Constraint-solving

Programmierparadigmen

Johannes Brauer

23. August 2020

Ziele

- Lernen, wie man einen Constraint-solver selbst bauen kann
- Lernen, wie man eine Constraint-solving-Bibliothek von SWI-Prolog nutzen kann

Konzept eines einfachen Constraint-solving-Systems

- Unter Verwendung der so genannten *Regelfortpflanzung*.
- Von Regelfortpflanzung (constraint propagation) wurde erstmals im Programm Sketchpad Gebrauch gemacht, mit dessen Hilfe 1962 erstmals Grafiken auf einem Computer-Bildschirm gezeichnet werden konnten.
- Herkömmliche Programme (Funktionen) sind eindimensional, d. h. sie berechnen einen Wert in Abhängigkeit von ihre Eingangsgrößen (Argumenten).
- Regelfortpflanzung ermöglicht den Übergang von Funktionen zu Relationen.

Gleichungen

- Aus der Zinseszinsrechnung ist die folgende Gleichung bekannt:

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + \frac{p}{100})^n$$

- Sie beschreibt einen Zusammenhang von vier Größen.
- Sind drei Größen gegeben, kann die vierte berechnet werden.
- Mit den bekannten Mitteln der Programmierung ist es aber nicht möglich, die Gleichung und die Werte von drei Größen anzugeben, um den Wert der vierten zu bekommen.
- Stattdessen muss man für die Bestimmung jeder Größe eine eigene Prozedur (Funktion) schreiben.

Elementare Constraints

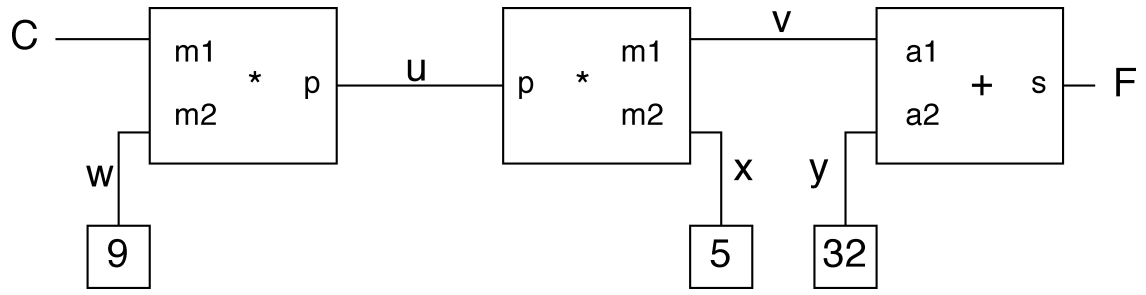
- Um mit Gleichungen (Relationen) direkt umgehen zu können, führen wir als Elemente einer Constraint-Spracje *primitive constraints* ein.
- Jedes primitive constraint beschreibt einen Zusammenhang zwischen Größen
  - `(adder x y z)` legt fest, dass für die Größen x, y und z die Gleichung gilt: $x + y = z$
  - Entsprechend definiert `(multiplier x y z)` die Gleichung $xy = z$.
  - Schließlich drücken wir durch `(constant 2.718 x)` aus, dass x den Wert 2.718 hat.
- Um komplexere Relationen ausdrücken zu können, können constraints durch Konnektoren verbunden werden.
- Ein Konnektor verwaltet einen Wert, der in mehreren constraints vorkommt.

Beispiel: Celsius-Fahrenheit-Konverter

- Zusammenhang zwischen Fahrenheit und Celsius:

$$9C = 5(F - 32)$$

- Schaltbild aus Addierern, Multiplizierern und Konstanten:



- Die Kleinuchstaben bezeichnen *Konnektoren*, die die Constraint-Elemente verbinden, bzw. die Verbindung zu den externen Anschlüssen herstellen.
- Die externen Anschlüsse (hier C und F) repräsentieren die Unbekannten aus der Gleichung.
- Anmerkung: Das Netzwerk ähnelt einem Programm für einen Analogrechner.

