PRIMERA PARTE

Ejercicio 4.1. De un conjunto muy grande de productos de cierta clase se seleccionan seis al azar. Si el 40% de los productos son defectuosos, ¿Cuál es la probabilidad de que no más de cuatro de los seis artículos seleccionados sean defectuosos?

Solución:

En base al ejercicio tenemos la siguiente información

$n = 6$	$p = 40\%$	$¿P(x \leq 4)?$

$$P(x \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

Utilizando la Tabla I (página 657 a 667), ubicándonos en n=5 (ver página 659) en la columna 40 (40%) y en la fila 0 a fila 4 podemos obtener los resultados que acontinuación se presentan:

$$P(x \leq 4) = 0{,}0467 + 0{,}1866 + 0{,}3110 + 0{,}2765 + 0{,}1382$$

$$P(x \leq 4) = 0{,}9590$$

Ejercicio 4.2. Se ha establecido que un caza bombardeo acertará en el blando las ¾ partes de las veces. Supóngase que los tácticos militares quieren destruir cierta área de importancia crucial. Si se envían cinco aviones a atacar el área, una vez cada uno, ¿Cuál es la probabilidad de que el objetivo sea alcanzado dos o más veces? Supóngase que hay independencia entre los ataques de los diferentes aviones.

Solución:

$n = 5$	$p = {}^{3}/_{4} = 75\%$	$¿P(x \geq 2)?$

$$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$P(x \geq 2) = 0{,}0879 + 0{,}2637 + 0{,}3955 + 0{,}2373$$

$$P(x \geq 2) = 0{,}9844$$

Ejercicio 4.3. Supóngase que cierta empresa presenta propuestas para un proyecto de construcción, y que siempre hay otras cuatro compañías interesadas en lo mismo. Supóngase que la probabilidad a largo término de que esta firma haga la propuesta más baja es de 1/5. ¿Cuál es la probabilidad es la probabilidad de que esta empresa obtenga el contrato, por haber presentado la propuesta más baja, exactamente en dos de los cuatro proyectos siguientes?

Solución:

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

$n = 4$	$p = {}^{1}/_{5} = 20\%$	$¿P(x = 2)?$

$$P(x = 2) = P(2)$$

$$P(x = 2) = 0{,}1536$$

Ejercicio 4.4. Si 2/3 de los estudiantes de cierta universidad pertenecen a la división inferior (alumnos de los dos primeros años), ¿Cuál es la probabilidad de que entre cinco estudiantes elegidos al azar haya exactamente tres estudiantes en la división inferior?

Solución:

$n = 5$	$p = {}^{2}/_{3} = 66\%$	$¿P(x = 3)?$

$$P(x = 3) = P(3)$$

$$P(x = 3) = 0{,}3323$$

Ejercicio 4.5. Resuelva los siguientes ítems

a) Hágase una gráfica de la f.m.p. binomial y de la f.m.a. binomial para n=8 y p=0,40 (Utilícese Tabla I).
b) ¿Cuál es el valor de P(x=7) en la distribución anterior? ¿Cuál es el valor de P(x>=7)?
c) Hállese la media y la varianza de la distribución.

Solución:

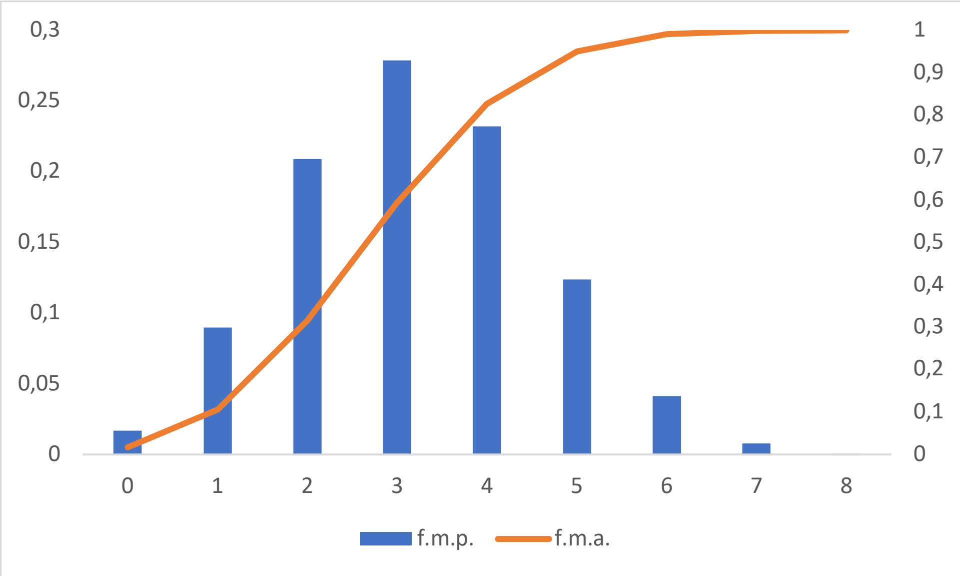
a) Teniendo en cuenta que:

$n = 8$	$p = 40\%$	$q = 60\%$

Utilizando la Tabla I (con n=8,p=40 y cada x aquí detallado) tenemos

x	f.m.p.	f.m.a.
0	0.0168	0.0168
1	0.0896	0.1064
2	0.2090	0.3154
3	0.2787	0.5941
4	0.2322	0.8263
5	0.1239	0.9502
6	0.0413	0.9915
7	0.0079	0.9993
8	0.0007	1.0000

Graficando tenemos:



b) Teniendo en cuenta que requerimos encontrar el valor de P(x=7) y P(x>=7) tenemos:

$$P(x = 7) = P(7)$$

$$P(x = 7) = 0{,}0079$$

$$P(x \geq 7) = P(7) + P(8)$$

$$P(x \geq 7) = 0{,}0079 + 0{,}0007$$

$$P(x \geq 7) = 0{,}0085$$

c) Hallar la media, varianza y desvío

Por definiciones desarrolladas en el capítulo tenemos que:

$$\mu = n.p = 8(0{,}4) = 3{,}2$$

$$\sigma^2 = V[x] = 8\,(0{,}4)(0{,}6) = 1{,}92$$

$$\sigma = \sqrt{V[x]} = \sqrt{8\,(0{,}4)(0{,}6)} = 1{,}3856$$

Ejercicio 4.6. Utilícese la fórmula (4.1) para determinar la función de masa binomial con los parámetros n=5, =0,50. Verifíquese la respuesta con la tabla I. Dibújense la función de masa y la función acumulativa correspondiente a estos parámetros.

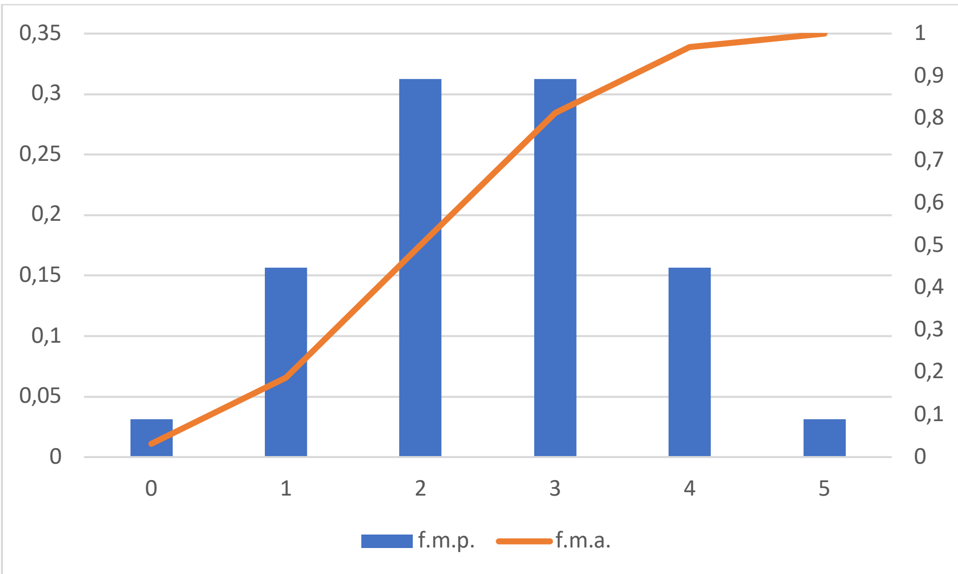
Solución:

x	${}_nC_x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$	P^x	q^{n-x}	$f.m.p$ $({}_nC_x p^x q^{n-x})$
0	${}_5C_0 = \frac{5!}{0!\,5!} = 1$	1.00	0.03	0.0313
1	${}_5C_1 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$	0.50	0.06	0.1563
2	${}_5C_2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$	0.25	0.13	0.3125
3	${}_5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	0.13	0.25	0.3125
4	${}_5C_4 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	0.06	0.50	0.1563
5	${}_5C_5 = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$	0.03	1.00	0.0313

Utilizando la Tabla I (con n=5,p=50 y cada x aquí detallado) tenemos:

x	f.m.p.	f.m.a.
0	0.0313	0.0313
1	0.1563	0.1875
2	0.3125	0.5000
3	0.3125	0.8125
4	0.1563	0.9688
5	0.0313	1.0000

Graficando tenemos:



Ejercicio 4.7. Las encuestas efectuadas previamente indican que el 40% de los alumnos de último año de cierta universidad tienen automóvil. Supóngase que se seleccionan al azar (con reposición) seis de estos alumnos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro tengan automóvil propio?

$n = 6$	$p = 40\%$	$¿P(x = 4)?$

$$P(x = 4) = P(4)$$
$$P(x = 4) = 0{,}1382$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno tenga automóvil propio?

$n = 6$	$p = 40\%$	$¿P(x \geq 1)?$

$$P(x \geq 4) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$
$$P(x \geq 4) = 0{,}1866 + 0{,}3110 + 0{,}2765 + 0{,}1382 + 0{,}0369 + 0{,}0041$$
$$P(x \geq 4) = 0{,}9533$$

c) ¿Cuál es la media teórica de la distribución de probabilidades que estamos considerando?

$n = 6$	$p = 40\%$	$q = 1 - p = 60\%$

$$\mu = n.p = 6(0{,}4) = 2{,}4$$

$$\sigma^2 = V[x] = 6\ (0{,}4)(0{,}6) = 1{,}44$$

$$\sigma = \sqrt{V[x]} = \sqrt{6\ (0{,}4)(0{,}6)} = 1{,}2$$

Ejercicio 4.8. Hállense la media y la desviación estándar de una variable aleatoria binomial que se general al efectuar 12 pruebas en cada una de las cuales la probabilidad de éxito es igual a 1/3.

Solución:

$n = 12$	$p = 33\%$	$q = 1 - p = 67\%$

$$\mu = n.p = 12(0{,}33) = 3{,}96$$

$$\sigma^2 = V[x] = 12\ (0{,}33)(0{,}67) = 2{,}6532$$

$$\sigma = \sqrt{V[x]} = \sqrt{12\ (0{,}33)(0{,}67)} = 1{,}6288$$

Ejercicio 4.9. En 900 lanzamientos de un dado, ¿Cuántas veces cabría esperar que salga un número inferior a tres?

Solución:

$n = 900$	$p = 1/3$	$¿P(x < 3)?$

$$P(x < 3) = 1/3$$

$$\mu = n.p = 900(1/3) = 300$$

Se esperaría que salga 300 veces un número menor a 3.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Ejercicio 4.20. Se pide al decano de la facultad de administración de empresas de cierta universidad que seleccione tres estudiantes para integrar determinado comité. Se presentan como voluntarios 20 estudiantes de primer año y 30 de segundo. Si del total de 50 voluntarios el decano selecciona al azar a los tres estudiantes requeridos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos uno de primer año y dos de segundo año?

