Curso: Estadística

Sesión 3: Variables aleatorias discretas y valor esperado

Lic. Jose O. Henao M.[1]

[1]Economista / Investigador del Programa Internacional de Democracia Sociedad y Nuevas Economías (PIDESONE)
Universidad Surcolombiana / Universidad de Buenos Aires

Año lectivo: 2020

Contenido

Variable Aleatoria: Es una regla bien definida para asignar valores numéricos a todos los resultados posibles de un experimento.

Una **Variable Aleatoria** es una regla mediante la cual a cada uno de los esultados de un experimento se le asocia un número.

Una vez especificado un experimento y sus resultados, puede señalarse la **probabilidad de ocurrencia** de cualquier valor de la variable aleatoria.

Por ejemplo:
140 estudiantes inscriptos distribuidos en 4 secciones.

Sección	Números de alumnos
1	25
2	45
3	40
4	30
Total	140

Se reconoce que el espacio muestral es discreto y finito. La probabilidad de que el lector sea asignado a cualquiera de las secciones está dada por $\mathbf{P(x)}$.

La probabilidad de que sea asignado a la sección 1 la denotaremos por **P(x=1)** o **P(1)**, por lo tanto tenemos que:

$$P(1) = \frac{25}{140} = 0,179$$

Aplicando para todas las secciones tenemos la distribución de probabilidad para x.

Sección	Números de alumnos	P(x)
1	25	$P(1) = \frac{25}{140} = 0,179$
2	45	$P(2) = \frac{45}{140} = 0,321$
3	40	$P(3) = \frac{40}{140} = 0,286$
4	30	$P(4) = \frac{30}{140} = 0,214$
Total	140	1,000

Una distribución de probabilidades que incluye solamente valores discretos de x suele llamarse función de masa de probabilidad.

Se describe a través de las siguientes tres formas:

- mediante una gráfica de distribución de probabilidades
- mediante una tabla de valores
- mediante una formula.

Función de masa corresponde a todos los resultados asociados con el valor de una variable aleatoria discreta, o la altura que indica la probabilidad de ese valor.

$$\textbf{Función de masa de probabilidad} = \textbf{frecuencia relativa}$$

Función de Masa de Probabilidad

f.m.p. (Parte 2)

Propiedad 1

$$0 \leq P(\mathbf{x} = x) \leq 1$$

Propiedad 2

$$0 \leq \sum_{Todo\, x}^{k} P(x) = 1,0$$

Función de Masa Acumulada

f.m.a.

Corresponde a la suma de todos los valores de la función de masa de probabilidad correspondientes a todos los valores de la variable aleatoria x que son menores o iguales a x.

f.m.a.

$$F(x_0) = P(x \leq x_0) = \sum_{x \leq x_0}^{x_0} P(x)$$

El valor esperado de una variable aleatoria discreta x se obtiene multiplicando cada valor de la varible aleatoria por su correspondiente probabilidad, y sumando luego todos estos productos

Valor esperado de x o media ponderada

$$\mu = E\left[x\right] = \sum_{Todo\, x}^{k} xP(x)$$

Respecto a una función g(x), puede definirse a través de la siguiente manera:

Valor esperado de g(x)

$$E\left[g(x)\right] = \sum_{Todo\, x}^{k} g(x)P(x)$$

Valores Esperados

Varianza y desviación de una variable aleatoria (Parte 1)

La varianza de una población se define como e promedio de los cuadrados de las desviaciones de los valores poblacionales respecto a su media (μ).

La varianza de una variable aleatoria como el valor esperado del cuadrado de las desviaciones de los valores de x respecto a su valor esperado (E[x]).

