^{[2]} = M \otimes M$, puis $M \oplus M^{[2]}$, $\oplus$ et $\otimes$ étant respectivement l'addition booléenne et la multiplication booléenne des matrices.

2. Calculer $M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M$, puis $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$.

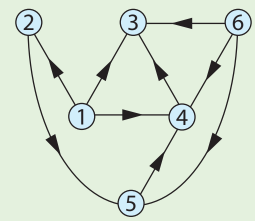
Que remarque-t-on ?

CORRIGÉ P. 174

Dans les exercices 42 à 47, G_1 est le graphe défini par la représentation graphique suivante :



et G_2 est le graphe défini par la représentation graphique suivante :



42. +++ Chemins de longueur *p*

Pour le graphe G_1, déterminer les chemins de longueur p, où $1 \leq p \leq 6$.

43. +++ Chemins de longueur *p*

Pour le graphe G_2, déterminer les chemins de longueur p, où $1 \leq p \leq 4$.

44. +++ Fermeture transitive

Déterminer la fermeture transitive du graphe G_1.

45. +++ Fermeture transitive

Déterminer la fermeture transitive du graphe G_2.

46. +++ Niveaux

1. Déterminer les niveaux du graphe G_1.

2. Dessiner une représentation géométrique du graphe G_1 ordonné par niveaux.

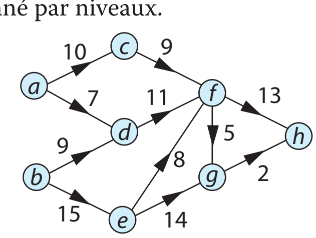
47. +++ Niveaux

1. Déterminer les niveaux du graphe G_2.

2. Dessiner une représentation géométrique du graphe G_2 ordonné par niveaux.

48. +++ Chemin optimal

La représentation géométrique ci-dessous donne un graphe ordonné par niveaux.



1. Déterminer le chemin de a à h ayant la valeur maximale.

2. Déterminer le chemin de b à h ayant la valeur minimale.

49. +++ **Chemins de longueur p**

Soit G le graphe défini par le tableau de successeurs :

Sommets	Successeurs
a	a, b
b	a, c, d
c	b, c
d	d

1. Représenter le graphe G.

2. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

3. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$.

b) Quel est le nombre situé à l'intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne de M^2 ?

Que signifie-t-il pour le graphe G ?

Donner la liste des chemins concernés.

4. a) Calculer la matrice $M^3 = M^2 \times M$.

b) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet a au sommet b ?

Donner la liste de ces chemins.

c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 issus du sommet c du graphe G ?

50. +++ **Chemins de longueur p**

Dans un centre de loisirs, parmi les nombreuses activités proposées figurent plusieurs jeux : la belote, les dames, les échecs et le tarot notés respectivement B, D, E et T.

Pour des raisons de disponibilité et d'affluence, certaines contraintes sont imposées :

- après une partie de belote (en 1 000 points), on peut jouer uniquement aux dames ou aux échecs ;
- après une partie de dames ou d'échecs, on peut jouer uniquement à la belote ou au tarot ;
- après une partie de tarot, on doit changer de jeu.

1. Dessiner une représentation du graphe orienté G correspondant.

2. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

3. a) Calculer les deux matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

b) Quelle est la signification des « 1 » présents dans la matrice $M^{[3]}$?

4. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$ et la matrice $M^3 = M^2 \times M$.

b) En déduire le nombre de chemins de longueur 3 ayant pour origine B et pour extrémité D.

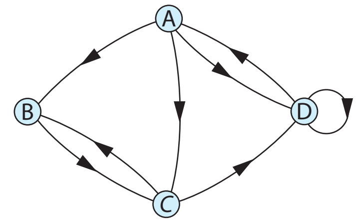
Écrire ces chemins.

c) Écrire les six circuits de longueur 3.

Exemples de mise en œuvre d'algorithmes permettant d'obtenir les chemins de longueur p d'un graphe

51. +++ **Nombre de chemins de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j**

On considère le graphe simple orienté défini par la représentation géométrique suivante



On a vu en cours que la matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Comparer le nombre de chemins de longueur 1 d'un sommet x_i à un sommet x_j du graphe, et l'élément a_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice M.

2. a) Compléter le tableau suivant, donnant les chemins de longueur 2 du graphe, en tenant compte de la boucle (D, D).

Extrémité terminale x_j / Extrémité initiale x_i	A	B	C	D
A	(A, D, A)			(A, C, D) (A, D, D)
B		(B, C, D)		
C				(C, D, D)
D				

b) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$.

c) On note $a_{ij}^{(2)}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice M^2. ($a_{ij}^{(2)}$ n'est pas en général le carré de a_{ij} défini au **1** ; c'est pourquoi l'exposant 2 est mis entre parenthèses).

Comparer dans chaque cas $a_{ij}^{(2)}$ et le nombre de chemins de longueur 2 du sommet x_i au sommet x_j.

3. a) Calculer $M^3 = M^2\, M$.

On note $a_{ij}^{(3)}$ son élément situé sur la ligne i et la colonne j.

b) Remplir la première ligne du tableau, analogue à celui de la question **2.a)**, donnant tous les chemins de longueur 3 du graphe.

c) Comparer dans chaque cas $a_{1j}^{(3)}$ et le nombre de chemins de longueur 3 du sommet $x_1 = \mathrm{A}$ au sommet x_j.

4. Pour saisir le lien entre le calcul matriciel et le comptage des chemins, on va chercher tous les chemins de longueur 3 du sommet C au sommet B en distinguant les différentes possibilités pour l'avant-dernier sommet d'un tel chemin.

a) Si l'avant-dernier sommet est A, alors le chemin cherché est constitué d'un chemin de longueur 2 du sommet C au sommet A, prolongé de l'arc (A, B).

Or, d'après le tableau du **2.a)**, (C, D, A) est le seul chemin de longueur 2 du sommet C au sommet A.

D'autre part l'arc (A, B) existe dans le graphe.

(C, D, A, B) est donc le seul chemin de longueur 3 qui convient dans ce premier cas.

b) Si l'avant-dernier sommet est B, existe-t-il un chemin de longueur 2 de C à B ?

L'arc (B, B) existe-t-il dans le graphe ?

Que conclure ?

c) Si l'avant-dernier sommet est C, montrer qu'on peut raisonner comme dans la question **a)**.

d) Si l'avant-dernier sommet est D, quel chemin de longueur 2 convient ? L'arc (D, B) existe-t-il dans le graphe ? Que conclure ?

e) Observer que, dans la multiplication $M^2 \times M$ donnant M^3, l'élément de la ligne 3 et de la colonne 2 est obtenu de la façon suivante :

$$(1 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 0) = 2.$$

Interpréter les 0 et les 1 des quatre parenthèses ci-dessus à l'aide des questions **a)**, **b)**, **c)**, **d)**.

CORRIGÉ P. 174

52. +++ Existence d'au moins un chemin de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j

On reprend le graphe de l'exercice **51**.

Sa matrice d'adjacence M ne comportant que des 0 et des 1, on définit le produit booléen de la matrice M par la matrice M de la même façon que le produit habituel des matrices mais en utilisant l'addition et la multiplication booléennes définies sur {0, 1} au paragraphe **3A** à l'aide des tables suivantes :

	0	1
0	0	1
1	1	1

Addition

	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplication

1. **a)** Calculer la matrice $M \otimes M$ ainsi obtenue, notée $M^{[2]}$, et comparer $M^{[2]}$ et M^2.

b) Que traduit la présence d'un 1 à la première ligne et à la troisième colonne ?

Même question avec le 0 de la deuxième ligne et de la première colonne.

2. **a)** Calculer $M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M$, et comparer $M^{[3]}$ et M^3.

b) Que traduit la présence d'un 1 à la première ligne et à la première colonne ?

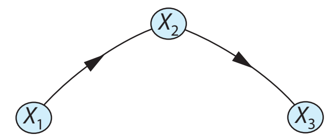
Même question avec le 0 de la deuxième ligne et de la deuxième colonne.

CORRIGÉ P. 174

Exemples de mise en œuvre d'algorithmes permettant d'obtenir la fermeture transitive d'un graphe

53. +++ Trois sommets

1. On considère le graphe simple orienté défini par la représentation géométrique ci-après.



a) Ce graphe a-t-il un chemin de longueur 2 ?

b) Ce graphe a-t-il un chemin de longueur 3 ?

2. **a)** Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.

b) Calculer $M^{[2]}$ (voir l'exercice **52**). Interpréter son nombre 1.

c) Calculer $M^{[3]}$ (voir l'exercice **52**). Quel résultat retrouve-t-on ?

3. On ajoute à ce graphe l'arc (X_1, X_3) constitué des extrémités du chemin obtenu au **1.**.

a) Dessiner une représentation géométrique de ce nouveau graphe.

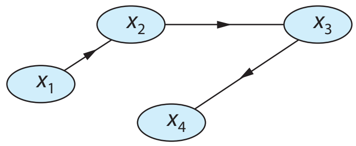
b) Donner sa matrice d'adjacence $\widehat{M}$.

c) Calculer $M \oplus M^{[2]}$ où $\oplus$ est l'addition booléenne des matrices (on fait des additions booléennes d'éléments des deux matrices M et $M^{[2]}$). Qu'observe-t-on ?

CORRIGÉ P. 175

54. +++ Quatre sommets, puis deux sommets

A. On considère le graphe simple orienté défini par la représentation géométrique ci-dessous.



1. **a)** Déterminer tous les chemins de longueur 2 du graphe.

b) Déterminer tous les chemins de longueur 3 du graphe.

c) Existe-il un chemin de longueur 4 ?

2. **a)** Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.

b) Calculer $M^{[2]}$, $M^{[3]}$ et $M^{[4]}$ (voir l'exercice **52**).

Interpréter les résultats.

3. On ajoute à ce graphe tous les arcs (x, y) tels qu'il existe un chemin du graphe initial de x à y.

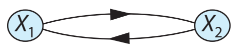
a) Dessiner une représentation géométrique de ce nouveau graphe.

b) Donner sa matrice d'adjacence $\widehat{M}$.

c) Calculer $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ (voir l'exercice **53**).

Qu'observe-t-on ?

B. Reprendre en l'adaptant la partie A avec le graphe défini par la représentation graphique ci-dessous.

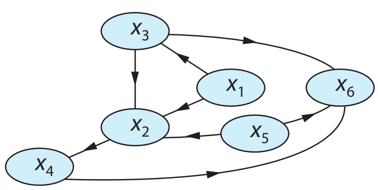


CORRIGÉ P. 175

Exemple de mise en œuvre d'algorithmes permettant d'obtenir les niveaux d'un graphe sans circuit

55. +++ **Deux méthodes pour la recherche des niveaux**

On considère le graphe simple orienté sans circuit défini par la représentation géométrique ci-dessous.



Les parties A et B sont indépendantes.

A. 1. Donner dans un tableau la liste de tous les prédécesseurs de chaque sommet.

X_i	Prédécesseurs de X_i

2. Combien de sommets n'ont pas de prédécesseur ?
Ils constituent les éléments du niveau $N(0)$ du graphe.

3. Enlever les sommets obtenus au **2.** de toutes les lignes du tableau du **1.**.
Quel élément du tableau n'a alors plus de prédécesseur ?
Il constitue l'unique élément du niveau $N(1)$ du graphe.

4. Recommencer et déterminer ainsi les niveaux $N(2)$, $N(3)$ et $N(4)$.

5. Donner une nouvelle représentation géométrique du même graphe en respectant un classement horizontal des niveaux et des alignements verticaux des sommets de même niveau.

B. 1. a) Donner la matrice d'adjacence M du graphe à partir de la représentation graphique initiale.

b) Interpréter ses deux colonnes nulles, c'est-à-dire ne comportant que des zéros.

2. a) Calculer

$$M^{[2]} = M \otimes M \quad \text{(voir l'exercice } \mathbf{49}\text{)}.$$

b) Interpréter sa nouvelle colonne nulle.

3. Recommencer avec

$$M^{[3]}, M^{[4]}, \ldots$$

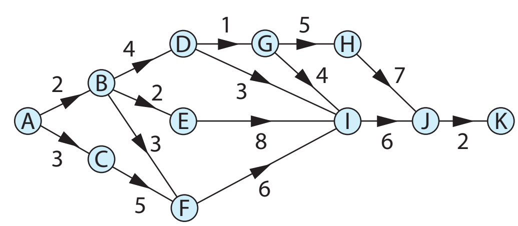
et retrouver ainsi les niveaux obtenus dans la partie A.

CORRIGÉ P. 175

Exemple de mise en œuvre d'algorithme permettant d'obtenir les chemins de valeur maximale ou minimale

56. +++ **Chemin de B à J**

La représentation géométrique ci-dessous donne un graphe **ordonné par niveaux**.



On cherche le chemin de B à J ayant la valeur maximale.

1. Reproduire ce graphe en éliminant les sommets de niveau inférieur ou égal à B, et le sommet de niveau supérieur à J.

2. Porter à côté de D la valeur du sous-chemin (B, D).

3. Procéder de même avec E et F.

4. Porter à côté de G la valeur du sous-chemin (B, D, G).

5. Porter à côté de H la valeur du sous-chemin (B, D, G, H).

6. Porter à côté de I la plus grande des valeurs des quatre sous-chemins allant de B à I.

7. Porter à côté de J la plus grande des valeurs du chemin (B, D, G, H, J) et du sous-chemin sélectionné au **6.** et prolongé par (I, J).
En déduire le chemin de B à J ayant la valeur maximale et préciser cette valeur.

8. Déterminer de même le chemin de B à J ayant la valeur minimale et préciser cette valeur.

CORRIGÉ P. 176

RÉPONSES P. 176

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

57. + Logique

1. Soit f une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$.

On considère l'énoncé suivant : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x)$ est un entier ».

La négation de cette proposition est :

A : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) \neq 2$ » ;

B : « Pour tout réel x, $f(x) \neq 2$ » ;

C : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x)$ n'est pas un entier » ;

D : « Pour tout réel x, $f(x)$ n'est pas un entier ».

2. Soit f une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$.

On considère l'énoncé suivant : « Pour tout réel x, $f(x) \leq 1$ ».

La négation de cette proposition est :

A : « Pour tout réel x, $f(x) \geq 1$ » ;

B : « Il existe au moins un réel x, tel que $f(x) \geq 1$ » ;

C : « Pour tout réel x, $f(x) > 1$ » ;

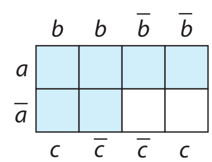
D : « Il existe au moins un réel x, tel que $f(x) > 1$ ».

58. ++ Calcul booléen

1. On considère E, fonction des variables booléennes a, b, c dont une expression est :

$E = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c}$.

E est représentée dans le tableau de Karnaugh ci-contre (partie coloriée).



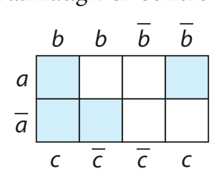
Une autre expression de E est :

$A = bc + a\overline{b}$; $B = \mathrm{a} + \overline{c}$; $C = (1 + a)\,\overline{b}$; $D = a + b$.

2. On considère E, fonction des variables booléennes a, b, c dont une expression est :

$E = abc + a\overline{b}c + \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c}$.

E est représentée dans le tableau de Karnaugh ci-contre (partie coloriée).



Une autre expression de E est :

$A = bc + \overline{ac}$; $B = \overline{a}b + ac$;

$C = \overline{a\overline{c}} + bc$; $D = (a + b)(1 + \overline{c})$.

59. ++ Graphes

1. Le graphe G comporte quatre sommets x, y, z et t.

On donne la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le sommet z possède exactement trois successeurs ;

B : Le sommet x est un prédécesseur du sommet z ;

C : Le chemin (z, y, x) est possible ;

D : Le chemin (z, x, y) est possible.

2. On utilise le même graphe que dans la question **1.** Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet t est égal à 7 ;

B : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet t est égal à 6 ;

C : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet t est égal à 5 ;

D : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet t est égal à 4.

60. ++ Graphes

1. Le graphe G comporte quatre sommets x, y, z et t.

On donne la matrice d'adjacence

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le sommet z possède exactement deux successeurs ;

B : Le sommet y est un prédécesseur du sommet x ;

C : Le chemin (x, z, y) est possible ;

D : Le chemin (t, y, z) est possible.

2. On utilise le même graphe que dans la question **1.** Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet y est égal à 6 ;

B : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet y est égal à 5 ;

C : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet y est égal à 4 ;

D : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet z et d'extrémité le sommet y est égal à 3.

EXERCICES pour le BTS

Les exercices pour le BTS sont des exercices qui pourraient figurer dans une épreuve de mathématiques pour le BTS.

Calcul booléen

61. +++ Algèbre de Boole

Dans un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole, on considère l'expression.

$A = ab\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$

1. **a)** Représenter A dans un tableau de Karnaugh.

En déduire une simplification de A.

b) Retrouver par le calcul le résultat précédent.

2. On considère l'opérateur « implication », noté $\rightarrow$, défini par : $(x \rightarrow y) = \overline{x} + y$.

a) Calculer : $(x \rightarrow 0)$

b) Démontrer que : $x + y = ((x \rightarrow 0) \rightarrow y)$

puis que : $\overline{xy} = ((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0)$.

c) Déduire des questions précédentes une écriture de A à l'aide des variables a, b, c, de la constante 0 et du seul opérateur « implication » [les opérateurs +, ., complémentation, sont exclus].

CORRIGÉ P. 176

62. +++ Algèbre de Boole

On considère l'expression E dépendant des variables booléennes a, b et c :

$E = \overline{a}\,\overline{c} + b\overline{c} + a\overline{b} + \overline{a}\,\overline{b}c$.

1. Simplifier l'expression $\overline{E}$ à l'aide de la lecture d'un tableau de Karnaugh (ou d'une table de vérité) et en déduire que : $E = \overline{b} + \overline{c}$.

2. Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à trouver un emploi, on considère pour ces personnes, trois variables booléennes définies ainsi :

$a = 1$ si la personne est âgée de 45 ans ou plus (sinon $a = 0$).

$b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus (sinon $b = 0$).

$c = 1$ si la personne a déjà suivi une formation l'année précédente (sinon $c = 0$).

Une formation qualifiante sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

- avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins de un an,
- avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente,
- être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente,
- avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins de un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères, pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

a) Écrire l'expression booléenne F en fonction des variables a, b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation qualifiante

b) En déduire, en utilisant le résultat du **1**, les personnes qui ne pourront pas participer à la formation qualifiante et qui participeront donc à un stage d'insertion en entreprise.

CORRIGÉ P. 176

63. +++ Algèbre de Boole

1. On considère l'expression E des variables booléennes a, b, c et définie par :

$E = \overline{a}bc + ac + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}$.

a) Représenter E en utilisant un tableau de Karnaugh ; en déduire la simplification de l'expression E.

b) Montrer par un calcul direct que : $E = c + \overline{b}$.

2. On considère l'opérateur nand, noté $\uparrow$, et défini par : $a \uparrow b = \overline{ab}$.

a) Calculer $a \uparrow a$ puis $\overline{a} \uparrow \overline{b}$.

b) Déduire de ce qui précède l'écriture de l'expression $\overline{b} + c$ en utilisant l'opérateur $\uparrow$.

64. +++ Algèbre de Boole

1. On considère un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole.

a) Soit l'expression $A = abc + a\overline{b}c + \overline{a}bc$, où a, b, c désignent trois éléments de E. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b) Montrer, par calcul direct, que : $A = ac + \overline{a}bc$ ou encore : $A = ac + bc$.

2. Un immeuble comprend six logements dont les surfaces figurent sur le tableau ci-dessous :

Numéro du logement	1	2	3	4	5	6
Superficie en m^2	55	105	112	228	247	253

Les logements 1 et 3 appartiennent à Monsieur A, les logements 2 et 4 appartiennent à Madame B, les 5 et 6 appartiennent à Monsieur C. Chacun détient à l'assemblée des copropriétaires un nombre de voix égal à la superficie totale de ses logements, exprimée en m^2. Ainsi, Monsieur A dispose de : $55 + 112 = 167$ voix.

Une proposition concernant le remplacement de la chaudière est mise au vote à l'assemblée. Pour être adoptée, elle doit recueillir la majorité des voix, soit 501 voix. Si A vote « pour », son vote favorable est désigné par : a. S'il vote « contre », ou s'il s'abstient, son vote est désigné par : $\overline{a}$. De même pour B et C.

a) Quelle situation de vote traduit le produit boolien : $\overline{a}\,\overline{b}c$?

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour les 8 situations de vote possibles.

Situations possibles	Nombre de voix	Proposition votée (écrire oui ou non)
abc	1 000	oui
$\bar{a}bc$		
$a\bar{b}c$		
$ab\bar{c}$		
$\bar{a}\bar{b}c$		
$\bar{a}b\bar{c}$		
$a\bar{b}\bar{c}$		
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$		

c) Écrire l'expression booléenne qui exprime la condition pour que la proposition soit adoptée.

d) En utilisant les résultats de la question **1.**, écrire cette condition sous forme simplifiée, puis la traduire par une phase explicative.

65. +++ Algèbre de Boole

Le responsable du parc informatique d'une entreprise envisage l'acquisition de nouveaux ordinateurs. Pour s'équiper, ce responsable s'adresse à une entreprise de vente de matériel informatique qui propose des configurations prédéfinies (ordinateur et périphériques).

On définit les critères suivants :

a : la configuration comprend un graveur de DVD ;

b : la configuration comprend une imprimante ;

c : la configuration comprend un scanner.

Les contraintes d'équipement excluent les configurations avec graveur DVD mais sans scanner ainsi que les configurations sans graveur et sans imprimante.

1. Donner une expression booléenne E traduisant les conditions d'exclusion d'une configuration.

2. Dresser la table de Karnaugh de E.

3. Traduire l'expression booléenne $a\bar{b}c$ sous forme d'une phrase et préciser si la configuration considérée peur être acceptée.

4. À partir de la table de Karnaugh obtenue précédemment, donner l'expression F simplifiée traduisant l'acceptation d'une configuration.

5. La phrase « Les configurations acceptées sont celles qui comportent soit un graveur et un scanner soit pas de graveur et une imprimante » traduit-elle l'expression booléenne F ?

66. +++ Calcul des prédicats et calcul booléen

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

A. *Calcul des prédicats*

On note P l'ensemble des professeurs p enseignant dans un lycée et E l'ensemble des élèves e de ce lycée.

On note $q(e, p)$ le prédicat : « l'élève e connaît le professeur p ».

1. Traduire par une phrase la proposition A suivante : « $\forall e \in E,\ \exists p \in P,\ q(e, p)$ ».

2. Écrire symboliquement la proposition B : « Il existe au moins un élève qui connaît tous les professeurs ».

3. Écrire symboliquement puis traduire par une phrase les propositions $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

B. *Calcul booléen*

Dans ce lycée, un élève, selon ses activités, peut avoir des droits d'écriture sur le site internet.

On définit les critères suivants :

t : « l'élève est dans une filière d'enseignement tertiaire » ;

d : « l'élève participe au bureau des délégués » ;

s : « l'élève est dans une section de technicien supérieur ».

1. Mademoiselle B est en première dans une filière tertiaire et ne participe pas au bureau des délégués. Donner une expression booléenne traduisant la situation de mademoiselle B.

2. Un élève a des droits d'écriture sur le site du lycée si :

• il est dans une filière tertiaire et participe au bureau des délégués

ou

• il n'est pas dans une filière tertiaire et il est en section de technicien supérieur

ou

• il ne participe pas au bureau des délégués et il est en section de technicien supérieur dans une filière tertiaire.

a) Déterminer l'expression booléenne D traduisant les conditions qui donnent un droit d'écriture sur le site.

b) Mademoiselle B a-t-elle des droits d'écriture sur le site Internet ?

3. En utilisant un tableau de Karnaugh (on mettra alors en évidence les regroupements utilisés) ou une table de vérité ou le calcul booléen, montrer que : $D = s + dt$.

Traduire cette égalité par une phrase.

CORRIGÉ P. 177

Graphes

67. +++ Graphe

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

Sommets	A	B	C	D
Successeurs	A, B, D	A, C	A	C

1. Déterminer la matrice adjacente M de ce graphe.

2. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$, où $\times$ représente la multiplication des matrices.

b) Utiliser le résultat précédent pour calculer le nombre total de chemins de longueur 2 du graphe, puis le nombre de chemins de longueur 2 partant de A.

c) Citer tous les chemins de longueur 2 partant de A.

3. Citer tous les chemins de longueur 3 partant de D.

CORRIGÉ P. 177

68. +++ Calcul matriciel, graphe

A. On donne les matrices suivantes (α et β désignant des réels) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On admet que $BC = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les coefficients de la première colonne, en fonction de α et β.

2. Déterminer α et β tels que $BC = A$.

3. Calculer A^2. Que remarque-t-on vis-à-vis de la matrice C ?

B. **1.** Dessiner un graphe G orienté, de sommets a, b, c, d, dont la matrice adjacente est A.

2. **a)** Dresser la liste de tous les chemins de longueur 2 allant de a jusqu'à c.

b) Expliquer comment, en utilisant la partie A, on peut trouver sans en dresser la liste le nombre de chemins de longueur 2 allant jusqu'à c, et donner ce nombre.

3. Compléter le dessin de la question **B.1.**, *en utilisant une couleur différente*, de manière à obtenir une représentation de la fermeture transitive du graphe G.

CORRIGÉ P. 177

69. +++ Graphe

1. Soit G le graphe défini par le tableau des successeurs :

Sommets	a	b	c
Successeurs	a, b	c	c

a) Représenter le graphe G.

b) Donner la matrice d'adjacence M du graphe G.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $A^2 = A \times A$ et $A^3 = A^2 \times A$.

b) Quel est le nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne de A^2 ?

Que signifie-t-il par rapport au graphe G ?

Donner la liste des chemins concernés.

c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 issus du sommet a dans le graphe G ?

70. +++ Graphe

Le tableau ci-après est extrait d'une grille présentant les différents points d'une ville reliés par des lignes de transport en commun avec la durée des trajets en minutes. À ce tableau est associé un graphe dont les sommet sont A, B, C, D, E, F et G.

	A	B	C	D	E	F	G
A		8					3
B					4		
C						6	4
D	10		9				
E							
F		3					
G		7					

▶ *Par exemple, dans ce tableau, la cellule contenant le nombre 9 correspond à la durée (9 minutes) du trajet du bus reliant le point de départ D au point d'arrivée C.*

1. Réaliser le tableau des prédécesseurs de ce graphe, et déterminer le niveau de chacun des sommets.

2. Dessiner le graphe en ordonnant les sommets par niveaux et en marquant la longueur de chaque arc.

3. Déterminer le ou les trajet(s) de durée minimale permettant d'aller de D à E (on détaillera la méthode utilisée).

CORRIGÉ P. 177

71. +++ Graphe

On considère le graphe de sommets A, B, C, D et E pris dans cet ordre, dont on donne la matrice d'adjacence M et une partie de la matrice $M^2 = M \times M$, où $\times$ représente la multiplication des matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Compléter la matrice M^2.

b) Donner le nombre total de chemins de longueur 2 du graphe.

2. **a)** Écrire le tableau des prédécesseurs pour les sommets du graphe.

b) Donner le sommet de niveau 0. Déterminer ensuite, en expliquant la méthode utilisée, les sommets de niveau 1, de niveau 2, de niveau 3…

3. Donner une représentation géométrique du graphe dans laquelle les sommets sont ordonnés par niveaux.

4. Les sommets du graphe peuvent être assimilés à cinq villes A, B, C, D et E.

On donne le tableau des distances en kilomètres entre ces cinq villes :

Distance	A	B	C	D	E
A	0	239	310	202	255
B		0	197	165	321
C			0	108	190
D				0	156
E					0

Un touriste à l'intention de visiter trois de ces cinq villes. Il hésite sur l'ordre des villes à visiter et finit par adopter des déplacements de ville en ville correspondant aux arcs orientés du graphe.

Il utilisera une voiture qu'il louera dans une des cinq villes en optant pour un forfait kilométrique de 550 km.

Le touriste part d'une ville quelconque parmi les cinq : déterminer, en utilisant la question **1.**, l'itinéraire le plus court pour en visiter trois en tout.

72. +++ **Applications injective, surjective ; graphes**

Les questions **1.** *et* **2.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1. On considère l'ensemble $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ et l'application f de E dans E définie par $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_2$.

a) Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de l'ensemble E.

b) L'application f est-elle une injection de E dans E ? (Justifier.)

c) L'application f est-elle une surjection de E sur E ? (Justifier.)

On considère le graphe orienté G, de sommets x_1, x_2 et x_3 tel que les successeurs de x_1, x_2 et x_3 sont respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$.

d) Donner une représentation géométrique de ce graphe.

e) On note M la matrice d'adjacence de G.

On constate que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi la première ligne de M est 0 1 0.

f) On note $\widehat{G}$ la fermeture transitive de G.

On rappelle que $\widehat{G}$ est le graphe obtenu en conservant les sommets de G et en ajoutant, s'ils n'existent pas dans G, les arcs (x_i, x_j) lorsqu'il existe un chemin d'origine x_i et d'extrémité x_j dans le graphe G.

Tracer une représentation géométrique de $\widehat{G}$ et vérifier que la matrice d'adjacence $\widehat{M}$ du graphe $\widehat{G}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

g) Calculer la matrice booléenne $M^{[2]}$.

Vérifier que $\widehat{M} = M \oplus M^{[2]}$, où $\oplus$ représente l'addition booléenne des matrices.

Ordonnancement

73. +++ **Deux chemins critiques**

Un projet est constitué de quinze tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Durée (en jours)	5	3	1	4	2	3	3	4	5	2	1	4	3	5	1
Tâches précédentes				A,B	C	D	C,D	E	G	G,H	F,I	J	J	J	L,M

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le tableau des tâches par niveau.

2. Donner le tableau des successeurs.

3. a) Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode PERT ou MPM) et déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.

b) En déduire les chemins critiques et la durée minimale de réalisation du projet.

CORRIGÉ P. 178

74. +++ **Interprétation des marges**

Un projet est constitué de six tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâche	A	B	C	D	E	F
Durée (en jours)	2	3	1	4	6	5
Tâches précédentes		A	A	A	B,C,D	D

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. a) Quels sont les prédécesseurs du sommet E ?

b) Quels sont les successeurs du sommet D ?

2. Déterminer le tableau des tâches par niveau.

3. Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode MPM ou PERT) et déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.

4. Déterminer le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.

5. a) Calculer la marge totale de la tâche B. À quoi correspond-elle ?

b) Calculer la marge libre de la tâche C. À quoi correspond-elle ?

75. +++ **Retards avec ou sans conséquences**

Un projet est constitué de huit tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H
Durée (en jours)	3	5	6	2	6	7	10	4
Tâches précédentes			A	A,B	C	C	C,D	E,F,G

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le tableau des tâches par niveau.

2. **a)** Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode PERT ou MPM) et déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.

b) En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.

3. Calculer la marge totale et la marge libre de la tâche D et de la tâche E.

4. Après vérification, une contrainte nouvelle doit être prise en compte : il est nécessaire d'attendre 3 jours après la fin de la réalisation de la tâche E pour commencer la tâche H.

Ce retard entraîne-t-il des modifications pour la date au plus tôt des tâches ultérieures et pour la durée minimale totale du projet. Si oui, lesquelles ?

5. Même question en remplaçant la contrainte nouvelle de la question **4.** par : la durée de la tâche D doit être rallongée de 3 jours.

Des QCM pour le BTS

76. +++

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, il n'existe qu'une seule affirmation correcte.

Le candidat présentera les résultats en reproduisant et en complétant sur sa copie un tableau ayant l'aspect suivant :

Question	1	2	3	4	5
Affirmation correcte					

Barème envisagé : *+ 1 point par réponse exacte, – 0,5 point par réponse fausse, 0 point pour absence de réponse. (Un éventuel résultat négatif serait ramené à zéro.)*

Question 1 – Logique

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

On considère l'énoncé suivant : « Pour tout entier n, $u_n \geq 0$ ».

La négation de cette proposition est :

A : « Pour tout entier n, $u_n < 0$ » ;

B : « Il existe au moins un entier n tel que $u_n < 0$ » ;

C : « Pour tout entier n, $u_n \leq 0$ » ;

D : « Il existe au moins un entier n tel que $u_n \leq 0$ ».

Question 2 – Matrices

Soit a un nombre réel non nul.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

La matrice M^2 est égale à :

$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ a & a+a^2 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ a & a^2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$.

Question 3 – Calcul booléen

On considère E, fonction des variables booléennes a, b et c dont une expression est :

$E = abc + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

E est représentée dans le tableau de Karnaugh ci-contre (partie bleue).

	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b
a				
$\bar{a}$				
	c	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$

Une autre expression de E est :

A $= ab + \bar{b}\bar{c}$; B $= ac + \bar{b}\bar{c}$;

C $= abc + a\bar{b}$; D $= (1+\bar{b})(1a+\bar{c})$.

Question 4 – Graphes

Le graphe G comporte quatre sommets x, y, z et t.

On donne sa matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le sommet x possède exactement trois successeurs ;

B : Le sommet z est un prédécesseur du sommet y ;

C : Le chemin (y, z, x) est possible ;

D : Le chemin (t, x, z) est possible.

Question 5 – Graphes

On utilise le même graphe que dans la question **4**. Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet t et d'extrémité le sommet y est égal à 5 ;

B : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet t et d'extrémité le sommet y est égal à 6 ;

C : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet t et d'extrémité le sommet y est égal à 7 ;

D : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet t et d'extrémité le sommet y est égal à 8.

77. +++

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, il n'existe qu'une seule affirmation correcte.

Le candidat présentera les résultats en reproduisant et en complétant sur sa copie un tableau ayant l'aspect suivant :

Question	1	2	3	4	5
Affirmation correcte					

***Barème envisagé :** + 1 point par réponse exacte, – 0,5 point par réponse fausse, 0 point pour absence de réponse.(Un éventuel résultat négatif serait ramené à zéro.)*

Question 1 – Logique

Soit f une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$.

On considère l'énoncé suivant : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) > 0$ ».

La négation de cette proposition est :

A : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) < 0$ » ;

B : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) \leq 0$ » ;

C : « Pour tout réel x, $f(x) < 0$ » ;

D : « Pour tout réel x, $f(x) \leq 0$ ».

Question 2 – Matrices

Soit a un nombre réel non nul.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice M^2 est égale à :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 3 – Calcul booléen

On considère E, fonction des variables booléennes a, b et c dont une expression est : $E = abc + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c$.

E est représentée dans le tableau de Karnaugh ci-contre (partie bleue).

	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b
a				
$\bar{a}$				
	c	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$

Une autre expression de E est :

A = $a + b\bar{c}$; B = $ac + \bar{b}c$;

C = $\overline{\bar{a}c} + \mathrm{c}$; D = $(1 + \bar{c})(1 + \mathrm{a})$.

Question 4 – Graphes

Le graphe G comporte quatre sommets x, y, z et t.

On donne sa matrice d'adjacence : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le sommet x possède exactement deux successeurs ;

B : Le chemin (y, z, x) est possible ;

C : Le chemin (t, x, z) est possible ;

D : Le sommet z est un prédécesseur du sommet t.

Question 5 – Graphes

On utilise le même graphe que dans la question **4.** Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

A : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 5 ;

B : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 6 ;

C : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 7 ;

D : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 8.

Épreuves de BTS

- Il s'agit de 8 épreuves pour s'entraîner à **l'épreuve obligatoire de mathématiques pour l'informatique en deux heures du BTS SIO.**
- Des réponses et des corrigés figurent à la fin de l'ouvrage.
- **L'index thématique** suivant permet d'utiliser ces épreuves pendant les deux années.

INDEX THÉMATIQUE

		Numéro de l'épreuve							
Modules	**Contenus**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Suites numériques		E_2	E_2	E_2		E_3		E_3	E_3
Calcul matriciel	Matrices					E_2	E_1	E_1	
	Inverse d'une matrice					E_2	E_1	E_1	
Arithmétique	Systèmes de numération						E_1		
	Arithmétique modulaire	E_3	E_3	E_3	E_3	E_3			
Algèbre de Boole	Calcul des prédicats							E_1	
	Calcul booléen		E_2	E_1	E_1		E_3	E_2	E_1
Graphes et ordonnancement	Graphes		E_1	E_1		E_1	E_2	E_1	E_2
	Ordonnancement	E_1			E_2				
Utiliser un logiciel				E_2				E_3	
Algorithme		E_2						E_3	E_3
Avec un QCM							E_1	E_1	

E_1 signifie : Exercice 1…

D'autres exercices pour le BTS figurent à la fin de chacun des quatre chapitres 1, 2, 3, 4.

RÉPONSES P. 178

Épreuve 1

• **Exercice 1** (6 points)

Programme abordé :

- *Ordonnancement*

Un lycée a été doté de postes informatiques et de logiciels.

