Constraint-Programmierung – Grundlagen

Programmierparadigmen

Johannes Brauer

2. Juli 2020

Ziele

- Kennenlernen grundlegender Begriffe der Constraint-Programmierung
- die zwei wichtigsten Lösungsverfahren in Constraint-Systemen unterscheiden können

Einstieg

Hier verwendete und weiterführende Literatur:

- [FA10]
- [MS98]
- [Bar99]
- [ASS99]
- [Car98]

Begriff

- Die Constraint-Programmierung wird meist als eine Spielart der logischen Programmierung angesehen.
- Der Begriff *constraint* bedeutet in etwa *Bedingung*, *Einschränkung*, (*Regel?*).
- Man könnte auch von regelbasierter Programmierung sprechen.
- Regeln können in verschiedenen Formen auftreten:
  - funktional orientiert: mathematische Gleichungen; Beispiel: $x - y = 23$
  - logik-orientiert: logische Prädikate bzw. Wenn-dann-Regeln; Beispiel: Gesucht ist die Zahl x, die ein Zahlenschloss mit den Ziffern 0 bis 9 öffnet. Wir wissen, dass x
    - ≥ 5,
    - eine Primzahl ist
  - Regel: $x \in 0, 1, \ldots, 9 \wedge x \geq 5 \wedge prime(x)$

Prinzip

- In der regelbasierten Programmierung wird ein ein Satz von Regeln (constraints) angegeben, denen die Lösung genügen muss.
- Es wird **kein** Algorithmus formuliert, der die Lösung Schritt für Schritt ermittelt.
- Ein regelbasiertes Programmiersystem muss daher über einen eingebauten Lösungsalgorithmus (Constraint-Löser) verfügen.
- Dieser versucht – vereinfacht gesprochen – einen Weltzustand zu finden, in dem möglichst viele der angegebenen Regeln gleichzeitig erfüllt sind.

- Mit der Gleichung $x - y = 23$ als einziger Regel, wird der Constraint-Löser wohl sagen müssen, dass die Regel durch unendlich viele Belegungen von x und y erfüllt werden kann.
- Fügt man als zweite Regel $2x + 13 = y$ hinzu, gibt es nur noch eine Lösung.

Anwendungen

- Verarbeitung natürlicher Sprachen
- Datenbanksysteme (Konsistenzsicherung)
- Operations Research (Optimierungsprobleme)
- Ökonomie (Optionshandel)
- Layout-Berechnung für integrierte Schaltungen
- Erstellung von Stundenplänen
- Entscheidungsunterstützungssysteme für Planung und Konfiguration
- Kommerzielle Anwendungsbeispiele nach [FA10]
  - Lufthansa: Short-term staff planning.
  - Renault: Short-term production planning.
  - Nokia: Software configuration for mobile phones.
  - Airbus: Cabin layout.
  - Siemens: Circuit verification.

Contstraints im Straßenverkehr

Combination

Simplification


Contradiction

Redundancy

[FA10]

Holy Grail of programming

> Constraint Programming represents one of the closest approaches computer science has yet made to the Holy Grail of programming: the user states the problem, the computer solves it.
>
> [E. Freuder]

Begriffsdefinitionen

Einschränkung (*constraint*)

- Eine *Einschränkung* (*constraint*) stellt eine Beziehung zwischen verschiedenen Unbekannten (Variablen) her. Jede Variable kann Werte aus einem gegebenen Wertebereich (*domain*) annehmen.
- Eine Einschränkung beschreibt gegebenes Wissen über die Werte der Variablen.
- Eine Einschränkung beschreibt, welche Beziehung gelten muss, ohne eine Berechnungsprozedur dafür anzugeben, wie die Einhaltung der Beziehung erzwungen werden kann.
- Beispiel aus dem täglichen Leben: Terminabsprachen

Erfüllbarkeit (*satisfiability*)

erfüllbar: Es existiert eine Lösung für die Einschränkungen.

nicht erfüllbar: Es existiert **keine** Lösung für die Einschränkungen.

$X \leq 3 \wedge Y = X + 1$	erfüllbar
$X \leq 3 \wedge Y = X + 1 \wedge Y \geq 6$	nicht erfüllbar

Lösungsverfahren

- Zwei Lösungsstrategien
  - *constraint satisfaction*
  - *constraint solving*
- Constraint-satisfaction behandelt Probleme über endlichen Wertemengen. Schätzungsweise mehr als 95% aller industriellen CP-Anwendungen benutzen endliche Domänen.
- Constraint-solving behandelt Probleme über nicht endlichen Wertebereichen.
- Während beim Constraint-satisfaction kombinatorische Methoden zum Einsatz kommen, werden beim Constraint-solving mathematisch-analytische Verfahren benutzt (Differentiation, Integration, Taylor-Reihen etc.).