Solución:

Por definición tenemos la siguiente información

$N_1 = 20$	$x_1 = 1$	$N_2 = 30$	$x_2 = 2$	$¿P(1\ año_1\ y\ 2\ año_2)?$

$$P(1\ año_1\ y\ 2\ año_2) = \frac{(\ _{20}C_1)(\ _{30}C_2)}{(\ _{50}C_3)}$$

$$P(1\ año_1\ y\ 2\ año_2) = \frac{\left(^{20!}/_{1!\,(19!)}\right)\left(^{30!}/_{2!\,(28!)}\right)}{\left(^{50!}/_{3!\,(47!)}\right)}$$

$$P(1\ año_1\ y\ 2\ año_2) = 0{,}4438$$

Ejercicio 4.21. Un aficionado al póquer desea calcular la probabilidad de obtener las manos siguientes:

a) Un "full" formado por 3 ases y 2 reyes

$N_1 = 4$	$x_1 = 3$	$N_2 = 4$	$x_2 = 2$	$¿P(3\ ases\ y\ 2\ reyes)?$

$$P(3\ ases\ y\ 2\ reyes) = \frac{(\ _4C_3)(\ _4C_2)}{(\ _{52}C_5)}$$

$$P(3\ ases\ y\ 2\ reyes) = \frac{\left(^{4!}/_{3!\,(1!)}\right)\left(^{4!}/_{2!\,(2!)}\right)}{\left(^{52!}/_{5!\,(47!)}\right)}$$

$$P(3\ ases\ y\ 2\ reyes) = 0{,}00000923$$

b) Un "póquer" formado por 4 ases y 1 rey

$N_1 = 4$	$x_1 = 4$	$N_2 = 4$	$x_2 = 1$	$¿P(4\ ases\ y\ 1\ rey)?$

$$P(4\ ases\ y\ 1\ rey) = \frac{(\ _4C_4)(\ _4C_1)}{(\ _{52}C_5)}$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

$$P(4\,ases\ y\ 1\,rey) = \frac{\left(\frac{4!}{4!\,(0!)}\right)\left(\frac{4!}{1!\,(3!)}\right)}{\left(\frac{52!}{5!\,(47!)}\right)}$$

$$P(4\,ases\ y\ 1\,rey) = 0{,}00000154$$

c) Un "póquer" formado por 4 ases y otra carta

$N_1 = 4$	$x_1 = 4$	$N_2 = 48$	$x_2 = 1$	¿$P(4\,ases\ y\ otra\ carta)$?

$$P(4\,ases\ y\ otra\ carta) = \frac{(\,_4C_4)(\,_{48}C_1)}{(\,_{52}C_5)}$$

$$P(4\,ases\ y\ otra\ carta) = \frac{\left(\frac{4!}{4!\,(0!)}\right)\left(\frac{48!}{1!\,(47!)}\right)}{\left(\frac{52!}{5!\,(47!)}\right)}$$

$$P(4\,ases\ y\ otra\ carta) = 0{,}000018$$

Ejercicio 4.22. El entrenador de una universidad tiene que decidir la conformación inicial del equipo de baloncesto para un encuentro con ora universidad. Puede elegir entre 3 defensas, 2 centros y 4 delanteros. Si hace la elección al azar, sin tener en cuenta la posición (lo que no es el procedimiento normal), ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo quede conformado por 2 defensas, 1 centro y 2 delanteros?