Le proviseur envisage de transformer une salle de cours en salle informatique. Pour cela, le responsable du projet définit les tâches à réaliser avec leur durée.

Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en jours	Tâches précédentes
Vider la salle de cours et démonter le matériel inutilisé.	A	2	–
Nettoyer et repeindre la salle.	B	4	A
Installer les tables et fixer un tableau.	C	1	B
Commander et réceptionner le matériel de câblage.	D	10	–
Déballer et contrôler le matériel de câblage livré.	E	1	D
Câbler la salle.	F	3	B, E
Installer et brancher les postes informatiques.	G	1	C, F
Installer les logiciels, configurer les postes et tester leur fonctionnement.	H	7	G

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible.

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.

2. Donner le tableau des successeurs.

3. **a)** Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode P.E.R.T ou M.P.M.)

Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.

b) En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.

4. En fait, la réalisation de la tâche B a nécessité 10 jours au lieu de 4 car il a fallu enduire un mur et le laisser sécher avant de la peindre.

Ce changement a-t-il une incidence sur la durée du projet ? Expliquer pourquoi.

• **Exercice 2** (6 points)

Programme abordé :

- *Suites numériques*

Partie A

La loi de Moore, énoncée en 1975 par Gordon Moore, cofondateur de la société *Intel*, prévoit que le nombre de transistors des micro-processeurs proposés à la vente au grand public double tous les 2 ans. Les micro-processeurs fabriqués en 1975 comportaient 9 000 transistors.

Pour modéliser cette loi de Moore, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9\,000$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n.

Un terme u_n de cette suite correspond au nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année $1975 + 2n$.

1. Calculer u_1 et u_2 puis interpréter ces nombres.

2. **a)** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué en 2001.

4. Selon ce modèle, à partir de quelle année les micro-processeurs intégreront-ils plus de 100 milliards de transistors ?

Partie B

On considère l'algorithme suivant, où n est un entier naturel non nul.

```
Saisir n
u prend la valeur 9 000
Pour i allant de 1 à n
   u prend la valeur u × 2
FinPour
Afficher u
```

1. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme pour $n = 3$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

• **Exercice 3** (8 points)

Programme abordé :

- *Arithmétique modulaire*

Partie A

1. **a)** Décomposer le nombre 2 014 en produit de facteurs premiers.

b) En déduire la liste des diviseurs positifs de 2 014.

2. Calculer le PGCD des nombres 2 014 et 212. On note d ce PGCD. Déterminer l'entier p tel que : $2\,014 = p \times d$.

Partie B

Un jury de concours doit établir l'ordre de passage des 2 014 candidats qui doivent passer une épreuve orale. Le président du jury envisage la procédure automatique décrite ci-après.

RÉPONSES P. 179

Tout d'abord, il classe les 2 014 candidats par ordre alphabétique et attribue à chacun, en suivant cet ordre, un numéro allant de 1 à 2 014. Ainsi, pour définir un ordre de passage à l'oral des candidats il suffit de dresser la liste des numéros des candidats qui seront appelés l'un après l'autre à passer l'épreuve orale.

Pour établir cette liste, le président du jury choisit un entier n compris entre 1 et 400, puis procède de la manière suivante :

- le premier numéro inscrit sur la liste est le nombre n ;
- le deuxième numéro inscrit sur la liste est le nombre $2n$;
- le troisième numéro inscrit est le nombre $3n$;
- de façon générale, pour obtenir chaque numéro inscrit à partir du deuxième, on ajoute n au numéro précédent et :

– si la somme s obtenue est inférieure ou égale à 2 014, le numéro inscrit est égal à cette somme s ;
– sinon, le numéro inscrit est égal à $s - 2\,014$.

Par exemple, en choisissant la valeur $n = 257$, les premiers numéros inscrits sur la liste sont, dans l'ordre :

257 – 514 – 771 – 1 028 – 1 285 – 1 542 –1 799 – 42 – 299 – 556…

En effet :

- le premier numéro inscrit est $n = 257$;
- du 2e numéro (égal à 514) au 7e numéro (égal à 1 799), on a ajouté 257 au numéro précédent puisque la somme ne dépassait pas 2 014 ;
- le 8e numéro inscrit est le numéro 42 car $1\,799 + 257 = 2\,056$ et, comme 2 056 dépasse 2 014, le numéro à inscrire est $2\,056 - 2\,014 = 42$.

Ainsi le candidat 257 passera en premier l'oral ; il sera suivi du candidat 514 et ainsi de suite.

Le président du jury se demande si cette procédure permet de convoquer tous les candidats, c'est-à-dire si la liste obtenue, en 2 014 étapes, contient tous les nombres de 1 à 2 014.

1. Dans cette question, le président du jury choisit $n = 212$.

a) Les 9 premiers numéros inscrits sont donc :

212 – 424 – 636 – 848 –1 060 – 1 272 – 1 484 – 1 696 – 1 908.

Donner la liste des 15 numéros suivants. La valeur $n = 212$ permet-elle de convoquer tous les candidats ?

b) Avec cette valeur de n, combien de numéros différents la liste comporte-t-elle ?

2. Dans cette question, le président du jury choisit $n = 38$. Déterminer combien de numéros différents comporte la liste. Justifier la réponse. On pourra remarquer que 38 est un diviseur de 2 014.

Partie C

D'après la partie B, il apparaît que, pour certaines valeurs de n, la procédure utilisée ne permet pas de convoquer tous les candidats, c'est-à-dire de constituer une liste comportant tous les nombres de 1 à 2 014.

On admet le résultat suivant :

« Le nombre n choisit permet de former une liste complète comportant tous le numéros de 1 à 2 014 dans le cas où le PGCD de 2 014 et de n est égal à 1, et dans ce cas seulement ».

Ainsi, les nombres n permettant de convoquer tous les candidats sont les entiers n compris entre 1 et 400 qui sont premiers avec 2 014.

1. Si $n = 15$, la procédure utilisée permet-elle de convoquer tous les candidats ?

2. Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre d'entiers n, parmi ceux compris entre 1 et 400 qui permettent par la procédure utilisée de convoquer tous les candidats.

a) Donner le nombre de multiples de 2 non nuls, inférieurs ou égaux à 400.

b) Donner la liste des multiples **impairs** de 19, inférieurs ou égaux à 400.

c) Donner la liste des multiples **impairs** de 53, inférieurs ou égaux à 400.

d) En déduire le nombre d'entiers n qui ne permettent pas de convoquer tous les candidats, puis le nombre d'entiers n qui le permettent.

Épreuve 2

- **Exercice 1** (7 points)

Programme abordé :

- *Graphes*

Un amateur a publié un site internet avec 5 pages, notées P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.

La page d'accueil du site est la page P_1.

Chaque page contient des liens permettant de naviguer vers d'autres pages.

Pour améliorer la navigation sur son site, il demande conseil à un informaticien, qui modélise le site par un graphe.

Les 5 sommets S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 de ce graphe représentent les 5 pages.

Un lien d'une page vers une autre est représenté par un arc orienté allant du sommet associé à la page de départ vers celui associé à la page d'arrivée.

Le tableau des successeurs obtenu par l'informaticien est le suivant :

Sommet	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Successeurs	S_2, S_3, S_5	S_3	S_2	S_3	S_1, S_2, S_4

1. a) Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe.

b) Donner une représentation géométrique de ce graphe orienté.

RÉPONSES P. 179

2. Existe-il un chemin hamiltonien dans ce graphe ? Si oui, en indiquer un.

3. Calculer la matrice M^2.

4. **a)** Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 dans le graphe ?

b) Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 issus du sommet S_1 ?

5. On rappelle que la matrice M' de fermeture transitive du graphe est donnée par l'addition booléenne :

$$M' = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} \oplus M^{[5]}.$$

On admet que $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les pages du site qui sont accessibles depuis toutes les autres pages en quelques clics ? Justifier.

b) Interpréter les 0 de la première colonne de la matrice M' dans le contexte de l'énoncé.

• Exercice 2 (6 points)

Programme abordé :

- *Calcul booléen*
- *Suites numériques*

Une société de création de jeux vidéo commercialise un nouveau produit. Avec les bénéfices escomptés, elle souhaite renouveler son parc informatique.

Partie A : choix des ordinateurs

Les ordinateurs envisagés offrent les composants suivants :

- un processeur quad-core ou dual-core ;
- une carte graphique avec 4 Go ou 2 Go de mémoire ;
- un disque dur SATA ou SSD.

Pour un ordinateur quelconque, on définit les variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ s'il possède un processeur quad-core, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si la carte graphique a 4 Go de mémoire, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si l'ordinateur possède un disque dur SATA, $c = 0$ sinon.

Le responsable informatique a pu tester différentes combinaisons de composants.

Il décide de retenir, pour les équipements informatiques futurs de la société, des ordinateurs satisfaisant aux critères de choix suivants :

- être équipé d'un processeur quad-core et d'un disque dur SSD ;
- ou être équipé d'un processeur dual-core et d'une carte graphique de 4 Go ;
- ou être équipé d'un processeur quad-core, d'une carte graphique de 4 Go et d'un disque dur SATA.

1. Traduire par une expression booléenne E les critères de choix du responsable informatique.

2. À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou d'un calcul booléen, trouver une expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes.

3. Traduire par une phrase, dans le contexte de l'énoncé, l'expression simplifiée trouvée à la question précédente.

Partie B : financement du projet

Le renouvellement du parc informatique est échelonné sur 12 trimestres, pour un coût total de 95 500 €.

Le service comptable propose le financement suivant :

- pour le 1er trimestre, verser un montant de 6 000 €.
- chaque trimestre, le montant versé augmente de 5 % par rapport à celui du trimestre précédent.

On note u_n le montant, exprimé en euro, versé le n-ième trimestre. On a donc $u_1 = 6\,000$.

1. Vérifier que $u_2 = 6\,300$ et calculer u_3.

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

3. **a)** Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer le montant versé au dernier trimestre, arrondi à l'euro.

4. On rappelle que, pour une suite géométrique (U_n) de raison q différente de 1 et de premier terme U_1, on a la formule : $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Le financement prévu permet-il de renouveler le parc informatique ? Justifier.

• Exercice 3 (7 points)

Programme abordé :

- *Arithmétique modulaire*

Alice souhaite que Bob lui envoie des données confidentielles par Internet. Pour éviter que ces données puissent être exploitées par une tierce personne, ils ont recours à un cryptage de type RSA.

Aucune connaissance sur le cryptage RSA n'est attendue dans cet exercice.

Partie A : création des clés publique et privée par Alice

1. Il faut tout d'abord choisir deux nombres premiers distincts notés p et q, puis calculer leur produit noté n. Alice décide de prendre $p = 5$ et $q = 23$, ce qui donne $n = 115$.

Expliquer pourquoi 23 est un nombre premier.

2. Il faut ensuite calculer $K = (p - 1) \times (q - 1)$, ce qui donne ici $K = 4 \times 22 = 88$, puis trouver un entier naturel c, compris entre 2 et K, qui soit premier avec K. le couple d'entiers (n, c) est la *clé publique*. Alice décide de prendre $c = 9$.

a) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 88.

RÉPONSES P. 180

b) Expliquer pourquoi 9 et 88 sont deux nombres premiers entre eux.

3. Il faut enfin trouver un entier d tel que $d \times c \equiv 1$ modulo K. Le couple d'entiers (n, d) est la *clé privée*. Alice a trouvé $d = 49$.

Expliquer pourquoi $49 \times 9 \equiv 1$ modulo 88.

Partie B : cryptage du message à envoyer par Bob avec la clé publique d'Alice

Alice envoie sa clé publique à Bob et celui-ci s'en sert pour crypter un nombre a, qui doit être un entier naturel strictement inférieur à n. Le nombre crypté b est alors égal au reste dans la division euclidienne de a^c par n. C'est ce nombre crypté b que Bob envoie à Alice.

Bob veut transmettre à Alice le nombre 12.

Déterminer le nombre crypté b que Bob envoie à Alice.

Partie C : décryptage d'un message reçu par Alice avec sa clé privée

Cette partie est indépendante de la précédente.

Alice reçoit un nouveau nombre crypté de la part de Bob : le nombre 2. Pour le décrypter, Alice utilise sa clé privée, c'est-à-dire le couple (n, d).

On admet que le nombre non crypté transmis par Bob, noté a, est égal au reste dans la division euclidienne de 2^{49} par n.

Alice doit donc calculer le reste dans la division euclidienne de 2^{49} par 115 pour trouver a.

Mais sa calculatrice ne permet pas de calculer la valeur exacte de 2^{49}. Cependant, elle a pu obtenir les résultats suivants :

$$2^{33} = 8\,589\,934\,592 \text{ et } 8\,589\,934\,592 \equiv 47 \text{ modulo } 115,$$
$$2^{16} = 65\,536 \text{ et } 65\,536 \equiv 101 \text{ modulo } 115.$$

À partir de ces résultats, calculer le nombre a transmis par Bob à Alice.

Épreuve 3

- **Exercice 1** (6 points)

Programme abordé :

- *Calcul booléen*
- *Graphe*

Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une mairie doit recruter une personne pour un travail concernant la circulation des voitures dans le centre-ville.

Partie A

Pour faire son choix, le DRH met en place trois critères de sélection concernant les connaissances en informatique, l'expérience dans le domaine concerné et le suivi d'un stage de formation spécifique.

La personne recrutée devra :

- avoir des connaissances informatiques et de l'expérience dans le domaine concerné ;
- ou ne pas avoir de connaissances informatiques mais avoir suivi un stage de formation spécifique ;
- ou ne pas avoir d'expérience dans le domaine concerné, mais avoir suivi un stage de formation spécifique.

On définit les trois variables booléennes a, b et c suivantes :

- $a = 1$ si la personne possède des connaissances informatiques, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si la personne possède de l'expérience dans le domaine concerné, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si la personne a suivi un stage de formation spécifique, $c = 0$ sinon.

1. Décrire la situation correspondant au produit $ab\overline{c}$.

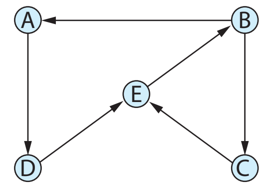
2. Définir l'expression booléenne E correspondant aux critères de sélection du DRH.

3. À l'aide d'un diagramme de Karnaugh ou d'un calcul booléen, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

4. Écrire une phrase donnant les conditions de recrutement correspondant à la simplification précédente de l'expression booléenne E.

Partie B

Le plan de circulation du centre-ville peut être représenté par le graphe orienté suivant où les sommets A, B, C, D et E sont les carrefours et où les arcs indiquent les rues et leur sens de circulation.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe orienté en considérant les sommets A, B, C, D et E dans cet ordre.

2. On donne le carré de la matrice M :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Interpréter les chiffres « 1 » de la deuxième ligne et donner les chemins correspondants.

3. Calculer la somme booléenne $M \oplus M^{[2]}$ et donner la signification des termes de cette somme.

RÉPONSES P. 180

• **Exercice 2** (7 points)

Programme abordé :

• *Suites numériques*

Une entreprise importe un certain type de matériel informatique. En 2014, elle aura importé 120 800 matériels. Elle prévoit que le nombre de matériels de ce type importés augmente de 20 % chaque année à partir de 2014. On note u_n le nombre de matériels importés l'année $(2014 + n)$.
On a donc $u_0 = 120\ 000$.
On utilise une feuille de calcul d'un tableur (*voir l'annexe*) pour observer l'évolution des importations.

Annexe

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Total des importations
2	2014	0	120 800	120 800
3	2015	1	144 960	265 760
4	2016	2		
5	2017	3		
6	2018	4		
7	2019	5		
8	2020	6		

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre de matériels importés en 2020.
4. Déterminer en quelle année le nombre de matériels importés dépassera 300 000.
5. On rappelle que, pour une suite géométrique (u_n) de raison q, $q \neq 1$, et de premier terme u_0 on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Déterminer le nombre total de matériels importés de 2014 à 2020. Arrondir à l'unité.
6. **a)** Donner une formule qui, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C.
b) Parmi les formules suivantes, indiquer toutes celles qui, saisies dans la cellule D3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne D.
=SOMME(C2:C3) ; =SOMME($C$2:C3) ; =D2+C3 ; =$D$2+C3.

• **Exercice 3** (7 points)

Programme abordé :

• *Arithmétique modulaire*

Un jeu classique consiste à coder des messages. Pour cela, on utilise la correspondance entre les lettres de l'alphabet et un nombre entier x compris entre 0 et 25.

Le tableau ci-dessous donne cette correspondance :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le codage consiste à choisir une clé formée de deux nombres entiers a et b compris entre 0 et 25 et à remplacer une lettre par une autre selon le principe suivant :
– on lit sur le tableau le nombre x correspondant à la lettre ;
– on calcule le reste r de la division de $ax + b$ par 26 ;
– on lit sur le tableau la lettre correspondant au nombre r qui est donc la lettre codée.
Exemple : avec la clé $(a ; b) = (7 ; 12)$, pour coder la lettre T, on calcule $7 \times 19 + 12 = 145$, puis le reste de la division euclidienne de 145 par 26, soit 15. La lettre codée est ainsi la lettre P.
1. Coder les lettres A, K et W avec la clé $(a ; b) = (5 ; 17)$.
2. Que se passe-t-il si on prend $a = 0$ et $b = 17$?
3. On considère un entier x compris entre 0 et 25.
a) Donner, sans justification, les restes obtenus dans la division euclidienne de $13x + 6$ par 26 pour x compris entre 0 et 25.
b) Coder le mot PREMIER avec la clé (13 ; 6).
Commenter le résultat obtenu.
4. Un codage est dit acceptable lorsque deux lettres distinctes quelconques sont toujours codées différemment.
On admet que les clés $(a ; b)$ donnant un codage acceptable sont celles pour lesquelles a est un entier premier avec 26, quel que soit l'entier b compris entre 0 et 25.
a) Donner la liste des nombres entiers compris entre 0 et 25 et premiers avec 26.
b) Déterminer le nombre de clés donnant un codage acceptable.
5. Le mot ABSURDE a été codé à l'aide d'une clé $(a ; b)$ selon le principe décrit ci-dessus et l'on a obtenu le mot VOZLGAT. Déterminer cette clé.

Épreuve 4

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Calcul booléen*

Un professeur de BTS SIO souhaite sélectionner un langage de programmation. Pour cette sélection, il s'impose les critères suivants : le langage doit :
– exister depuis plus de 3 ans et être utilisé en entreprise, ou

RÉPONSES P. 181

– ne pas exister depuis plus de 3 ans et être gratuit, ou
– être gratuit et être utilisé en entreprise.

Pour un langage donné, on définit trois variables booléennes a, b et c de la manière suivante :
– $a = 1$ si le langage existe depuis plus de 3 ans, et $a = 0$ sinon ;
– $b = 1$ si le langage est utilisé en entreprise, et $b = 0$ sinon ;
– $c = 1$ si le langage est gratuit, et $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E qui traduit les critères de sélection du professeur.

2. Dans cette question seulement, on considère un langage existant depuis plus de 3 ans qui a été sélectionné par le professeur.

a) Traduire cette sélection par une égalité booléenne.

b) À l'aide d'un calcul booléen, que peut-on en déduire concernant le langage sélectionné ?

3. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

4. Un langage de programmation payant a été écarté par le professeur car il ne correspondait pas à ses critères de sélection. Que peut-on en déduire ?

• Exercice 2 (7 points)

Programme abordé :

• *Ordonnancement*

Une société de services techniques en informatique doit mettre en place un réseau interne de 50 ordinateurs pour une entreprise. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet ont été reproduites dans le tableau suivant.

Description de la tâche	Abréviation	Tâches antérieures	Durée (en jours)
Identification des besoins matériels/logiciels et commandes	COM		1
Acheminement/Livraison des OS/logiciels	LOG	COM	3
Achat du matériel pour les UC + Câbles réseau	MAT	COM	1
Acheminement/Livraison des écrans	ECR	COM	6
Assemblage des UC	ASS	MAT	1,5
Installation des OS/Logiciels	INST	LOG, ASS	2
Pose de câbles réseau dans l'entreprise	CABL	MAT	4
Mise en place des postes dans l'entreprise	POST	INST, ECR	1
Configuration du réseau interne	CONF	POST, CABL	1

On considère le graphe orienté de sommets COM, LOG, MAT, ECR, ASS, INST, CABL, POST, CONF correspondant aux conditions d'antériorités données par le tableau précédent.

1. a) Quels sont les prédécesseurs du sommet POST ?

b) Quels sont les successeurs du sommet COM ?

2. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe en expliquant la méthode utilisée.

3. Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode MPM ou PERT) et établir les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

4. Déterminer le chemin critique et la durée de réalisation du projet.

5. a) Calculer la marge totale de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?

b) Calculer la marge libre de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?

• Exercice 3 (8 points)

Programme abordé :

• *Arithmétique modulaire*

Le but de cet exercice est l'étude d'un procédé de cryptage des lettres majuscules de l'alphabet français. Chacune des 26 lettres est associée à l'un des entiers de 0 à 25, selon le tableau de correspondance suivant.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le cryptage se fait à l'aide d'une clé, qui est un nombre entier k fixé, compris entre 0 et 25.

Pour crypter une lettre donnée :
– on repère le nombre x associé à la lettre, dans le tableau de correspondance précédent ;
– on multiplie ce nombre x par la clé k ;
– on détermine le reste r de la division euclidienne de $k \times x$ par 26 ;
– on repère la lettre associée au nombre r dans le tableau de correspondance ; c'est la lettre cryptée.

Par exemple, pour crypter la lettre « P » avec la clé $k = 11$:
– le nombre x associé à la lettre « P » est le nombre 15 ;
– on multiplie 15 par la clé k, ce qui donne $11 \times 15 = 165$;
– on détermine le reste de 165 dans la division par 26 : on trouve 9 ;
– on repère enfin la lettre associée à 9 dans le tableau : c'est « J ».

Ainsi, avec la clé $k = 11$, la lettre « P » est cryptée en la lettre « J ».

RÉPONSES P. 182

On crypte un mot en cryptant chacune des lettres de ce mot.

Partie A : cryptage d'un mot avec la clé $k = 11$

Dans cette partie, la clé de cryptage est $k = 11$. Le but de cette partie est de crypter le mot « BTS ».

1. Déterminer en quelle lettre est cryptée la lettre « S ». On détaillera les différentes étapes du processus de cryptage.

2. Crypter le mot « BTS ». On ne demande pas le détail du cryptage.

Partie B : décryptage avec la clé $k = 11$

Dans cette partie, la clé de cryptage est toujours $k = 11$.

Le but de cette partie est de retrouver une lettre initiale connaissant la lettre cryptée.

1. Prouver que $19 \times 11 \equiv 1$ modulo 26.

2. Une lettre associée à un nombre x a été cryptée. Le nombre associé à la lettre cryptée est noté y.

a) Justifier que $11 \times x \equiv y$ modulo 26.

b) Montrer que $19 \times y \equiv x$ modulo 26.

Ces propriétés montrent que pour décrypter une lettre codée y avec la clé $k = 11$, il suffit de crypter cette lettre avec la clé de cryptage $k' = 19$.

Exemple : si une lettre est codée par $y = 22$, on multiplie 22 par 19 et on prend le reste du résultat dans la division euclidienne par 26 ; on obtient $x = 2$. Donc la lettre de départ est C.

3. Utiliser les résultats précédents pour décrypter le mot « WGA ».

Partie C : recherche des bonnes clés de cryptage

Une clé k ne possède pas forcément une clé de décryptage associée.

On dit qu'une clé est une bonne clé de cryptage si elle possède une clé de décryptage associée.

On admet qu'une clé k est une bonne clé de cryptage si et seulement si les nombres k et 26 sont premiers entre eux.

Le but de cette partie est de trouver les bonnes clés de cryptage, parmi les nombres entiers compris entre 0 et 25.

1. Décomposer 26 en un produit de facteurs premiers.

2. En déduire la liste des nombres k compris entre 0 et 25 qui sont de bonnes clés de cryptage.

Épreuve 5

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Graphe*

Pour obtenir un diplôme, des étudiants doivent valider quatre modules différents notés A, B, C et D.

Les modules nécessitent certaines connaissances et doivent donc être validés en respectant les règles suivantes :

– une fois le module A validé, on peut valider les modules B, C ou D ;

– une fois le module B validé, on peut valider le module D ;

– une fois le module C validé, on peut valider le module B ou D ;

– aucun module ne peut être validé après le module D.

On définit ainsi un graphe orienté de sommets A, B, C et D, pris dans cet ordre, et dont la matrice d'adjacence est la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $m_{12} = 1$ signifie que l'on peut valider le module B, le module A ayant été validé.

1. Reproduire et compléter le tableau des prédécesseurs :

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	
C	A
D	

2. Déterminer le niveau des sommets de ce graphe. Expliquer la démarche suivie.

3. Donner une représentation géométrique du graphe ordonné par niveaux.

4. Existe-t-il un chemin de longueur 4 entre deux sommets du graphe ? Justifier.

5. a) Déterminer la longueur de chemin maximale qui peut exister entre deux sommets de ce graphe.

b) Donner un tel chemin. Un étudiant qui a suivi un tel parcours a-t-il validé tous les modules ?

• **Exercice 2** (6 points)

Programme abordé :

• *Calcul matriciel*

Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

– une formule F1 « clavier + souris » à 12 euros ;

– une formule F2 « clavier + souris + clé USB » à 16 euros ;

– une formule F3 « clavier » à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

	Formule F1	Formule F2	Formule F3
Coût d'achat en euro	3	4	2
Temps en minute	8	10	6
Prix de vente en euro	12	16	10

RÉPONSES P. 182

1. **a)** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit matriciel MC.

b) On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.

Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1{,}5 & 0{,}5 \\ -2 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.

b) Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$.

Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.

Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

- **Exercice 3** (9 points)

Programme abordé :

- *Suites numériques*
- *Arithmétique modulaire*

Des étudiants en informatique étudient la propagation de virus sur le disque d'un ordinateur non connecté à un réseau.

Partie A : un premier virus

À chaque allumage de l'ordinateur, le virus se répand et le nombre de fichiers infectés est déterminé par le terme général de la suite (U_n) définie par son premier terme $U_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 1 + 2U_n$ où n est le nombre d'allumages de l'ordinateur.

1. Calculer U_2, U_3, U_4.

Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $V_n = U_n + 1$.

Calculer V_1, V_2, V_3 et V_4.

Quelle conjoncture sur la nature de la suite (V_n) peut-on formuler ?

3. **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $V_{n+1} = 2V_n$.

b) En déduire une expression de V_n en fonction de n.

4. **a)** En déduire que, pour tout entier naturel n, $n \geq 1$: $U_n = 2^n - 1$.

b) À partir de combien d'allumages de l'ordinateur, le nombre de fichiers infectés sera-t-il supérieur à 1 000 ?

Partie B : un deuxième virus

L'équipe d'étudiants implante maintenant un virus sur un autre ordinateur. Le nombre de fichiers infectés en fonction du nombre n d'allumages de l'ordinateur est $3^n - 1$. Par ailleurs, chaque fois que le nombre de fichiers infectés est un multiple de 11, un message d'avertissement s'affiche à l'écran.

Le reste de la division euclidienne de $3^n - 1$ par 11 est noté W_n.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	$3^n - 1$	W_n
1		
2		
3		
4		
5		

2. Démontrer que si n est multiple de 5, alors $3^n - 1 \equiv 0$ (modulo 11).

Quelle information peut-on en déduire sur l'apparition du message d'avertissement ?

Épreuve 6

- **Exercice 1** (6 points)

Programme abordé :

- *Arithmétique*
- *Calcul matriciel*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, il n'existe qu'une seule réponse correcte.

On présentera les résultats en donnant le numéro de la question et en recopiant la réponse éventuellement choisie.

Barème : 1 point par réponse exacte, 0 point pour absence de réponse ou réponse fausse.

RÉPONSES P. 183

A. *Arithmétique*

1. L'écriture dans le système binaire du nombre 91 du système décimal est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
1101101	1011011	1101011

2. L'écriture dans le système binaire du nombre 7C du système hexadécimal est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
1111100	11000111	1111011

3. L'écriture dans le système décimal du nombre 7C du système hexadécimal est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
19	82	124

B. *Calcul matriciel*

1. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La matrice A^3 est :	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Soit B la matrice définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) On désigne par B^{-1} la matrice inverse de B.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La matrice B^{-1} est :	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

b) On considère le système S :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La solution du système est :	$(0, -3, 3)$	$(-3, 0, 3)$	$(3, 0, -3)$

• **Exercice 2** (8 points)

Programme abordé :

- *Graphes*

Dans une ville, quatre édifices publics A, B, C et D sont reliés entre eux par des rues à double sens ou à sens unique sans ronds-points.

Les rues existantes sont :

- la rue reliant A et D à double sens,
- la rue reliant A et C à sens unique de A vers C,
- la rue reliant B et C à sens unique de C vers B,
- la rue reliant B et D à double sens,
- la rue reliant C et D à sens unique de C vers D.

1. Dessiner le graphe orienté symbolisant la situation énoncée précédemment.

2. Pour des sommets A, B, C, D dans cet ordre, la matrice d'adjacence M de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliquer le contenu de la 3^{e} ligne de cette matrice.

3. Calculer la matrice M^2. Expliquer avec précision la signification du « 2 » présent à la 1re ligne et la 2^{e} colonne.

4. Quelques chemins particuliers :

a) Calculer la matrice M^4.

b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 allant de C à D ? Écrire ces chemins.

c) Combien y a-t-il de circuits de longueur 4 dans ce graphe ?

Écrire les circuits d'extrémités D. L'un de ces circuits permet-il à un bus de desservir les 4 bâtiments publics ?

5. Suite à des travaux dans le secteur du bâtiment D, la rue liant A et D est coupée et la rue liant B et D devient à sens unique de D vers B. Faire le tableau des prédécesseurs du nouveau graphe obtenu. En déduire le niveau des sommets ainsi que le dessin du graphe ordonnancé par niveaux.

• **Exercice 3** (6 points)

Programme abordé :

- *Calcul booléen*

Un immeuble de 30 étages ne comporte qu'un seul ascenseur A. Pour limiter le temps d'attente au rez-de-chaussée, on décide de mettre un deuxième ascenseur B en service

RÉPONSES P. 183

avec un logiciel qui le fera descendre au rez-de-chaussée sous certaines conditions.

On considère les trois propositions suivantes :

s : « l'ascenseur A est à un étage supérieur au 15e étage » ;

m : « l'ascenseur A monte » ;

r : « l'ascenseur A est appelé ».

1. Traduire par une expression booléenne chacune des situations suivantes :

a) « l'ascenseur A est appelé alors qu'il est à un étage supérieur au 15e étage » ;

b) « l'ascenseur A est appelé ou il ne monte pas ».

2. À la suite d'une étude, on fait en sorte que l'ascenseur B descende au rez-de-chaussée chaque fois que l'expression booléenne $F = sr + m\overline{r} + \overline{s}m + s\overline{m}\overline{r}$ est vraie.

a) À l'aide d'un tableau de Karnaugh, écrire l'expression F comme une somme de deux variables booléennes.

b) Traduire l'expression simplifiée de F par une phrase.

c) Quelle est l'expression de $\overline{F}$? À quelle situation correspond-elle ?

Épreuve 7

• **Exercice 1** (8 points)

Programme abordé :

- *Calcul des prédicats*
- *Calcul matriciel*
- *Graphes*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, il n'existe qu'une seule réponse correcte.

On présentera les résultats en donnant le numéro de la question et en recopiant la réponse éventuellement choisie.

Barème : 1 point par réponse exacte, 0 point pour absence de réponse ou réponse fausse.

1. La négation de la phrase « le 24 décembre est un dimanche et je vais à Strasbourg » est :

Réponse A : « le 24 décembre n'est pas un dimanche et je ne vais pas à Strasbourg » ;

Réponse B : « le 24 décembre est un dimanche ou je vais à Strasbourg » ;

Réponse C : « si le 24 décembre est un dimanche alors je vais à Strasbourg » ;

Réponse D : « le 24 décembre n'est pas un dimanche ou je ne vais pas à Strasbourg ».

2. Soit M une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, et N une matrice à 3 lignes et 2 colonnes.

Le produit $M \times N$ est une matrice à :

Réponse A : 2 lignes et 2 colonnes ;

Réponse B : 3 lignes et 3 colonnes ;

Réponse C : 2 lignes et 3 colonnes ;

Réponse D : 3 lignes et 2 colonnes.

3. Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de M est égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On considère un graphe à quatre sommets E, F, G, H, dont la matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Le sommet G est de niveau

A : 0 ; B : 1 ; C : 2 ; D : 3.

b) le nombre de chemins de longueur 2 est

A : 2 ; B : 3 ; C : 4 ; D : 5.

c) Il existe un chemin de longueur 3 allant

A : de E vers G ; B : de F vers E ;

C : de H vers F ; D : de E vers F.

d) Il existe dans ce graphe

A : un chemin de longueur 4 ;

B : un chemin hamiltonien ;

C : un chemin de longueur 2 arrivant à H ;

D : un circuit.

e) Pour obtenir la fermeture transitive de ce graphe, le nombre d'arcs à rajouter est :

A : 1 B : 3 C : 4 D : 9

• **Exercice 2** (5 points)

Programme abordé :

- *Calcul booléen*

Une société décide de recruter en interne des collaborateurs pour sa filiale en Extrême-Orient.

RÉPONSES P. 184

Pour chaque employé, on définit les variables booléennes suivantes :
$a = 1$ s'il a plus de cinq ans d'ancienneté dans l'entreprise ;
$b = 1$ s'il possède un BTS SIO (ou IG) ;
$c = 1$ s'il parle couramment l'anglais.
La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés :
– qui satisfont aux trois conditions,
– ou qui ont moins de 5 ans d'ancienneté mais qui maîtrisent l'anglais,
– ou qui ne maîtrisent pas l'anglais mais qui possèdent un BTS SIO (ou IG).
1. Écrire une expression booléenne E traduisant les critères de la direction.
2. Représenter l'expression E par un tableau de Karnaugh.
3. À l'aide du tableau de Karnaugh, donner une expression simplifiée de E.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.
5. Déduire des questions **3.** ou **4.** une version simplifiée des critères de la direction.

• **Exercice 3** (7 points)

Programme abordé :

• *Suites numériques*

A. Une entreprise place 10 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2 %. Ce qui signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante ils rapportent eux aussi des intérêts.
On note $u_0 = 10\,000$ et on appelle u_n le capital obtenu au bout de n années de placement.
On a reproduit ci-dessous une feuille de calcul incomplète réalisée avec un tableur pour calculer les capitaux successifs disponibles.

	A	B
1	Année	Capital
2	0	10 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Déterminer la nature et la raison de la suite (u_n).
3. a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
b) Déterminer le capital obtenu au bout de 8 ans de placement. Arrondir au centime d'euro.
4. Déterminer au bout de combien d'années de placement le capital disponible dépassera 12 000 euros.
5. Écrire la formule, à recopier vers le bas, à entrer dans la cellule B3 pour obtenir les capitaux successifs disponibles.

B. On considère l'algorithme suivant.

Initialisation
u prend la valeur 10 000
n prend la valeur 1
Traitement
Tant que $n < 5$
u prend la valeur $u + 500$
n prend la valeur $n + 1$
Écrire u
FinTantQue

1. Faire fonctionner cet algorithme « à la main ». Quels résultats obtient-on ?
2. Une entreprise place un capital de 10 000 € sur un livret à 2 % d'intérêts par an, avec intérêts composés, pendant 4 ans.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche les sommes obtenues, capital et intérêts compris, à la fin de chacune des 4 années.

Épreuve 8

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Calcul booléen*

Une société d'exploitation forestière effectue des coupes constituées exclusivement de feuillus et de résineux. Elle désire simplifier le règlement que ses salariés doivent appliquer pour la coupe du bois. Actuellement le règlement dit qu'un arbre est à abattre dans les quatre cas suivants :
• si c'est un résineux au tronc droit mesurant plus de 20 m de hauteur ;
• si c'est un feuillu de 50 ans ou plus :
• s'il a moins de 50 ans et mesure plus de 20 m de hauteur ;
• s'il est tordu.

Pour un arbre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :
$a = 1$ si l'arbre est un résineux ;
$b = 1$ si l'arbre a moins de 50 ans ;
$c = 1$ si l'arbre mesure plus de 20 m de hauteur ;
$d = 1$ si l'arbre est tordu.
1. Écrire la fonction booléenne $f(a, b, c, d)$, qui traduit le règlement actuel d'abattage d'un arbre.
Grâce à une bonne gestion des forêts que la société exploite, il n'y a maintenant plus d'arbres tordus.

RÉPONSES P. 184

2. Montrer que le nouveau règlement d'abattage se traduit par la fonction :

$$g(a, b, c) = ac + \overline{a}\overline{b} + bc.$$

3. Donner le tableau de Karnaugh de cette fonction.

4. Simplifier au maximum cette fonction à l'aide du tableau de Karnaugh.

5. Écrire la nouvelle règle d'abattage d'un arbre sous la forme la plus simple possible.