Constraint-satisfaction

Prinzip

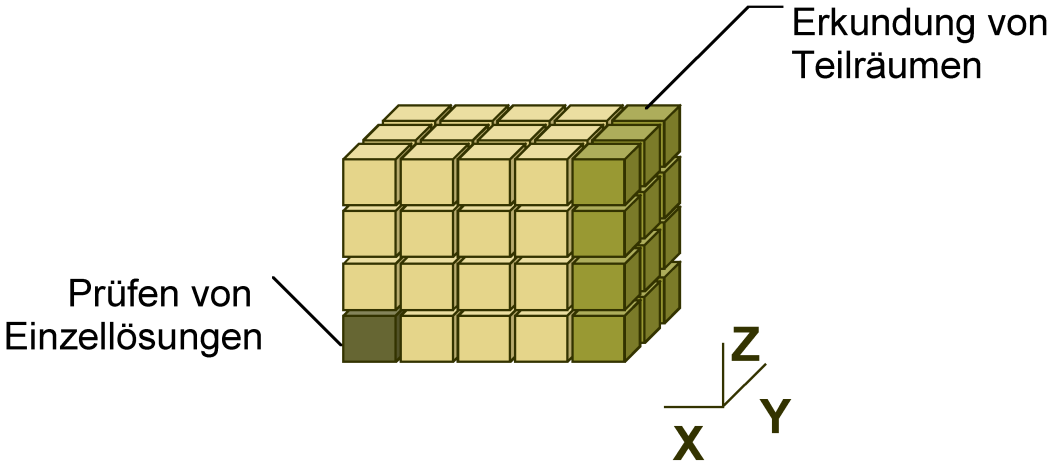
- Ein Constraint-satisfaction-Problem (CSP) wird definiert durch:
  - eine Menge von Variable $X = \{x_1, ..., x_n\}$,
  - für jede Variable x_i, eine endliche Menge D_i möglicher Werte (Domäne)
  - eine Menge von Einschränkungen (constraints), die Werte, die die Variablen gleichzeitig annehmen können, einschränken

  Beispiel:
  $$X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2\}, Z = \{1, 2\}$$
  $$X = Y, X \neq Z, Y > Z$$
- Lösung eines CSP: Belegung jeder Variablen mit einem Wert aus ihrer Menge, so dass alle Einschränkungen erfüllt sind.