Berechnungsprozess

- Ein Konnektor erhält einen Wert (wird aktiviert) durch
  - den Benutzer oder
  - ein Constraint-Element, mit dem er verbunden ist.
- Wenn ein Konnektor einen Wert erhalten hat, aktiviert er alle verbundenen Constraint-Elemente – außer demjenigen, von dem er selbst aktiviert wurde.
- Ein aktiviertes Constraint-Element prüft alle mit ihm verbundenen Konnektoren daraufhin, ob genügend Informationen vorliegen, um ihm einen Wert zu geben.
- Wenn das der Fall ist, wird der Wert gesetzt, der Konnektor aktiviert usw.
- Im Celsius-Fahrenheit-Konverter erhalten die die Konnektoren w, x und y Werte durch die mit Ihnen verbundenen Konstanten.
- Die durch sie aktivierten Multiplzierer und der Addierer können nicht weiterarbeiten da ihnen Information fehlen.
- Erst wenn, C oder F durch den Benutzer einen Wert erhalten, wird ein Wert für F bzw. C berechnet.

Der Celsius-Fahrenheit-Konverter in Clojure

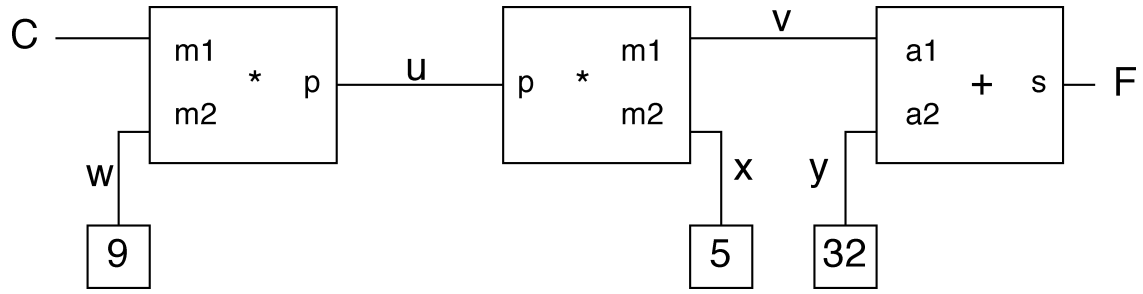
- Der Fahrenheit-Celsius-Konverter als black box:

- in Clojure:

```
(def C (make-connector))
(def F (make-connector))
(celsius-fahrenheit-converter C F) ;=> ok
```

- Die Prozedur `celsius-fahrenheit-converter`

```
(def celsius-fahrenheit-converter
  (fn [c f]
    (let [u (make-connector)
          v (make-connector)
          w (make-connector)
          x (make-connector)
          y (make-connector)]
      (multiplier c w u)
      (multiplier v x u)
      (adder v y f)
      (constant 9 w)
      (constant 5 x)
      (constant 32 y)
      'ok)))
```



Anbringen von Messfühlern

- Die Verknüpfung eines Konnektors mit einem Messfühler (probe) bewirkt, dass jedesmal, wenn der Konnektor einen Wert erhält, eine Nachricht ausgegeben wird.

```
(probe "Celsius temp" C)
(probe "Fahrenheit temp" F)
```

- Beispiel: Die Auswertung von `(set-value! C 25 'user)` führt zu folgender Ausgabe:

```
Probe: Celsius temp = 25
Probe: Fahrenheit temp = 77
```

- Der Messfühler an `C` sorgt für die Ausgabe der Celsius-Temperatur. Die Wertzuweisung an den Konnektor `C` pflanzt sich durch das Netzwerk fort, wodurch der Konnektor `F` den Wert 77 erhält. Der Messfühler an `F` sorgt wiederum für die Ausgabe.
- Der anschließende Versuch, einem Konnektor einen neuen Wert zu geben, schlägt fehl:

```
(set-value! F 212 'user)
Unhandled java.lang.Exception Contradiction(77 212)
```