• Exercice 2 (8 points)

Programme abordé :

- *Graphes*

Dans un lycée, les classes de BTS SIO disposent de quatre salles spécialisées A, B, C, D. Trois portes, permettant le passage dans les deux sens, relient les salles A et B, les salles A et C et les salles B et D.

1. Dessiner une représentation du graphe G orienté associé au passage d'une salle à une autre.

2. Justifier que la matrice d'adjacence M du graphe G est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer la matrice M^2 et justifier qu'il existe 6 circuits de longueur 2.

4. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le nombre de chemins de longueur 3.

b) Donner la liste des chemins de longueur 3 ayant pour origine A et pour extrémité B.

c) Le graphe admet-il des circuits de longueur 3 ? Justifier la réponse donnée.

5. Matrices et opérations booléennes.

a) Écrire les deux matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

b) Calculer la somme $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ ou $\oplus$ désigne l'addition booléenne des matrices et en déduire la matrice $\widehat{M}$ de la fermeture transitive du graphe G.

• Exercice 3 (7 points)

Programme abordé :

- *Suites numériques*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dépréciation d'un modèle d'ordinateur en fonction du temps écoulé, exprimé en trimestre, depuis sa mise sur le marché.

L'entreprise conceptrice de ce modèle souhaite déterminer l'évolution trimestrielle du prix de vente de cet ordinateur, exprimé en euro. On appelle n le nombre de trimestres écoulés depuis la mise sur le marché de ce produit. Ainsi, à la mise sur le marché, on a $n = 0$.

Le prix de vente à la mise sur le marché de ce modèle d'ordinateur est de 800 €. Chaque trimestre, le prix de vente de ce modèle diminue de 10 % en raison des progrès technologiques.

On note (u_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n, u_n désigne le prix de vente, exprimé en euro, de ce modèle d'ordinateur, n trimestres après sa mise sur le marché. On a $u_0 = 800$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.

3. On considère l'algorithme suivant.

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 800 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter 0,9u à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$?

b) Quels nombres permet d'obtenir cet algorithme ?

4. Déterminer le prix de vente de ce modèle d'ordinateur :

a) 5 trimestres après la mise sur le marché ;

b) 10 trimestres après la mise sur le marché.

Arrondir à l'euro.

5. Déterminer le nombre de trimestres écoulés depuis la mise sur le marché à partir duquel le prix de vente de ce modèle deviendra inférieur ou égal à 300 €.

Corrigés & Réponses

CHAPITRE 1

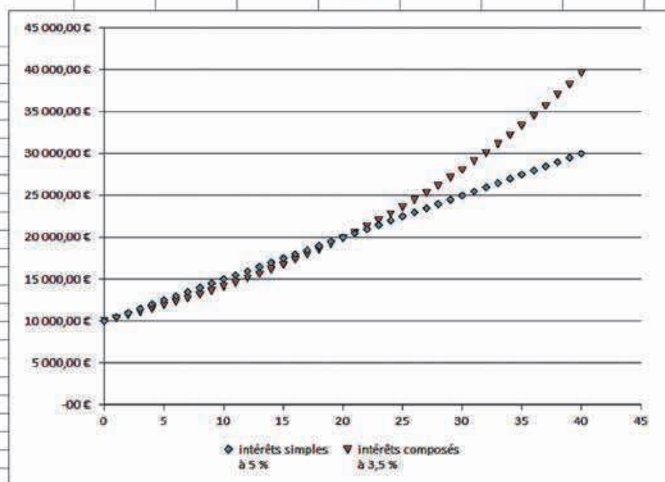
Réponses des TP TICE

TP1 Intérêts simples ou composés ?

A. 2. On a $C_{n+1} = C_n + 500$ et la suite (C_n) est arithmétique.
3. Le capital initial double au bout de 20 ans.
B. 1. On a $C'_{n+1} = 1{,}035 \times C'_n$.
2. Il s'agit d'une suite géométrique de raison 1,035.
4. Le capital initial double au bout de 21 ans.

C3 | =C2*1,035

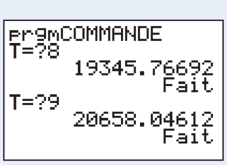
	A	B	C
1	*n*	intérêts simples à 5 %	intérêts composés à 3,5 %
2	0	10 000,00 €	10 000,00 €
3	1	10 500,00 €	10 350,00 €
4	2	11 000,00 €	10 712,25 €
5	3	11 500,00 €	11 087,18 €
6	4	12 000,00 €	11 475,23 €
7	5	12 500,00 €	11 876,86 €
8	6	13 000,00 €	12 292,55 €
9	7	13 500,00 €	12 722,79 €
10	8	14 000,00 €	13 168,09 €
11	9	14 500,00 €	13 628,97 €
12	10	15 000,00 €	14 105,99 €
13	11	15 500,00 €	14 599,70 €
14	12	16 000,00 €	15 110,69 €
15	13	16 500,00 €	15 639,56 €
16	14	17 000,00 €	16 186,95 €
17	15	17 500,00 €	16 753,49 €
18	16	18 000,00 €	17 339,86 €
19	17	18 500,00 €	17 946,76 €
20	18	19 000,00 €	18 574,89 €
21	19	19 500,00 €	19 225,01 €
22	20	20 000,00 €	19 897,89 €
23	21	20 500,00 €	20 594,31 €
24	22	21 000,00 €	21 315,12 €
25	23	21 500,00 €	22 061,14 €
26	24	22 000,00 €	22 833,28 €



C. 1. La croissance de la seconde suite est rapidement beaucoup plus forte.
2. Le premier placement n'est à conseiller que sur une durée inférieure ou égale à 20 ans.

TP2 Honorer une commande

1. La variable *p* correspond à la production un mois donné (arrondi à l'unité, il s'agit du nombre de pièces produites).
La variable *s* somme les valeurs successives de *p* et correspond au nombre de pièces se trouvant en stock un mois donné.
La variable *t* correspond au taux de croissance mensuel du nombre de pièces produites.
2. La suite des valeurs de la variable *p* est géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$.
3. On obtient les affichages suivants.




Le plus petit taux de croissance entier pour honorer la commande est 9 %.

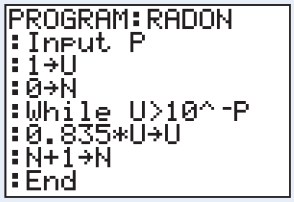
TP3 Évolution d'une population de bactéries

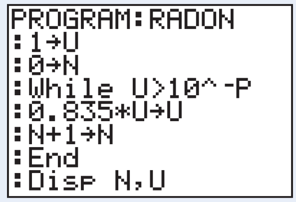
A. 1. Une augmentation de 13 % correspond à une multiplication par 1,13.
3. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,13. Puisque la raison *q* de la suite est telle que $q > 1$, la limite de (u_n) est $+\infty$.
4. La population de bactéries dépasse 100 000 au bout de $n = 48$ heures.
B. 1. On entre en C17 la formule = B$17*0,85^(A17-15).
2. La suite $(0{,}85^n)$ a pour limite 0. On en déduit que la suite (v_n) a pour limite 0.
3. Les bactéries sont toutes mortes à partir de $n = 62$ heures.

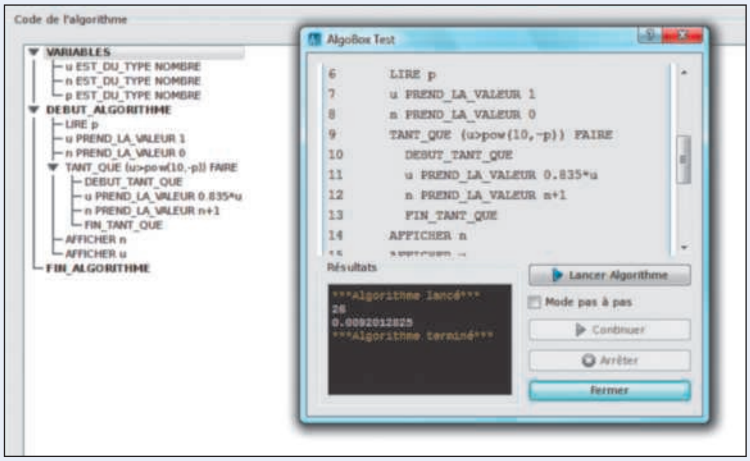
TP4

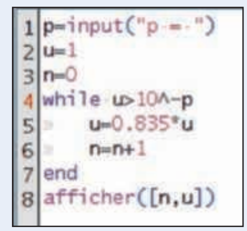
A. 1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}835$. Elle est décroissante de limite nulle.
2. a. La variable *n* correspond au jour. La variable *u* correspond à la masse de radon correspondante.
b. La condition d'arrêt est $u \leq 10^{-1}$.
3. La masse de radon est inférieure à 10^{-1} à partir du 13^e jour, où elle vaut environ 0,096.

B. 1.









2. La masse de radon est inférieure à 10^{-2} à partir de $n = 26$ jours.
La masse de radon est inférieure à 10^{-4} à partir de $n = 52$ jours.
La masse de radon est inférieure à 10^{-6} à partir de $n = 77$ jours.

Corrigés des exercices

1. 1. $u_1 = u_0 + 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 1$; $u_2 = 0$; $u_3 = u_2 + 1$; $u_3 = 1$; $u_4 = u_3 + 1$; $u_4 = 2$.
2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0, de raison $r = 1$, donc, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$; $u_n = -2 + n$.
3. $u_{25} = -2 + 25$; $u_{25} = 23$.
4. La représentation graphique est constituée des points M de coordonnées (x, y) de la droite d'équation $y = x - 2$ dont l'abscisse est un nombre entier naturel n.
5. La raison $r = 1$ est positive ; donc la suite (u_n) est croissante.
6. $S_{25} = 26 \times \dfrac{u_0 + u_{25}}{2} = 26 \times \dfrac{-2+23}{2} = 273.$

6. 1. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0$; $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 16$; $u_1 = 8$ de même

$u_2 = 4$; $u_3 = 2$; $u_4 = 1$.

2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
Donc, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, $u_n = 16(0{,}5)^n$.
3. $u_{10} = 16(0{,}5)^{10}$; $u_{10} \approx 0{,}016$.
4. Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (0, 16) ; (1, 8) ; (2, 4) ; (3, 2) ; (4, 1)…
5. $0 < q < 1$; donc la suite géométrique est décroissante.

6. $S_{10} = u_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$, $S_{10} = 16 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$, $S_{10} \approx 31{,}984$.

7. Pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$,
donc $u_{10} = (1\,000)(1{,}0225)^{10} \approx 1249{,}20$.

$S_{10} = 1\,000 \times \dfrac{1-(1{,}02)^{11}}{1-(1{,}02)}$, $S_{10} \approx 12\,168{,}72$.

14. 1. $p_1 = p_0 + \dfrac{5}{100}p_0$, $p_1 = p_0\left(1+\dfrac{5}{100}\right)$,
$p_1 = p_0(1+0{,}05)$, $p_1 = 1{,}05p_0$;
avec $p_0 = 2\,000$ on obtient $p_1 = 2\,100$.
On établit de même que : $p_2 = 1{,}05p_1$, $p_2 = 2\,205$.
De même, $p_3 = 1{,}05p_2$, $p_3 = 2\,315{,}25 \approx 2\,315$.
2. En procédant pour p_{n+1} et p_n comme pour p_1 et p_0 on obtient, pour tout entier n, $p_{n+1} = 1{,}05p_n$.
(p_n) est donc la suite géométrique de premier terme $p_0 = 2\,000$ et de raison 1,05.
3. On obtient donc, pour tout entier n, $p_n = p_0(1{,}05)^n$ c'est-à-dire $p_n = 2\,000(1{,}05)^n$.
4. $2\,017 = 2\,010 + 7$.
On cherche donc : $S = p_0 + p_1 + \ldots + p_7$.

$S = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

$S = 2\,000 \times \dfrac{1-(1{,}05)^8}{1-(1{,}05)}$. $S \approx 19\,098$.

20. 1. $C_1 = 1000 + \dfrac{4}{100} \times 1000 = 1040$.
$C_2 = 1040 + 40 = 1080$.
$C_3 = 1080 + 40 = 1120$.
2. a) Pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 40$.

b) La suite (C_n) est la suite arithmétique de premier terme $C_0 = 1\,000$ et de raison $r = 40$.

c) Pour tout entier n, $C_n = C_0 + nr$,
$C_n = 1000 + 40n$.

3. On résout l'équation $C_n = 2\,C_0$; $2\,000 = 1\,000 + 40\,n$; $n = 25$.

22. 1. $C_1 = 1000 + 1000 \times \dfrac{4}{100} = 1000(1 + 0{,}04)$,
$C_1 = 1000 \times 1{,}04 = 1040$.
De même, $C_2 = C_1 \times 1{,}04$, $C_2 = 1\,081{,}6$,
$C_3 = C_2 \times 1{,}04$, $C_3 \approx 1\,124{,}86$.

2. a) Pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + \dfrac{4}{100} C_n$,
$C_{n+1} = C_n(1 + 0{,}04)$, $C_{n+1} = 1{,}04 C_n$.

b) La suite (C_n) est la suite géométrique de premier terme $C_0 = 1\,000$ et de raison 1,04.

c) Pour tout entier n, $C_n = C_0(1{,}04)^n$,
$C_n = 1\,000(1{,}04)^n$.
$C_{17} \approx 1\,947{,}9$ € et $C_{18} \approx 2\,025{,}82$ €.

3. Le capital initial a doublé au bout de 18 ans.

25. 1. Pour tout entier n,
$u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{100} u_n = (1 + 0{,}05)u_n = 1{,}05\ u_n$.
(u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.
2. $u_{n+1} = u_0 \times q^n = 4(1{,}05)^n$.
3. $2\,016 = 2\,010 + 6$, donc $n = 6$.
$u_6 = 4 \times (1{,}05)^6 \approx 5{,}36$.
Environ 5,36 Mo.
4. a) =C2*1,05.
b) =SOMME($C$2:C3)
=D2+C3
5. a) $u_0 + u_1 + \ldots + u_6 = u_0 \dfrac{1 - q^7}{1 - q}$.

$u_0 + u_1 + \ldots + u_6 = 4 \times \dfrac{1 - 1{,}05^7}{1 - 1{,}05} \approx 32{,}57$.

Environ 32,57 Mo.
b) 32,57 > 30. La réponse est non.

27. Calcul d'un terme d'une suite arithmétique ou géométrique

1. La valeur affichée est 17.

2. Cet algorithme affiche la valeur du terme u_n de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 5.

3. Algorithme modifié :

Saisir *n*
v prend la valeur 10
Pour *i* allant de 1 à *n*
  v prend la valeur $v \times 1{,}3$
FinPour
Afficher *v*

On peut conserver le nom de la variable *u*.

28. Calcul d'une somme de termes consécutifs

1. On peut dresser le tableau suivant :

i		1	2	3
u	4	6	8	10
S	4	10	18	28

L'algorithme affiche 28.

2. L'algorithme calcule et affiche la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 2.

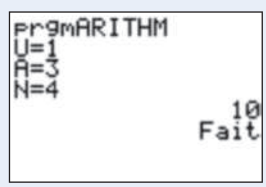
3. Algorithme modifié :

Saisir *n*
u prend la valeur 4
S prend la valeur *u*
Pour *i* allant de 1 à $n - 1$
  u prend la valeur $u \times 3$
  S prend la valeur $S + u$
FinPour
Afficher *S*

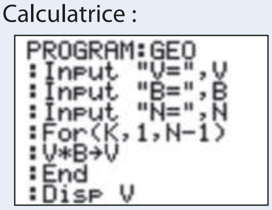
Attention, ici, pour calculer la somme de *n* termes, la boucle tourne $n - 1$ fois.

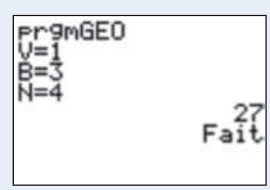
29. Calculer à l'aide d'un algorithme un terme de rang donné

1. Affichage calculatrice :



2. Programme d'affichage du terme de rang *n* d'une suite géométrique.
Calculatrice :





30. Algorithme à trous

1.

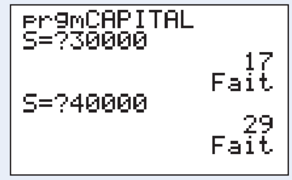
Saisir *C*
Saisir *i*
Saisir *n*
Pour *k* allant de **1** à ***n*** **– 1**
  C prend la valeur $\boldsymbol{C} \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})$
FinPour
Afficher *C*

2. a) Après deux années de placement,
$C = 10\,000 \times 1{,}03 \times 1{,}03 = 10\,609$ €.
b) Tableau indiquant des valeurs successives des variables *k* et *C*.

k	C
1	10 300
2	10 609

31. 1. a) $P_1 = 200 \times 1{,}02 = 204$. $P_2 = 204 \times 1{,}02 \approx 208$.
b) Pour tout entier n, $P_{n+1} = P_n + 0{,}02\,P_n$; $P_{n+1} = 1{,}02\,P_n$.
La suite (P_n) est la suite géométrique de premier terme $P_0 = 200$ et de raison $q = 1{,}02$.
c) Pour tout entier n, $P_n = P_0 q^n = 200(1{,}02)^n$.
d) $P_{10} = 200\,(1{,}02)^{10} \approx 244$.
2. a) $P_{11} \approx 249$; $P_{12} \approx 254$.
b) À partir de $2010 + 12 = 2022$.

36. Placement à intérêts composés
1. a) Chaque année, le capital placé augmente de 2,5 %, ce qui revient à multiplier par 1,025.
b) La suite des valeurs de C est géométrique de raison 1,025.
c) La variable C correspond à la valeur du capital placé à la fin de l'année n.
d) On sort de la boucle lorsque le capital atteint ou dépasse la valeur S.
2. L'algorithme détermine le nombre d'années nécessaire pour que le capital dépasse la valeur S.
3. On entre la valeur $S = 40\,000$. L'algorithme affiche 29. Il faut placer le capital pendant 29 ans pour qu'il double.

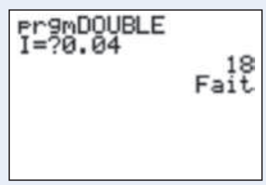


37. Temps de doublement d'un capital
1. $C_1 = 1{,}04 \times 10\,000 = 10\,400$.
$C_2 = 1{,}04 \times C_1 = 10\,816$.
2. a) $C_1 = (1 + i) \times 10\,000$ et $C_2 = (1 + i) \times C_1$.
b) Pour tout entier n non nul, $C_{n+1} = (1 + i) \times C_n$.
La suite (C_n) est géométrique de raison $(1 + i)$.
3. a) Le test d'arrêt de la boucle est « $C < 20\,000$ ». On sort de la boucle lorsque $C \geq 20\,000$.

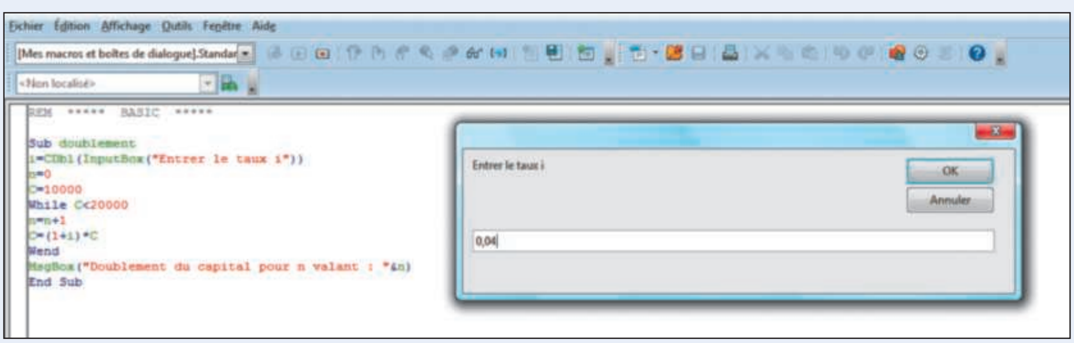
b)

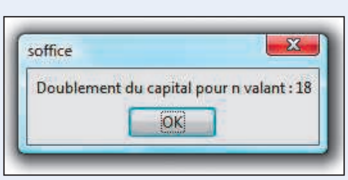
		C	$C < 20\,000$
Initialisation	$n = 0$	10 000	VRAI
Boucle	$n = 1$	10 400	VRAI
	$n = 2$	10 816	VRAI

4. On obtient les affichages suivants.
Avec les calculatrices :

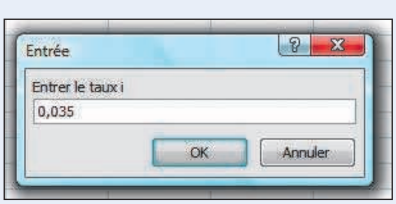


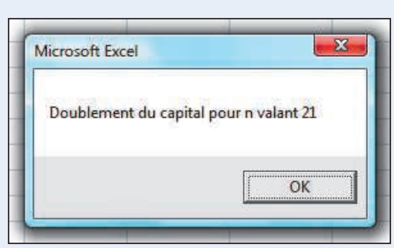
Avec OpenOffice Calc :





Avec Excel :





5. Pour $i = 0{,}0325$, on obtient $n = 22$.

38. a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Réponses des QCM

46. **1.** Réponse c). **2.** Réponse a). **3.** Réponse b).
4. Réponse b).

47. Réponse b).

48. **1.** Réponse c). **2.** Réponse b). **3.** Réponse a).

49. Réponse b).

50. **1.** Réponse c). **2.** Réponse b). **3.** Réponse b).

51. **1.** Réponse c). **2.** Réponse b).

52. Réponse a).

53. Réponse c).

Corrigés des exercices pour le BTS

54. **A. 1.** En 1999 : $u_1 = 230\ 000 + 15\ 000$.
$u_1 = 245\ 000$ euros.
2. La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 230\ 000$ et de raison $r = 15\ 000$.
3. Le chiffre d'affaires pour 2014 est :
$u_{16} = u_0 + 16r = 230\ 000 + 16 \times 15\ 000$,
$u_{16} = 470\ 000$ euros.
B. 1. En 1999 : $v_1 = 150\ 000 \times (1 + 0{,}074)$;
$v_1 = 150\ 000 \times 1{,}074$; $v_1 = 161\,100$ euros.
2. Pour tout entier naturel *n*, on a :
$v_{n+1} = 1{,}074 \times v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 150\ 000$ et de raison 1,074.
3. Le chiffre d'affaires pour 2014 est :
$v_{16} = v_0(1{,}074)^{16} = 150\ 000 \times (1{,}074)^{16}$;
$v_{16} \approx 470\ 067$ euros.
C. 1. En 2014, les deux entreprises ont des chiffres d'affaires voisins.
2. • *Chiffres d'affaires de A dans 15 ans.*
$470\ 000 + 15 \times 15\ 000 = 695\ 000$ euros.
• *Chiffres d'affaires de B dans 15 ans.*
$470\ 067 \times (1{,}074)^{15} \approx 1\,371\,589$ euros.
• $695\ 000 \times 2 = 1\,390\ 000$.
Le chiffre d'affaires de l'entreprise *B* ne sera pas tout à fait le double de celui de l'entreprise *A*. Il manquera $1\,390\ 000 - 1\,371\,589 = 18\ 411$ euros.

57. **A. 1.** Le nombre de logements sociaux dans la ville A en 2014 est : 4 100 + 160 = 4 260.
Le nombre de logements sociaux dans la ville B en 2014 est : $3\,592 \times 1{,}07 \approx 3\,843$.
2. En C3 : =C2+160.
En D3 : =D2*1,07.
3. En 5 ans : $5 \times 160 = 800$.

B. 1. a) $a_{n+1} = a_n + 160$. La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 160 et de premier terme $a_0 = 3\,460$.
b) $2\,019 = 2\,009 + 10$. $a_{10} = 3\,460 + 10 \times 160 = 5\,060$.
Le nombre de logements sociaux n'aura pas doublé.
2. $b_{n+1} = 2\,740 \times (1{,}07)^{n+1} = 2\,740 \times (1{,}07)^n \times 1{,}07$.
$b_{n+1} = 1{,}07\, b_n$. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,07 et de premier terme $b_0 = 2\,740$.
3. On complète la feuille de calcul de 2013 à 2019 :

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Ville A	Ville B
6	2013	4	4 100	3 592
7	2014	5	4 260	2 843
8	2015	6	4 420	4 112
9	2016	7	4 580	4 400
10	2017	8	4 740	4 708
11	2018	9	4 900	5 038
12	2019	10	5 060	

En 2018 le nombre de logements sociaux de la ville B dépassera celui de la ville A.

59. **1.** $5\,000 + \dfrac{4}{100} \times 5\,000 = 5\,000 + 5\,000 \times 0{,}04$
$= 5\,000 \times 1{,}04 = 5\,200$.
2. $5\,200 \times 1{,}04 = 5\,408$;
$5\,408 \times 1{,}04 \approx 5\,624$.
3. Pour tout entier *n*, $P_{n+1} = 1{,}04\, P_n$.
La suite (P_n) est donc une suite géométrique de premier terme $P_0 = 5\,000$ et de raison 1,04.
4. $P_n = 5\,000 \times (1{,}04)^n$.
5. $2020 = 2013 + 7$.
$P_7 = 5\,000 \times (1{,}04)^7 \approx 6\,580$.
6. $P_{10} \approx 7\,401$; $P_{15} \approx 9\,005$; $P_{16} \approx 9\,365$; $P_{17} \approx 9\,740$; $P_{18} \approx 10\,129$.
$2013 + 18 = 2031$.
En 2031 (si l'entreprise existe encore !).

61. **A. 1. a)** $500 \times 1{,}025 = 512{,}50$
$512{,}50 + 100 = 612{,}50$.
b) $967{,}16 \times 1{,}025 + 100 \approx 1\,091{,}34$.
2. =B2*1,025+100
B. 1. $u_1 = 800 \times 1{,}025 = 820$.
2. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 800$ et de raison $q = 1{,}025$.
Pour tout entier naturel *n*, $u_n = 800(1{,}025)^n$.
3. Au 01/07/2018, $n = 4$.
$u_4 = 800 \times (1{,}025)^4 \approx 883{,}05$.
Le capital disponible avec le placement de la partie A est supérieur au capital disponible avec le placement de la partie B.
4. $u_5 \approx 905$; $u_7 \approx 951$; $u_8 \approx 975$; $u_9 \approx 999$; $u_{10} \approx 1\,024$.
On prend $n = 10$. Donc, en 2024.

62. 1. a) En 2001, la norme tolérée est :
$635(1 - 0{,}117) = 635 \times 0{,}883$, c'est-à-dire 560,705 arrondi à 561 mg/km.

b) En 2002, la norme tolérée est :
$(635 \times 0{,}883) \times 0{,}883 = 495{,}105\,515$ arrondi à 495 mg/km.
Le véhicule émettant 500 mg/km ne respectait donc pas la norme tolérée cette année-là.

2. a) p étant la norme tolérée une année donnée, la norme tolérée l'année suivante est $0{,}883 \times p$.

b) Tant que $p > 100$
Afficher n

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}883u_n$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 635$ et de raison $q = 0{,}883$.

b) $u_n = 635 \times 0{,}883^n$.

c) $u_{12} \approx 143$.

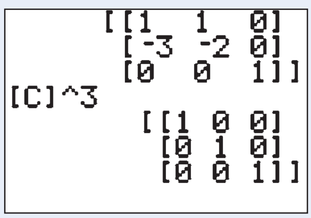
4. $u_{13} \approx 126$; $u_{14} \approx 111$; $u_{15} \approx 98$.
L'Union européenne atteindra son objectif à partir de $2\,000 + 15 = 2\,015$.

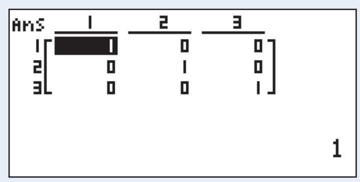
CHAPITRE 2

Réponses des TP TICE

TP1 Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'une calculatrice

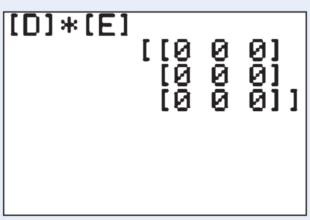
A. 1. On obtient $C^3 = I$, matrice identité d'ordre 3.

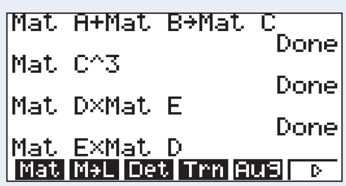


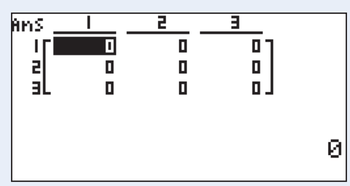


2. On en déduit $C^6 = (C^3)^2 = I^2 = I$. On peut vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

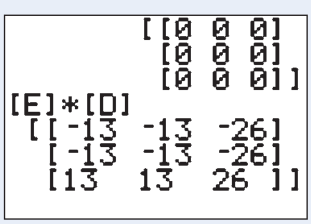
B. 1. Le produit DE est la matrice nulle. Un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

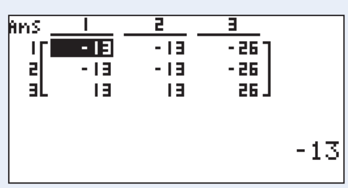




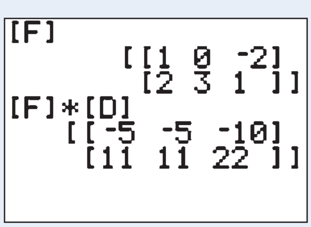


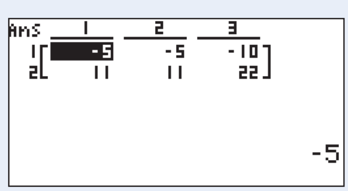
2. Le produit ED n'est pas nul. On constate que $ED \neq DE$.



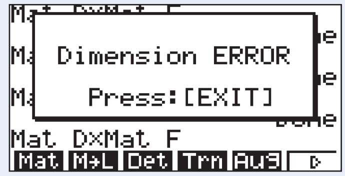


3. Calcul du produit FD.

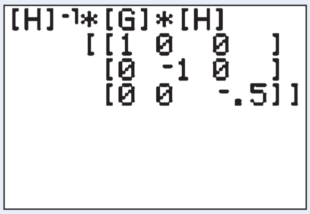


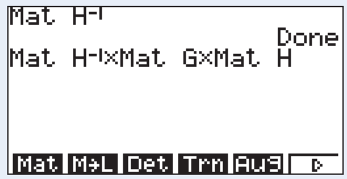


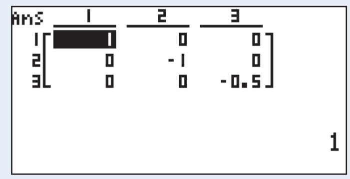
4. Le produit *DF* est impossible. Les dimensions des matrices ne sont pas compatibles.



C. 2.

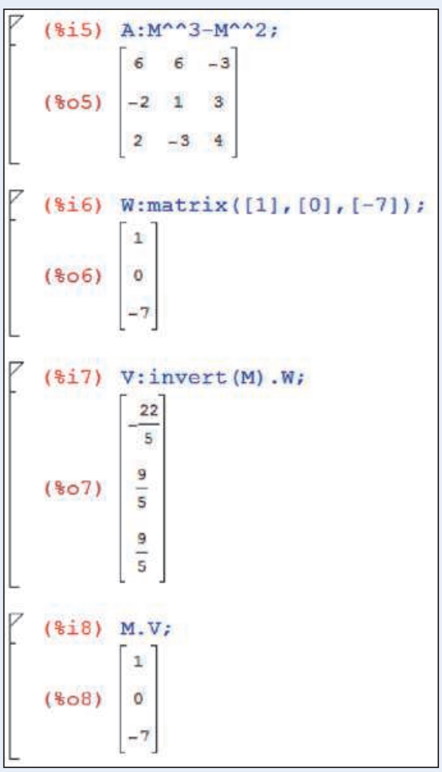


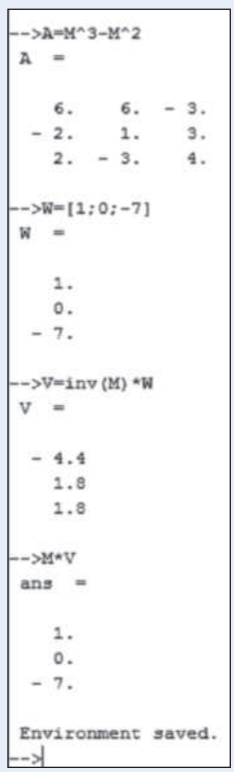


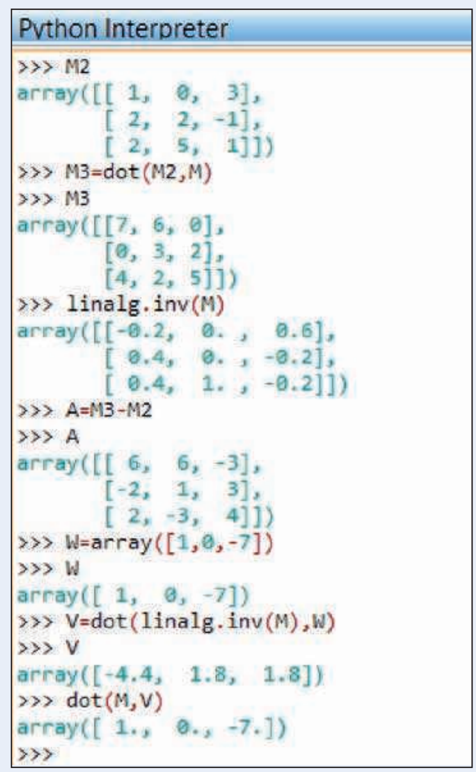


TP2 Effectuer des calculs matriciels à l'aide d'un logiciel : Maxima, Scilab ou Python

Exemple de calculs menés avec Maxima ; Scilab et Python (avec vérification de la réponse à la question 3.) :







TP3

2. b) On obtient $x \approx 219{,}7$; $y \approx 172{,}5$ et $z \approx 268{,}4$.

Affichage des logiciels Maxima, Scilab et Python fournissant ce résultat :

```
(%i1) A:matrix([0.9,-0.4,-0.2],[-0.2,0.7,-0.1],[-0.5,-0.3,0.9]);
       [ 0.9  -0.4  -0.2 ]
(%o1)  [ -0.2  0.7  -0.1 ]
       [ -0.5  -0.3  0.9 ]

(%i2) B:matrix([75],[50],[80]);
       [ 75 ]
(%o2)  [ 50 ]
       [ 80 ]

(%i3) invert(A).B;
       [ 219.672131147541  ]
(%o3)  [ 172.5409836065574 ]
       [ 268.4426229508197 ]
```

```
-->inv(A)*B
 ans  =

    219.67213114754
    172.54098360656
    268.44262295082
```

```
>>> from numpy import*
>>> A=array([(0.9,-0.4,-0.2),(-0.2,0.7,-0.1),(-0.5,-0.3,0.9)])
>>> B=array([75,50,80])
>>> dot(linalg.inv(A),B)
array([ 219.67213115,  172.54098361,  268.44262295])
>>>
```

Corrigés des exercices

1. $A+B=\begin{pmatrix}4&6\\8&0\end{pmatrix}$; $B+A=\begin{pmatrix}4&6\\8&0\end{pmatrix}$;

$3A=\begin{pmatrix}0&3\\6&9\end{pmatrix}$; $-2B=\begin{pmatrix}-8&-10\\-12&6\end{pmatrix}$;

$3A-2B=\begin{pmatrix}-8&-7\\-6&15\end{pmatrix}$.

4. 1. $AB=\begin{pmatrix}2&3\\14&19\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}10&19\\6&11\end{pmatrix}$.

2. Non.

6. $AB = O$ avec $A \neq O$ et $B \neq O$.

7. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)=\begin{pmatrix}-14&-3&12&17\\38&-7&-20&29\end{pmatrix}$.

On pourrait le prévoir : on sait que, les matrices, A, B, C étant quelconques, $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$.

11. a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

b) $A^3=A^2\times A$.

$A^3=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&3&2\\0&2&1\end{pmatrix}$.

12. $A^2+AB+2B=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\-4&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$.

13. 1. $F^2=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&2&-1\\2&5&1\end{pmatrix}$.

$F^3=F^2\times F$.

$F^3=\begin{pmatrix}7&6&0\\0&3&2\\4&2&5\end{pmatrix}$.

2. $A=F^3-F^2$.

$A=\begin{pmatrix}6&6&-3\\-2&1&3\\2&-3&4\end{pmatrix}$.