  Beispiel: $X = 2, Y = 2, Z = 1$

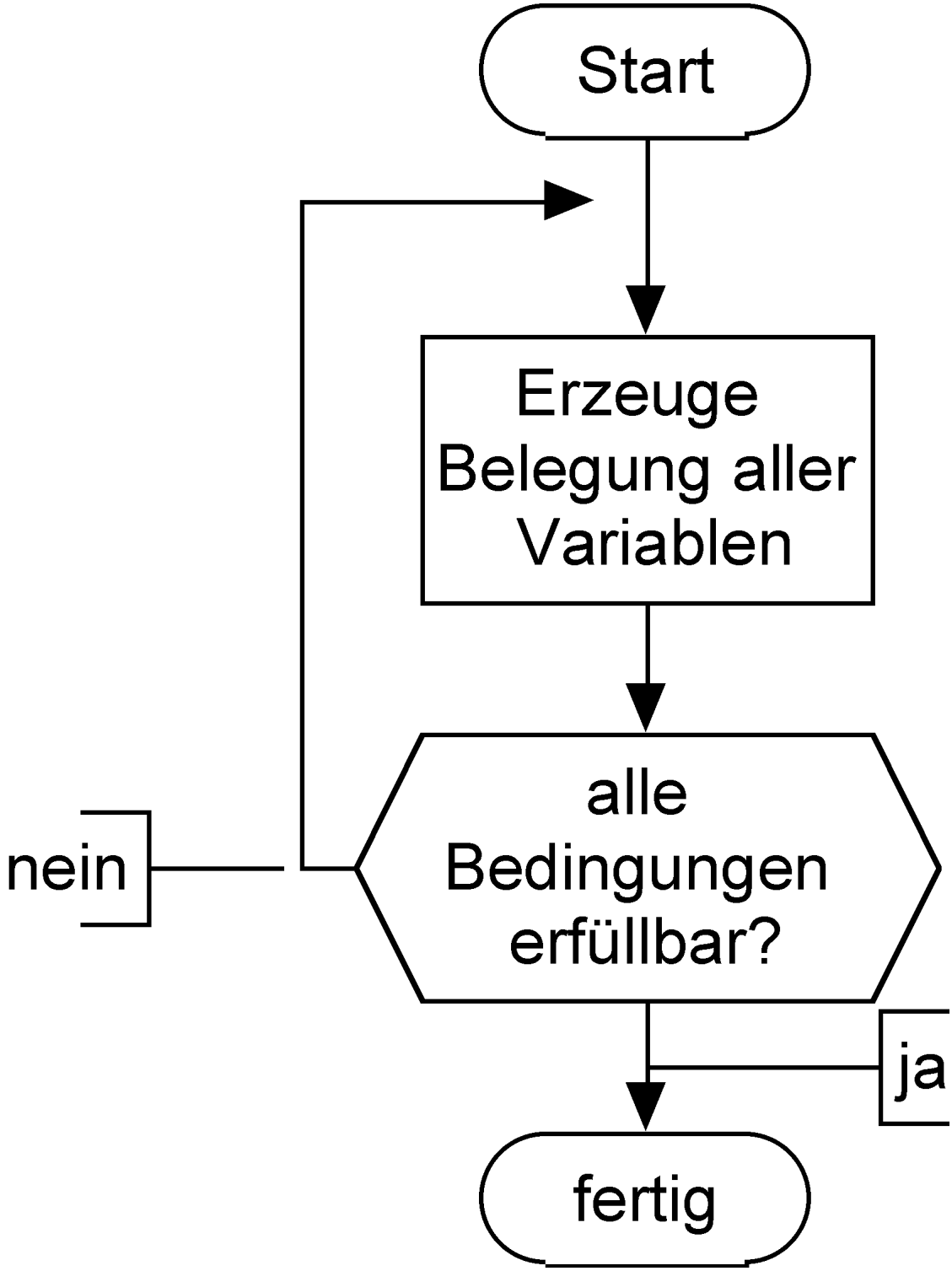
Systematische Suche

- Grundsätzlich kann ein CSP durch systematisches Durchsuchen des Lösungsraums gelöst werden.
- Ein solches Verfahren ist simpel aber ineffizient.
- Zwei Varianten:
  - *Generate & Test* (GT): Eine Belegung aller Variablen wird erzeugt und geprüft.
  - *Backtracking* (BT): Schrittweise Erweiterung korrekter Teillösungen zur Gesamtlösung.



Generate & Test

- Grundlegendes Verfahren zur Lösung von CSPs
- Algorithmus:

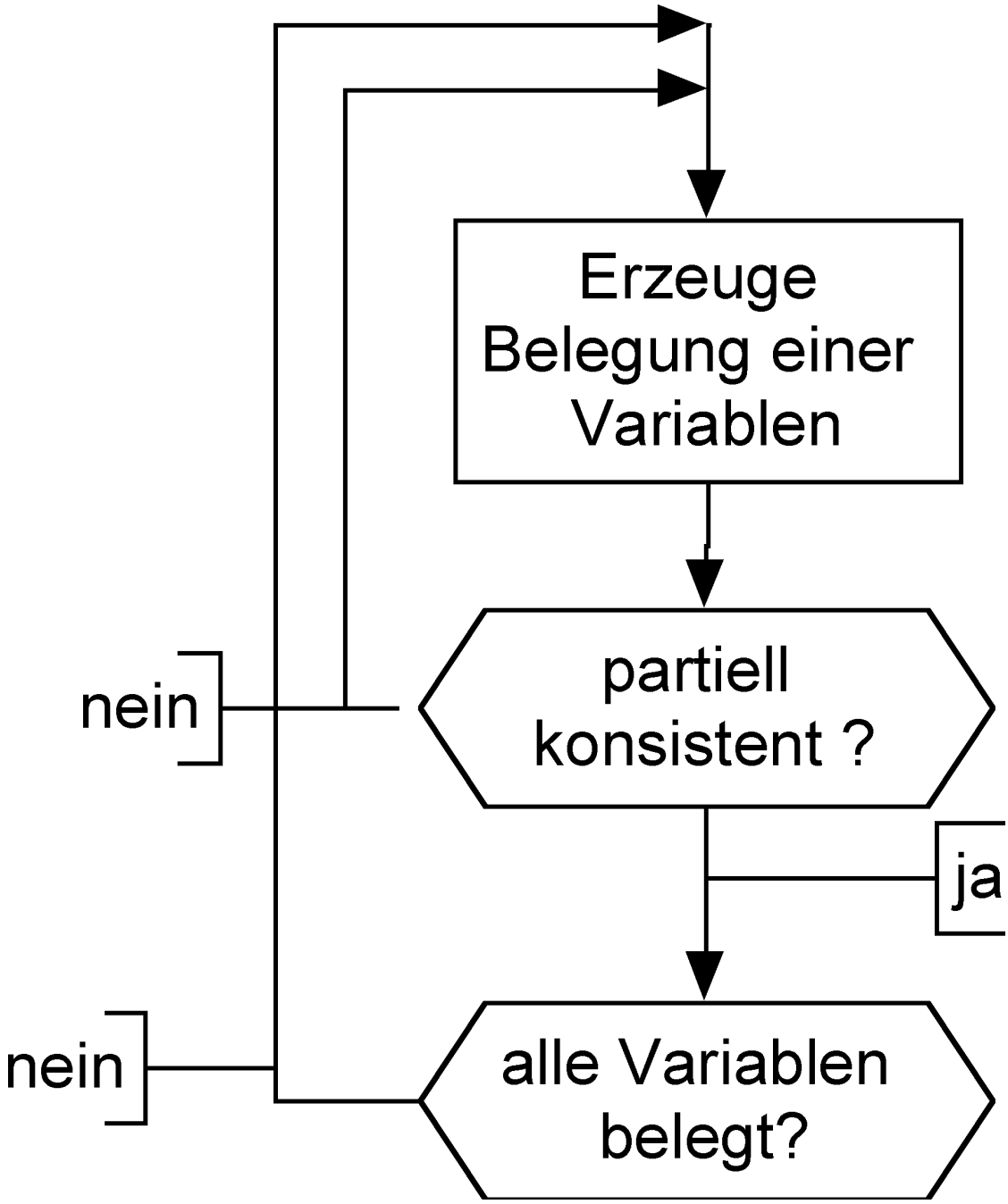