$N = 9$	$x = 5$	$p = 0{,}55$	$q = 0{,}45$	¿$P(2\,defensas, 1\,centro\ y\ 2\,delanteros)$?

$$P(2\,def, 1\,centro\ y\ 2\,del) = \,_9C_5\ 0{,}55^5 0{,}45^4 = \left(\frac{9!}{5!\,(4!)}\right)(0{,}55^5)(0{,}45^4) = 0{,}26$$

Ejercicio 4.23. Supóngase qué de un grupo formado por 10 personas, de las que cinco son republicanas y otras cinco demócratas han de elegirse seis personas para integrar un comité.

a) Si la elección se hace al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que en el comité haya tres republicanos y tres demócratas?

$N_1 = 5$	$x_1 = 3$	$N_2 = 5$	$x_2 = 3$	¿$P(2\,rep\ y\ 3\,dem)$?

$$P(2\,rep\ y\ 3\,dem) = \frac{(\,_5C_3)(\,_5C_3)}{(\,_{10}C_6)}$$

$$P(2\,rep\ y\ 3\,dem) = \frac{\left(\frac{5!}{3!\,(2!)}\right)\left(\frac{5!}{3!\,(2!)}\right)}{\left(\frac{10!}{6!\,(4!)}\right)}$$

$$P(2\,rep\ y\ 3\,dem) = 0{,}47619$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

b) ¿Y la probabilidad de que la mayoría de los integrantes del comité sean demócratas?

$N_1 = 5$	$x_1 = 4$	$N_2 = 5$	$x_2 = 2$	$¿P(\geq 4\ dem)?$

$$P(\geq 4\ dem) = \frac{(\ _5C_4)(\ _5C_2)}{(\ _{10}C_6)}$$

$$P(\geq 4\ dem) = \frac{\left(5!/_{4!\,(1!)}\right)\left(5!/_{2!\,(3!)}\right)}{\left(10!/_{6!\,(4!)}\right)}$$

$$P(\geq 4\ dem) = 0{,}2619$$

Ejercicio 4.24. Los productores de la aspirina marca B hicieron una encuesta entre 10 de 100 médicos seleccionados al azar en una población numerosa. Si el 50% de estos 100 médicos prefieren realmente la marca B. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la encuesta indique que “9 de los 10 médicos encuestados prefieren la marca B”?

$N_1 = 10$	$x_1 = 9$	$N_2 = 90$	$x_2 = 1$	$¿P(9\ de\ 10\ prefieren\ B)?$

$$P(9\ de\ 10\ prefieren\ B) = \frac{(\ _{10}C_9)(\ _{90}C_1)}{(\ _{100}C_{10})}$$

$$P(9\ de\ 10\ prefieren\ B) = \frac{\left(10!/_{9!\,(1!)}\right)\left(90!/_{1!\,(89!)}\right)}{\left(100!/_{10!\,(90!)}\right)}$$

$$P(9\ de\ 10\ prefieren\ B) = 0{,}00000000005199$$

Ejercicio 4.25. El Ministerio de Obras Públicas anuncia que dará una subvención a cuatro universidades diferentes para el estudio de los accidentes de tránsito. Para obtener dicha subvención se presentan 20 universidades. Si entre ellas están las de Madrid, Barcelona y Sevilla, ¿Cuál es la probabilidad de que estas tres universidades obtengan la subvención, suponiendo que la elección se hace de modo aleatorio?

$N_1 = 4$	$x_1 = 3$	$N_2 = 16$	$x_2 = 1$	$¿P(3\ univ.reciben\ y\ 1\ univ.no)?$

$$P(3\ univ.reciben\ y\ 1\ univ.no) = \frac{(\ _4C_3)(\ _{16}C_1)}{(\ _{20}C_4)}$$

$$P(3\ univ.reciben\ y\ 1\ univ.no) = \frac{\left(4!/_{3!\,(1!)}\right)\left(16!/_{1!\,(15!)}\right)}{\left(20!/_{4!\,(16!)}\right)}$$

$$P(3\ univ.reciben\ y\ 1\ univ.no) = 0{,}0132$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

TERCERA PARTE

Ejercicio 4.33. En un aeropuerto se acarrea un promedio de 8,5 unidades de equipaje por minuto, y el proceso sigue una distribución de Poisson. Hállese la probabilidad de que se transporte 10 unidades de equipaje en determinado minuto.