18. Un algorithme de calcul de puissance d'une matrice avec Python

2. On obtient les résultats suivants.

```
Python Interpreter
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>>
>>> from numpy import*
>>> T=array([(0.99,0.01),(0.9,0.1)])
>>> T
array([[ 0.99,  0.01],
       [ 0.9 ,  0.1 ]])
>>> puissance(T,3)
array([[ 0.989019,  0.010981],
       [ 0.98829 ,  0.01171 ]])
>>> U0=array([(1,0)])
>>> U0
array([[1, 0]])
>>> dot(U0,puissance(T,3))
array([[ 0.989019,  0.010981]])
>>> dot(U0,puissance(T,5))
array([[ 0.98901105,  0.01098895]])
>>> puissance(T,10)
array([[ 0.98901099,  0.01098901],
       [ 0.98901099,  0.01098901]])
>>> puissance(T,20)
array([[ 0.98901099,  0.01098901],
       [ 0.98901099,  0.01098901]])
>>>
```

19. 1. $MN = \begin{pmatrix} 7\,900 \\ 12\,600 \\ 4\,100 \end{pmatrix}$

2. Les nombres représentent la valeur du stock dans chacun des trois points de vente.

20. Par exemple :

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7}+\frac{12}{7} & \frac{4}{7}-\frac{4}{7} \\ -\frac{15}{7}+\frac{15}{7} & \frac{12}{7}-\frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

De même, $M_2 \times M_1 = I$.

M_1 et M_2 sont inverses l'une de l'autre.

23.

1. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

2. $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

25. 1. $AX = B$ équivaut à S.

2. a) Avec une calculatrice ou un logiciel, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

b) De $AX = B$, on déduit que :

$A^{-1} \times (A \times X) = A^{-1} \times B$; $(A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B$.

$A^{-1} \times A = I$ d'où $I \times X = A^{-1} \times B$,

$X = A^{-1} \times B$.

c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 80 \end{pmatrix}$.

31. Résolution de systèmes dans le domaine technologique

1. Résolution avec les logiciels Maxima, Scilab et Python :

```
(%i1) A:matrix([1,-1,-1,0,0,0],[0,1,-1,-1,0,0],[1,0,0,-1,0,-1],[1,0,3,2,0,0],[0,-7.5,3,0,1,0],[0,0,0,-2,1,1]);
      [1   -1  -1  0  0  0 ]
      [0   1   -1  -1 0  0 ]
(%o1) [1   0   0   -1 0  -1]
      [1   0   3   2  0  0 ]
      [0  -7.5 3   0  1  0 ]
      [0   0   0   -2 1  1 ]
(%i2) B:matrix([0],[0],[0],[240],[-2],[2]);
      [ 0 ]
      [ 0 ]
(%o2) [ 0 ]
      [240]
      [-2 ]
      [ 2 ]
(%i3) invert(A).B;
      [ 134.5000000000001]
      [      -29.0       ]
(%o3) [ 163.5000000000001]
      [-192.5000000000001]
      [-710.0000000000005]
      [ 327.0000000000001]
```

```
-->A=[1,-1,-1,0,0,0;0,1,-1,-1,0,0;1,0,0,-1,0,-1;1,0,3,2,0,0;0,-7.5,3,0,1,0;0,0,0,-2,1,1]
 A  =

    1.  - 1.   - 1.    0.    0.    0.
    0.    1.   - 1.  - 1.    0.    0.
    1.    0.     0.  - 1.    0.  - 1.
    1.    0.     3.    2.    0.    0.
    0.  - 7.5    3.    0.    1.    0.
    0.    0.     0.  - 2.    1.    1.

-->B=[0;0;0;240;-2;2]
 B  =

    0.
    0.
    0.
    240.
  - 2.
    2.

-->inv(A)*B
 ans  =

    134.5
  - 29.
    163.5
  - 192.5
  - 710.
    327.
```

```
>>> from numpy import*
>>> A=array([(1,-1,-1,0,0,0),(0,1,-1,-1,0,0),(1,0,0,-1,0,-1),(1,0
>>> B=array([0,0,0,240,-2,2])
>>> dot(linalg.inv(A),B)
array([ 134.5,  -29. ,  163.5, -192.5, -710. ,  327. ])
>>>
```

2. Résolution avec les logiciels Maxima, Scilab et Python :

```
(%i1) A:matrix([1,0,1,-1,0,0,0],[1,0,0,0,-1,0,0],[0,-2,0
      [1   0  1  -1   0   0  0]
      [1   0  0   0  -1   0  0]
      [0  -2  0   1   0   0  0]
(%o1) [0  -1  0   0   0   2  0]
      [0   0  0   1   0  -1  0]
      [0   0  0   0   1   0  1]
      [0   0  0   0   0  -2  2]

(%i2) B:matrix([0],[1650],[0],[0],[0],[1060],[1540]);
      [   0]
      [1650]
      [   0]
(%o2) [   0]
      [   0]
      [1060]
      [1540]

(%i3) invert(A).B;
      [ 1940]
      [    0]
      [-1940]
(%o3) [    0]
      [  290]
      [    0]
      [  770]
```

```
-->A=[1,0,1,-1,0,0,0;1,0,0,0,-1,0,0;0,-2,0,1,0,0,0;0,-1,0,0,0,2,0;0,0,0,1,0,-1,0;0,0,0,0,1,0,1;0,0,0,0,0,-2,2]
 A  =

    1.    0.    1.  - 1.    0.    0.    0.
    1.    0.    0.    0.  - 1.    0.    0.
    0.  - 2.    0.    1.    0.    0.    0.
    0.  - 1.    0.    0.    0.    2.    0.
    0.    0.    0.    1.    0.  - 1.    0.
    0.    0.    0.    0.    1.    0.    1.
    0.    0.    0.    0.    0.  - 2.    2.

-->B=[0;1650;0;0;0;1060;1540]
 B  =

    0.
    1650.
    0.
    0.
    0.
    1060.
    1540.

-->inv(A)*B
 ans  =

    1940.
    0.
  - 1940.
    0.
    290.
    0.
    770.
```

```
>>> A=array([(1,0,1,-1,0,0,0),(1,0,0,0,-1,0,0),(0,-2,0,1,0,0,0),(0,-1,0,0,0
>>> B=array([0,1650,0,0,0,1060,1540])
>>> dot(linalg.inv(A),B)
array([ 1940.,     0., -1940.,     0.,   290.,     0.,   770.])
>>>
```

Réponses des QCM

33. Réponse c).

34. Réponse b).

35. Réponse c).

36. Réponse c).

37. Réponse b).

38. Réponse c).

Corrigés des exercices pour le BTS

40. Produit nul et calcul formel matriciel avec Maxima

1. $a = 13$.

2.

```
(%i4) M:matrix([1,-1,2],[2,13,1],[3,-13,8]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 13 & 1 \\ 3 & -13 & 8 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) M.A;
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) A.M;
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} -45 & 360 & -153 \\ 5 & -40 & 17 \\ 25 & -200 & 85 \end{bmatrix}$$

42. Problème de production

1. En exprimant les quantités utilisées, on obtient le système suivant.

$$\begin{cases} a = 10x + 4y + 10z \\ p = 2x + y + z \\ t = 10x + 6y + 12z \end{cases}$$

Une traduction matricielle de ce système est $Y = MX$.

2. On a $X = M^{-1}Y$.

3. Avec Maxima, Scilab ou Python, on peut mener les calculs suivants.

```
(%i3) Y:matrix([4200],[800],[5000]);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 4200 \\ 800 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

```
(%i4) invert(M).Y;
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

```
-->Y=[4200;800;5000]
 Y  =

    4200.
    800.
    5000.