- Vorher muss der Konnektor den alten Wert vergessen. Die Auswertung von `(forget-value! C 'user)` ergibt:

```
Probe: Celsius temp = ?
Probe: Fahrenheit temp = ?
```

- Jetzt kann `F` gesetzt werden:

```
(set-value! F 212 'user)
Probe: Fahrenheit temp = 212
Probe: Celsius temp = 100
```

- Die Änderung an `F` pflanzt sich „rückwärts" bis zu `C` fort.
- Beachte: Dasselbe Netzwerk wird benutzt um `F` bei gegebenem `C` zu berechnen, und umgekehrt.

Implementierung des Constraint-solving-Systems

- ... in Clojure
- originale Scheme-Version stammt aus [ASS99]

Struktur des `adder`

```
(def adder
  (fn [a1 a2 sum]
    (letfn
        [(process-new-value [] ...)
         (process-forget-value [] ...)
         (me [request]
           (cond
             (= request 'I-have-a-value)  (process-new-value)
             (= request 'I-lost-my-value) (process-forget-value)
             :else
             (throw (Exception. "Unknown request -- ADDER" request))))]
      (connect a1 me)
      (connect a2 me)
      (connect sum me)
      me)))
```

- `adder` ist als Prozedur mit **lokalem Zustand** definiert.
- Sie liefert die lokale Prozedur `me` als Wert zurück.
- Ein `adder` besitzt die Konnektoren `a1`, `a2` und `sum`.
- `adder` besitzt zwei weitere lokale Hilfsfunktionen:

- `process-new-value`
- `process-forget-value`,

die weiter unten definiert werden.

- Auf den folgenden Folien werden zunächst Basisoperationen für Konnektoren definiert.

Basisoperationen für Konnektoren

```
;; has-value?: connector -> boolean
;; sagt, ob Konnektor einen Wert hat
(def has-value?
  (fn [connector]
    (connector 'has-value?)))

;; get-value: connector -> any
;; liefert den Wert eines Konnektors
(def get-value
  (fn [connector]
    @(connector 'value)))

;; set-value!: connector any constraint -> unspecified
;; zeigt an, dass ein constraint den Wert eines Konnektors
;; setzen will
(def set-value!
  (fn [connector new-value informant]
    ((connector 'set-value!) new-value informant)))

;; forget-value!: connector constraint -> unspecified
;; zeigt an, dass ein constraint den Wert eines Konnektors
;; vergessen machen will
(def forget-value!
  (fn [connector retractor]
    ((connector 'forget) retractor)))

;; connect: connector constraint -> ?
;; verbindet einen Konnektor mit einem neuen constraint
(def connect
  (fn [connector new-constraint]
    ((connector 'connect) new-constraint)))
```

Lokale Hilfsfunktionen für `adder`

```
(process-new-value []
           (cond (and (has-value? a1) (has-value? a2))
                 (set-value! sum
                             (+ (get-value a1) (get-value a2))
                             me)

                 (and (has-value? a1) (has-value? sum))
                 (set-value! a2
                             (- (get-value sum) (get-value a1))
                             me)

                 (and (has-value? a2) (has-value? sum))
                 (set-value! a1
                             (- (get-value sum) (get-value a2))
                             me)))
```

```
(process-forget-value []
           (forget-value! sum me)
           (forget-value! a1 me)
           (forget-value! a2 me)
           (process-new-value))
```

Struktur des `multiplier`

```
(def multiplier
  (fn [m1 m2 product]
    (letfn [(process-new-value [] ...)
            (process-forget-value [] ...)
            (me [request]
              (cond (= request 'I-have-a-value)  (process-new-value)
                    (= request 'I-lost-my-value) (process-forget-value)
                    :else
                    (throw (Exception. "Unknown request -- MULTIPLIER" request))))]
      (connect m1 me)
      (connect m2 me)
      (connect product me)
      me)))
```