Varianza de x

$$V\left[x\right] = \sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_{Todo\ x}^{k} (x-\mu)^2 P(x)$$

Desviación estandar de x

$$\sigma = \sqrt{V\left[x\right]}$$

Ejemplo:

x	1	2	4	6	12
P(x)	0,08	0,27	0,10	0,33	0,22

El valor esperado es: $\mathrm{E}[x] = \mu = 5,64$

La varianza es:

$$V[x] = \sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_1^{12}(x-5,64)^2 P(x)$$

$$V[x] = (1-5,64)^2 0,08 + (2-5,64)^2 0,27 + (4-5,64)^2 0,10 + (6-5,64)^2 0,33 + (12-5,64)^2 0,22$$

$$V[x] = 14,51$$

La desviación estandar es: $\sigma = \sqrt{14,51} = 3,81$

Valores Esperados

Varianza y desviación de una variable aleatoria (Parte 3)

Varianza de x (Forma equivalente

$$V[x] = \sigma^2 = E\left[x^2\right] - (E[x])^2$$

Es posible demostarse la igualdad entre la definición de varianza y su forma equivalente.

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_{Todo\,x}^{k}(x-\mu)^2 P(x)$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{k}(x-\mu)^2 P(x)$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{k}(x^2 - 2x\mu + \mu^2)P(x)$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{k} x^2 P(x) - 2\mu\sum_{i=1}^{k} xP(x) + \mu^2\sum_{i=1}^{k} P(x)$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2\right] - 2\mu E[x] + \mu^2$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2\right] + (-2+1)(E[x])^2$$

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2\right] - (E[x])^2$$

Estandarización de la variable x

La estandarización de $z = (x - \mu)/\sigma$ transforma cualquier variable x en una nueva variable z, que tiene media cero y varianza uno.

Demostración de que $E\left[z\right] = 0$:

$$E\left[(x-\mu)/\sigma\right] = \frac{E[(x-\mu)]}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x-\mu)P(x)}{\sigma}$$

$$E\left[z\right] = \frac{\sum_{i=1}^{k} xP(x) - \mu\sum_{i=1}^{k} P(x)}{\sigma}$$

$$E\left[z\right] = \frac{(\mu-\mu)}{\sigma} = 0$$

Demostración de que $V[z] = 1$:

$$V[z] = V[(x-\mu)/\sigma] = \left[E\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - 0\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$V[z] = E\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$V[z] = \frac{1}{\sigma^2}E\left[(x-\mu)^2\right]$$

$$V[z] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

Reglas de la esperanza

Reglas (Parte 1)

Regla 1

El valor esperado de una constante es la misma constante.

$$E[k] = k$$

Regla 2

La varianza de una constante es cero.

$$V[k] = 0$$

Reglas de la esperanza

Reglas (Parte 2)

Regla 3

El valor esperado del producto de una constant por una variable es igual al producto de lla constante por el valor esperado de la variable.

$$E\left[kx\right] = kE\left[x\right]$$

Regla 4

La varianza del producto de una constante por una variabl es igual al producto del cuadrado de la constante por la varianza de la variable.

$$V\left[kx\right] = k^2 V\left[x\right]$$

Reglas de la esperanza

Reglas (Parte 3)

Regla 5

El valor esperado de (a+bx) [o de (a-bx)] es igual a a más (o menos) b por la esperanza de x.

$$E\left[a \pm bx\right] = a \pm bE\left[x\right]$$

Regla 6

La varianza de (a + bx) [o (a-bx)] es igual a b^2 por la varianza de x.

$$V\left[a \pm bx\right] = b^2 V\left[x\right]$$

Funciones de Probabilidad Bivariable

Función de probabilidad conjunta

Esta función para dos variables aleatorias x e y se denota por el simbolo $P(x, y)$, siendo $P(x, y) = P(\mathbf{x} = x \, e \, \mathbf{y} = y)$. Es decir, que representa la probabilidad de que **x** tome el valor x e **y** tome el valor y.