-->inv(M)*Y
 ans  =

    200.
    300.
    100.
```

```
>>> Y=array([4200,800,5000])
>>> dot(linalg.inv(M),Y)
array([ 200.,  300.,  100.])
>>> 
```

Durant le mois, on a fabriqué 200 appareils de type L, 300 appareils de type C et 100 appareils de type V.

45. **1.** $x+y+z=N$
$2{,}5x+2y+z=M$
$x+1{,}5y+0{,}5z=C.$

2. a) $AX=B$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2{,}5x+2y+z \\ x+1{,}5y+0{,}5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=N \\ 2{,}5x+2y+z=M \\ x+1{,}5y+0{,}5z=C. \end{cases}$$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -1 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$

c) $A^{-1}\times(AX)=A^{-1}\times B$;
$(A^{-1}\times A)\times X=A^{-1}\times B$;
$X=A^{-1}\times B.$

d) $A^{-1}\times B=\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -1 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$;

$$X=\begin{pmatrix} -0{,}5N+M-C \\ -0{,}25N-0{,}5M+1{,}5C \\ 1{,}75N-0{,}5M-0{,}5C \end{pmatrix}.$$

3. Avec $N=140$, $M=275$ et $C=135$, on obtient

$X=\begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$. La fabrication est optimale lorsqu'on utilise 70 pièces de type X, 30 pièces de type Y et 40 pièces de type Z.

CHAPITRE 3

Corrigés des exercices

1. **a)** $110_2=1\times2^2+1\times2$, donc $110_2=6$.
b) $1011_2=1\times2^3+1\times2+1$, donc $1011_2=11$.

4. **a)** $10{,}01_2=1\times2+1\times2^{-2}$, donc $10{,}01_2=2{,}25$.
b) $100{,}011_2=1\times2^2+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}$,
donc $100{,}011_2=4{,}375$.

7. **a)**

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l}
21 & 2 & & & & \\
\mathbf{1} & 10 & 2 & & & \\
 & \mathbf{0} & 5 & 2 & & \\
 & & \mathbf{1} & 2 & 2 & \\
 & & & \mathbf{0} & 1 & 2 \\
 & & & & \mathbf{1} & 0
\end{array}$$

$21=10101_2$.

b)

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
41 & 2 & & & & & \\
\mathbf{1} & 20 & 2 & & & & \\
 & \mathbf{0} & 10 & 2 & & & \\
 & & \mathbf{0} & 5 & 2 & & \\
 & & & \mathbf{1} & 2 & 2 & \\
 & & & & \mathbf{0} & 1 & 2 \\
 & & & & & \mathbf{1} & 0
\end{array}$$

$41=101001_2$.

10. **a)** Partie entière : $15=1111_2$
(voir le corrigé de l'exercice **7**).
Partie décimale : 0,75.
$0{,}75\times2=\mathbf{1}{,}5$.
$0{,}5\times2=\mathbf{1}$.
Donc $0{,}75=0{,}11_2$ et $15{,}75=1111{,}11_2$.
b) Partie entière : $62=111110_2$
(voir le corrigé de l'exercice **7**).

Partie décimale 0,625.
$0{,}625 \times 2 = \mathbf{1}{,}25$
$0{,}25 \times 2 = \mathbf{0}{,}5$
$0{,}5 \times 2 = \mathbf{1}$.
Donc $0{,}625 = 0{,}101_2$ et $62{,}625 = 111110{,}101_2$.

11. $0{,}333 \times 2 = \mathbf{0}{,}666$
$0{,}666 \times 2 = \mathbf{1}{,}332$
$0{,}332 \times 2 = \mathbf{0}{,}664$
$0{,}664 \times 2 = \mathbf{1}{,}328$.
Donc $0{,}333 = 0{,}0101\ldots_2$.
a) L'arrondi par défaut à 2^{-3} est 0,010.
b) L'arrondi par excès à 2^{-3} est 0,011.
c) L'arrondi au plus près à 2^{-3} est 0,011 car le premier symbole non écrit (correspondant à 2^{-4}), est 1.

16. **a)** On exprime en binaire à 4 bits chaque symbole de $2A7_{16}$: on obtient alors
0010   1010   0111.
On supprime les deux 0 inutiles (à gauche) :
$2A7_{16} = 1010100111_2$.
b) On procède comme au **a)** des deux côtés de la virgule :
$B3C{,}09_{16} = 101100111100{,}00001001_2$.

19. **a)** On regroupe les symboles de 10011_2 en paquets de 4 bits en complétant avec des 0 :
$10011_2 = 0001\ \ 0011_2$.
On remplace alors 0001 et 0011 par leurs valeurs en hexadécimal, c'est-à-dire par 1 et $2 + 1 = 3$.
On obtient : $10011_2 = 13_{16}$.
On peut vérifier qu'en écrivant 10011_2 et 13_{16} dans le système décimal, on obtient 19 dans les deux cas.
b) On procède comme au a) des deux côtés de la virgule :
$110110{,}101_2 = 0011\ \ 0110{,}1010_2$.
$0011_2 = 3_{16}$; $0110_2 = 6_{16}$ et $1010_2 = A_{16}$.
Donc $110110{,}101_2 = 36{,}A_{16}$.
On peut vérifier qu'en écrivant ces deux nombres dans le système décimal, on obtient 54,625 dans les deux cas.

22. **a)** $BAC_{16} = 11 \times 16^2 + 10 \times 16 + 12$,
donc $BAC_{16} = 2\,988$.
b) $DE,F31_{16} = 13 \times 16 + 14 + 15 \times 16^{-1} + 3 \times 16^{-2} + 16^{-3}$,
donc $DE,F31_{16} = 222{,}949\ \ 462\ \ 890\ \ 625$.

25. **a)**

$$\begin{array}{r|r|r|l} 4\,000 & 16 & & \\ \cline{2-2} 80 & 250 & 16 & \\ \cline{3-3} 00 & 90 & 15 & 16 \\ \cline{4-4} \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{15} & 0 \end{array}$$

En écrivant la liste des restes dans le sens de la flèche et en remplaçant 10 par A et 15 par F, on obtient :
$4\,000 = FA0_{16}$.

b) Pour la partie entière, même méthode qu'au **a)**.

$$\begin{array}{r|r|r|l} 3\,840 & 16 & & \\ \cline{2-2} 64 & 240 & 16 & \\ \cline{3-3} 00 & 80 & 15 & 16 \\ \cline{4-4} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{15} & 0 \end{array}$$

$3\,840 = F00_{16}$.
Pour la partie décimale, on effectue des multiplications par 16.
$0{,}289\,062\,5 \times 16 = \mathbf{4}{,}625$.
$0{,}625 \times 16 = \mathbf{10}$.
Donc $0{,}289\,062\,5 = 0{,}4A_{16}$.
En conclusion $3\,840{,}289\,062\,5 = F00{,}4A_{16}$.

28. Les retenues sont placées au-dessus des nombres à additionner avec une taille réduite.

a)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1\,100 \\ +\quad 101 \\ \hline 10\,001 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 101{,}01 \\ +\quad 11{,}101 \\ \hline 1\,000{,}111 \end{array}$$

Les équivalents de ces additions dans le système décimal sont :

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\quad 5 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}25 \\ +\quad 3{,}625 \\ \hline 8{,}875 \end{array}$$

Voir le corrigé des exercices 1 et 4 pour le passage du binaire au décimal.

31. On utilise la table d'addition en base 16 qui se déduit immédiatement de la correspondance entre les lettres A, B, …, F et les nombres 10, 11, …, 15.

a)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ A2C3 \\ +\quad D58 \\ \hline B01B \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 4B{,}6 \\ +\quad 0{,}A \\ \hline 4C{,}0 = 4C. \end{array}$$

Les équivalents de ces additions dans le système décimal sont :

$$\begin{array}{r} 41\,667 \\ +\quad 3\,416 \\ \hline 45\,083 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75{,}375 \\ +\quad 0{,}625 \\ \hline 76{,}000 = 76. \end{array}$$

Voir le corrigé de l'exercice **22** pour le passage de l'hexadécimal au décimal.

34. **a)** En binaire $101 \times 100 = 10\,100$.
L'équivalent de cette multiplication dans le système décimal est : $5 \times 4 = 20$. (Voir le corrigé de l'exercice **1**)
b) En binaire $101{,}1 : 100 = 1{,}011$.
L'équivalent de cette division dans le système décimal est : $5{,}5 : 4 = 1{,}375$. (Voir le corrigé de l'exercice **4**).

38. 87 est divisible par 3 car $8 + 7 = 15 = 3 \times 5$.
Donc 87 n'est pas un nombre premier.

$\sqrt{89} \approx 9{,}4$ et 89 n'est divisible par aucun des nombres premiers compris entre 2 et 9, c'est-à-dire 2, 3, 5, 7.

Donc 89 est un nombre premier.

$91 = 7 \times 13$, donc 91 n'est pas un nombre premier.

41. Dans le tableau des nombres entiers compris entre 100 et 150, on n'écrit ni les nombres pairs (divisibles par 2), ni les nombres se terminant par 5 (divisible par 5).

101	103	107	109
~~111~~	113	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	127	~~129~~
131	~~133~~	137	139
~~141~~	~~143~~	~~147~~	149

On barre les nombres divisibles par 3 : 111 – 117 – 123 – 129 – 141 – 147.

On barre les nombres divisibles par 7 : $119 = 7 \times 17$ et $133 = 7 \times 19$.

On barre les nombres divisibles par 11 : $121 = 11 \times 11$ et $143 = 11 \times 13$.

Comme $\sqrt{150} \approx 12{,}2$ les nombres non barrés sont premiers.

43. **a)**

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.

b)

$$\begin{array}{r|l} 1\,617 & 3 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$1\,617 = 3 \times 7^2 \times 11$.

46. **a)** $24 = 3 \times 8$, donc $24 = 2^3 \times 3$.

Les diviseurs de 24 sont les nombres $2^i\,3^j$ avec $0 \leq i \leq 3$ et $0 \leq j \leq 1$.

On obtient : $\underbrace{1-3}_{i=0} - \underbrace{2-6}_{i=1} - \underbrace{4-12}_{i=2} - \underbrace{8-24}_{i=3}$, c'est-à-dire : 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 –12 – 24.

b)

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Les diviseurs de 60 sont les nombres $2^i \times 3^j \times 5^k$ avec $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq 1$ et $0 \leq k \leq 1$.

On obtient :

$\underbrace{1-5}_{\substack{i=0\\j=0}} - \underbrace{3-15}_{\substack{i=0\\j=1}} - \underbrace{2-10}_{\substack{i=1\\j=0}} - \underbrace{6-30}_{\substack{i=1\\j=1}} - \underbrace{4-20}_{\substack{i=2\\j=0}} - \underbrace{12-60}_{\substack{i=2\\j=1}}$,

c'est-à-dire : 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 –10 – 12 – 15 – 20 – 30 – 60.

50. **a)** $15 = 3 \times 5$ et $24 = 2^3 \times 3$, donc PGCD (15, 24) = 3.

b)

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $98 = 2 \times 7^2$, donc PGCD(140, 98) $= 2 \times 7 = 14$.

53. Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs de deux nombres entiers naturels non nuls a et b tels que $a \geq b$, et de leur différence $a - b$.

On entre les valeurs de m et n dans les colonnes a et b.

On passe d'une ligne à la suivante en remplaçant les nombres a et b par b et $a - b$, la colonne a contenant le plus grand des deux.

On s'arrête lorsque $a = b$, c'est-à-dire $a - b = 0$.

D'après la propriété PGCD(a, b) = PGCD(b, $a - b$), le nombre figurant alors dans les colonnes a et b est le PGCD des nombres m et n initialement entrés.

a)

a	b	$a - b$
1 448	1 086	362
1 086	362	724
724	362	362
362	362	0

PGCD(1 448, 1 086) = 362.

b)

a	b	$a - b$
2 235	1 788	447
1 788	447	1 341
1 341	447	894
894	447	447
447	447	0

PGCD(1 788, 2 235) = 447.

56. Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs de deux nombres entiers non nuls a et b tels que $a \geq b$, et du reste r de la division euclidienne de a par b.

On entre les valeurs de m et n dans les colonnes a et b.

On passe d'une ligne à la suivante en remplaçant a par b et b par r.

On s'arrête lorsque $r = 0$.

D'après la propriété PGCD(a, b) = PGCD(r, b), le nombre figurant alors dans la colonne b est le PGCD des nombres m et n initialement entrés.

a)

a	b	r
1 148	1 086	62
1 086	62	32
62	32	30
32	30	2
30	2	0

PGCD(1 148, 1 086) = 2.

b)

a	b	r
2 235	1 788	447
1 788	447	447
447	447	0

PGCD(1 788, 2 235) = 447.

59. 1. Si on faisait 76 sachets, on aurait dans chacun 760 : 76 = 10 dragées au chocolat, ce qui est possible et 1 045 : 76 = 13,75 dragées aux amandes, ce qui est impossible.

On ne peut pas faire 76 sachets ayant la même composition.

2. a) Le nombre maximum de sachets que l'on peut réaliser est le plus grand diviseur commun à 760 et à 1 045 : c'est donc le PGCD de 760 et de 1 045 que l'on peut obtenir par l'algorithme d'Euclide (voir le corrigé de l'exercice **56**).

a	*b*	*r*
1 045	760	285
760	285	190
285	190	95
190	95	0

On peut donc réaliser au maximum 95 sachets ayant la même composition.

b) Chaque sachet contient 760 : 95 = 8 dragées au chocolat et 1 045 : 95 = 11 dragées aux amandes.

62. a) $\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 93 & 3 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$

3 est un diviseur commun à 45 et 93 qui ne sont donc pas premiers entre eux.

b) $\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$

63 et 52 ayant 1 pour seul diviseur commun sont premiers entre eux.

65. a) $\begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array}$

Donc $11 \equiv 1$ (modulo 2).

b) $\begin{array}{r|l} 135 & 11 \\ \cline{2-2} 25 & 12 \\ 3 & \end{array}$

Donc $135 \equiv 3$ (modulo 11).

De manière générale, $a \equiv r$ (modulo b) où r est le reste de la division euclidienne de a par b et r est le plus petit entier naturel congru à a modulo b.

68. $\begin{array}{r|l} 47 & 11 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$ et $\begin{array}{r|l} 25 & 11 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$,

donc $47 \equiv 3$ (modulo 11) et $25 \equiv 3$ (modulo 11),

donc $47^{900} \equiv 3^{900}$ (modulo 11) et $25^{900} \equiv 3^{900}$ (modulo 11),

donc $47^{900} - 25^{900} \equiv 3^{900} - 3^{900}$ (modulo 11),

donc $47^{900} - 25^{900} \equiv 0$ (modulo 11),

donc $47^{900} - 25^{900}$ est un multiple de 11.

71. 1. a) $2^3 = 8$ et $\begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$,

donc $2^3 \equiv 1$ (modulo 7).

b) Pour tout entier naturel n, $(2^3)^n \equiv 1^n$ (modulo 7) d'après **a)**.

Or $(2^3)^n = 2^{3n}$ et $1^n = 1$.

Donc $2^{3n} \equiv 1$ (modulo 7).

2. a) $\begin{array}{r|l} 2\,011 & 7 \\ \cline{2-2} 61 & 287 \\ 51 & \\ 2 & \end{array}$ Donc $2\,011 \equiv 2$ (modulo 7),

b) $2\,011^{2012} \equiv 2^{2012}$ (modulo 7) d'après **a)**.

3. a) $\begin{array}{r|l} 2\,012 & 3 \\ \cline{2-2} 21 & 670 \\ 02 & \\ 2 & \end{array}$ Donc $2\,012 = 3 \times 670 + 2$.

b) D'après **a)**, $2^{2012} = 2^{3 \times 670 + 2}$, $2^{2012} = (2^3)^{670} \times 2^2$.

c) D'après **2. b)** et **3. b)**, $2\,011^{2012} \equiv (2^3)^{670} \times 2^2$ (modulo 7).

Or, d'après **1. b)** dans le cas où $n = 670$,

$2^{3 \times 670} \equiv 1$ (modulo 7) donc $(2^3)^{670} \equiv 1$ (modulo 7),

donc $(2^3)^{670} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2$ (modulo 7),

donc $2\,011^{2012} \equiv 4$ (modulo 7).

Comme $0 \leq 4 < 7$, 4 est le reste de la division euclidienne de $2\,011^{2012}$ par 7.

75. Partie A

1.

Variables	*a*	*b*	*c*
Initialisation			0
Entrées	13	4	0
Traitement	9	4	1
	5	4	2
	1	4	3
Sortie	Affichage de la valeur de *c* : 3		
	Affichage de la valeur de *a* : 1		

2. a) $\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$ $\qquad 13 = 4 \times 3 + 1$.

b) Cet algorithme a permis de calculer le quotient (valeur finale de c) et le reste (valeur finale de a) de la division euclidienne de 13 par 4.

Remarque (non demandée) :

Le résultat admis dans l'énoncé repose sur le fait que cet algorithme fait retrancher à la valeur initiale de a, autant de fois que possible (comptabilisées dans c), la valeur de b jusqu'à obtenir dans a un nombre compris entre 0 et la valeur de b.

Partie B

1. Étape 1 : À la lettre U, on associe le nombre $m = 20$.

Étape 2 : $9m + 5 = 185$ et $185 = 26 \times 7 + 3$.
Le reste de la division euclidienne de 185 par 26 est $p = 3$.

Étape 3 : Au nombre $p = 3$, on associe la lettre D.
La lettre U est codée D.

2.

Variables :	m est un entier naturel p est un entier naturel
Initialisation :	Demander la valeur de m Affecter à p la valeur $9m + 5$
Traitement :	Tant que $p \geq 26$ │ Affecter à p la valeur $p - 26$ Fin de tant que
Sortie :	Afficher p

CHAPITRE 4

Corrigés des exercices

1.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Les colonnes donnant les valeurs de vérité de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et de $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ n'étant pas identiques, ces deux propositions ne sont pas équivalentes.

2.

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$	$Q \Leftrightarrow R$	$P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0

Les colonnes donnant les valeurs de vérité de $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ et de $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ étant identiques, ces deux propositions sont équivalentes.

3.

1. D'après une loi de Morgan (voir **3. B**),

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Prenons la négation de ces deux propositions équivalentes en remarquant que :

$\neg(\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$ (voir **3. B** : c'est un cas particulier de la propriété B_{10}).

$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q)).$$

2. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ d'après la fin du paragraphe **1. B**.

3. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ d'après la fin du paragraphe **1. B**.

En utilisant deux fois le résultat établi au **2.**, nous obtenons :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)).$$

Le second membre de cette équivalence est de la forme $P' \wedge Q'$ avec $\neg P \vee Q$ à la place de P' et $\neg Q \vee P$ à la place de Q'.

Or, d'après **1.**, $(P' \wedge Q') \Leftrightarrow \neg((\neg(P') \vee (\neg Q'))$.

Nous obtenons donc ici :

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg((\neg(\neg P \vee Q)) \vee (\neg(\neg Q \vee P))).$

12.

1. a) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \leq p.$

C'est une proposition vraie car $n = 0$ convient.

b) Cette proposition est de la forme $\exists x,\ p(x)$ car elle s'écrit :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad (\forall p \in \mathbb{N} \quad n \leq p).$$

La négation de $\exists x,\ p(x)$ étant $\forall x,\ \neg p(x)$ d'après la fin du paragraphe **1. B**, la négation de la proposition écrite au **1. a)** est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \neg(\forall p \in \mathbb{N} \quad n \leq p).$$

Or la négation de $\forall x,\ p(x)$ étant $\exists x,\ \neg p(x)$ d'après la fin du paragraphe **1. B**, nous avons

$$\neg(\forall p \in \mathbb{N} \quad n \leq p) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \quad n > p.$$

En définitive la négation de

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \leq p$$

est $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n > p.$

Pour tout nombre entier naturel, il existe un nombre entier naturel qui lui est strictement inférieur.

2. a) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \geq p.$

b) En procédant comme au **1. b)** nous obtenons que la négation de cette proposition est

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n < p.$$

Pour tout nombre entier naturel, il existe un nombre entier naturel qui lui est strictement supérieur.

c) Cette négation est une proposition vraie car, pour tout nombre entier naturel n, $\ p = n + 1$ convient.

22.

Soit a un élément quelconque de B.

$a + 1 = (a + 1)\,1$ d'après $B_{3.\,2}$,

$a + 1 = (a + 1)\,(a + \bar{a})$ d'après $B_{4.\,1}$,

$a + 1 = a + 1\bar{a}$ d'après $B_{2.2}$, (distributivité de l'addition par rapport à la multiplication),

$a + 1 = a + \bar{a}$ d'après $B_{1.\,2}$ et $B_{3.\,2}$,

$a + 1 = 1$ d'après $B_{4.\,1}$.

La deuxième proposition est la duale de celle qui vient d'être démontrée.

23.

Soit a et b des éléments quelconques de B.

$a + ab = a(1 + b)$ d'après $B_{2.\,1}$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) et $B_{3.\,2}$,

$a + ab = a1$ d'après $B_{1.\,1}$ et $B_{6.\,1}$ (démontré à l'exercice **22**),

$a + ab = a$ d'après $B_{3.\,2}$.

La deuxième propriété est la duale de celle qui vient d'être démontrée.

24.

1. Soit a un élément quelconque de B.

$a + \bar{a} = 1$ d'après $B_{4.\,1}$ et $a\bar{a} = 0$ d'après $B_{4.\,2}$.

Donc x existe : $\bar{a}$ convient.

Pour démontrer l'unicité de x tel que $a + x = 1$ et $ax = 0$, calculons $x + \bar{a}$, puis $\bar{a} + x$.

$x + \bar{a} = (x + \bar{a})\,1$ d'après $B_{3.\,2}$,

$x + \bar{a} = (x + \bar{a})\,(a + x)$ car x vérifie $a + x = 1$.

$x + \bar{a} = (x + \bar{a})\,(x + a)$ d'après $B_{1.\,1}$,

$x + \bar{a} = x + \bar{a}a$ d'après $B_{2.\,2}$ (distributivité de l'addition par rapport à la multiplication),

$x + \bar{a} = x + a\bar{a}$ d'après $B_{1.\,2}$,

$x + a = x + 0$ d'après $B_{4.\,2}$,

$x + \bar{a} = x$ d'après $B_{3.\,1}$.

De même, $\bar{a} + x = 1\,(\bar{a} + x)$,

$\bar{a} + x = (a + \bar{a})(\bar{a} + x)$ d'après $B_{4.\,1}$,

$\bar{a} + x = (\bar{a} + a)(\bar{a} + x)$ d'après $B_{1.1}$,

$\bar{a} + x = \bar{a} + ax$ d'après $B_{2.\,2}$,

$\bar{a} + x = \bar{a} + 0$ car x vérifie $ax = 0$,

$\bar{a} + x = \bar{a}$ d'après $B_{3.\,1}$.

De $x + \bar{a} = x$ et $\bar{a} + x = \bar{a}$,

on déduit d'après $B_{1.\,1}$ que $x = \bar{a}$.

2. a) Soit a un élément quelconque de B.

D'après $B_{4.\,1}$ et $B_{4.\,2}$, $a + \bar{a} = 1$ et $a\bar{a} = 0$.

Donc d'après $B_{1.\,1}$ et $B_{1.\,2}$, $\bar{a} + a = 1$ et $\bar{a}a = 0$.

On note (1) ces deux égalités.

Or, d'après **1.**, le seul élément y de B tel que $\bar{a} + y = 1$ et $\bar{a}$ $y = 0$ et $y = \overline{(\bar{a})}$, le complément de $\bar{a}$.

Donc $\overline{(\bar{a})} = a$ car $y = a$ convient d'après (1).

b) D'après $B_{3.\,1}$, $1 + 0 = 1$ dans le cas particulier où $a = 1$.

Donc, d'après $B_{1.\,1}$, $0 + 1 = 1$.

D'après $B_{3.\,2}$, $01 = 0$ dans le cas particulier où $a = 0$.

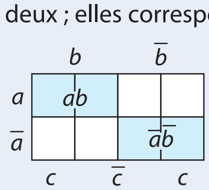
Donc $0 + 1 = 1$ et $01 = 0$ (2).

Or, d'après **1.**, le seul élément x de B tel que $0 + x = 1$ et $0x = 0$ est $x = \bar{0}$.

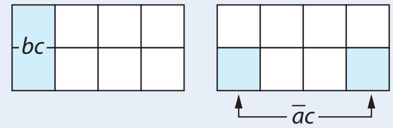
Donc $\bar{0} = 1$ car $x = 1$ convient d'après (2).

29.

1. Parmi les cinq cases retenues, quatre peuvent être regroupées deux à deux ; elles correspondent à $ab + \bar{a}\bar{b}$.

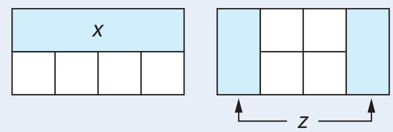


Pour prendre en compte la cinquième case (en bas, à gauche), on peut soit considérer les deux cases correspondant à bc, soit les deux cases correspondant à $\bar{a}\,c$.



L'expression booléenne représentée est donc $ab + \bar{a}\bar{b} + bc = ab + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}c$.

2. Les six cases retenues peuvent être regroupées en un bloc de quatre cases correspondant à x et à deux blocs de deux cases qui ensemble correspondent à z.



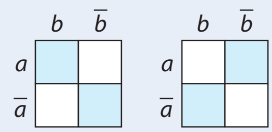
L'expression booléenne représentée est donc $x + z$.

33.

1. a) $a \oplus a = 0$; $a \oplus \bar{a} = 1$; $a \oplus 1 = \bar{a}$; $a \oplus 0 = a$.

b) $a \leftrightarrow a = 1$; $a \leftrightarrow \bar{a} = 0$; $a \leftrightarrow 1 = a$; $a \leftrightarrow 0 = \bar{a}$.

2. c)

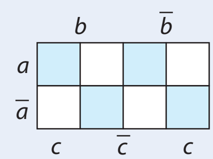


$a \leftrightarrow b$ $\qquad$ $a \oplus b$

3. $(a \leftrightarrow a) \leftrightarrow a = a$; $(a \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow a = \bar{a}$;
$(a \leftrightarrow 1) \leftrightarrow a = 1$; $(a \leftrightarrow 0) \leftrightarrow a = 0$;

4. b) $a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) = abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c}$.

5. c)



35.

1.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2 (x, y)\,\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{x < x}_{F}) \text{ ou } \underbrace{(\underbrace{x = x}_{V} \text{ et } \underbrace{y \leq y}_{V})}_{V}}_{V}$$

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$ $(x, y)\,\mathcal{R}(x, y)$: la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x', y') \in \mathbb{N}^2$ $(x, y)\,\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\,\mathcal{R}(x, y)$ est équivalent à $((x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y'))$ et $((x' < x)$ ou $(x' = x$ et $y' \leq y)$.

D'après la distributivité de et par rapport à ou (analogue à $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$), cette proposition est équivalente à : $(\underbrace{x < x' \text{ et } x' < x}_{F})$ ou

$(\underbrace{x < x' \text{ et } x' = x \text{ et } y' \leq y}_{F})$ ou $(\underbrace{x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' < x}_{F})$ ou

$(x = x'$ et $y \leq y'$ et $x' = x$ et $y' \leq y)$.

On en déduit que si $(x, y)\,\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\,\mathcal{R}(x, y)$ est une proposition vraie, alors $(x = x'$ et $y \leq y'$ et $y' \leq y)$ est une proposition vraie, donc $x = x'$ et $y = y'$, donc $(x, y) = (x', y')$: la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

3. (x, y) et (x', y') étant des éléments quelconques de $\mathbb{N}^2$, trois cas sont possibles.

1^er cas : $x < x'$: alors $(x, y)\,\mathcal{R}(x', y')$.

2^e cas : $x' < x$: alors $(x', y')\,\mathcal{R}(x, y)$.

3^e cas : $x' = x$: soit $y \le y'$ et alors $(x, y)\,\mathcal{R}(x', y')$,
soit $y' < y$, donc $y' \le y$ et alors $(x', y')\,\mathcal{R}(x, y)$.

La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre total dans $\mathbb{N}^2$.

4. $\forall(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, \forall(x', y', z') \in \mathbb{N}^3$ $(x, y, z)\,\mathcal{R}'(x', y', z')$ si et seulement si $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y < y')$ ou $(x = x'$ et $y = y'$ et $z \le z')$.

41.

1. $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M \oplus M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = M + M^{[2]}$.

51.

1. Par définition de la matrice d'adjacence d'un graphe, a_{ij} est le nombre de chemins de longueur 1 d'origine x_i et d'extrémité x_j.

2. a)

Extrémité terminale x_j / Extrémité initiale x_i	A	B	C	D
A	(A, D, A)	(A, C, B)	(A, B, C)	(A, C, D) (A, D, D)
B		(B, C, D)		(B, C, D)
C	(C, D, A)		(C, B, C)	(C, D, D)
D	(D, D, A)	(D, A, B)	(D, A, C)	(D, A, D) (D, D, D)

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Dans chaque cas $a_{ij}^{(2)}$ est le nombre de chemins de longueur 2 du sommet x_i au sommet x_j.

3. a) $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b)

Extrémité terminale x_j / Extrémité initiale x_1	A	B	C	D
A	(A, C, D, A) (A, D, D, A)	(A, B, C, B) (A, D, A, B)	(A, C, B, C) (A, D, A, C)	(A, B, C, D) (A, C, D, D) (A, D, A, D) (A, D, D, D)

c) Dans chaque cas $a_{ij}^{(3)}$ est le nombre de chemins de longueur 3 du sommet $x_1 = \text{A}$ au sommet x_j.

4. b) Il n'existe pas de chemin de longueur 2 de C à B.
L'arc (B, B) n'existe pas sur le graphe.
Il n'existe donc pas de chemin de longueur 3 du sommet C au sommet B dont l'avant-dernier sommet est B.

c) Il existe un seul chemin de longueur 2 de C à C : (C, B, C).
L'arc (C, B) existe sur le graphe.
(C, B, C, B) est donc le seul chemin de longueur 3 de C à B dont l'avant-dernier sommet est C.

d) (C, D, D) est le seul chemin de longueur 2 de C à D.
L'arc (D, B) n'existe pas sur le graphe.
Il n'existe donc pas de chemin de longueur 3 de C à B dont l'avant-dernier sommet est D.

e) Dans chacune des quatre parenthèses :
– le premier facteur donne le nombre de chemins de longueur 2 du sommet C au sommet X où X est successivement A, B, C et D ;
– le second facteur est le nombre d'arc (X, B) existant sur le graphe.
Donc chaque parenthèse donne le nombre de chemins de longueur 3 du sommet C au sommet B dont l'avant-dernier sommet est X.
La somme de ces quatre nombres donne le nombre total de chemins de longueur 3 du sommet C au sommet B.

52.

1. a) $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $M^{[2]}$ correspond à M^2 en remplaçant les deux 2 par deux 1. (Voir la question **2.b**) du n° **51**).

b) Le 1 de la première ligne et de la troisième colonne signifie qu'il existe au moins un chemin de longueur 2 d'origine A et d'extrémité C.
Le 0 de la deuxième ligne et de la première colonne signifie qu'il n'existe pas de chemin de longueur 2 d'origine B et d'extrémité A.

2. a) $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$M^{[3]}$ correspond à M^3 en remplaçant tous les 2, 3, 4 par 1. (Voir la question **3.a** du n° **51**).

b) Le 1 de la première ligne et de la première colonne signifie qu'il existe au moins un chemin de longueur 3 d'origine et d'extrémité A.

Le 0 de la deuxième ligne et de la deuxième colonne signifie qu'il n'existe pas de chemin de longueur 3 d'origine et d'extrémité B.

53. 1. a) Oui : (x_1, x_2, x_3).

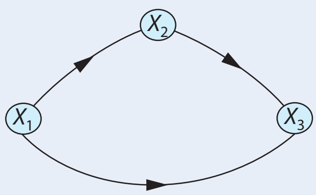
b) Non

2. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le 1 de la première ligne et de la troisième colonne justifie qu'il existe au moins un chemin de longueur 2 d'origine x_1 et d'extrémité x_3.

c) $M^{[3]}$ est la matrice nulle : tous ses coefficients sont 0.

3. a)



b) $\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $M \oplus M^{[2]} = \hat{M}$.

54. A. 1. a) (x_1, x_2, x_3) et (x_2, x_3, x_4).

b) (x_1, x_2, x_3, x_4).

c) Non.

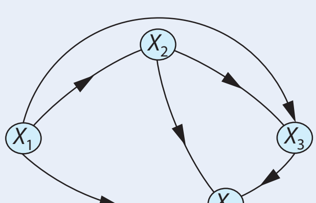
2. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $M^{[4]}$ est la matrice nulle.

Les deux 1 de $M^{[2]}$ traduisent l'existence des deux chemins de la question **1.a)**. Le 1 de $M^{[3]}$ traduit l'existence du chemin de la question **1.b)**.

3. a)



b) $\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = \hat{M}$.

B. 1. a) (x_1, x_2, x_1) et (x_2, x_1, x_2) sont les deux chemins de longueur 2.

b) (x_1, x_2, x_1, x_2) et (x_2, x_1, x_2, x_1) sont les deux chemins de longueur 3.

c) $(x_1, x_2, x_1, x_2, x_1)$ et $(x_2, x_1, x_2, x_1, x_2)$ sont les deux chemins de longueur 4.

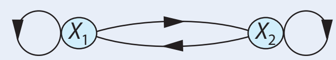
2. a) $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M'^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M'^{[3]} = M'$, donc $M'^{[4]} = M'^{[2]}$.

Les deux 1 de $M'^{[2]}$ et $M'^{[4]}$ traduisent l'existence des chemins des questions **1.a)** et **c)**.

Les deux 1 de $M'^{[3]}$ traduisent l'existence des chemins de la question **1.b)**.

3. a)



b) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M' \oplus M'^{[2]} = \hat{M}'$.

55. A. 1.

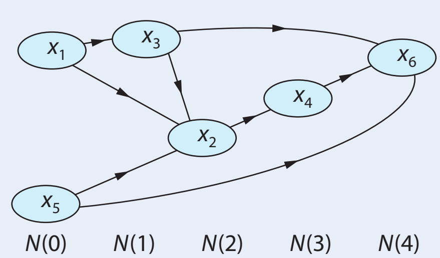
x_i	Prédécesseurs de x_i
x_1	
x_2	x_1, x_3, x_5
x_3	x_1
x_4	x_2
x_5	
x_6	x_3, x_4, x_5

2. x_1 et x_5 n'ont pas de prédécesseur. Niveau 0 : x_1, x_5.

3. x_3. Niveau 1 : x_3.

4. Niveau 2 : x_2.
Niveau 3 : x_4.
Niveau 4 : x_6.

5.



B. 1. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Les deux colonnes nulles signifient qu'il n'existe pas de chemin de longueur 1 arrivant en x_1 ou en x_5. Donc $N(0) = \{x_1, x_5\}$.

2. a) $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dans $M^{[2]}$ la **nouvelle** colonne nulle est la troisième ; donc x_3 n'est le sommet terminal d'aucun chemin de longueur 2.
D'après **1.** il existe au moins un chemin de longueur 1 de sommet terminal x_3 car la troisième colonne de M n'est pas nulle.
Donc $N(1) = \{x_3\}$.

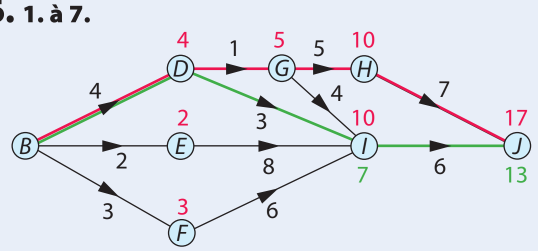
3. $M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans $M^{[3]}$ la **nouvelle** colonne nulle est la deuxième ; donc x_2 n'est le sommet terminal d'aucun chemin de longueur 3.
Il existe au moins un chemin de longueur 2 de sommet terminal x_2 car la deuxième colonne de $M^{[2]}$ n'est pas nulle.
Donc $N(2) = \{x_2\}$.
De même avec $M^{[4]}$ et $M^{[5]}$:

$M^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $N_3 = \{x_4\}$ et $M^{[5]}$ est la matrice nulle, donc $N_4 = \{x_6\}$.

56. 1. à 7.



Les valeurs demandées aux questions **1** à **7** sont notées en rouge sur le graphe.
Le chemin de B à J ayant la valeur maximale est (B, D, G, H, J), en rouge ; sa valeur est 17.
8. Les seuls changements portent sur les sommets I et J : la plus petite des valeurs des quatre sous-chemins allant de B à I est 7 (notée en vert). En conséquence le chemin de B à J ayant la valeur minimale est (B, D, I, J), en vert ; sa valeur est 13.

Réponses des QCM

57. **1.** Réponse **D.**
2. Réponse **D.**

58. **1.** Réponse **D.**
2. Réponse **B.**

59. **1.** Réponse **D.**
2. Réponse **A.**

Les 7 chemins sont
$z - z - z - t$
$z - z - t - t$
$z - t - t - t$
$z - t - x - t$
$z - x - x - t$
$z - x - z - t$
$z - x - t - t$

60. **1.** Réponse **C.**
2. Réponse **B.**

Les 5 chemins sont
$z - x - z - y$
$z - y - y - y$
$z - y - t - y$
$z - z - y - y$
$z - z - z - y$

Exercices pour le BTS

61. **1. a)**

	$\bar{b}$		b	
$\bar{a}$				
a				
	$\bar{c}$	c		$\bar{c}$

On lit : $A = \bar{a}\bar{b} + \bar{c}$.
b) $A = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}$
$= (c + \bar{c})\,\bar{a}\bar{b} + (a + \bar{a})\,b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$
$= b\bar{c} + \bar{b}(\bar{a} + a\bar{c})$
$= b\bar{c} + \bar{b}(a + \bar{a})(\bar{a} + \bar{c})$
$= b\bar{c} + \bar{b}\bar{a} + \bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{a} + \bar{c}$.
2. a) $(x \rightarrow 0) = (\bar{x} + 0) = \bar{x}$.
b) $((x \rightarrow 0) \rightarrow y) = (\bar{x} \rightarrow y) = \bar{\bar{x}} + y = x + y$.
$(((x \rightarrow 0) \rightarrow y) \rightarrow 0) = ((x + y) \rightarrow 0) = \overline{x + y} = \bar{x}\,\bar{y}$.
c) $A = ((((a \rightarrow 0) \rightarrow b) \rightarrow 0) \rightarrow (c \rightarrow 0))$.

62. **1.**

	$\bar{b}$		b	
$\bar{a}$				
a				
	$\bar{c}$	c		$\bar{c}$

On lit directement $\bar{E} = b.c$ d'où : $E = \overline{b.c} = \bar{b} + \bar{c}$ (d'après une des lois de Morgan).
2. a) Interprétons chaque condition :
• « avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins de un an » : $a.\bar{b}$;
• « avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente » : $\bar{a}.\bar{c}$;
• « être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente » : $b.\bar{c}$;

• « avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins de un an et avoir suivi une formation l'année précédente » : $\overline{a}.\overline{b}.c$.

Une formation est mise en place si la personne vérifie l'un au moins des critères précédents, l'expression booléenne correspondante est :

$F = a.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c} + b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c = E.$

b) Comme $F = E$, on a aussi : $\overline{F} = \overline{E} = b.c$, les personnes qui ne pourront pas participer à la formation qualifiante sont celles qui sont au chômage depuis un an ou plus et qui ont suivi une formation l'année précédente.

66. A.

1. A : « Pour tout élève du lycée, il existe au moins un professeur que cet élève connaît », ou encore « tout élève du lycée connaît au moins un professeur ».

2. B : « $\exists e \in E, \forall p \in P, q(e, p)$ »

3. $\overline{A}$: « $\exists e \in E, \forall p \in P, \overline{q}(e, p)$ » ; « Il existe au moins un élève qui ne connaît aucun professeur ».

$\overline{B}$: « $\forall e \in E, \exists p \in P, \overline{q}(e, p)$ » ; « Pour tout élève du lycée, il y a au moins un professeur qu'il ne connaît pas ».

B. 1. Pour mademoiselle B, on peut écrire : $\overline{s}t\overline{d}$.

2. a) $D = \overline{t}s + td + \overline{d}st$.

b) Mademoiselle B n'a pas le droit d'écrire sur le site.

3.

	sd	$s\overline{d}$	$\overline{s}\overline{d}$	$\overline{s}d$
t				
$\overline{t}$				

D'où $D = s + dt$. Un élève a le droit s'il est en section de technicien supérieur ou s'il est en filière tertiaire et participe au bureau des délégués.

67.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Le nombre total de chemins de longueur 2 est la somme des éléments de la matrice M^2 : il y a donc 14 chemins de longueur 2.

c) Il y a 6 chemins de longueur 2 issus du sommet A (somme des éléments de la première ligne de la matrice M^2) :

A → A → A   A → A → B
A → A → D   A → B → A
A → B → C   A → D → C.

3. On pourrait calculer M^3 et trouver 3 comme somme des éléments de la dernière ligne de cette matrice. Il y a 3 chemins de longueur 3 issus du sommet D.

Directement, on a : D → C → A → A
D → C → A → B   D → C → A → D.

68.

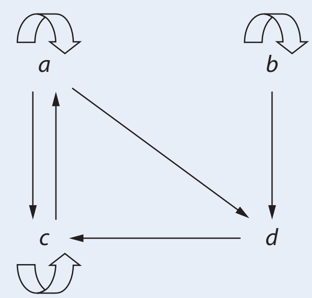
A. 1. $BC = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & 1 & 1 \\ \alpha-2 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $BC = A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta = 1 \\ \alpha-2 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^2 = C$ avec les valeurs trouvées pour α et β à la question précédente.

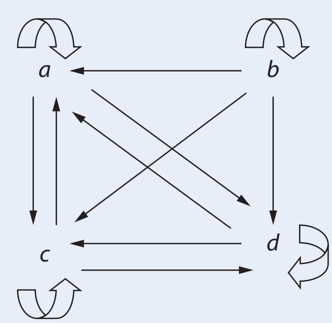
B. 1.



2. a) D'après le calcul obtenu à la question **A. 3.**, il y a trois chemins de longueur 2 allant de a vers c : a-a-c ; a-d-c ; a-c-c.

b) Il suffit de calculer, dans la matrice A^2 obtenue à la question **A. 3.**, la somme des éléments de la troisième colonne : on trouve 7.

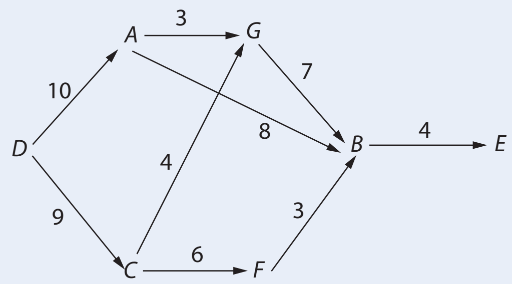
3.



70. 1.

Sommets	Prédécesseurs	Niveau
A	D	1
B	A, F, G	3
C	D	1
D		0
E	B	4
F	C	2
G	A, C	2

2.



3. Tout chemin arrivant à E passe par B.
Tout chemin arrivant à B provient soit de A, soit de F, soit de G.
Pour le chemin provenant de A,
on trouve D-A-B-E (22 minutes).
Pour le chemin provenant de F,
on trouve D-C-F-B-E (22 minutes).
Pour ceux provenant de G,
on trouve D-A-G-B-E (24 minutes).
et D-C-G-B-E (24 minutes).
Il y a donc deux trajets de durée minimale pour aller de D à E :
D-A-B-E et D-C-F-B-E durant tous les deux 22 minutes.

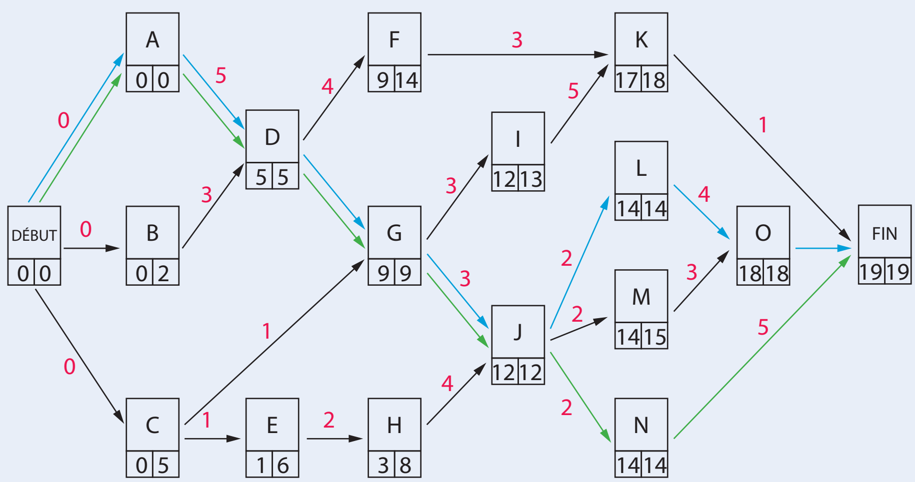
73. 1.

Niveaux	0	1	2	3	4	5
Tâches	A, B, C	D, E	F, G, H	I, J	K, L, M, N	O

2.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Successeurs	D	D	E, G	F, G	H	K	I, J	J	K	L, M, N		O	O		

3. a)



b) Ce graphe obtenu par la méthode MPM a deux chemins critiques qui relient des tâches de marge totale nulle, c'est-à-dire ayant des dates au plus tôt et au plus tard égales : A-D-G-J-L-O (en bleu) ET A-D-G-J-N (en vert).
La durée minimale de réalisation du projet est 19 jours.

RÉPONSES OU CORRIGÉS DES ÉPREUVES D'ENTRAÎNEMENT AU BTS SIO

Épreuve 1

Exercice 1 (6 points)

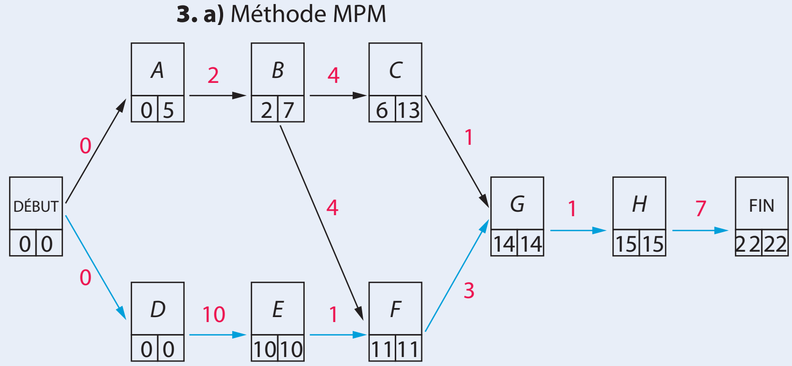
1.

Niveaux	0	1	2	3	4
Sommets	A, D	B, E	C, F	G	H

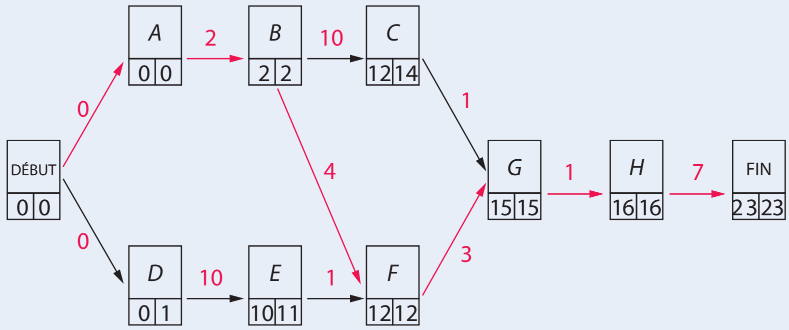
2.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Successeurs	B	C, F	G	E	F	G	H	

3. a) Méthode MPM



b) Chemin critique : (D, E, F, G, H).
Durée minimale : 22 jours.
4. Méthode MPM



La durée minimale du projet passe à 23 jours, soit une augmentation d'1 jour.
Le nouveau chemin critique est (A, B, F, G, H).

Exercice 2 (6 points)
A. 1. • $u_1 = 18\,000$; u_1 est le nombre de transistors dans un microprocesseur en 1977.
• $u_2 = 36\,000$; u_2 est le nombre de transistors dans un microprocesseur en 1979.
2. a) (u_n) est une suite géométrique de raison 2.
b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 9\,000 \times 2^n$.
3. 2001 correspond à $n = 13$.
$u_{13} = 9\,000 \times 2^{13} = 73\,728\,000$.
4. 100 milliards est égal à 10^{11}.
$u_{23} \approx 7{,}5 \times 10^{10}$.
$u_{24} \approx 1{,}5 \times 10^{11}$.
On peut prendre $n = 24$, ce qui correspond à l'année $1975 + 2 \times 24 = 2023$.
B. 1. La valeur affichée est : 72 000.
2. Cet algorithme affiche la valeur du terme u_n de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 9\,000$ et de raison 2.

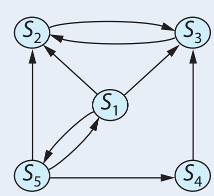
Exercice 3 (8 points)
A. 1. a) $2014 = 2 \times 19 \times 53$.
b) 1 – 2 – 19 – 38 – 53 – 106 – 1 007 – 2 014.
2. $d = 106$.
$214 = 19 \times 106$, donc $d = 19$.
B. 1. a) 106 – 318 – 530 – 742 – 954 – 1 166 – 1 378 – 1 590 – 1 802 – 2 014 – 212 – 424 – 636 – 848 – 1 060.
Non car après 2 014 la liste recommence avec 212 qui est le premier nombre de la liste.
b) 19.
2. $2014 = 38 \times 53$.
La liste s'écrit : $38 - 38 \times 2 - 38 \times 3 \ldots 38 \times 52 - 38 \times 53 = 2014$ – puis recommence avec $38 - 38 \times 2\ldots$
La liste comporte donc 53 numéros différents.
C. 1. $n = 3 \times 5$ et $2\,014 = 2 \times 19 \times 53$, donc 15 est premier avec 2 014.
Avec $n = 15$, la procédure permet de convoquer tous les candidats.
2. a) 200.
b) 19 – 57 – 95 – 133 – 171 – 209 – 247 – 285 – 323 – 361 – 399.
c) 53 – 159 – 265 – 371.
d) Comme $2\,014 = 2 \times 19 \times 53$, les nombres intervenant dans les questions **a)**, **b)** ou **c)** sont les nombres, compris entre 1 et 400, qui ne sont pas premiers avec 2 014, c'est-à-dire qui ne permettent pas de convoquer tous les candidats. Il y a donc $200 + 11 + 4 = 215$ nombres entiers compris entre 1 et 400 qui possèdent cette propriété et $400 - 215 = 185$ nombres entiers compris entre 1 et 400 qui permettent de convoquer tous les candidats.

Épreuve 2

Exercice 1 (7 points)

1. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b)



2. $(S_1, S_5, S_4, S_3, S_2)$ est un chemin hamiltonien du graphe.

3. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

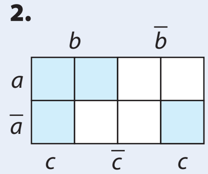
4. a) Le graphe a 13 chemins de longueur 2 (13 est la somme de tous les coefficients de la matrice M^2).
b) Le graphe à 5 chemins de longueur 2 issus du sommet S_1 (5 est la somme des coefficients de la première ligne de M^2).
5. a) Une page P_i du site est accessible depuis toutes les autres pages en quelques clics si la colonne i de la matrice M' ne comporte que des 1 (avec éventuellement un 0 sur la ligne i puisqu'il est question des **autres** pages). C'est le cas des pages P_2 et P_3.

b) Les 0 de la première colonne sont placés sur les lignes 2, 3 et 4. Ils signifient que la page P_1 n'est pas accessible depuis les pages P_2, P_3 et P_4.

Exercice 2 (6 points)

A. 1. $E = a\overline{c} + \overline{a}b + abc.$

2.



$E = b + a\overline{b}\overline{c} = b + a\overline{c}$

3. Les ordinateurs doivent être équipés d'une carte graphique de 4 Go ou doivent être équipés d'un processeur quad-core et d'un disque dur SSD.

B. 1. $u_2 = u_1 + \dfrac{5}{100}u_1$, donc $u_2 = 1{,}05 \times 6\,000 = 6\,300.$

$u_3 = 6\,615.$

2. $u_{n+1} = 1{,}05\ u_n$; donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3. a) $u_n = 6\,000 \times 1{,}05^{n-1}$.

b) $u_{12} \approx 10\,262.$

4. Oui car 95 503 > 95 500.

Exercice 3 (7 points)

A. 1. 23 est un nombre premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 23.

(Conformément au programme de mathématiques du BTS SIO, on se limite aux entiers naturels).

2. a) $88 = 2^3 \times 11.$

b) $9 = 3^2$.

9 et 88 ont pour seul diviseur commun 1.

3. $49 \times 9 = 441.$

$$\begin{array}{r|l} 441 & 88 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

La division euclidienne de 441 par 88 a pour reste 1.

B. $a = 12$, $c = 9$ et $n = 115.$

Le nombre b cherché est tel que $a^c \equiv b$ modulo n avec $0 \leq b < n.$

Or, avec une calculatrice, on obtient : $12^9 \equiv 27$ modulo 115.

Donc $b = 27.$

C. On cherche a tel que $2^{49} \equiv a$ modulo 115.

Comme $2^{33} \equiv 47$ modulo 115 et $2^{16} \equiv 101$ modulo 115,

on a $2^{33} \times 2^{16} \equiv 47 \times 101$ modulo 115,

donc $2^{49} \equiv 4\,747$ modulo 115.

Or $4\,747 \equiv 32$ modulo 115, donc $2^{49} \equiv 32$ modulo 115,

donc $a = 32.$

Épreuve 3

Exercice 1 (6 points)

A. 1. La personne possède des connaissances informatiques et de l'expérience dans le domaine concerné, mais n'a pas suivi de stage de formation spécifique.

2. $E = ab + \overline{a}c + \overline{b}c$

3. $E = c + ab$ ou $E = c + ab\overline{c}$

B. 1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Il existe deux chemins de longueur 2 ayant B pour origine :

• un de B vers D : $(B - A - D)$;

• un de B vers E : $(B - C - E)$.

$M \oplus M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Les « 1 » de cette somme signifient qu'il existe au moins un chemin de longueur 1 ou de longueur 2 du carrefour correspondant à la ligne où se trouve ce 1 au carrefour correspondant à la colonne où se trouve ce 1.

Les « 0 » de cette somme signifient qu'il n'existe pas de chemin, que ce soit de longueur 2, d'un carrefour à un autre distinct, les carrefours correspondant à l'emplacement du 0.

Exercice 2 (7 points)

A. 1. (u_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 120 800.

2. $u_n = 120\,800 \times (1{,}2)^n$.

3. $u_6 \approx 360\,707.$

4. $u_4 \approx 250\,491$ et $u_5 \approx 300\,589.$

En $2014 + 5 = 2019$, le nombre de matériels importés dépassera 300 000.

5. $S = u_0 + \ldots + u_6 = u_0 \times \dfrac{1 - q^7}{1 - q}$;

$S = 120\,000 \times \dfrac{1 - (1{,}2)^7}{1 - 1{,}2} \approx 1\,549\,908.$

6. a) =C2*1,02.

b) =SOMME($C$2:C3) ou =D2+C3.

Exercice 3 (7 points)

1. La lettre A correspond au nombre 0 et $5 \times 0 + 17 = 17.$

Le reste de la division euclidienne de 17 par 26 est 12 qui correspond à la lettre R. Donc la lettre A est codée en la lettre R.

De même, pour K on a $x = 10$ et $5 \times 10 + 17 = 6.$

Le reste de la division euclidienne de 62 par 26 est 15 qui correspond à la lettre P. Donc la lettre K est codée en la lettre P.

De même la lettre W est codée en la lettre X.

2. Avec $a = 0$ et $b = 17$, pour tout x compris entre 0 et 25, $0x + 17 = 17$ et le reste de la division euclidienne de 17 par 26 est 17 qui correspond à la lettre R. Donc chaque lettre est codée en la lettre R.

3. a) Pour x compris entre 0 et 25, les restes obtenus dans la division euclidienne de $13x + 6$ par 26 sont 6 et 19.

b) Avec la clé (13 ; 6), le mot PREMIER est codé en TTGGGGT.

Des lettres différentes sont codées en une même lettre, donc des mots différents peuvent être codés en un même mot.

4. a) $26 = 2 \times 13$, donc les nombres entiers compris entre 0 et 25 et premiers avec 26 sont : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

b) À chacune de ces 12 valeurs possibles pour a, on peut associer 26 valeurs possibles pour b : de 0 à 25.

On obtient ainsi $12 \times 26 = 312$ clés $(a\,;b)$ donnant un codage acceptable.

5. La lettre A correspond au nombre $x = 0$.

Avec la clé $(a\,;b)$, $ax + b = a \times 0 + b = b$.

Le reste de la division de b par 26 est b car $0 \leq b \leq 25$.

Donc la lettre *A* est codée en la lettre correspondant au nombre b.

Or la lettre A est codée en la lettre V qui correspond au nombre 21.

Donc $b = 21$.

La lettre *B* correspond au nombre $x = 1$.

Avec la clé $(a\,;21)$, $ax + b = a \times 1 + 21 = a + 21$.

Or la lettre B est codée en la lettre O qui correspond au nombre 14,

donc le reste de la division de $a + 21$ par 26 est 14,

donc $a + 21 \equiv 14$ modulo 16,

donc $a + 21 - 14 \equiv 14 - 14$ modulo 16,

donc $a + 7 \equiv 0$ modulo 26,

donc $a + 7$ est un multiple de 26 avec $0 \leq a \leq 25$,

donc $a = 19$ car $19 + 7 = 26$ et $0 \leq 19 \leq 25$.

La clé $(19\,;21)$ convient.

Épreuve 4

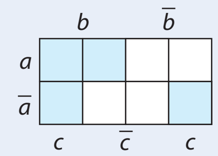
Exercice 1 (5 points)

1. $E = ab + \bar{a}c + cb$.

2. a) $a = 1$ et $E = 1$, donc $1 = b + cb$.

b) $b + cb = b$, donc $b = 1$: le langage est utilisé dans l'entreprise.

3.



$E = ab + \bar{a}c$.

4. Le langage de programmation est payant (donc $c = 0$) et a été écarté (donc $E = 0$).

On en déduit $ab = 0$ d'après la question **3.**, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$: le langage de programmation n'existe pas depuis plus de 3 ans ou n'est pas utilisé dans l'entreprise.

Exercice 2 (7 points)

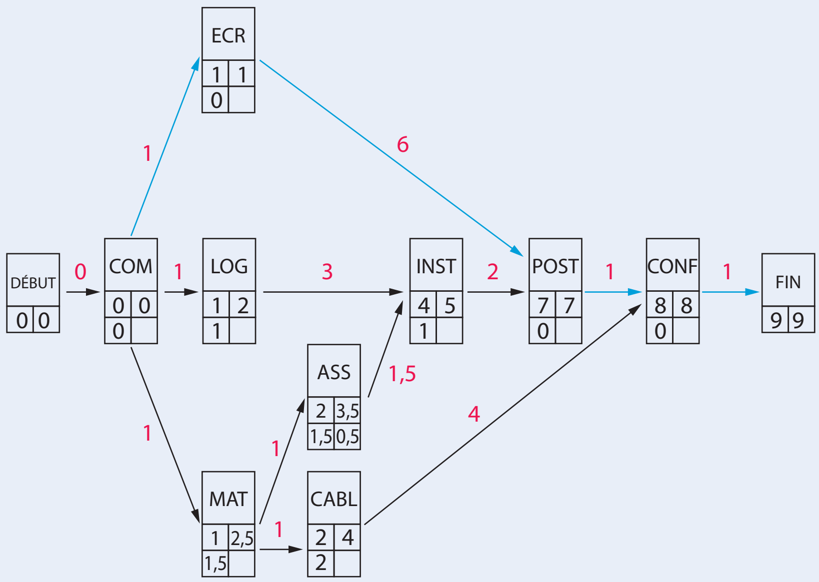
1. a) INST et ECR

b) LOG, MAT et ECR

2.

Niveaux	0	1	2	3	4	5
Sommets	COM	LOG, MAT, ECR	ASS, CABL	INST	POST	CONF

3. Méthode MPM



4. (COM, ECR, POST, CONF) - 9 jours.

5. a) $3{,}5 - 2 = 1{,}5$ jour : retard autorisé pour la tâche ASS sans retarder la fin du projet.

b) ASS a pour seul successeur INST.

La marge libre de la tâche ASS est : $4 - 1{,}5 - 2 = 0{,}5$ jour qui est le retard autorisé sans retarder la tâche suivante.

Exercice 3 (8 points)

Partie A

1. Le nombre x associé à la lettre « S » est $x = 18$.

$xk = 18 \times 11 = 198$.

$198 = 26 \times 7 + 16$: le reste de la division euclidienne de 198 par 26 est 16.

La lettre associée à 16 dans le tableau est « Q ».

Avec la clé $k = 11$, la lettre « S » est cryptée en la lettre « Q ».

2. Avec la clé $k = 11$, le mot « BTS » est crypté en « LBQ ».

Partie B

1. $19 \times 11 = 209$ et $209 = 26 \times 8 + 1$.
Donc $19 \times 11 \equiv 1$ modulo 26.
2. a) Par définition du cryptage avec la clé $k = 11$, y est le reste de la division euclidienne de $kx = 11x$ par 26.
Donc $11x \equiv y$ modulo 26.
b) D'après **a)**, $11x \equiv y$ modulo 26,
donc $19 \times 11x \equiv 19y$ modulo 26. (I)
Or, d'après la question **1.**, $19 \times 11 \equiv 1$ modulo 26.
Donc $19 \times 11x \equiv x$ modulo 26. (II)
Des relations (I) et (II), on déduit : $19y \equiv x$ modulo 26.
3. La lettre « W » est associée à $y = 22$, donc la lettre de départ est « C » : c'est l'exemple de l'énoncé.
La lettre « G » est associée à $y = 6$ et $6 \times 19 = 114$.
Or $114 = 26 \times 4 + 10$; donc $r = 10$ et la lettre de départ est « K ».
La lettre « A » est associée à $y = 0$ et $0 \times 19 = 0$.
Or $0 = 26 \times 0 + 0$; donc $r = 0$ et la lettre de départ est « A ».
Le mot crypté en « WGA » est « CKA ».

Partie C

1. $26 = 2 \times 13$.
2. Les bonnes clés de cryptage sont :
1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25.

Épreuve 5

Exercice 1 (5 points)

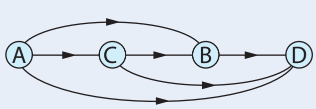
1.

Sommets	A	B	C	D
Prédécesseurs		AC	A	ABC

2.

Niveaux	0	1	2	3
Sommets	A	C	B	D

3.



4. Non.
5. a) 3.
b) (A, C, B, D). Oui.

Exercice 2 (6 points)

1. a) $MC = \begin{pmatrix} 90 \\ 244 \\ 388 \end{pmatrix}$.
b) La première ligne donne le coût d'achat du matériel, la deuxième, le temps total pour le conditionnement, et la troisième le chiffre d'affaires.
2. a) $3a + 4 \qquad 4a + 4 \qquad 2a + 2$.
b) $3a + 4 = 1$; $4a + 4 = 0$; $2a + 2 = 0$.
$a = -1$.

3. $PM = I$. P est la matrice inverse de M.
$MX = Y$, donc $P(MX) = PY$, $(PM)X = PY$, $IX = PY$, $X = PY$.
4. $Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix}$;
$X = PY$. $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (9 points)

Partie A

1. $U_2 = 1 + 2U_1$, donc $U_2 = 3$.
$U_3 = 1 + 2U_2$, donc $U_3 = 7$.
$U_4 = 1 + 2U_3$, donc $U_4 = 15$.
$U_2 - U_1 = 2$ et $U_3 - U_2 = 4 \neq 2$, donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{U_2}{U_1} = 3$ et $\dfrac{U_3}{U_2} = \dfrac{7}{3} \neq 3$, donc la suite (U_n) n'est pas géométrique.
2. $V_1 = U_1 + 1$, donc $V_1 = 2$.
$V_2 = U_2 + 1$, donc $V_2 = 4$.
$V_3 = U_3 + 1$, donc $V_3 = 8$.
$V_4 = U_4 + 1$, donc $V_4 = 16$.
On peut conjecturer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
3. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$V_{n+1} = U_{n+1} + 1$,
$V_{n+1} = (1 + 2U_n) + 1$,
$V_{n+1} = 2(U_n + 1)$,
$V_{n+1} = 2V_n$.
b) (V_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_1 = 2$.
Donc $V_n = 2^n$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $V_n = U_n + 1$
donc $U_n = V_n - 1$,
$U_n = 2^n - 1$.
b) $2^{10} = 1\,024$ et $2^9 = 512$.
Donc $U_{10} = 1\,023$ et $U_9 = 511$.
Pour tout $n \geq 10$, $U_n > 1\,000$ car la suite géométrique est croissante (sa raison 2 est supérieure à 1).
Le nombre de fichiers infectés sera supérieur à 1 000 à partir de 10 allumages de l'ordinateur.

Partie B

1.

n	$3^n - 1$	W_n
1	2	2
2	8	8
3	26	4
4	80	3
5	242	0

2. Si n est un multiple de 5, alors $n = 5k$ où k est un entier naturel.
$3^n = 3^{5k} = (3^5)^k = 243^k$.

D'après la question **1.**, on a $242 \equiv 0$ (modulo 11),
donc $243 \equiv 1$ (modulo 11),
donc $243^k \equiv 1^k$ (modulo 11),
donc $3^n \equiv 1$ (modulo 11),
donc $3^n - 1 \equiv 0$ (modulo 11).
Si le nombre n d'allumages de l'ordinateur est un multiple de 5, alors le nombre de fichiers infectés (égal à $3^n - 1$) est un multiple de 11, donc un message d'avertissement s'affiche à l'écran.

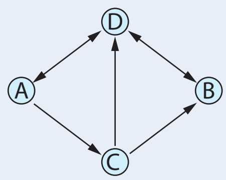
Épreuve 6

Exercice 1 (6 points)

A. 1. Réponse C.
2. Réponse C.
3. Réponse B.
B. 1. Réponse C.
2. a) Réponse C.
b) Réponse C.

Exercice 2 (8 points)

1.



2. Le « 1 » de la deuxième colonne correspond à l'arc (A, C), celui de la quatrième colonne à (A, D).

3. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, le « 2 » de la première ligne et deuxième colonne signifie qu'il existe deux chemins de longueur deux reliant A et B.

4.

a) $M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

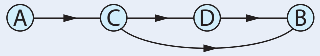
b) Il y a 3 chemins de C vers D de longueur 4 :
CBDBD CBDAD CDACD

c) Il y a 12 circuits de longueur 4 dans ce graphe.
5 circuits d'extrémités D :
DBDBD DBDAD DADBD DADAD DACBD.
Le dernier permet à un bus de desservir les 4 bâtiments publics.

5. Tableau des prédécesseurs :

Sommet	Prédécesseur	Niveau
A		0
B	D, C	3
C	A	1
D	C	2

Graphe ordonnancé par niveau :



Exercice 3 (6 points)

1. a) L'expression booléenne est sr.
b) L'expression booléenne est $\overline{m} + r$.
2. a) $F = s + m$.
b) L'ascenseur est à un étage supérieur au 15e étage ou il monte.
$\overline{F} = \overline{s}\,\overline{m}$.
c) L'ascenseur est à un étage inférieur ou égal au 15e étage et il ne monte pas.

Épreuve 7

Exercice 1 (8 points)

1. Réponse D.
2. Réponse A.
3. Réponse C.
4. a) Réponse C.
b) Réponse B.
c) Réponse D.
d) Réponse B.
e) Réponse A.

Exercice 2 (5 points)

1. $E = abc + \overline{a}c + b\overline{c}$

2.

	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
a	1	1	0	0
$\overline{a}$	1	1	1	0
	$\overline{c}$	c	c	$\overline{c}$

3. $E = b + \overline{a}c$.
4. $E = abc + \overline{a}c + b\overline{c} = abc + (\overline{a}c + \overline{a}cb) + b\overline{c}$,
$E = b(ac + \overline{a}c + \overline{c}) + \overline{a}c = b(c + \overline{c}) + \overline{a}c = b + \overline{a}c$.
5. Peuvent postuler les employés qui ont un BTS SIO (ou informatique de gestion) ou ceux qui ont moins de cinq ans d'ancienneté mais qui parlent couramment anglais.

Exercice 3 (7 points)

A. 1. $u_1 = 10\,200$. $u_2 = 10\,404$. $u_3 = 10\,612{,}08$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison 1,02.
3. a) $u_n = 10\,000 \times (1{,}02)^n$.
b) $u_8 = 10\,000 \times (1{,}02)^8 \approx 11\,717$.
4. $u_9 \approx 11\,951$. $u_{40} \approx 12\,190$.
Au bout de 10 ans.
5. B2*1,02.
B. 1. On obtient : 10 500 ; 11 000 ; 11 500 ; 12 000.

2. Algorithme modifié :

Initialisation
u prend la valeur 10 000
n prend la valeur 1
Traitement
Tant que $n < 5$
u prend la valeur $u \times 1{,}02$
n prend la valeur $n + 1$
Écrire u
FinTantQue

Épreuve 8

Exercice 1 (5 points)

1. $f(a, b, c, d) = a\bar{d}c + \bar{a}\bar{b} + bc + d$.

2. $d = 0$ et $\bar{d} = 1$ d'où le résultat.

3.

	b	$\bar{b}$	b	$\bar{b}$
a	×	×		
$\bar{a}$	×	×		×
	c	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$

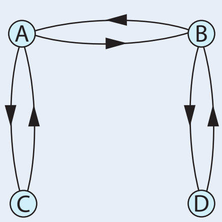
4. $g(a, b, c) = c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ ou encore : $g(a, b, c) = c + \bar{a}\bar{b}$.

5. Les arbres abattus sont de deux types :

• ceux qui mesurent plus de 20 m de hauteur ;
• les feuillus de 50 ans ou plus.

Exercice 2 (8 points)

1.



3. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il y a 6 circuits de longueur 2 : ABA, ACA, BAB, BDB, CAC, DBD.

4. a) $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a 16 chemins de longueur 3.

b) ACAB, ABDB, ABAB.

c) Il n'y a pas de circuit de longueur 3 : la matrice M^3 n'a que des zéros sur la diagonale.

5. a) $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\widehat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (7 points)

1. $u_{n+1} = (1 - 0{,}1)\, u_n = 0{,}9u_n$.

2. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 800$ et de raison $q = 0{,}9$.

3. a) Lorsque l'on saisit $n = 1$, l'algorithme affiche $u_1 = 720$.
Lorsque l'on saisit $n = 2$, l'algorithme affiche $u_2 = 648$.
Lorsque l'on saisit $n = 3$, l'algorithme affiche $u_3 = 583{,}2$.

b) Cet algorithme permet d'obtenir les termes de la suite (u_n).

4. a) $u_5 \approx 472$.

b) $u_{10} \approx 279$.

5. $u_9 \approx 310$; $u_{10} \approx 279$.
Donc : 10 trimestres.

Partie 2 : Mathématiques pour l'informatique : « Algorithmique appliquée »

Ce module est à traiter en première année de BTS SIO. Il est évalué en Contrôle en Cours de Formation (CCF).

Présentation de la partie

Algorithmique appliquée

■ Le mot « algorithme » vient du nom du mathématicien, géographe et astronome perse Al-Khwarizmi qui vécut au IXe siècle.
Il désigne une succession finie de règles à appliquer dans un certain ordre pour arriver à un résultat voulu.
Rendre la monnaie, monter un meuble à l'aide d'une notice d'assemblage, réaliser une recette de cuisine sont des algorithmes familiers. On les rencontre également dans le domaine des mathématiques : poser une multiplication pour calculer le résultat à la main fait intervenir un algorithme enseigné dès l'école primaire. L'algorithme d'Euclide en est un autre exemple.
Dans le domaine de l'informatique, les algorithmes sont programmés dans des langages qui permettent de communiquer avec l'ordinateur afin d'effectuer des tâches plus rapidement et sans erreur (calculs, tris de données, optimisation de trajet, automatisation de chaînes industrielles…).

■ Deux langages seront utilisés dans les sections de cette partie :
- un langage naturel, peu formel, exprimé en français ; ce langage est aussi appelé **pseudo-code** ;
- un langage informatique, **Python**, dont la syntaxe et les modalités d'écritures seront expliquées progressivement. Python est un langage sous licence libre, créé en 1990, utilisé dans le milieu scientifique et dans de nombreuses entreprises.

■ Dans chaque partie de ce chapitre figurent :
- les notions à connaître dans les rubriques CE QU'IL FAUT SAVOIR ;
- les principales instructions, en pseudo-code et en Python, encadrées sur fond coloré ;
- des exemples en pseudo-code et, pour certains, programmés en Python (les fichiers sources sont téléchargeables sur le site Foucher) ;
- des énoncés d'applications dont les corrigés sont téléchargeables sur le site Foucher ;
- des travaux pratiques qui peuvent, pour certains d'entre eux, être utilisés pour un contrôle en cours de formation.

Algorithmique appliquée

Cette partie vise à développer les compétences spécifiques suivantes :
- comprendre un algorithme et expliquer ce qu'il fait ;
- modifier un algorithme existant pour obtenir un résultat différent ;
- concevoir un algorithme ;
- transcrire un algorithme dans un langage informatique ;
- s'interroger sur l'efficacité d'un algorithme.

Sommaire
de la partie « Algorithmique appliquée »

Python

Fiche technique

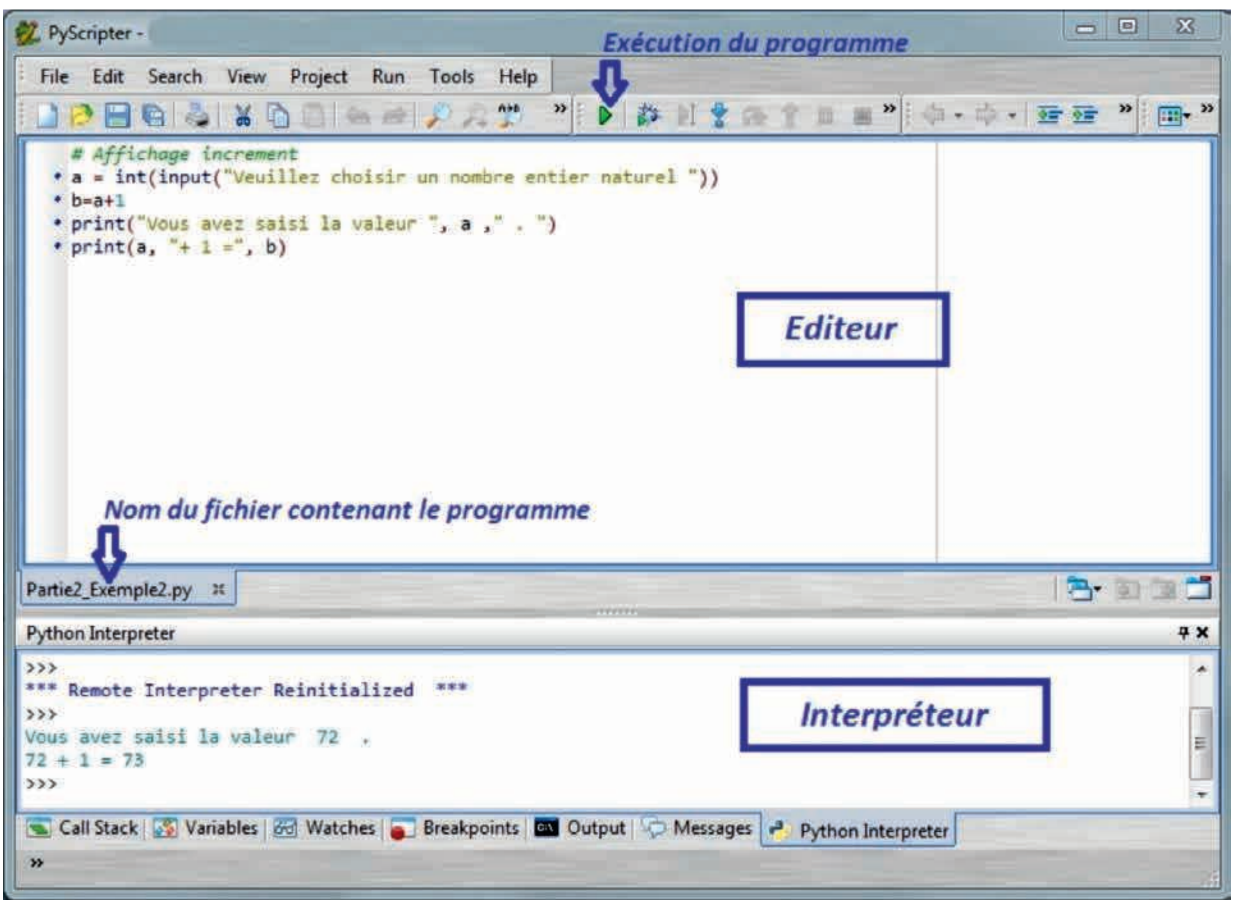
Langage de programmation

Python est un langage de programmation multi plateformes sous licence libre.
La version utilisée dans ce manuel est Python 3.2.5.
Téléchargement : https://www.python.org/downloads/

Environnement de programmation

Dans ce manuel, le pack « Portable Python » a été utilisé sous Windows.
Il contient à la fois un éditeur de texte (PyScripter) et une version de Python.
Ce pack peut être copié sur clé USB et exécuté sans installation sur l'ordinateur utilisé.
Téléchargement : http://portablepython.com/wiki/Download/

De nombreux éditeurs de programmes existent pour les autres systèmes d'exploitation.



1 Les variables

A. Définition

La première notion importante à maîtriser pour concevoir un algorithme est la notion de variable. Il s'agit d'un emplacement dans la mémoire où est stockée une valeur. Une variable porte un nom, commençant par une lettre et ne comportant pas d'espace. En Python, il est important de ne pas utiliser d'accents ou de caractères spéciaux dans les noms de variable.

Le nom de la variable sert à la lire ou à la modifier. Une variable ne peut contenir qu'une seule valeur à la fois, les valeurs précédentes contenues dans la variable étant écrasées au fur et à mesure.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

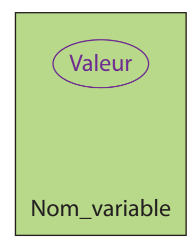
Une variable peut être de type :
- **numérique** : elle contient un nombre ;
- **alphanumérique** : la valeur contenue est une succession de symboles (mots, phrases…) ;
- **booléenne** : cette dernière variable ne contient que les valeurs VRAI ou FAUX (0 ou 1).

L'**affectation** est une opération permettant de modifier la valeur d'une variable. On note :

Pseudo-code	Python
nom_variable ← valeur	nom_variable = valeur

nom_variable est le nom de la **variable** dont on souhaite modifier la valeur.

valeur est la **valeur** que l'on veut stocker dans la variable.



L'instruction qui stocke une première valeur dans une variable est l'**initialisation**.

Dans cette partie, en pseudo-code et en Python, les phrases précédées d'un # correspondent aux commentaires.