Lokale Hilfsfunktionen für `multiplier`

```
(process-new-value []
              (cond (or (and (has-value? m1) (= (get-value m1) 0))
                        (and (has-value? m2) (= (get-value m2) 0)))
                    (set-value! product 0 me)

                    (and (has-value? m1) (has-value? m2))
                    (set-value! product
                                (* (get-value m1) (get-value m2))
                                me)

                    (and (has-value? product) (has-value? m1))
                    (set-value! m2
                                (/ (get-value product) (get-value m1))
                                me)

                    (and (has-value? product) (has-value? m2))
                    (set-value! m1
                                (/ (get-value product) (get-value m2))
                                me)))

(process-forget-value []
              (forget-value! product me)
              (forget-value! m1 me)
              (forget-value! m2 me)
              (process-new-value))
```

Der Konstantenerzeuger

```
(def constant
   (fn [value connector]
    (letfn
        [(me [request]
           (throw (Exception. "Unknown request -- CONSTANT" request)))]
      (connect connector me)
      (set-value! connector value me)
      me)))
```

- setzt den Wert des angegebenen Konnektors.
- Nachrichten `I-have-a-value` oder `I-lost-my-value` sind unzulässig.

Der Messfühler

Der Messfühler gibt beim Setzen bzw. Vergessen des Wertes des mit ihm verbundenen Konnektors einen Text aus.

```
(def probe
  (fn [name connector]
    (letfn
        [(print-probe [value]
           (println "Probe: " name " = " value))
         (process-new-value []
           (print-probe (get-value connector)))
         (process-forget-value []
           (print-probe "?"))
         (me [request]
           (cond
             (= request 'I-have-a-value) (process-new-value)
             (= request 'I-lost-my-value) (process-forget-value)
             :else (throw (Exception. "Unknown request -- PROBE" request))))]
      (connect connector me)
      me)))
```

Konnektoren

- Ein Konnektor wird als Prozedur mit drei lokalen Zustandsvariablen und vier lokalen Prozeduren definiert:

  ```
  (def make-connector
    (fn []
      (let [value (atom false) informant (atom false) constraints  (atom '())]
        (letfn [ ... ]
          me))))
  ```

  value repäsentiert den aktuellen Wert des Konnektors,

  informant repräsentiert das Objekt, das den Wert gesetzt hat,

  constraints enthält die Liste der Constraint-Elemente, mit denen der Konnektor verbunden ist und die bei Änderungen seines Wertes informiert werden müssen.

`make-connector -- set-my-value`

```
(set-my-value [newval setter]
                (cond (not (has-value? me))
                      (do (reset! value newval)
                          (reset! informant setter)
                          (for-each-except setter
                                           inform-about-value
                                           constraints))
                      (not (= @value newval))
                      (throw (Exception. (str "Contradiction" (list @value newval))))
                      :else 'ignored))
```

- Wird aufgerufen, wenn der Wert des Konnektors gesetzt werden soll.
- Wenn der Konnektor noch keinen Wert besitzt, wird er gesetzt und der Informant vermerkt.
- In diesem Fall werden alle verbundenen Constraint-Elemente (mit Ausnahme des Informanten) darüber informiert.

`make-connector -- forget-my-value`

```
(forget-my-value [retractor]
                 (if (= retractor @informant)
                   (do (reset! informant false)
                       (for-each-except retractor
                                        inform-about-no-value
                                        constraints))
                   'ignored))
```

- Wird aufgerufen, wenn ein der Wert des Konnektors vergessen werden soll.
- Hier wird geprüft, ob diese Anforderung von demselben Objekt stammt, das das Setzen des Wertes angefordert hat.
- In diesem Fall werden alle verbundenen Constraint-Elemente (mit Ausnahme des Informanten) darüber informiert.