Propiedad 1

$$0 \leq P(x, y) \leq 1$$

Propiedad 2

$$\sum_{Todo\, y} \sum_{Todo\, x} P(x, y) = 1$$

Es analoga a la función de masa acumulada de una variable aleatoria simple. Esta función se denota por $F(x, y)$ y se define como:

Función de masa conjunta acumulada

$$F(x, y) = P(\mathbf{x} \leq x \, e \, \mathbf{y} \leq y)$$

Prob. marginal de **x***:*

$$P_x(x) = \sum_{Todo\, y} P(x, y)$$

Prob. marginal de **y***:*

$$P_y(y) = \sum_{Todo\, x} P(x, y)$$

Funciones de Probabilidad Bivariable

Probabilidad condicional

Prob. condicional de **x**, *dado* **y**:

$$P_{x|y}\left(x \mid y\right) = P\left(\mathbf{x} = x \mid \mathbf{y} = y\right) = \frac{P(x,y)}{P_y(y)}$$

Prob. condicional de **y**, *dado* **x**:

$$P_{x|y}\left(y \mid x\right) = P\left(\mathbf{y} = y \mid \mathbf{x} = x\right) = \frac{P(x,y)}{P_x(x)}$$

Para que dos variabls aleatorias sean independientes cada uno de los valores de probabilidd conjunta debe ser igual al producto de los correspondientes valores de las probabilidades marginales.

Prob. conjunta de **x** *e* **y** *son independientes:*

$$P(x, y) = P_x(x)\, P_y(y)$$

Esperanzas Bivariables

Los conceptos de media y varianza peden utilizarse a problemas bivariables. Suponemos una función g(x,y) una función de dos variables aleatorias x e y.

Valor esperado g(x,y):

$$E\left[g\left(x,y\right)\right]=\sum_{Todo\ y}\sum_{Todo\ x}g\left(x,y\right)P\left(x,y\right)$$

Ejemplo, sea la siguiente función g:

$$g\left(x,y\right)=x.y$$

Por lo tanto, el valor esperado de esta función es:

$$E\left[x.y\right]=\sum_{y}\sum_{x}\left(x.y\right)P\left(x,y\right)$$

Esperanza de x.y cuando x e y son independientes

Esperanza de x.y cuando hay independencia:

$$E\left[x.y\right] = E\left[x\right] E\left[y\right]$$

Se denota por $C[x, y]$. La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de la forma en que varían conjuntamente (la forma en que covarían). Si llamamos

$$\mu_x = E[x] \quad y \quad \mu_y = E[y]$$

Covarianza de x e y:

$$C[x, y] = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$$

Formula equivalente para la Covarianza de x e y:

$$C[x, y] = E[x.y] - E[x]\,E[y]$$

Esperanzas Bivariables

Experanza de ax+by

Corresponde a otro caso especial de $E\left[g\left(x,y\right)\right]$ que tiene importancia práctica cuando se presenta

$$g\left(x,y\right)=ax+by$$

donde a y b son constantes

Valor sperado de (ax+by):

$$E\left[ax+by\right]=\sum_{Todo\ y}\sum_{Todo\ x}\left(ax+by\right)P\left(x,y\right)$$

$$E\left[ax+by\right]=aE\left[x\right]+bE\left[y\right]$$

Esperanzas Bivariables

Varianza de (ax+by):

$$V\left[ax+by\right]=a^2V\left[x\right]+b^2V\left[y\right]+2abC\left[x,y\right]$$

Independencia: Caso especial para variables aleatorias x e y

$$V\left[ax+by\right]=a^2V\left[x\right]+b^2V\left[y\right]$$

Tab. Fórmulas de Esperanzas Bivariables

Función	Fórmulas	Caso Especial de independencia
1. Media de (x.y)	$E\left[x.y\right] = \sum\sum\left(x.y\right)P\left(x,y\right)$	E$[x]\,.E\left[y\right]$
2. Covarianza de (x e y)	$C\left[x,y\right] = E\left[x.y\right] - E\left[x\right]E\left[y\right]$	0
3. Media de (ax+by)	$E\left[ax+by\right] = aE\left[x\right] + bE\left[y\right]$	No cambia
4. Varianza de (ax+by)	$V\left[ax+by\right] = a^2V\left[x\right] + b^2V\left[y\right]$ $+2$ab C$[x,y]$	a$^2V\left[x\right] + b^2V\left[y\right]$

Ejercicios de este capítulo

Hacer click en la imagen y esta lo llevará a mi página web:

Bibliografía I

Harnett, D. & Murphy, J.,
Introducción al análisis estadístico.
Cap. 3.
href

George C. Canavos,
Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y métodos.
Cap. 4.