```
A ← 7     #Stocke la valeur 7 dans A
B ← 3     #Stocke la valeur 3 dans B
A ← B     #A prend la valeur contenue dans B, c'est-à-dire 3
B ← 5     #B prend la valeur 5
```

Remarque

La troisième ligne ne signifie pas que A et B auront toujours la même valeur. Après la quatrième instruction, A contient la valeur 3 et B contient la valeur 5.

```
A ← A+1   #Cette instruction très courante s'appelle une incrémentation.
```

```
A ← C     #Cette instruction n'a pas de sens car la variable C n'a pas été initialisée.
```

Pour suivre au fur et à mesure l'évolution des contenus des variables, on peut réaliser un tableau.

Exemple

On considère une succession d'instructions et on note au fur et à mesure les valeurs de chaque variable.

Remarque

ni signifie que la variable n'a pas encore été initialisée.

Instructions	A	B	C
A ← 1	1	*ni*	*ni*
B ← 3	1	3	*ni*
C ← 4	1	3	4
C ← A	1	3	1
A ← C+5	6	3	1
B ← A+C	6	7	1
C ← B+1	6	7	8

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Il existe différents **types de données** qui peuvent être stockées dans les variables :
- les **entiers** (integer ou int) ;
- les **réels** (float) ;
- les **booléens** (boolean ou bool) ;
- les **chaînes de caractère** (string ou str).

B. Lecture et écriture de variables

Pour communiquer avec l'ordinateur, l'utilisateur peut saisir des valeurs (les entrées) et faire afficher le contenu de variables (les sorties).

Lecture

La **saisie** permet de transmettre une information à l'ordinateur par l'intermédiaire du clavier et de la stocker dans la mémoire pour pouvoir la réutiliser.

Pseudo-code
Saisir nom_variable

Python : l'instruction dépend du type de données	
a=**input**("Quel est votre nom ?")	*#saisie d'une chaîne de caractères*
b=**int**(**input**("Quel est votre âge ?"))	*#saisie d'un nombre entier*
c=**float**(**input**("Quelle est votre taille en mètres ?"))	*#saisie d'un nombre un réel*

Écriture

Les **sorties** sont les informations transmises par l'ordinateur à l'utilisateur :

Pseudo-code	
Afficher « Bonjour ! »	*#Affiche Bonjour !*
Afficher A	*#Affiche le contenu de la variable A*
Afficher « Le contenu de la variable A est : », A, « . »	
# Par convention, on séparera l'affichage des messages et des contenus de variables sur une même ligne avec une virgule.	

Python
print("Bonjour !") **print**(A) **print**("Le contenu de la variable A est :", A, ".")

Application 1 : une série d'instructions

Quelles sont les valeurs contenues dans les variables A et B après les affectations suivantes ?

	A	B
A ← 1		
B ← A+2		
A ← B-1		
B ← A-1		
A ← B+4		
B ← A+4		

Application 2 : différentes valeurs initiales

1. Quelles sont les valeurs contenues dans les variables A, B et C après les affectations suivantes ?

- A ← 3
- B ← 4
- C ← A+B
- B ← B-C
- A ← A-C

2. Reprendre la question **1.** en initialisant A à 5 et B à 2.

3. Reprendre la question **1.** en initialisant A à 1 et B à -3.

Application 3 : variable inconnue

Quelle est la valeur contenue dans la variable inconnue après les affectations suivantes ?

- m ← 2
- c ← 0
- d ← 1
- u ← 4
- inconnue ← m
- inconnue ← inconnue × 10 + c
- inconnue ← inconnue × 10 + d
- inconnue ← inconnue × 10 + u

Application 4 : inversion de valeurs

1. Quelles sont les valeurs contenues dans les variables A et B après les affectations suivantes ? (a et b sont des nombres réels.)

- A ← a
- B ← b
- A ← B
- B ← A

2. En ajoutant une troisième variable C, écrire une suite d'instructions qui échange les valeurs des variables A et B.

3. Quelles sont les valeurs contenues dans les variables A et B après les affectations suivantes ? (a et b sont des nombres réels.)

- A ← a
- B ← b
- A ← A+B
- B ← A-B
- A ← A-B

Prise en main de Python

A. Découverte du langage Python

En saisissant les commandes suivantes, directement dans l'interpréteur, comprendre leur rôle.

>>> est *l'invite* de l'interpréteur. On ne saisit que ce qui suit.

1. Calculs

```
>>> 1 + 1                  #Effectue le calcul 1+1 et affiche le résultat
>>> 7 * 5                  #Effectue le calcul 7 × 5 et affiche le résultat
>>> 4/2                    #Effectue le calcul 4/2 et affiche le résultat
>>> 7 / 2                  #Effectue le calcul 7/2 et affiche le résultat
>>> 7 // 2                 #Récupère le quotient de la division euclidienne de 7 par 2
>>> 4/3
>>> round(4/3)             #Arrondit à l'unité
>>> round(4/3, 2)          #Arrondit au centième
>>> 10**2                  #** correspond à la puissance
>>> 10**5
>>> 2**8
>>> 2**1000
>>> 23 % 10                #Récupère le reste de la division euclidienne de 23 par 10
>>> 23 % 7
>>> 21 % 7
```

Pour certaines commandes, il faut d'abord importer le module « math ».

```
>>> from math import*      #Importation du module "math"
>>> pow(5,2)               #Equivaut à 5**2
>>> sqrt(2)                #racine carrée
>>> divmod(17,3)           #Récupère le quotient et le reste
>>> abs(-3)                #Valeur absolue
>>> floor(3.1)             #Partie entière
```

Pour générer des nombres pseudo-aléatoires, il faut d'abord importer le module « random ».

```
>>> from random import*    #Importation du module "random"
>>> random()               #Génère un nombre réel aléatoire entre 0 et 1
>>> randint(1,10)          #Génère un nombre entier aléatoire entre 1 et 10
>>> a=0
>>> b=50
>>> randint(a,b)
```

2. Variables et type de données

```
>>> a=123                  #Initialise la variable a à 123
>>> a                      #Affiche le contenu de la variable a
>>> print(a)               #Affiche le contenu de la variable a
>>> type(a)                #Affiche le type de la variable a
>>> c= 1,23**10
>>> print(c)
>>> type(c)
>>> ch = "Bonjour"
>>> print(ch)
>>> type(ch)
>>> B = (5<3)
>>> print(B)
>>> type(B)
```

Initialisations groupées

```
>>> a, b, c = 1, 2, 3
>>> d = e = f = 6
```

Variables booléennes

```
>>> 5==3 #teste si 5 est égal à 3
>>> 5!=3  #teste si 5 est différent de 3
>>> b1 = (5 > 3)
>>> b2 = (9 < 7)
>>> b3 = (-1 < 0)
>>> not b1
>>> b1 or b2
>>> b1 and b3
>>> not not b1
>>> not (b1 and b2)
```

3. Entrées et sorties

La commande input() permet une saisie en mode texte que l'on peut ensuite transtyper (changer son type).

```
>>> message=input("Saisissez votre message")
>>> a=float(input("Saisissez un nombre réel"))
>>> b=int(input("Saisissez un nombre entier"))
>>> print("Somme : " , a + b )
>>> print("Différence : " , a - b )
>>> print("Produit : " , a * b )
```

B. Un premier algorithme

On considère l'algorithme de calcul suivant :

> Choisir un nombre entier *n*
> Lui soustraire 4
> Multiplier le résultat obtenu par le nombre *n* choisi
> Ajouter 4 à ce produit
> Afficher le résultat

1. Faire fonctionner cet algorithme pour les entiers *n* compris entre 0 et 5.
2. Quelle remarque peut-on faire ?
3. Traduire cet algorithme en pseudo-code
4. Programmer en Python l'algorithme de calcul.

2 La structure d'un algorithme

A. Prise en main

Reprenons l'algorithme de calcul traité dans la partie précédente et comparons-le à un deuxième algorithme :

Choisir un nombre entier n Lui soustraire 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre n Ajouter 4 à ce produit Afficher le résultat	Choisir un nombre entier n Lui ajouter 6 Multiplier le résultat obtenu par le nombre n Ajouter 9 au résultat. Afficher le résultat

Ces deux algorithmes de calcul ont des structures très similaires et donnent pourtant des résultats très différents.

Dans de nombreuses situations, on est amené à manipuler plusieurs algorithmes. L'objectif de cette partie est de mettre en place des normes d'écritures afin de rendre les algorithmes plus lisibles et donc plus compréhensibles.

B. Formalisme retenu pour l'écriture d'un algorithme

Un algorithme comporte trois parties :

1) Le titre.
Tout algorithme porte un titre qui permet de comprendre ce que fait l'algorithme.

2) Les déclarations de variables.
Dans cette partie, il faut préciser les noms donnés aux variables ainsi que leur type.

3) Les instructions.
Aussi appelé le corps de l'algorithme, cette partie contient la succession d'instructions.

Exemple 1 : Algorithmes de calcul

Reprenons les exemples du début.

Au début d'un algorithme, on pourra préciser le type des données contenues dans les variables numériques. Par exemple, ici, n et r sont de type entier.

Algorithme : calcul 1	Algorithme : calcul 2
Variables numériques : n, r **DEBUT** $r \leftarrow n-4$ $r \leftarrow r \times n$ $r \leftarrow r+4$ **Afficher** r **FIN**	**Variables numériques :** n, r **DEBUT** $r \leftarrow n+6$ $r \leftarrow r \times n$ $r \leftarrow r+9$ **Afficher** r **FIN**

Lorsque l'on implémente ces algorithmes en Python, on peut le faire dans l'interpréteur, et ainsi voir directement leur exécution. Cependant, si on souhaite garder la main sur ces programmes afin de pouvoir les modifier ou y faire appel ultérieurement, il faudra réécrire les instructions dans l'interpréteur, ce qui n'est guère pratique.

Dorénavant, les programmes seront écrits dans l'éditeur de programme et enregistrés sous forme de fichier (format .py).

Python : calcul 1

```
# Algorithme de calcul 1
n = int(input("Veuillez choisir un nombre entier naturel"))
r = n + 4
r = r * n
r = r + 4
print(r)
```

En Python, il n'est pas nécessaire de déclarer les variables, mais il faut les initialiser. Les lignes d'instructions peuvent se terminer sans caractère spécial. Un commentaire Python commence toujours par le caractère #.

Une fois écrit dans l'éditeur, le programme est facile à modifier.

Python : calcul 2

```
# Algorithme de calcul 2
n = int(input("Veuillez choisir un nombre entier naturel"))
r = n + 6
r = r * n
r = r + 9
print(r)
```

Exemple 2 : Incrémentation

Cet algorithme demande à l'utilisateur de saisir un nombre entier, ensuite il affiche la valeur saisie puis la même valeur incrémentée de 1.

Algorithme : affichage incrément

Variables numériques : *a*, *b*
DEBUT
  Afficher « Saisissez un nombre entier »
  Saisir *a*
  $b \leftarrow a+1$
  Afficher « Vous avez saisi la valeur », *a*, « . »
  Afficher *a*, « +1 = », *b*
FIN

Python : affichage incrément

```
# Affichage incrément
a = int(input("Veuillez choisir un nombre entier naturel"))
b=a+1
print("Vous avez saisi la valeur", a, " . ")
print(a, "+1=", b)
```

Exemple 3 : Salutations

Cet algorithme demande à l'utilisateur son prénom puis affiche un message contenant le prénom saisi.

Algorithme : salutations
Variable alphanumérique : prenom **DEBUT** **Afficher** « Veuillez saisir votre prénom » **Saisir** prenom **Afficher** « Bonjour »,prenom, « ! Comment vas-tu ? » **FIN**

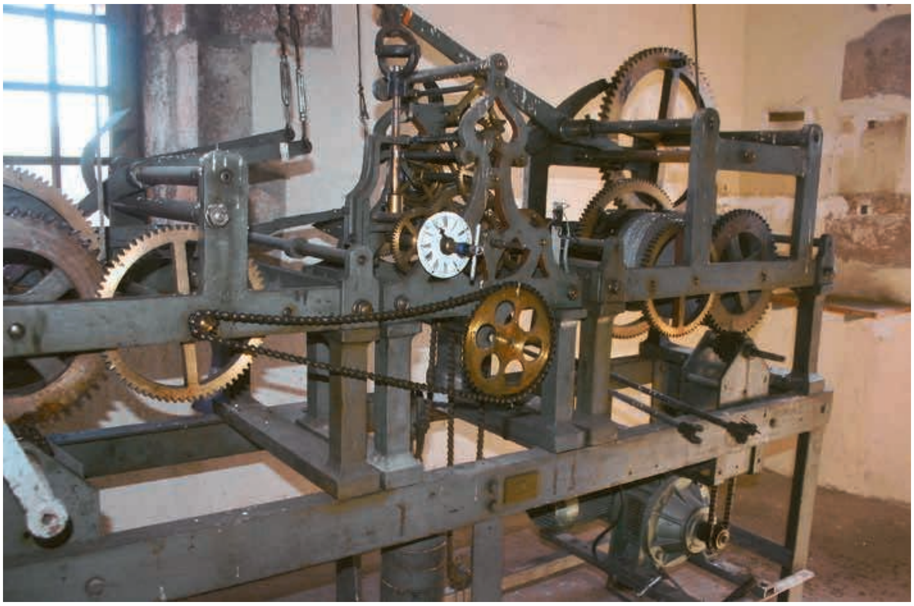
Python : salutations
Salutations prenom =**input**("Veuillez saisir votre prénom") **print**("Bonjour", prenom, "! Comment vas-tu ?")

Application 1 : rectangle

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir la longueur et la largeur d'un rectangle et qui affiche son périmètre et son aire.

Application 2 : conversion temporelle

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir un nombre d'heures, de minutes et de secondes, qui convertit le tout en secondes et affiche le résultat obtenu.



Rendre la monnaie

1. Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir une somme en centimes, puis qui donne le nombre de pièces minimal de 2 centimes et 1 centime nécessaires pour payer cette somme.

Par exemple, si l'utilisateur saisit 17 centimes, l'ordinateur affichera :
- *8 pièces de 2 centimes*
- *1 pièce de 1 centime*

***Indication :** Utiliser la commande // vue dans le TP du paragraphe* **1**.

2. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne la décomposition de la somme en pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes.

Par exemple, si l'utilisateur saisit 177 centimes, l'ordinateur affichera :
- *3 pièces de 50 centimes*
- *1 pièce de 20 centimes*
- *0 pièce de 10 centimes*
- *1 pièce de 5 centimes*
- *1 pièce de 2 centimes*
- *0 pièce de 1 centime*

3. Implémenter cet algorithme en Python.

Implémenter
Implémenter un algorithme signifie écrire un programme informatique réalisant cet algorithme.

3 Les structures conditionnelles

Prise en main

Quel est le rôle des deux algorithmes suivants ?

DEBUT **Entrer** X **Si** $X \geq 0$ **alors** $Y \leftarrow X$ **Si** $X < 0$ **alors** $Y \leftarrow -X$ **Afficher** Y **FIN**	**DEBUT** **Entrer** X **Si** $X \geq 0$ **alors** $Y \leftarrow X$ **Sinon** $Y \leftarrow -X$ **Afficher** Y **FIN**

Ces deux algorithmes produisent le même résultat. Le deuxième a l'avantage de n'effectuer qu'une seule comparaison.

A. Structures conditionnelles

Structure « Si … alors … »

Si la condition est vraie, on exécute les instructions, sinon on passe à la suite de l'algorithme.

En Python :
• le symbole « : » caractérise l'entrée dans la structure ;
• le bloc d'instructions est décalé vers la droite, cette indentation est importante car c'est elle qui détermine la sortie ou non de la structure.

Pseudo-code	Python
… **Si** *condition* **alors** *instructions* **Fin Si** …	… **if** *condition* **:** *instructions # décalage* **…** *# le retour à la ligne sans décalage signifie la sortie de la structure*

Exemple 1 : Comparaison de deux nombres

Cet algorithme effectue trois comparaisons afin d'afficher la plus grande valeur parmi deux nombres donnés.

Algorithme : comparaison 1
Variables numériques : a, b **DEBUT** **Saisir** a, b **Si** $a < b$ **alors** **Afficher** « La plus grande valeur est », b **Fin Si** **Si** $b < a$ **alors** **Afficher** « La plus grande valeur est », a **Fin Si** **Si** $a = b$ **alors** **Afficher** « Les deux valeurs sont égales. » **Fin Si** **FIN**

Structure « Si … alors … sinon … »

Si la condition est vraie, on exécute le premier bloc d'instructions, sinon on exécute le deuxième bloc d'instructions.

Pseudo-code	Python
… **Si** *condition* **alors** *instructions* **Sinon** *instructions* **Fin Si** …	… **if** *condition* **:** *instructions* **else :** *instructions* …

Exemple 1 bis : Comparaison de deux nombres

L'algorithme qui suit est plus performant que le précédent car il effectue moins de comparaisons : lorsque *b* est le plus grand des deux nombres, il n'effectue pas les autres comparaisons.

Algorithme : comparaison 2

```
Variables numériques : a, b
DEBUT
  Saisir a, b
  Si a < b alors
      Afficher « La plus grande valeur est », b
  Sinon
    Si b < a alors
      Afficher « La plus grande valeur est », a
    Sinon
      Afficher « Les deux valeurs sont égales. »
    Fin Si
  Fin Si
FIN
```

B. Opérateurs logiques

On peut se reporter au **1.A.** du chapitre 4 de la première partie.

Pour formuler des conditions complexes, nous avons besoin d'opérateurs logiques.

Les deux opérateurs « **OU** », « **ET** » peuvent s'avérer d'une grande importance lors de la conception des algorithmes.

Attention, contrairement au langage courant, où le « OU » a un sens exclusif (fromage *ou* dessert signifie fromage *ou bien* dessert), l'opérateur logique « OU » a un sens **inclusif**.

Ainsi, l'assertion (A OU B) est vraie si A est vraie, si B est vraie et, également si A et B sont vraies toutes les deux.

Instruction conditionnelle et opérateur « ET »

Pseudo-code	Python
… **Si (***condition A)* **et** *(condition B)* **alors** *Instruction 1* **Sinon** *Instruction 2* **Fin Si** …	… **if** *condition A* **and** *condition B* **:** *Instruction 1* **else :** *Instruction 2* …

Quand les deux conditions A et B sont vraies, l'instruction 1 est exécutée. Quand l'une des deux instructions (au moins) est fausse, l'instruction 2 est exécutée.

Exemple 2 : Température de l'eau

On peut traduire en pseudo-code l'algorithme suivant :

> Lire la température.
> Si la température est inférieure ou égale à 0 °C, afficher « C'est de la glace ».
> Si elle est strictement supérieure à 0 °C et strictement inférieure à 100°, afficher « C'est de l'eau liquide ».
> Si elle est supérieure ou égale à 100 °C, afficher « C'est de la vapeur ».

Algorithme : états de l'eau

```
Variable numérique : temperature
DEBUT
   Saisir temperature
   Si temperature ≤ 0 alors
      Afficher « C'est de la glace. »
   Fin Si
   Si (temperature > 0) et (temperature < 100) alors
      Afficher « C'est de l'eau liquide. »
   Fin Si
   Si temperature ≥ 100 alors
      Afficher « C'est de la vapeur. »
   Fin Si
FIN
```

Instruction conditionnelle et opérateur « OU »

Pseudo-code	Python
… **Si** *(condition A)* **ou** *(condition B)* **alors** *Instruction 1* **Sinon** *Instruction 2* **Fin Si** …	… **if** *condition A* **or** *condition B* **:** *Instruction 1* **else :** *Instruction 2* …

Quand l'une des deux conditions A ou B (ou les deux) sont vraies, l'instruction 1 est exécutée. Quand les deux conditions sont fausses, l'instruction 2 est exécutée.

Si *condition A* **alors**
  Instruction 1
Sinon
  Instruction 2
Fin Si
Si *condition B* **alors**
  Instruction 1
Sinon
  Instruction 2
Fin Si

Attention, le bloc d'instructions précédent n'est pas équivalent à celui ci-contre.

En effet, si les conditions A et B sont toutes deux réalisées, l'instruction 1 est exécutée deux fois ci-contre (au lieu d'une seule fois dans le bloc précédent).

Exemple 3 : Au parc d'attraction

Pour accéder à l'attraction phare d'un parc d'attraction, il faut être âgé de plus de 12 ans ou mesurer plus d'1,30 m.

Voici un algorithme qui permet d'autoriser ou pas l'entrée d'un visiteur dans cette attraction.

Algorithme : entrée attraction
Variables numériques : age, taille **DEBUT**   **Afficher** « Quel est votre âge ? »   **Saisir** age   **Afficher** « Quelle est votre taille ? »   **Saisir** taille   **Si** (age > 12) **ou** (taille > 1,3) **alors**   **Afficher** « Vous pouvez accéder à cette attraction. »   **Sinon**   **Afficher** « Vous ne pouvez pas accéder à cette attraction. »   **Fin Si** **FIN**

Application 1 : majorité

Écrire un algorithme qui demande l'âge de l'utilisateur (dans la variable age) et affiche s'il est ou non majeur.

Application 2 : le plus grand nombre

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir 3 nombres et qui affiche le plus grand nombre saisi.

Application 3 : assurance automobile

Une compagnie d'assurance automobile propose à ses clients trois tarifs différents identifiables par une couleur : tarifs vert, orange et rouge. Le tarif dépend de la situation du conducteur :
- un conducteur de moins de 25 ans et titulaire du permis depuis deux ans ou moins, se voit attribuer le tarif rouge ;
- un conducteur de moins de 25 ans et titulaire du permis depuis plus de deux ans, ou de 25 ans ou plus mais titulaire du permis depuis deux ans ou moins a le droit au tarif orange ;
- un conducteur de 25 ans ou de plus de 25 ans titulaire du permis depuis plus de deux ans bénéficie du tarif vert.

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir son âge ainsi que l'année d'obtention de son permis et qui affiche le tarif qui lui est attribué.

Salle de concert

Peut être utilisé pour un CCF

Une salle de concert propose sur l'année plusieurs tarifs, selon la situation du spectateur.

- Le tarif de base est de 20 euros pour une place de concert.
- **Offre n° 1** – Si le spectateur achète des places pour 3 concerts ou plus, il bénéficie d'une réduction de 10 % sur le prix de chaque place de concert.
- **Offre n° 2** – Si le spectateur est étudiant, il bénéficie, sur présentation de sa carte d'étudiant, d'une réduction de 25 % sur le prix de chaque place de concert. Cette offre n'est pas cumulable avec la précédente.

On cherche à concevoir et implémenter un algorithme qui affiche le prix à payer en fonction de la situation du spectateur.

A. Travail par écrit

On considère l'algorithme A1 suivant :

Algorithme A1