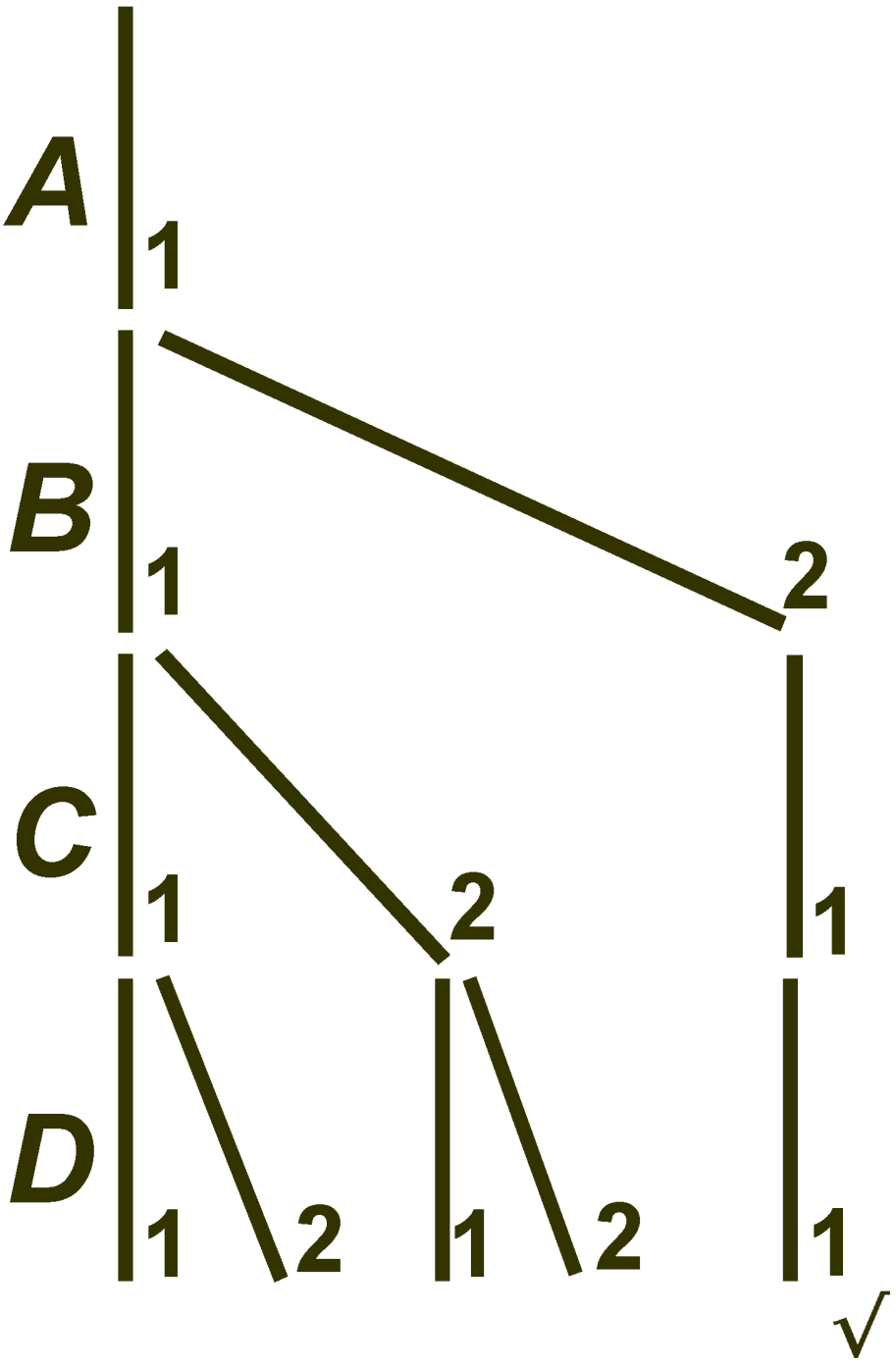
Nachteile:

- dummer Generator
- Nichterfüllbarkeit wird spät erkannt.

Backtracking

- Partielle Lösung wird schrittweise zur vollständigen erweitert.
- Algorithmus (vereinfacht):


Erzeuge Belegung einer Variablen
partiell konsistent ?
nein
ja
alle Variablen belegt?
nein



$$A = D,\ B \neq D,\ A+C < 4$$

- Nachteile:
  - *thrashing,* d.h. wiederholte Fehlbelegung
  - Nichterfüllbarkeit wird spät erkannt.

Anwendungsbeispiel für GT und BT

Aufgabenstellung:

$$X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2\}, Z = \{1, 2\}$$
$$X = Y, X \neq Z, Y > Z$$

Generate & Test

X	Y	Z	Prüfung
1	1	1	fehlgeschlagen
1	1	2	fehlgeschlagen
1	2	1	fehlgeschlagen
1	2	2	fehlgeschlagen
2	1	1	fehlgeschlagen
2	1	2	fehlgeschlagen
2	2	1	erfüllt

Backtracking

X	Y	Z	Prüfung
1	1	1	fehlgeschlagen
		2	fehlgeschlagen
	2		fehlgeschlagen
2	1		fehlgeschlagen
	2	1	erfüllt

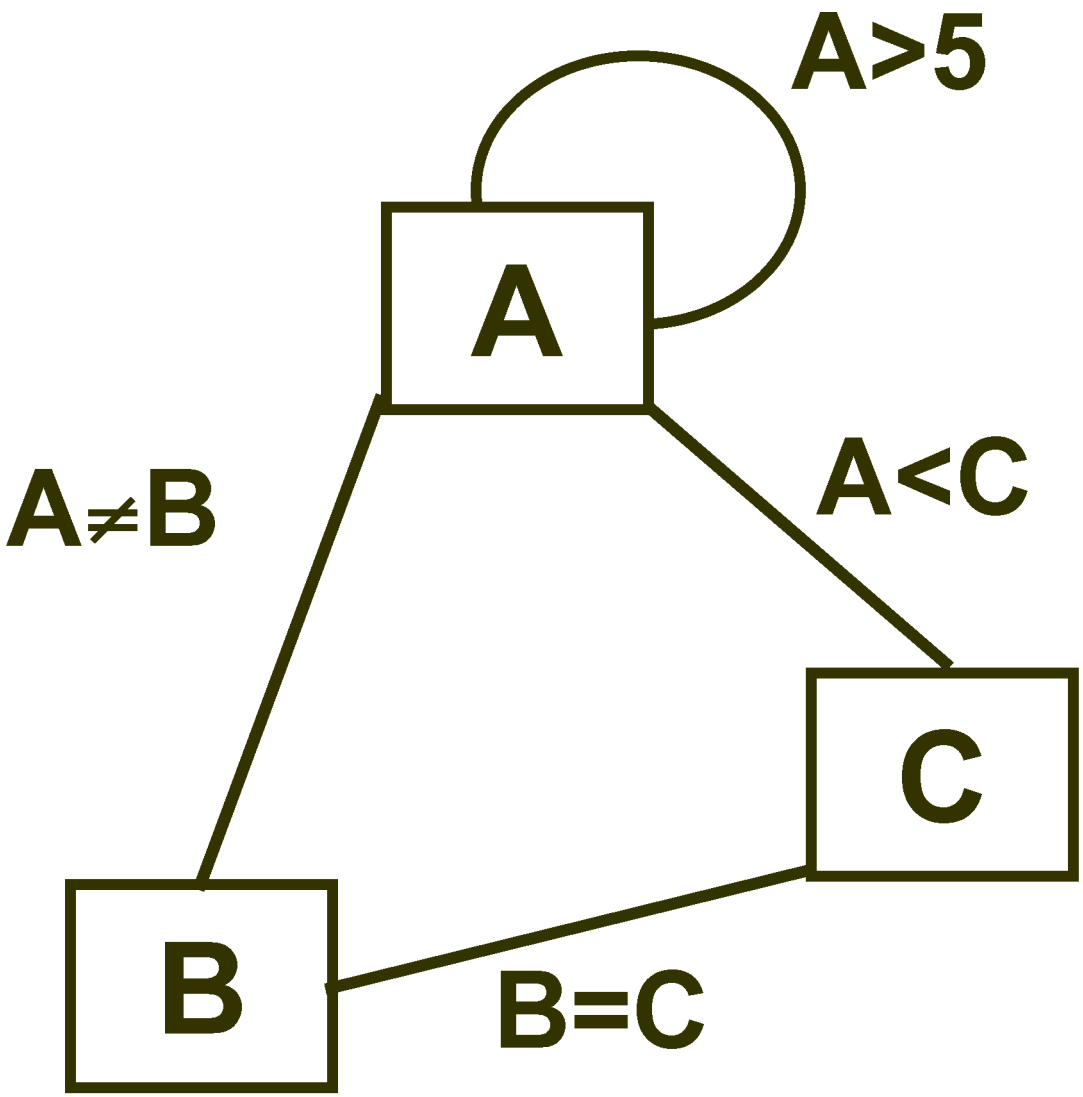
Optimierungen der systematischen Suche

- Grundidee: Entfernung von inkonsistenten Werten aus der Wertemenge einer Variablen
- Repräsentation von binären und unären Einschränkungen durch Graphen:

Knoten Variablen

Kanten Einschränkungen

- Prüfung der
  - Knotenkonsistenz (Entfernung von Werten im Widerspruch zu unären Einschränkungen)
  - Kantenkonsistenz (dito für binäre Einschränkungen)
  - Pfadkonsistenz



- Optimierung der Suche nach wie vor Forschungsgegenstand

Constraint logic programming

- Bei Constraint-satisfaction-Verfahren gibt es Anknüpfungspunkte zur logischen Programmierung.
- Daher wird in diesem Zusammenhang auch häufig der Begriff *constraint logic programming* (CLP) benutzt.
- Für Beispiele der Constraint-logic-Programmierung gibt es ein eigenes Kapitel.
- Zuvor betrachten wird Techniken des Constraint-solvings.

Constraint-solving

- Konstruktion eines Constraint-solvers
- Constraint-solving mit Prolog

Literaturverzeichnis

Literatur

[ASS99] Harold Abelson, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. *Structure and interpretation of computer programs*. The MIT Press, 1999.

[Bar99] Roman Bartàk. Constraint programming: In pursuit of the holy grail. In *In Proceedings of the Week of Doctoral Students (WDS99 -invited lecture*, pages 555–564, 1999.

[Car98] Manuel Carro. An introductory course on constraint logic programming, 1998. zuletzt aufgerufen am 10.09.2017.

[FA10] Thom Frühwirth and Slim Abdennadher. *Essentials of Constraint Programming (Cognitive Technologies)*. Springer, 2010.

[MS98] Kimbal Marriott and Peter Stuckey. *Programming with Constraints: An Introduction*. The MIT Press, 1998.