`make-connector -- connect`

```
(connect [new-constraint]
                 (if (not (in? @constraints new-constraint ))
                   (swap! constraints conj new-constraint))
                 (if (has-value? me)
                   (inform-about-value new-constraint))
                 'done)
```

- fügt, das neue Constraint-Element der Liste der verbundenen Constraint-Elemente hinzu, falls es dort noch nicht enthalten ist.
- Wenn der Konnektor einen Wert besitzt, wird das neue Constraint-Element darüber informiert.

`make-connector -- me`

```
(me [request]
                 (cond
                   (= request 'has-value?) (if @informant true false)
                   (= request 'value)      value
                   (= request 'set-value!) set-my-value
                   (= request 'forget)     forget-my-value
                   (= request 'connect)    connect
                   :else (throw (Exception. "Unknown operation -- CONNECTOR"
                                            request))))
```

- Dient als Verteiler für die anderen lokalen Prozduren.

Hilfsprozeduren

- Es fehlen jetzt noch die Prozeduren:
  - `for-each-except`
  - `inform-about-value`
  - `inform-about-no-value`

Iterator `for-each-except`

```
(def for-each-except
  (fn [exception procedure list]
    (letfn
        [(loop [items]
           (cond
             (empty? items) 'done
```

```
            (= (first items) exception) (loop (rest items))
            :else (do (procedure (first items))
                      (loop (rest items)))))]
    (loop @list)))
```

- Führt auf allen Elementen einer Liste die Prozedur `procedure` aus, mit Ausnahme des Elements `exception`.

`inform-about-...`

```
(def inform-about-value
  (fn [constraint]
    (constraint 'I-have-a-value)))

(def inform-about-no-value
  (fn [constraint]
    (constraint 'I-lost-my-value)))
```

- Dienen lediglich der besseren Lesbarkeit des Programms.
- „Syntaktische" Prozeduren

Constraint solving mit SWI-Prolog

Die clpr-Library erlaubt die Verwendung eines Constraint-Lösers für nicht-endliche Wertebereiche.

Darlehensberechnung

- Berechnung von Annuitäten-Darlehen (Beispiel entnommen aus [FA10])
- Bedeutung der Größen:

  D: Höhe des Darlehens

  T: Laufzeit in Monaten

  Z: Zins pro Monat

  R: Höhe der monatlichen Rate

  S: Restschuld nach der Laufzeit T

Lösung SWI-Prolog

```
:- use_module(library(clpr)).
darlehen(D, T, Z, R, S) :- {T=0, D=S}.
   % nach 0 Monaten ist die Restschuld gleich der Darlehenshöhe
darlehen(D, T, Z, R, S) :- {T>0, T1 = T-1, D1 = D + D*Z - R},
        darlehen(D1, T1, Z, R, S).
   % nach einem Monat werden die Laufzeit und die Darlehenshöhe reduziert.
```

Fragen:

- `darlehen(100000,360,0.01,1025,S).` liefert `S=12625.90`).
- `darlehen(D,360,0.01,1025,0).` liefert `D=99648.79`.
- `{S=<0}, darlehen(100000,T,0.01,1025,S).` liefert `T=374, S=-807`.
- `darlehen(D,360,0.01,R,0).` sollte `R=0.0102861198*D` liefern.

Der Celsius-Fahrenheit-Konverter

```
:- use_module(library(clpr)).
cf(C, F) :- {9*C=5*(F-32)}.
```

Anwendungen:

```
?- cf(25,F).
F = 77.0

?- cf(C, 77).
C = 25.0
```

Literaturverzeichnis

Literatur

[ASS99] Harold Abelson, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. *Structure and interpretation of computer programs*. The MIT Press, 1999.

[FA10] Thom Frühwirth and Slim Abdennadher. *Essentials of Constraint Programming (Cognitive Technologies)*. Springer, 2010.