```
DEBUT
1. Afficher « Combien de places de concert souhaitez-vous acheter ? »
2. Saisir n
3. prix ← n × 20
4. Si n ≥ 3 alors
5.     prix ← prix × 0,9
6. Fin Si
7. Afficher prix
FIN
```

1. Lister les variables utilisées par l'algorithme A1 et leur type.

2. Quel est le rôle de la ligne 5 ?

3. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. Écrire un nouvel algorithme A2 qui ne considère plus l'offre n° 1 mais prend uniquement en compte le fait que le spectateur soit étudiant ou non. L'algorithme A2 devra afficher le tarif à payer.

5. Écrire un nouvel algorithme A3 qui prend en compte les deux offres et indique le tarif à payer selon la situation du spectateur.

B. Travail sur poste informatique

1. Implémenter et tester les algorithmes A1, A2 et A3.

La salle de concert propose une troisième offre.

Offre n° 3 – Tout le mois de juin, à l'occasion de la fête de la musique, les places de concert sont à 16 euros au lieu de 20 euros. Cette offre n'est pas cumulable avec l'offre n° 1 mais les étudiants peuvent, en plus, bénéficier de la réduction de 25 % prévue dans l'offre n° 2.

2. Modifier le programme précédent pour qu'il traite le cas où le spectateur souhaite acheter des places pour des concerts ayant lieu en juin.

4 Les boucles

Prise en main

On considère les deux algorithmes suivants :

DEBUT $N \leftarrow 0$ $U \leftarrow 10$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ **Afficher** *N* **FIN**	**DEBUT** $N \leftarrow 0$ $U \leftarrow 10$ **Tant que** $U \leq 100$ $N \leftarrow N+1$ $U \leftarrow 2 \times U - 5$ **Fin Tant que** **Afficher** *N* **FIN**

En réalisant la trace de chacun des algorithmes, on constate que la boucle « **Tant que** » permet de répéter les instructions sans les écrire plusieurs fois.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Une **boucle** est une **structure itérative**, c'est-à-dire qu'elle permet d'exécuter plusieurs fois de suite une même séquence d'instructions.

Il existe trois types de boucles :
- **Tant que**
- **Répéter… jusqu'à**
- **Pour**

A. Structures « Tant que » et « Répéter … jusqu'à »

Pseudo-code	Python
… **Tant que** *condition* *instructions* **Fin Tant que** **…**	**…** **while**(*condition*) **:** *instructions* **…**

Lorsque l'on rencontre l'instruction « **Tant que** » dans l'exécution d'un algorithme, on évalue la condition :
- si elle est vérifiée, on effectue les instructions ;
- si elle n'est pas réalisée, on sort de la boucle et on passe à l'instruction située après le **Fin Tant que**.

Exemple 1

Affichons tous les nombres entiers de 1 à 5 dans l'ordre croissant.

On initialise i à 1.

Tant que i est inférieur ou égal à 5, on affiche la valeur de i et on recommence.

i est un compteur.

Algorithme : 1 à 5 Tant que

Variable numérique : i
DEBUT
  $i \leftarrow 1$
  Tant que $i \leq 5$
    Afficher i
    $i \leftarrow i+1$
  Fin Tant que
FIN

Python : 1 à 5 Tant que

```
i = 1
while i <= 5 :
    print(i)
    i = i + 1
```

Exemple 2

L'utilisation de la structure « **Tant que** » peut aboutir à une exécution sans fin. Dans les deux cas suivants, la boucle est infinie.

Algorithme : boucle infinie 1

Variables numériques : i, a
DEBUT
  $i \leftarrow 0$
  $a \leftarrow 0$
  Tant que $i < 2$
    $a \leftarrow a+1$
  Fin Tant que
FIN

Algorithme : boucle infinie 2

Variable numérique : i
DEBUT
  $i \leftarrow 7$
  Tant que $i \neq 20$
    $i \leftarrow i+3$
  Fin Tant que
FIN

Dans le premier cas, la valeur de la variable i n'est pas modifiée à l'intérieur de la boucle.

Dans le deuxième cas, la valeur de la variable i est bien modifiée mais la condition d'exécution de boucle est toujours vérifiée.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

La boucle « **Tant que** » est une **boucle non déterministe**, on ne sait pas forcément à l'avance combien d'itérations seront effectuées. Il arrive qu'elle ne soit pas exécutée lorsque la condition n'est pas vérifiée.

Il existe un deuxième type de structure itérative non déterministe, très proche du « **Tant que** » : c'est la structure « **Répéter… jusqu'à** ».

Pseudo-code

…
Répéter
  instructions
Jusqu'à *condition*
…

Python

En Python, cette structure n'existe pas mais on peut utiliser une structure équivalente avec le **while**.

La boucle répète l'action jusqu'à ce que la condition soit vérifiée. Avec cette structure, il y a obligatoirement au moins une itération effectuée, contrairement à la boucle **« Tant que »**.

Exemple 3

Affichons tous les nombres entiers de 1 à 5 dans l'ordre croissant.

Algorithme : 1 à 5 Répéter… jusqu'à
Variable numérique : i **DEBUT** $i \leftarrow 1$ **Répéter**   **Afficher** i $i \leftarrow i+1$ **Jusqu'à** $i > 5$ **FIN**

Cet algorithme fournit le même affichage que l'algorithme vu dans l'exemple 1 avec la boucle **« Tant que »**.

Exemple 4 : Contrôle de saisie

Algorithme : contrôle de saisie 1
Variables numériques : n **DEBUT**   **Répéter**   **Afficher** « Saisir un entier naturel »   **Saisir** n **Jusqu'à** PartieEntiere(n) = n **FIN**

Algorithme : contrôle de saisie 2
Variables numériques : x **DEBUT**   **Répéter**   **Afficher** « Saisir un nombre strictement positif »   **Saisir** x **Si** $x \leq 0$ **alors**   **Afficher** « J'ai dit STRICTEMENT POSITIF ! »   **Jusqu'à** $x > 0$ **FIN**

Il s'agit d'un usage très courant de la structure **« Répéter… jusqu'à ».**

Application 1 : suites numériques

Exercice **36** du chapitre 1.

Application 2 : pliage d'une feuille

Une feuille de papier ordinaire mesure environ 0,16 mm d'épaisseur. On décide de la plier en deux, puis en 4, puis en 8, etc.

Combien faut-il de pliages pour arriver à une épaisseur supérieure à la hauteur de la Tour Eiffel (324 m) ?

Écrire un algorithme qui permet de répondre à cette question.

Application 3 : jeu des petits chevaux

Utiliser la commande *randint* vue dans le TP du paragraphe 1.

Le jeu des petits chevaux est un jeu de société. Pour gagner il faut être le premier à amener ses pions (des chevaux) à la fin du parcours. Le jeu se joue avec un dé à 6 faces. Pour pouvoir sortir un cheval de son écurie, le joueur doit faire un 6.

Écrire un algorithme qui simule les tirages successifs du dé jusqu'à ce que le cheval puisse sortir de l'écurie.

Application 4 : mot de passe

Pour accéder à un forum, un étudiant doit se connecter à l'aide d'un mot de passe. Tant qu'il ne saisit pas le bon mot de passe, l'ordinateur lui demande de le saisir à nouveau.

1. Écrire un algorithme qui demande à l'étudiant son mot de passe autant de fois que nécessaire pour accéder au forum.

2. Modifier l'algorithme précédent pour que l'étudiant soit limité à trois propositions. Pour cela on peut mettre en place un compteur.

B. Structure « Pour »

Quand le nombre d'itérations est connu dès le départ, il s'agit d'une **boucle déterministe**, il est alors conseillé d'utiliser la structure « **Pour** ».

Pseudo-code
... **Pour** <variable> **allant de** <première valeur> **à** <dernière valeur> (**par pas de** <pas>)   *Instructions* **Fin Pour** **...**

La boucle « **Pour** » fait varier la valeur du compteur <variable> entre <première valeur> et <dernière valeur>. Le pas est optionnel et vaut 1 par défaut.

En Python, pour afficher toutes les valeurs de <première valeur> à <dernière valeur>, on peut écrire :

Python
... **for** *i* **in range** (<première valeur>,<dernière valeur> + 1):   *instructions* **...**

Exemple 5

Affichons tous les nombres entiers de 1 à 5 dans l'ordre croissant.

Algorithme : 1 à 5 Pour
Variable numérique : *i* **DEBUT**   **Pour** *i* **allant de** 1 **à** 5   **Afficher** *i*   **Fin Pour** **FIN**

Python version 1
for *i* **in range** (1,6) **:**   **print(***i***)**

Python version 2
Par défaut la <première valeur> est 0 **for** *i* **in range** (5) **:**   **print(***i* + 1**)**

Exemple 6 : Affichons des étoiles

Algorithme : étoile1	Affichage obtenu
Variable numérique : *i* **DEBUT** **Pour** *i* **allant de** 1 **à** 4 **Afficher** « * » **Fin Pour** **FIN**	* * * *

Algorithme : étoile2	Affichage obtenu
Variables numériques : *i*, *j* **DEBUT** **Pour** *j* **allant de** 1 **à** 4 **Pour** *i* **allant de** 1 **à** 4 **Afficher** « * » **Fin Pour** Retour à la ligne **Fin Pour** **FIN**	* * * * * * * * * * * * * * * *

Algorithme : étoile3	Affichage obtenu
Variables numériques : *i*, *j* **DEBUT** **Pour** *j* **allant de** 1 **à** 4 **Pour** *i* **allant de** 1 **à** *j* **Afficher** « * » **Fin Pour** Retour à la ligne **Fin Pour** **FIN**	* * * * * * * * * *

Application 5 : suites numériques

Exercice **28** du chapitre 1.

Application 6 : entraînement

Un cycliste souhaite s'entraîner pour une compétition. Il prépare un programme d'entraînement de 3 semaines. Le premier jour, il parcourt 30 km puis il décide d'augmenter la distance parcourue de 10 km chaque jour.

1. Écrire un programme qui calcule et affiche le nombre de kilomètres parcourus le dixième jour d'entraînement. De même pour le dernier jour d'entraînement.

2. Modifier ce programme pour qu'il calcule le nombre total de kilomètres parcourus durant ce programme d'entraînement.

3. Modifier ce programme pour qu'il calcule et affiche le nombre de kilomètres parcourus semaine par semaine.

Application 7 : compte à rebours

Écrire un programme demandant à l'utilisateur de saisir un nombre entier positif *n* et qui affiche tous les nombres entiers dans l'ordre décroissant de *n* à 0.

Indication Python
Avec la structure **for…in range…**, *par défaut, le pas vaut 1.* *On peut le modifier, par exemple, la commande :* ***for** i **in range*** (1,10,2) *:*   ***print**(i)* *affiche les nombres entiers entre 1 et 9 par pas de 2, c'est-à-dire 1, 3, 5, 7, 9.*

Application 8 : jeu de dés

Un jeu consiste à lancer 10 dés non truqués à 6 faces et à faire la somme des chiffres obtenus. Si la somme est paire, l'utilisateur gagne 1 point, si la somme est impaire, l'utilisateur perd 2 points. Le jeu affiche la cagnotte du joueur sachant que le joueur démarre la partie avec 10 points.

1. Écrire un algorithme qui simule une partie.

2. Comment modifier cet algorithme pour qu'il simule 5 parties successives ?

3. Comment modifier cet algorithme pour que les parties continuent tant que le joueur dispose d'une cagnotte strictement supérieure à 0 ? (On pourra afficher le détail des parties effectuées.)

TRAVAUX PRATIQUES

Le nombre secret

Le nombre secret est un jeu au cours duquel le joueur doit deviner quel est le nombre secret choisi par le maître du jeu.

Ce nombre est un nombre entier compris entre **1** et **10 000**.

À chaque proposition du joueur, le maître du jeu indique si le nombre secret a été trouvé ou bien s'il est plus grand ou plus petit.

A. Première approche

On cherche à concevoir et implémenter des algorithmes **où la machine joue le rôle de maître du jeu.**

1. Travail par écrit

On considère l'algorithme A1 suivant :

Algorithme A1

```
DEBUT
1.   nombresecret ← hasard(1,10 000)
2.   Saisir proposition
3.   Si (proposition > nombresecret) alors
4.       Afficher « Le nombre secret est plus petit »
5.   Sinon
6.       Si (proposition < nombresecret) alors
7.           Afficher « Le nombre secret est plus grand »
8.       Sinon
9.           Afficher « Bravo ! Vous avez trouvé le nombre secret ! »
10.      Fin Si
11.  Fin Si
FIN
```

a. Lister les variables utilisées par l'algorithme A1 et leur type.

b. Quel est le rôle de la ligne 1 ?

c. Quelle est la condition qui doit être vérifiée pour effectuer l'instruction ligne 9 ?

d. Quel est le rôle de cet algorithme ?

e. Écrire un nouvel algorithme A2 qui, à partir d'un nombre secret entre **1** et **10 000**, demande au joueur de faire des propositions **tant qu'il n'a pas trouvé** et en indiquant, à chaque fois, si le nombre secret est plus petit ou plus grand. L'algorithme devra indiquer à la fin en combien d'essais le nombre secret a été trouvé (on pourra mettre en place un compteur).

f. Modifier l'algorithme A2 en un algorithme A3 pour qu'il impose, en plus, que le nombre secret soit trouvé en **15** essais maximum.

2. Travail sur poste informatique

Implémenter et tester les algorithmes A1, A2 et A3.

Indication Python

La commande **randint(a,b)** *choisit un nombre entier au hasard entre a et b*

Pour pouvoir utiliser cette commande, vous devez saisir dans l'éditeur :

« from random import* »

B. Pour les braves ! Le nombre secret, le retour !

On cherche à concevoir et implémenter un algorithme où l'utilisateur est le maître du jeu. C'est l'utilisateur qui choisit le nombre secret, qu'il ne communique jamais à la machine. Elle doit trouver le nombre secret en **15** essais maximum.

1. Travail par écrit

a. Par quel nombre la machine devrait-elle commencer pour être efficace ?

b. Si cette première proposition est trop petite par rapport au nombre secret, quel va être le deuxième nombre proposé ? Et si elle est trop grande ?

Pour trouver le nombre secret, il est judicieux de procéder par dichotomie, c'est-à-dire en prenant le milieu de l'intervalle où est caché le nombre secret. Par exemple, si on sait qu'il est compris entre 250 *et* 375, *la proposition sera :* Partie Entiere$\left(\frac{250+375}{2}\right) = 312$ *etc.*

On considère l'algorithme B1 suivant :

Algorithme B1
DEBUT   **Saisir** min_possible   **Saisir** max_possible   proposition ← PartieEntiere((min_possible + max_possible) /2)   **Afficher** proposition **FIN**

c. Lister les variables de l'algorithme B1 et leur type.

d. Quel est le rôle de cet algorithme ?

e. Écrire un algorithme B2 qui affiche la proposition de la machine, puis où l'utilisateur dit si le nombre secret est plus petit, plus grand ou égal à cette proposition. La machine doit ensuite, selon la réponse de l'utilisateur, lui faire une nouvelle proposition.

f. Écrire un algorithme B3 qui demande à la machine des propositions tant qu'elle n'a pas trouvé le nombre secret.

2. Travail sur poste informatique

a. Implémenter et tester les algorithmes B1, B2 et B3.

b. Modifier le programme B3 pour qu'il impose à l'ordinateur de trouver en 15 essais maximum.

Remarque

Grâce à la méthode par dichotomie, la machine trouvera à coup sûr le nombre secret en 14 essais maximum ($2^{14} = 16\ 384$).

5 Les tableaux

Prise en main

On considère les deux algorithmes suivants :

```
DEBUT
  S ← 0
  Pour i allant de 0 à 9
    Saisir n
    S ← S + n
  Fin Pour
  Afficher S
FIN
```

```
DEBUT
  S ← 0
  Pour i allant de 0 à 9
    Saisir T[i]
    S ← S + T[i]
  Fin Pour
  Afficher S
FIN
```

Ces deux algorithmes ont le même rôle mais ont des exécutions complètement différentes.

Dans le premier cas, il est impossible après l'exécution de l'algorithme de retrouver les valeurs qui ont été saisies. Dans le second cas, les valeurs saisies sont « enregistrées » au fur et à mesure dans un tableau.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Un tableau est un regroupement de variables. Chacune des variables est numérotée, ce numéro s'appelle un indice. Chaque variable est donc caractérisée par le nom du tableau et l'indice de son emplacement dans le tableau.

Déclaration

En pseudo-code, un tableau peut être déclaré comme une variable de la manière suivante :

```
Variables numériques : T(n)
## déclare un tableau contenant n variables de type numérique.
```

Accès aux éléments

Pour accéder aux éléments individuellement on utilise l'indice. Attention, en Python, la numérotation de ces indices commence à 0 et non à 1.

Par convention, nous commencerons la numérotation à 0 également en pseudo-code.

Algorithme : affichage

```
Variables numériques : T(10)
DEBUT
  T ← [5,4,3,6,9,7,1,2,0,8]
  Afficher T[5]
  Afficher T[9]
FIN
```

Cet algorithme initialise le tableau T, constitué de 10 valeurs numériques.

Indice i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T[i]$	5	4	3	6	9	7	1	2	0	8

Il affichera 7 pour $T[5]$, 8 pour $T[9]$ mais une erreur si on appelle $T[10]$ car cette valeur n'existe pas.

Modification des éléments d'un tableau

Il est possible de modifier les éléments individuels d'un tableau :

Algorithme : modification tableau
Variables numériques : $T(10)$ **DEBUT** $T \leftarrow [5, 4, 3, 6, 9, 7, 1, 2, 0, 8]$ $T[1] \leftarrow 2 \times T[1]$ $T[7] \leftarrow T[0] + 3 \times T[6]$ $T[5] \leftarrow 2 \times T[1]$ **Afficher** T **FIN**

Le tableau affiché est :

[5, 8, 3, 6, 9, 16, 1, 8, 0, 8]

Exemple 1 : Initialisation d'un tableau à valeurs numériques

On souhaite remplir un tableau avec des valeurs numériques. Le nombre de valeurs à saisir est choisi par l'utilisateur.

Algorithme : initialisation tableau
Variables numériques : dim, i, T(dim) **DEBUT** **Saisir** dim **Pour** i **allant de** 0 **à** dim-1 **Saisir** $T[i]$ **Fin Pour** **Afficher** T **FIN**

Pour initialiser un tableau en Python il y a plusieurs méthodes :

- **On initialise le tableau avec des 0 et on les modifie ensuite.**

Python : initialisation tableau 1

```
N=int(input("Saisissez la taille du tableau"))
T=[0]*N
for i in range(N) :
    T[i]=float(input())
print(T)
```

- **On initialise le tableau vide et on ajoute ensuite une à une les valeurs.**

Python : initialisation tableau 2

```
N=int(input("Saisissez la taille du tableau"))
T=[]
for i in range(N) :
    T.append(float(input())) # Ajoute la valeur saisie au clavier à la fin du tableau
print(T)
```

L'instruction T.append() est ce qu'on appelle une méthode. Les méthodes sont employées en programmation orientée objet. Dans ce chapitre, cet aspect du langage Python n'est pas du tout abordé ; les méthodes sont considérées comme des fonctions.

Exemple 2 : Parcours de tableau

On souhaite écrire un algorithme qui recherche la valeur maximale dans un tableau préalablement initialisé par l'utilisateur.

Algorithme : recherche de maximum

```
Variables numériques : dim,i,M,T(dim)
DEBUT
  M ← T[0] # On initialise le maximum à la première case du tableau
  Pour i allant de 0 à dim−1
    Si T[i] > M alors
      M ← T[i]
    Fin Si
  Fin Pour
  Afficher M
FIN
```

Python : recherche de maximum

```
…
# Le tableau a été initialisé au préalable
…
M=T[0]
N=len(T)          # len(T) est la taille du tableau
for i in range(N) :
  if T[i]>M :
    M=T[i]
print(M)
```

Exemple 3 : Recherche d'une valeur dans un tableau

On souhaite écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de choisir une valeur, puis affiche si cette valeur est ou non dans le tableau et, si oui, son indice.

Algorithme : recherche de valeur

```
Variables numériques : i, valeur, N, T(N)
DEBUT
  …
  # Le tableau T a été initialisé au préalable avec une taille N
  …
  Saisir valeur
  i ← 0
  Tant que T[i] ≠ valeur ET i < N
      i ← i+1
  Fin Tant que
  Si i = N alors
      Afficher « La valeur », valeur, « n'est pas dans le tableau. »
  Sinon
      Afficher « La valeur », valeur, « est dans le tableau à l'indice », i
  Fin Si
FIN
```

Remarque

Cet algorithme présente un problème de dépassement de dimension. Considérons que le tableau ne contienne pas la valeur recherchée. Lorsque $i = N-1$, comme on a toujours $i < N$, on entre dans la boucle **Tant que**. La valeur de i est incrémentée et passe à N. Pour savoir si on entre encore dans la boucle **Tant que**, il faut pouvoir accéder à $T[N]$. Or cela n'est pas possible car le tableau contient des cases numérotées de 0 à $N-1$. Cette erreur peut entraîner des problèmes d'exécution lors du passage sur machine.
Voici deux propositions de correction pour éviter ce problème.

- **Solution 1 : Utiliser une variable booléenne.**

Algorithme : recherche de valeur solution 1

```
Variables numériques : i, valeur, N, T(N)
DEBUT
    …
    # Le tableau T a été initialisé au préalable avec une taille N
    …
    Saisir valeur
    i ← 0
    b ← Faux
    Tant que i < N ET b = Faux
        Si T[i] = valeur alors
            b ← vrai
        Fin Si
        i ← i + 1
    Fin Tant que
    Si b = Vrai alors
        Afficher « La valeur », valeur, « est dans le tableau à l'indice », i – 1
    Sinon
        Afficher « La valeur », valeur,  « n'est pas dans le tableau. »
    Fin Si
FIN
```

Python solution 1

```python
i=0
valeur=int(input())
b=False
while i<len(T) and b==False :
    if T[i]==valeur :
        b=True
    i=i+1
if b==True :
    print("La valeur", valeur, "est dans le tableau à l'indice", i–1)
else :
    print("La valeur", valeur, "n'est pas dans le tableau.")
```

- **Solution 2 : Traiter le cas $i = N - 1$ à part.**

Algorithme : recherche de valeur solution 2

```
Variables numériques : i, valeur, N, T(N)
DEBUT
   …
   # Le tableau T a été initialisé au préalable avec une taille N
   …
   Saisir valeur
   i ← 0
   Tant que T[i] ≠ valeur ET i < N − 1
      i ← i + 1
   Fin Tant que
   Si i = N − 1 ET T[i] = valeur alors
      Afficher « La valeur », valeur, « est dans le tableau à l'indice », i
   Sinon
      Si i = N − 1 alors
         Afficher « La valeur », valeur,  « n'est pas dans le tableau. »
      Sinon
         Afficher « La valeur », valeur, « est dans le tableau à l'indice », i
      Fin Si
   Fin Si
FIN
```

Python solution 2

```python
i=0
valeur=int(input())
while i<len(T)-1 and T[i] !=valeur :
   i=i+1
if i==len(T)-1 and T[i]==valeur :
   print("La valeur", valeur, "est dans le tableau à l'indice", i)
else :
   if i ==len(T)-1 :
      print("La valeur", valeur, "n'est pas dans le tableau")
   else :
      print("La valeur", valeur, "est dans le tableau à l'indice", i)
```

Application 1 : jeu à gratter

On considère un jeu à gratter où l'utilisateur découvre cinq nombres entiers aléatoires entre 1 et 5.

- Si la somme des nombres est paire, l'utilisateur gagne 1 euro.
- Si le plus grand nombre est 2, alors l'utilisateur gagne 2 euros.
- Si le même nombre apparaît 3 fois ou plus, l'utilisateur gagne 5 euros.
- Dans les autres cas, l'utilisateur ne gagne rien.
- Les différents gains se cumulent.

Écrire un algorithme qui simule le jeu à gratter et affiche le détail des gains du joueur.

Application 2 : tarifs de cotisation sportive

Pour s'inscrire en club sportif, le montant de la cotisation dépend de la catégorie :

Catégorie	**Senior** (21 ans et +)	**Junior** (18 à 20 ans	**Cadet** (16 à 17 ans)	**Minime** (14 à 15 ans)	**Benjamin** (12 à 13 ans)	**Poussin** (9 à 11 ans)	**Pousset** (7 à 8 ans)
Tarif	233 €	203 €	175 €	149 €	125 €	103 €	83 €

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur sa catégorie puis affiche le montant de sa cotisation.

Indication pour la programmation en Python : on pourra utiliser deux tableaux ; un tableau *categorie* et un tableau *tarif*.

Application 3 : conseil de classe

En vue du conseil de classe, un professeur souhaite effectuer des statistiques sur sa classe de BTS SIO qui compte 30 élèves.

1. Écrire un algorithme qui permet la saisie des 30 notes dans un tableau.

2. Modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche la moyenne des notes.

3. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il renvoie la note maximale et la note minimale de la série de notes.

4. Modifier le programme pour qu'il affiche l'étendue de la série de notes (différence entre la note maximale et la note minimale).

5. Modifier le programme pour qu'il affiche le nombre de notes en dessous de 10/20.
Indication : Pensez à faire un parcours de tableau et à utiliser une variable compteur.

6. Modifier le programme pour qu'il calcule et affiche la médiane de la classe.
Indication : Attention, les indices commencent à 0 !

7. Modifier le programme pour qu'il calcule et affiche la moyenne élaguée (sans les notes maximales et minimales).

Remarque

En Python, il existe de nombreuses autres commandes pour manipuler les tableaux. On pourra tester par exemple les commandes suivantes.

- T=[5,8,7,1,3,6,4,9]
- len(T) # longueur
- sum(T) #somme
- max(T) #maximum
- min(T) #minimum
- T.append(2)
- T[2:5]
- 2 in T
- T[1 :]
- T.remove(3)
- T[:]
- T.index(6)

Application 4 (difficile) : produit matriciel

On peut se reporter au paragraphe **1B** du chapitre **2**.

Écrire un algorithme qui permet de calculer le produit de deux matrices A et B.

Remarque

En Python, pour initialiser une matrice à n lignes et p colonnes, on peut créer un tableau de taille n contenant n tableaux de taille p.

Par exemple, pour initialiser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, on peut écrire

$T = [[1,4,0],[3,7,2]]$.

Pour accéder au coefficient situé à la ligne i et colonne j, on écrit $T[i-1][j-1]$.
Par exemple, pour accéder à A(2,1) on écrit $T[1][0]$.

Tri à bulles

Considérons un tableau de taille *n* constitué de nombres entiers.

Il s'agit de trier dans l'ordre croissant les éléments de ce tableau à l'aide d'une méthode appelée « tri à bulles ».

Le tri à bulles consiste à parcourir le tableau en comparant les éléments consécutifs et à les échanger s'ils ne sont pas dans l'ordre croissant.

Après le premier parcours du tableau, le plus grand élément du tableau se situe en dernière position, comme une bulle remontée en surface d'où le nom de la méthode !

Après chaque parcours du tableau, un élément supplémentaire est trié.

Au bout de $n - 1$ parcours, le tableau est entièrement trié.

A. Avec des boucles déterministes

1. Travail par écrit

On considère l'algorithme A1 suivant :

Algorithme A1

```
Variables numériques : i, j, aux, n, tab(n)
DEBUT
1.   Saisir n
2.   Pour i allant de 0 à n-1
3.      Saisir tab[i]
4.   Fin Pour
5.   Pour j allant de 0 à n-2
6.      Pour i allant de 0 à n-2
7.         Si tab[i]>tab[i+1] alors
8.            aux ← tab[i]
9.            tab[i] ← tab[i+1]
10.           tab[i+1] ← aux
11.        Fin Si
12.     Fin Pour
13.  Fin Pour
14.  Pour i allant de 0 à n-1
15.     Afficher tab[i]
16.  Fin Pour
FIN
```

a. Qu'affiche cet algorithme si les valeurs saisies sont dans l'ordre : 5 ; 24 ; 22 ; 40 ; 13 ; 31 ?

On détaillera le contenu du tableau tab à chaque itération de *i* et de *j*.

b. Quel est le rôle du bloc d'instructions constitué des lignes 8, 9 et 10 ?

c. Cet algorithme ne tient pas compte du fait, qu'après chaque parcours du tableau, un élément supplémentaire est trié à la fin du tableau. Que peut-on modifier à la ligne 6 pour en tenir compte ? Ce nouvel algorithme est nommé A2.

2. Travail sur poste informatique

a. Implémenter et tester les algorithmes A1 et A2.

b. Modifier le programme afin de faire afficher à chaque itération de *i* et de *j* le contenu du tableau tab.

c. Ajouter un compteur qui est incrémenté à chaque itération et permet ainsi de compter le nombre de comparaisons (*tab*[*i*]>*tab*[*i*+1]) effectuées.

d. Pour les tableaux suivants, tester ce programme et relever le nombre d'itérations au bout desquelles le tableau est entièrement trié :

- Premier cas

i	0	1	2	3	4
tab[*i*]	7	25	19	12	18

- Deuxième cas

i	0	1	2	3	4
tab[*i*]	1	5	7	8	9

- Troisième cas

i	0	1	2	3	4
tab[*i*]	8	2	3	5	6

- Quatrième cas

i	0	1	2	3	4
tab[*i*]	9	7	6	2	0

Le nombre de comparaisons effectuées avec ce programme dépend uniquement de la taille du tableau. Dans ces exemples, il est égal à 10 (car $4+3+2+1=10$).

Dans le cas général, si la taille du tableau est n, il est égal à $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

On constate que, dans certains cas, les dernières itérations sont inutiles.

B. Limiter le nombre de comparaisons

Afin d'éviter les comparaisons superflues constatées précédemment, on peut améliorer l'algorithme de tri à bulles en arrêtant son exécution dès que, lors d'un parcours de tableau, aucune permutation n'a été effectuée.

1. Travail par écrit

Transformer l'algorithme A2 en algorithme A3, en remplaçant la première boucle ligne 5 par une boucle non déterministe « Tant que… ». Pour cela, on utilisera un booléen permettant de savoir si le tableau est entièrement trié ou pas.

2. Travail sur poste informatique

a. Modifier le programme de la partie **A.** afin d'introduire l'algorithme A3 (on conservera l'affichage du tableau à chaque itération ainsi que le compteur du nombre de comparaisons).

b. Tester les mêmes cas que dans la question **2.d.** de la partie **A.** Dans combien de cas le nombre de comparaisons effectué est-il inférieur ?

c. Trouver un cas, avec un tableau de dimension 10, où le nombre de comparaisons nécessaires avec ce programme est diminué d'au moins 5.

6 Les chaînes de caractères

Prise en main

On considère l'algorithme suivant :

DEBUT
$n \leftarrow 5$
$m \leftarrow$ '*bonjour*'
$p \leftarrow$ '10'
$m \leftarrow m + p$
FIN

Ici les variables n et p n'ont pas le même statut. n contient une valeur numérique alors que p contient une valeur alphanumérique. Après exécution de l'algorithme, la variable m contiendra la chaîne de caractères '*bonjour*10'. L'instruction $n \leftarrow n + p$ n'aurait aucun sens.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Une chaîne de caractères est un regroupement de caractères issus d'un alphabet.

Remarque

Ne pas confondre une chaîne de caractères et un tableau. Comme les tableaux, les chaînes de caractères ont une longueur : le nombre de caractères qui les composent. Contrairement aux tableaux, il n'est pas possible de modifier partiellement les caractères d'une chaîne déjà existante directement, même si les caractères peuvent être considérés individuellement grâce à l'indice.

Délimitation d'une chaîne de caractères

On utilise les guillemets en pseudo-code, les apostrophes ou les guillemets en Python :

Pseudo-code	Python
message1 ← « "Oui", a-t-elle répondu » message2 ← « j'aime beaucoup l'algo ! » **Afficher** message1, message2	message1 = '"Oui", a-t-elle répondu,' message2 = "j'aime beaucoup l'algo !" **print**(message1, message2)

L'algorithme affiche : Oui , a-t-elle répondu, j'aime beaucoup l'algo !

Concaténation de deux chaînes de caractères

Pour joindre deux chaînes de caractères, on utilise l'opérateur '+'

Pseudo-code	Python
message3 ← message1 + message2 **Afficher** message3	message3 = message1 + message2 **print**(message3)

La variable alphanumérique message3 contient "Oui", a-t-elle répondu, j'aime beaucoup l'algo !

Accès à des éléments d'une chaîne de caractères

Python permet une manipulation aisée des chaînes de caractères : on peut utiliser l'index vu dans la partie sur les tableaux, ou encore tester si une lettre apparaît dans une chaîne de caractères.

Pour accéder à un caractère en particulier ou à un regroupement de caractères, on utilise le nom de la variable qui contient la chaîne de caractères et l'indice des caractères concernés dans la chaîne. Les indices commencent à 0.

Python
c="Bonjour tout le monde !" print(len(c)) print(*c*[0]) print(*c*[2 : 15])

La chaîne de caractères est de longueur 23. $c[0]=$ "*B*" et $c[2:15]=$ "*njour tout le*"

Python
>>>c="Bonjour tout le monde !" >>>c.index('m')   #position d'un caractère 17 >>>c.index('jour')   #position d'une sous-chaîne 3 >>> 'b' in c   # permet de tester si une sous-chaîne appartient à la chaîne False #Attention, la casse des caractères est importante >>> 'B' in c True

Modification d'une chaîne de caractères

Pour modifier une chaîne de caractères déjà existante, il faudra créer une nouvelle variable. Par exemple :

Python
$m=$ "bonjour" $M=$ "*B*"$+m[1:]$ print (M)

Cet algorithme affichera le mot « Bonjour ».

Exemple 1 : Création d'une chaîne à partir d'une chaîne déjà existante

L'algorithme suivant recopie un mot saisi au clavier par l'utilisateur en insérant entre chaque caractère des dièses #.

Par exemple, si l'utilisateur saisit "Algorithmique", l'algorithme affichera : "A#l#g#o#r#i#t#h#m#i#q#u#e"

Algorithme : plagiat modifié
Variables numériques : *i* **Variables alphanumériques :** *mot* **DEBUT**   **Saisir** *mot*   *nouveau_mot*← "" *#Le nouveau mot ne contient aucun caractère au début*   **Pour** *i* **allant de** 0 **à** *longueur*(*mot*) – 2   *nouveau_mot*← *nouveau_mot* + *mot*[*i*] + "#"   **Fin pour**   *nouveau_mot*← *nouveau_mot* + *mot*[*longueur*(*mot*) – 1]   **Afficher** *nouveau_mot* **FIN**

Python
mot=input("Veuillez saisir un mot") nouveau_mot="" for *i* in range (len(mot) -1):   nouveau_mot=nouveau_mot+mot[i]+"#" nouveau_mot=nouveau_mot+mot[len(mot)–1] print(nouveau_mot)

Exemple 2 : Nombre de mots dans une chaîne de caractères

On souhaite écrire un algorithme qui, à partir d'une chaîne de caractères saisie au clavier par l'utilisateur, affiche le nombre de mots de la phrase. On considère que l'utilisateur saisit des chaînes de caractères sans ponctuation.
Idée : compter le nombre d'espaces dans la phrase saisie.

Algorithme : nombre de mots
Variables numériques : *i*, *cpt* **Variables alphanumériques :** *chaine* **DEBUT**   **Afficher** "Veuillez saisir une phrase sans ponctuation, commençant et se terminant par une lettre"   **Saisir** *chaine* $cpt \leftarrow 1$ **Pour** *i* **allant de** 0 **à** $longueur(chaine) - 1$ **Si** *chaine*[*i*] = " " **alors** $cpt \leftarrow cpt + 1$ **Fin Pour**   **Afficher** *cpt* **FIN**

Python
chaine=input("Veuillez saisir une phrase sans ponctuation, commençant et se terminant par une lettre") cpt=1 for *i* in range (len(chaine)) :   if chaine[i]=="" **:**   cpt=cpt+1 print(cpt)

Transtypage

Il arrive que l'on ait besoin de transformer une chaîne de caractères en nombre et réciproquement. Cette action s'appelle une opération de transtypage.

En Python :

- On peut transformer un nombre en chaîne de caractères en utilisant la fonction de transtypage **str(chaine)**.
- On peut transformer une chaîne de caractères en nombre avec la commande **int(chaine)** ou **float(chaine).**

Python
>>> str(52) # transforme le nombre 52 en la chaîne de caractères '52'. >>> int('52') #transforme la chaîne de caractères '52' en le nombre entier 52. >>> float("3.14") #transforme la chaîne de caractères "3.14" en le nombre réel 3.14.

Remarque

Lors du transtypage d'une chaîne de caractères en nombre, il convient de s'assurer que le contenu de la chaîne de caractères convienne au type que l'on souhaite lui donner. Par exemple, le transtypage de la chaîne "4.15" en nombre entier engendrera une erreur.

Exemple 3 : Conversion décimal à binaire

On souhaite écrire un algorithme dans lequel l'utilisateur saisit un nombre entier écrit en base décimale et où l'algorithme affiche ce nombre écrit en base 2.

Algorithme : conversion base 10 à base 2

Variables numériques : i, n
Variable alphanumérique : *nombre*
DEBUT
  Afficher "Veuillez saisir un nombre entier en base 10"
  Saisir n
  $r \leftarrow n$
  $nombre \leftarrow$ ""
  Tant que $PartieEntiere(r / 2) \neq 0$
    $nombre \leftarrow str(r\%2) + nombre$
    $r \leftarrow PartieEntiere(r / 2)$
  Fin Tant que
  $nombre \leftarrow str(r) + nombre$
  Afficher int(*nombre***)**
FIN

Python

```
n=int(input())
r=n
nombre=""
while(r//2)!=0:
   nombre=str(r%2)+nombre
   r=r//2
nombre=str(r)+nombre
print(int(nombre))
```

La notation str() ci-contre traduit la transformation d'un nombre en chaîne de caractères (et inversement pour int()).

Application 1 : voyelle ou consonne ?

1. Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir une lettre minuscule puis affiche si la lettre saisie est une consonne ou une voyelle.

Remarque

On pourra utiliser une variable alphanumérique voyelle='aeiouy'

2. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche également si le caractère saisi est une majuscule ou une minuscule.

Application 2 : réécriture

Écrire un algorithme qui transforme une chaîne de caractères écrite en minuscules (sans accents et sans ponctuation), en une chaîne identique mais écrite en majuscules.

Application 3 : dans une entreprise

Dans une entreprise, chaque employé possède un code personnel alphanumérique composé de huit caractères.
• Les deux premiers représentent l'année d'embauche.
• Les quatre suivants le numéro d'embauche.
• Le septième le titre de l'employé :
– 1 pour Madame
– 2 pour Monsieur

• Le huitième désigne le domaine dans lequel travaille l'employé :
– 0 pour la direction
– 1 pour le secrétariat
– 2 pour la gestion
– 3 pour l'informatique
– 4 pour la communication
– 5 pour l'entretien
– 6 pour la fabrication

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur son nom, prénom et son code personnel et qui renvoie une phrase donnant sa situation.

Exemple

L'utilisateur saisit les nom et prénom DURAND Estelle, et le code "05201413".

On veut obtenir la phrase suivante :
« Madame Estelle DURAND travaille au service informatique. Elle travaille dans l'entreprise depuis 2005 et son numéro d'embauche est le 2014. »

Remarque

Le programme peut prendre en compte le fait que la personne peut avoir été recrutée avant ou après l'an 2000. Par exemple : si les deux premiers chiffres sont 12, il semble difficile de penser que la personne a été recrutée en 1912…

Application 4 : conversion hexadécimal à décimal

Voir le 1B du chapitre 3.

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir, sous forme d'une chaîne de caractères, un nombre entier écrit en base hexadécimale puis qui affiche ce nombre en base décimale.

Remarque

On pourra utiliser la variable suivante :

$H =$ "0123456789$ABCDEF$"

Application 5 : conversion binaire à hexadécimal

Voir le 1B du chapitre 3.

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir un nombre entier en base binaire puis qui affiche ce nombre en base hexadécimale sous forme d'une chaîne de caractères.

1. Écrire un algorithme qui décompose une chaîne de caractères constituée de '0' et de '1' en groupes de 4 caractères en partant de la droite.

Remarques

– On pourra créer un tableau contenant des chaînes de caractères de longueur 4.
– On ajoutera les '0' nécessaires pour que le dernier groupe formé contienne bien 4 caractères.

2. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il convertisse le nombre en base hexadécimale.

Remarque

On pourra utiliser les deux tableaux suivants :

$H =$ ["0","1","2","3","4","5","6","7","8","9","A","B","C","D","E","F"]
$B =$ ["0000","0001","0010","0011","0100","0101","0110","0111",
"1000","1001","1010","1011","1100","1101","1110","1111"]

ainsi que la commande index qui permet de connaître le premier indice d'apparition d'une valeur donnée dans un tableau.

Cryptographie

A. Occurrence d'une lettre dans un message

1. Travail par écrit

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme A1

```
DEBUT
1.  Saisir message
2.  n ← longueur(message)
3.  i ← 0
4.  cpt ← 0
5.  Tant que (i < n)
6.      Si message[i]=« a » alors
7.          cpt ← cpt +1
8.      Fin Si
9.  ....................
10. Fin Tant que
11. Afficher cpt
FIN
```

a. Lister les variables utilisées ainsi que leur type.

b. Il manque une instruction à la ligne 9. Laquelle ?

c. Quel est le rôle de cet algorithme ?

d. Faire fonctionner cet algorithme avec :
message = "J'aime les ananas !"
message = "Avez vous appris votre cours ?"

e. Quelle modification pourrait-on faire à la ligne 6 afin de prendre en compte le fait que la lettre "a" peut être écrite en majuscule ?

f. Proposer une modification A2 de l'algorithme A1 pour qu'il affiche, sous forme d'un tableau, le nombre d'occurrences de toutes les lettres de l'alphabet.
Par exemple, avec le message "Bonjour, comment allez-vous ?", l'algorithme affichera :
[1,1,1,0,2,0,0,0,0,1,0,2,2,2,4,0,0,1,1,1,2,1,0,0,0,1]

> **Remarque**
> On pourra utiliser les variables : *alphabet* ← "*abcdefghijklmnopqrstuvwxyz*"
> et ALPHABET ← "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ".
> On évitera les messages avec accents.

2. Travail sur poste informatique

a. Implémenter et tester l'algorithme A1 en Python.

b. Implémenter et tester l'algorithme A2 en Python.

c. Modifier ce dernier programme pour qu'il affiche la lettre la plus fréquente du message. Si plusieurs lettres ont le même nombre d'occurrences, on fera apparaître la première dans l'ordre alphabétique.

B. Codage affine

1. Travail par écrit : Codage César

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme B1

```
DEBUT
alphabet ← "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
Saisir mot
nouveaumot ← ""
Pour i allant de 1 à longueur(mot)
    indice ← position dans l'alphabet de mot[i]
    nouvelindice ← (indice + 3) % 26
    nouveaumot ← nouveaumot + alphabet[nouvelindice]
Fin Pour
Afficher nouveaumot
FIN
```

On pourra, dans cette partie, utiliser le tableau de correspondance suivant :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a. Lister les variables ainsi que leur type.

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

c. Faire fonctionner cet algorithme avec mot = "bonjour".

d. Proposer une modification de l'algorithme B1 pour qu'il puisse gérer des messages avec espaces ou ponctuation (on ne considère pas dans ce TP les messages avec majuscules ou accents).

e. Proposer une modification de l'algorithme B1 pour qu'il décode le message suivant, crypté avec le codage César : « dx uhyrlu ! »

2. Travail sur poste informatique : Décalage inconnu

a. Implémenter et tester l'algorithme B1.

b. On considère une nouvelle méthode pour crypter un message. On décale toujours les lettres mais pas forcément de 3 rangs. On considère le message suivant, codé avec un décalage inconnu :

"ath bpiwtbpixfjth, r'thi qxtc !"

i. En utilisant la partie **A.**, analyser les fréquences d'apparition de chacune des lettres du message.
ii. Modifier le programme précédent pour qu'il repère la lettre la plus fréquente, en déduise le décalage qui a pu être appliqué pour coder le message, et décode le message.

> On sait que, dans la langue française, les lettres les plus fréquentes sont, en partant de la plus fréquente : "e, s, a, *n*, t, *i*, r".

c. Il arrive que le message ne comporte pas suffisamment de lettres pour observer une différence notable de fréquences d'apparition et donc ne permette pas à coup sûr de décoder le message de manière correcte.
Par exemple : "ru jkjwmxwwj"
Comment modifier le programme précédent pour qu'il teste plusieurs décodages possibles ? On pourra considérer que si la lettre la plus fréquente du message codé ne correspond pas à la lettre « e », alors peut être qu'elle correspond à « s », ou « a »…

7 Les sous-programmes

A. Procédures et fonctions

Devant un problème complexe, par exemple « construire une maison », il est nécessaire de décomposer la tâche à réaliser en sous-tâches : réaliser des plans, obtenir un permis de construire, préparer le terrain, réaliser les fondations, le gros œuvre (maçonnerie, menuiseries, charpente, couverture), le second œuvre (plomberie, électricité, raccordement aux réseaux, carrelage, peinture), les finitions, la décoration… Certaines de ces tâches doivent être effectuées dans un ordre précis. D'autres peuvent être réalisées simultanément ou dans un ordre quelconque.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

En algorithmique, on cherche à décomposer la tâche à réaliser en sous-tâches plus simples. On utilise pour cela des **sous-programmes** auxquels on fait appel dans un **programme principal**.

Cette façon de concevoir un algorithme a donc de nombreux avantages :
- l'algorithme est plus clair, car la structure de l'algorithme principal est minimale, chaque sous-tâche est séparée dans un sous-programme,
- l'algorithme est plus compact, car on évite toutes les répétitions,
- l'algorithme est plus simple à contrôler (on peut tester, un par un, les sous-programmes),
- l'algorithme est plus simple à modifier (on ne modifie souvent qu'un sous-programme),
- les sous-programmes peuvent être réutilisés dans un autre algorithme qui utilise des données similaires ou réalise des tâches voisines,
- on peut concevoir des parties de l'algorithme et les tester sans attendre d'avoir tout terminé.

Ces sous-programmes existent sous deux formes : les **procédures** et les **fonctions**. Il en existe des préprogrammés mais il est possible d'en créer de nouveaux.

Procédures

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Une **procédure ne retourne pas de valeur.**

En Python, il existe certaines procédures préprogrammées, par exemple :
- la procédure input(),
- la procédure print(« bonjour ») qui prend en **paramètre d'entrée** une chaîne de caractères.

Pseudo-code	Python
Procédure ma_procédure (paramètre) *instructions*	**def ma_procedure(parametre) :** *instructions*

Exemple 1

La procédure suivante prend en paramètre d'entrée un entier naturel *n* et affiche *n* lignes d'étoiles en triangle, comme ci-dessous.

```
*
**
***
**** …
```

Algorithme : affichage d'étoile
Procédure étoiles(n) **Pour** *i* **allant de** 1 **à** *n*   **Pour** j **allant de** 1 **à** *i*   **Afficher** « * »   **Fin Pour** **Fin Pour**

Python : affichage d'étoile

```
def etoiles(n) :
    for i in range(n) :
        mot=''
        for j in range(i+1) :
            mot=mot+'*'
        print(mot)
```

Comme son nom l'indique, un sous-programme n'a pas vocation à être utilisé seul, mais à être appelé dans un programme principal, de la façon suivante :

Algorithme : affichage d'étoile
Sous-programme **Procédure étoiles(n)** **Pour** *i* **allant de** 1 **à** *n*   **Pour** j **allant de** 1 **à** *i*   **Afficher** « * »   **Fin Pour**   Retour à la ligne **Fin Pour** *# Programme principal* **DEBUT**   **Afficher** « Veuillez saisir le nombre de lignes souhaité »   **Saisir** taille   étoiles(taille) **FIN**

Python : affichage d'étoile

```
# Procédure
def etoiles(n) :
    for i in range(n) :
        mot=''
        for j in range(i+1) :
            mot=mot+'*'
        print(mot)
# Programme principal
taille=int(input("Veuillez saisir le nombre de lignes souhaité"))
etoiles(taille)
```

Il est à noter que lorsqu'on fait appel à une procédure dans un programme principal les paramètres d'entrée peuvent porter un nom différent que ceux utilisés dans la définition de la procédure. Ici la **variable locale** *n* (voir plus loin pour la définition d'une variable locale) correspond à la variable taille du programme principal.

Remarque :

En Python, on peut faire directement appel à la procédure dans l'interpréteur pour l'exécuter, notamment pour la tester. Pour cela, on écrit :

```
>>> etoiles(2)
```

Affichage obtenu :

```
*
**
```

Fonctions

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Une fonction est un sous-programme qui retourne une valeur.

On l'utilise donc avec une affectation, par exemple :
mon_resultat ← ma_fonction()

Par exemple :
- random() est une fonction ne prenant pas de paramètre d'entrée
- floor(a) est une fonction qui prend en paramètre d'entrée un nombre réel
- randint(a,b) est une fonction qui prend en paramètres d'entrée deux entiers naturels

Pseudo-code	Python
Fonction ma_fonction(paramètre) instructions **retourner**(valeur)	**def ma_fonction(parametre) :** *instructions* ***return****(valeur)*

Exemple 2

- La fonction suivante prend en paramètre d'entrée un tableau et retourne sa valeur maximale.

Algorithme : recherche maximum

```
Variables numériques : T, i, maximum
Fonction maximum(T)
    maximum ← T[0]
    Pour i allant de 0 à longueur(T)-1
        Si T[i] >maximum
            maximum ← T[i]
        Fin Si
    Fin Pour
    retourner(maximum)
```

Python : recherche maximum

```
def maximum(T) :
    maximum=T[0]
    for i in range(len(T)) :
        if T[i]>maximum :
            maximum=T[i]
    return(maximum)
```

- La fonction suivante prend en paramètre d'entrée un tableau et retourne sa valeur minimale.

Algorithme : recherche minimum

```
Variables numériques : T, i, minimum
Fonction minimum(T)
    minimum ← T[0]
    Pour i allant de 0 à longueur(T)-1
        Si T[i]<minimum
            minimum ← T[i]
        Fin Si
    Fin Pour
    retourner(minimum)
```

Python : recherche minimum

```
def minimum(T) :
    minimum=T[0]
    for i in range(len(T)) :
        if T[i]<minimum:
            minimum=T[i]
    return(minimum)
```

- La fonction suivante prend en paramètre d'entrée un tableau et retourne l'étendue de ses valeurs, c'est-à-dire la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Idée : Faire appel aux fonctions maximum et minimum déjà écrites.

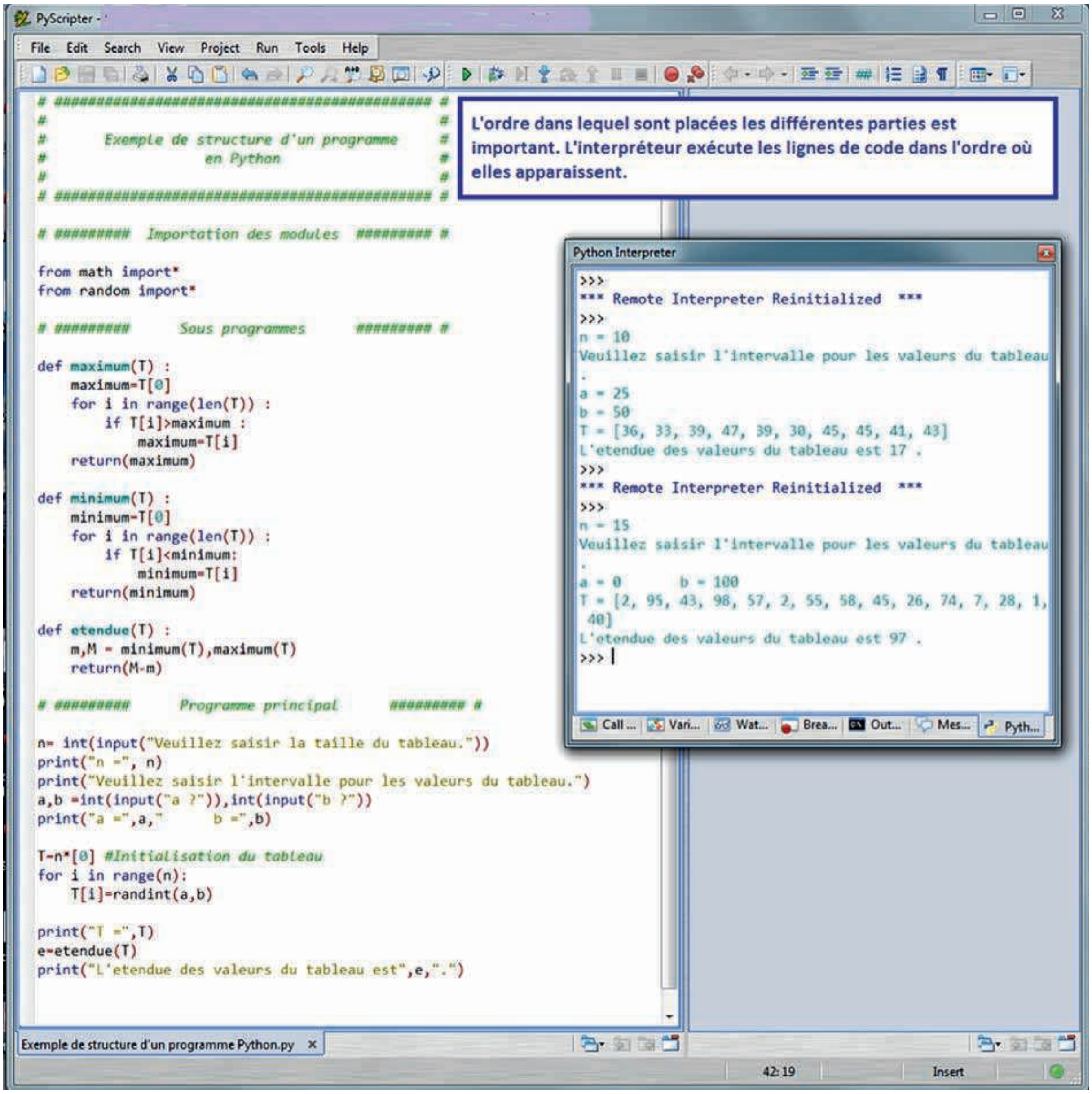
Algorithme : étendue

```
Fonction étendue(T)
    m ← minimum(T)
    M ← maximum(T)
    retourner(M-m)
```

Python : étendue

```
def etendue(T) :
    m = minimum(T)
    M = maximum(T)
    return(M-m)
```

Exemple de structure d'un programme en Python (à partir de l'exemple 2)



Variables locales

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Lorsque des variables sont définies à l'intérieur d'une procédure ou d'une fonction, elles ne sont accessibles que pour cette dernière. On dit que ce sont des **variables locales**.

Une variable locale définie dans une procédure ou une fonction sera supprimée de la mémoire après son exécution.

En Python, les variables locales sont les paramètres d'entrée et les variables affectées à l'intérieur du sous-programme.

Exemple 3

On teste, dans l'interpréteur Python, l'exécution de cette procédure :

Python : affichage

```
def affichage():
    k=15
    print(k)
```

```
>>> affichage()
15
```

Mais, si on essaie d'afficher le contenu de la variable k dans l'interpréteur, un message d'erreur apparaît :

```
>>> print(k)
Traceback (most recent call last):
File "<interactive input>", line 1, in
<module>
NameError: name 'k' is not defined
```

La variable k définie précédemment n'existe qu'à l'intérieur de la procédure **affichage**. La variable k est une variable locale à la procédure **affichage**.

Variables globales

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Les variables définies à l'extérieur d'une procédure ou d'une fonction sont appelées **variables globales**. Elles sont accessibles à l'intérieur du sous-programme mais ce dernier ne peut pas les modifier.

En Python, les variables globales sont les variables utilisées dans un sous-programme qui ne sont pas des variables locales, c'est-à-dire les variables qui ne sont pas des paramètres d'entrée ou qui ne sont pas affectées à l'intérieur du sous-programme.

Exemple 4

Python : affichage2

```
def affichage_bis():
    print("La valeur de k est :",k)

k=2
affichage_bis()
k=k+15
affichage_bis()
```

À l'exécution de ce programme, on obtient :

```
>>>
La valeur de k est : 2
La valeur de k est : 17
```

Dans cet exemple, on peut accéder à la valeur de la variable k à l'intérieur de la procédure **affichage_bis** mais pour la modifier, on écrit les instructions dans le programme principal. La variable k est une variable globale.

À l'intérieur d'un sous-programme, ce sont les variables définies localement qui ont la priorité. Pour modifier cela, on peut demander au sous-programme de traiter une variable comme une variable globale à l'aide de l'instruction global.

Exemple 5

Python : affichage3_1	Python : affichage3_2

```
def affichage_3():
    g=17
    print("Dans la procedure : g=",g)

g=2
print("Avant la procedure : g=",g)
affichage_3()
print("Apres la procedure : g=",g)
```

```
def affichage_ter():
    global g
    g=g+15
    print("Dans la procedure : g=",g)
g=2
print("Avant la procedure : g=",g)
affichage_ter()
print("Apres la procedure : g=",g)
```

```
>>>
Avant la procedure : g= 2
Dans la procedure : g= 17
Apres la procedure : g= 2
```

```
>>>
Avant la procedure : g= 2
Dans la procedure : g= 17
Apres la procedure : g= 17
```

Dans le programme Affichage3_1, il y a deux variables *g*, l'une locale à la procédure **affichage_3** et l'autre de portée globale dans le programme principal. À l'issue de l'exécution de la procédure, le contenu de la variable *g* du programme principal n'a pas été modifié.

Dans le programme Affichage3_2, la variable *g* est une variable globale, la modification effectuée dans la procédure **affichage_ter** est prise en compte dans le programme principal.

Dans l'écriture d'un programme, pour éviter toute confusion entre variables globale et locale, il est recommandé de leur donner deux noms distincts.
En Python, les variables de type liste ou tableau sont, par défaut, des variables globales dans tous les sous-programmes.

Exemple 6

Python : affichage4

```
def affichage_quater():
    g[0]=g[0]+15
    print("Dans la procedure : g=",g)

g=[0]*2 # initialisation du tableau
g[0]=2
print("Avant la procedure : g=",g)
affichage_quater()
print("Apres la procedure : g=",g)
```

On obtient :

```
>>>
Avant la procedure : g=[2, 0]
Dans la procedure : g=[17, 0]
Apres la procedure : g=[17, 0]
```

Application 1 : produit

Écrire une fonction prenant en paramètres d'entrée deux nombres entiers naturels et qui retourne leur produit.

Application 2 : affichage message

Écrire une procédure qui prend en paramètres d'entrée un nombre entier naturel *n* et une chaîne de caractères *message* et affiche *n* fois la variable *message*.

Application 3 : calcul de moyenne

Écrire une fonction prenant en paramètre d'entrée un tableau de nombres et qui retourne la moyenne des valeurs contenues dans le tableau.

B. Récursivité

Prise en main Python

On considère les fonctions suivantes :

Python

```
def fibonacci(n) :
    a=1
    b=1
    if n==0 or n==1 :
        valeur=1
    else :
        for i in range(n-1) :
            valeur=a+b
            a=b
            b=valeur
    return(valeur)
```

Python

```
def fibo(n) :
    if n==0 or n==1:
        return(1)
    else :
        return(fibo(n-1)+ fibo(n-2))
```

La seconde fonction a la particularité de faire appel à elle-même dans sa définition. C'est une **fonction récursive**.

Il s'agit de la fonction qui permet de calculer le terme de rang n de la suite de Fibonacci.

On peut se reporter à l'exemple **1A** du chapitre 1.

Les commandes fibo(0) et fibo(1) retournent chacune 1 et pour une valeur de n supérieure, la fonction calcule la somme des valeurs fibo($n-1$) et fibo($n-2$).

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Une fonction récursive est une fonction qui s'appelle elle-même.

Quand on définit une fonction de manière récursive, il faut donner des valeurs de départ à la fonction pour éviter qu'elle s'appelle indéfiniment. Dans l'exemple précédent, on a défini les valeurs de la fonction pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple 1 : Calcul de la somme des premiers entiers

La fonction suivante prend en paramètre d'entrée un entier naturel n strictement positif et calcule la valeur de la somme des n premiers entiers naturels non nuls, aussi notée $\sum_{i=1}^{n} i$.

Python

```
def somme(n) :
    if n==1 :
        return(1)
    else :
        return(somme(n-1)+n)
```

Exemple 2 : PGCD de deux nombres

La fonction suivante prend en paramètre d'entrée deux entiers naturels non nuls et retourne le PGCD de ces deux nombres.

Sa conception repose sur la propriété suivante : le PGCD de deux nombres entiers a et b est égal au PGCD de b et r, où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Python

```
def PGCD (a,b):
    if a%b==0:
        return(b)
    else:
        return(PGCD(b,a%b))
```

Application 1 : calcul du produit des premiers entiers

Écrire une fonction récursive qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel n strictement positif et calcule la valeur du produit des n premiers entiers naturels, aussi notée $\prod_{i=1}^{n} i$.

Application 2 : conversion décimal à binaire

Voir le 1B du chapitre 3.

Écrire une fonction récursive qui prend en paramètre d'entrée un nombre entier écrit en base décimale et qui le convertit en binaire par la méthode des divisions successives par 2. La fonction retournera le résultat sous forme d'une chaîne de caractères composée de '0' et de '1'.

Application 3 : tri par sélection

Le tri par sélection est une méthode de tri dont le principe est le suivant : étant donné un tableau de nombres de taille n, on recherche la plus petite valeur, qu'on échange avec la première valeur du tableau. On parcourt à nouveau le tableau à partir de la deuxième case et échange la nouvelle plus petite valeur avec celle de la case d'indice 1, et ainsi de suite jusqu'à avoir trié tout le tableau.

Écrire une fonction récursive qui prend en paramètre d'entrée un tableau et retourne le tableau trié. (On pourra utiliser la fonction minimum de l'exemple 2 de la partie **A.**)

TP 1 Jeu du Maître de l'esprit

L'objectif de cette activité est de programmer un jeu dont les règles sont les suivantes : l'ordinateur choisit au hasard trois nombres compris entre 1 et 5 et le joueur doit les trouver en un minimum d'essais.

A. Travail par écrit

1. Choix de l'ordinateur

On souhaite écrire une fonction **choix_ordinateur**, ne prenant pas de paramètre d'entrée et qui retourne le choix de l'ordinateur sous forme d'un tableau de taille 3. Les valeurs du tableau seront des nombres entiers choisis aléatoirement entre 1 et 5.

Par exemple, on pourra obtenir les tableaux [3,2,5] ou [1,2,2].

Écrire en pseudo-code la fonction **choix_ordinateur.**

2. On considère la fonction F2 suivante :

Fonction F2

```
Fonction F2()
1.  Afficher « Veuillez saisir un nombre à trois chiffres. Les chiffres doivent
    être compris entre 1 et 5. »
2.  Saisir n
3.  P ← [0,0,0]
4.  Pour i allant de 0 à 2
5.      P[2 − i] ← n%10
6.      n←(n-P[2 − i])/10
7.  Fin Pour
8.  Retourner P
FIN
```

a. Lister les variables utilisées par la fonction F2 et leur type.

b. Quel est le rôle de la ligne 5 ?

c. Quel est le rôle de cette fonction ? La renommer.

3. Nombre de bonnes réponses

Écrire en pseudo-code une fonction **nb_commun** prenant en paramètres d'entrée deux tableaux T1 et T2 de taille 3, et qui retourne le nombre d'éléments communs et situés à la même position dans les tableaux T1 et T2.

Par exemple :
- Si T1=[3,2,5] et T2=[1,2,2], nb_commun(T1,T2) retournera la valeur 1.
- Si T1=[3,2,5] et T2=[3,5,2], nb_commun(T1,T2) retournera la valeur 1.
- Si T1=[3,2,5] et T2=[5,2,5], nb_commun(T1,T2) retournera la valeur 2.

B. Travail sur poste informatique

1. Implémenter et tester les fonctions **choix_ordinateur, F2** et **nb_commun.**

2. Création du programme principal

On souhaite programmer le déroulement de ce jeu. L'ordinateur choisit les trois valeurs à deviner. Le joueur fait une proposition sous forme d'un nombre à trois chiffres. L'ordinateur lui indique alors le nombre de valeurs correctement placées. Le joueur continue à faire des propositions tant qu'il n'a pas trouvé. Si le joueur a trouvé les trois valeurs, il a gagné.

Implémenter le programme correspondant.

Exemple de déroulement d'une partie :
essai 1 : proposition=[1,4,2]
réponse de l'ordinateur : 0 bonne réponse
essai 2 : proposition=[1,2,2]
réponse de l'ordinateur : 1 bonne réponse
essai 3 : proposition=[3,2,2]
réponse de l'ordinateur : 2 bonne réponse
essai 4 : proposition=[3,2,5]
réponse de l'ordinateur : 3 bonne réponse. Vous avez gagné !

3. On décide d'améliorer l'orthographe peu satisfaisante du programme. Comment le modifier pour que les mots « bonne » et « réponse » soient mis au pluriel si nécessaire ?

4. On souhaite limiter le nombre de propositions du joueur à 12. Modifier le programme précédent pour prendre en compte cette contrainte.

5. Modifier la fonction F2 pour qu'elle demande à nouveau la saisie du nombre si l'un des 3 chiffres n'est pas compris entre 1 et 5.

6. Pour aller plus loin (difficile) :
On modifie les règles du jeu. Dorénavant, à chaque proposition du joueur, l'ordinateur indique le nombre de bonnes réponses, mais aussi le nombre de valeurs existantes mais qui ne sont pas bien placées. Pour compenser cette aide supplémentaire de l'ordinateur, on pourra lui faire choisir non plus 3 mais 4 valeurs comprises entre 1 et 5.

Exemple de déroulement d'une partie :
essai 1 : proposition=[1,4,2,3]
réponse de l'ordinateur : 0 bonne réponse, 2 mal placée
essai 2 : proposition=[2,2,2,5]
réponse de l'ordinateur : 1 bonne réponse, 1 mal placée
essai 3 : proposition=[4,2,5,1]
réponse de l'ordinateur : 2 bonnes réponses, 0 mal placée
essai 4 : proposition=[3,2,5, 3]
réponse de l'ordinateur : 4 bonnes réponses, 0 mal placée. Vous avez gagné !

On pourra aussi dans cette question veiller à l'orthographe dans l'affichage du déroulement du jeu.

TP 2 Liste des diviseurs d'un nombre entier naturel

A. Travail par écrit

On considère la fonction suivante écrite en Python :

Python : fonction F

```
def F(n)
    div = 1
    Liste_div = [ ]
    while div <=n :
        if n% div = = 0 :
            Liste_div = Liste_div + [div]
            ..........................
    return (Liste_div)
```

1. Lister les variables ainsi que leur type.

2. Quelle instruction manque-t-il à la ligne 6 ? Que se passe-t-il si on ne la rajoute pas ?

3. Que retourne cette fonction si l'utilisateur saisit n=60 ?

4. Quel est le rôle de cette fonction ?

B. Travail sur poste informatique

On souhaite écrire une fonction qui prend en paramètres d'entrée deux nombres entiers naturels a et b et qui retourne le PGCD de ces deux nombres. Pour cela on compare les listes des diviseurs de chacun de ces nombres : le PGCD est le plus grand élément commun à ces deux listes.

1. Que doit retourner cette fonction pour a=60 et b=24 ?

2. À l'aide de la fonction déjà implémentée, écrire la fonction PGCD décrite ci-dessus.

3. **Pour aller plus loin** : écrire une fonction qui prend en paramètres d'entrée trois entiers naturels a, b et c qui retourne le plus grand diviseur commun à ces trois nombres.

TP 3 Décomposition en produit de facteurs premiers

Principe du crible d'Eratosthène : Eratosthène est un mathématicien grec du IIIe siècle avant J.-C. qui a proposé une méthode simple pour trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un certain entier naturel N ≥ 2.

Dans un tableau contenant les nombres entiers compris entre 2 et N, l'algorithme élimine tous ceux qui sont multiples d'un autre entier du tableau. A la fin, chaque entier restant n'est multiple d'aucun entier à part 1 et lui-même, autrement dit il n'est divisible que par 1 et lui-même. Il s'agit donc d'un nombre premier.

Idée :

- On crée un tableau T de taille N+1 constitué de 1. Ainsi, les cases sont numérotées de 0 à N et T[i] correspond à l'entier naturel *i*.
- L'algorithme commence par éliminer tous les multiples stricts de 2 (les multiples de 2 sauf lui-même). Pour cela, il affecte la valeur 0 aux variables T[4], T[6], T[8], …
- Lorsqu'il a fini d'éliminer les multiples d'un nombre, il passe au nombre suivant non éliminé, et affecte la valeur 0 aux cases de T dont les indices sont des multiples stricts de ce nombre.
- Si à la fin du crible, la valeur de T[i] est 1, cela signifiera que l'entier *i* est un nombre premier.

A. Travail par écrit : crible d'Eratosthène

1. Écrire une fonction qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel N et qui retourne un tableau T de taille N+1 où toutes les valeurs sont 1.

2. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il prenne en compte que les nombres entiers 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

On considère la fonction **F1** suivante, où T correspond au tableau initialisé à la question précédente :

Fonction F1

```
Fonction F1(k,T)
indice ← 2*k
Tant que (indice<longueur(T))
    T[indice] ← 0
    indice ← indice + k
Fin Tant que
retourner T
```

3. Lister les variables de cette fonction ainsi que leur type.

4. Que retourne la fonction F1 si l'utilisateur donne comme paramètres d'entrée T=[0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1] et k=2 ?

5. Quel est le rôle de cette fonction ? Modifier son nom pour qu'il corresponde à son rôle.

6. Écrire une nouvelle fonction **Liste_premiers** prenant en paramètre d'entrée un entier naturel N qui retourne le tableau T après avoir éliminé tous les multiples de k pour k allant de 2 à N–1 avec T[k]≠0.

7. En pratique, il est inutile de faire varier k jusqu'à N–1 ; il suffit de s'arrêter à Partie entière de ($\sqrt{N}$).

8. Modifier la fonction précédente pour qu'elle tienne compte de cette propriété.

9. Modifier la fonction précédente pour qu'elle retourne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N, en utilisant le fait que les nombres premiers sont les indices *i* tels que la variable T[i] contienne la valeur 1.

B. Travail sur poste informatique : décomposition

1. Implémenter et tester les fonctions **F1** et **Liste_premiers**.

2. Implémenter un programme qui décompose un nombre entier naturel N≥2 saisi par l'utilisateur en produit de facteurs premiers.

Par exemple, si N=70, le programme affichera : 70=2*5*7.

Idée : Tester, pour chaque nombre premier *p* inférieur à N, s'il est un diviseur de N. Si oui, l'ajouter à la décomposition et diviser N par *p*, si non, tester le nombre premier suivant.

TP 4 Club poésie

Le club poésie d'une école se réunit tous les lundis, mardis, jeudis et vendredis.

À chaque début de séance, un élève récite le poème de son choix.

La liste des 13 élèves inscrits au club est la suivante : Ahmed, Antoine, Arthur, Charlotte, Damien, Eliane, Françoise, Kirthana, Lucas, Maxime, Maïmouna, Sathya, Tiphaine.

A. Travail par écrit

1. Écrire une procédure **affichage** qui prend en paramètre d'entrée deux chaînes de caractères ch1 et ch2 et qui affiche « ch1 passera ch2 ».

2. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme : programme principal
DEBUT 1. inscrits← ["ahmed","antoine","arthur","charlotte","damien","eliane", "francoise", "kirthana","lucas","maxime","maimouna","sathya","tiphaine"] 2. jour← ["lundi", "mardi", "jeudi", "vendredi"] 3. **Pour** *i* **allant de** 0 **à** 12 **faire** 4. affichage(inscrits[i] , jour[i%4]) 5. **Fin Pour** **FIN**

a. Lister les variables utilisées par cet algorithme et leur type.

b. Expliquer l'utilisation de i%4 à la ligne 4.

c. Quel est le rôle de cet algorithme ?

B. Travail sur poste informatique

On enregistrera au fur et à mesure les procédures et les fonctions dans un seul fichier qui contiendra également le programme principal.

1. Implémenter et tester la procédure **affichage** et le programme principal écrits dans la partie **A**.

2. On décide de tirer au sort le rang dans le tableau **inscrits** de l'élève qui passera le premier lundi.
Écrire une fonction **tirage_rang** qui retourne un nombre au hasard correspondant à un rang possible du tableau **inscrits**.
Modifier le programme principal pour qu'il affiche pour chaque élève son jour de passage.

3. On décide désormais de tirer au sort une lettre de l'alphabet et de faire passer le premier lundi le premier élève par ordre alphabétique à partir de cette lettre.
On pourra utiliser la chaîne de caractères suivante :
alphabet←«abcdefghijklmnopqrstuvwxyz»

a. Écrire une fonction **tirage_lettre** qui retourne le rang d'une lettre prise au hasard dans l'alphabet.

b. Écrire une fonction **premier_inscrit** qui prend en paramètres d'entrée le tableau **inscrits** et le rang d'une lettre de l'alphabet et renvoie le rang de l'élève placé en premier dans l'ordre alphabétique à partir de cette lettre.

c. Modifier le programme principal pour qu'il affiche la lettre tirée au sort ainsi que, pour chaque élève, son jour de passage.

4. Modifier le programme principal pour qu'il affiche, à partir d'une lettre tirée au hasard, la liste des élèves qui passeront dans les sept semaines à venir (lorsque tous les élèves seront passés une fois, on recommencera le passage dans le même ordre).
On ajoutera dans les paramètres d'entrée de la procédure affichage une troisième variable qui permettra de donner le numéro de la semaine.
Par exemple, la première ligne de l'affichage sera « lucas passera le lundi de la semaine 1 ».

Des ressources en ligne sur www.editions-foucher.fr :
- **Le programme du BTS SIO (sous-unités obligatoires « Mathématiques » et « Algorithmique appliquée » ainsi que l'unité facultative « Mathématiques approfondies »).**
- **Les fichiers initiaux et finaux des TP TICE.**
- **Des documents pour l'unité facultative « Mathématiques approfondies ».**

Maquette intérieur : Fiat Lux
Composition et infographies : STDI
Éditions Foucher – Malakoff – 01 – Août 2014 – SB – LDF/EG

Achevé d'imprimer en Italie chez LTV