$\lambda = 8{,}5$	$x = 10$	$¿P(10\ unid\ por\ min)?$

$$P(10\ unid\ por\ min) = \frac{e^{-8{,}5} 8{,}5^{10}}{10!} = 0{,}1103$$

Ejercicio 4.34. Supóngase que, en un proceso de manufactura textil, se ha encontrado un promedio de 2 defectos por cada 10 metros de tela. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza determinada de 10 metros tenga 0 o 1 fallas, si el número de defectos sigue una distribución de Poisson?

$\lambda = 10$	$x = 0, 1$	$¿P(10\ metros\ tenga\ 0\ o\ 1\ fallas)?$

$$P(10\ metros\ tenga\ 0\ o\ 1\ fallas) = P(0) + P(1)$$

$$P(10\ metros\ tenga\ 0\ o\ 1\ fallas) = \frac{e^{-10} 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} 10^1}{1!}$$

$$P(10\ metros\ tenga\ 0\ o\ 1\ fallas) = 0{,}0000453 + 0{,}000453 = 0{,}0004992$$

Ejercicio 4.35. Supóngase que las llamadas a una central telefónica llegan con un promedio de 2,3 por minuto y siguen la distribución de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que en determinado minuto se produzcan exactamente 2 llamadas?

$\lambda = 2{,}3$	$x = 2$	$¿P(2\ llamadas\ por\ minuto)?$

$$P(2\ llamadas\ por\ minuto) = \frac{e^{-2{,}3} 2{,}3^2}{2!}$$

$$P(2\ llamadas\ por\ minuto) = 0{,}2651$$

Ejercicio 4.36. Utilícese la fórmula (4.5) para determinar las probabilidades asociadas con la distribución de Poisson para $\lambda = 2$. Dibújese la distribución de masa y la distribución acumulada. Verifíquese las respuestas por medio de la tabla II de apéndice B. ¿Cuáles son la media y varianza de esta distribución?

$$Formula\ 4.5 = P(x = x)\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & para\ x = 0,1,2, \ldots \infty, \qquad \lambda > 0 \\ 0 \end{cases}$$

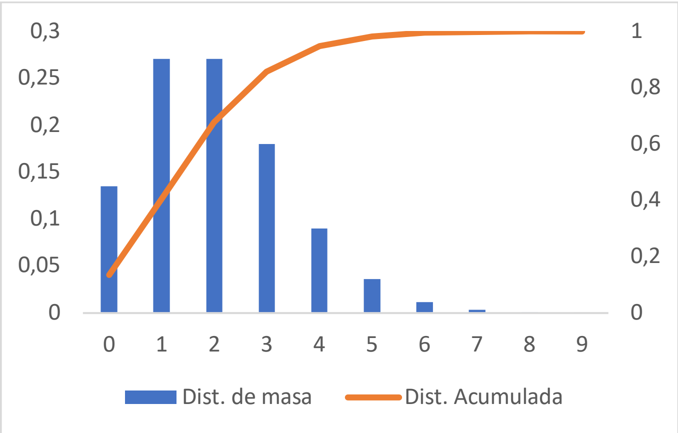
Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Utilizando la formula descrita anteriormente, tenemos con $\lambda = 2$:

x	$\lambda = 2$ Dist. Poisson
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0120
7	0.0034
8	0.0009
9	0.0002
10	0.0000
11	0.0000
12	0.0000
13	0.0000
14	0.0000

Verificando los resultados en la Tabla II. Distribución Poisson tenemos

x	Dist. de masa	Dist. Acumulada
0	0.1353	0.1353
1	0.2707	0.406
2	0.2707	0.6767
3	0.1804	0.8571
4	0.0902	0.9473
5	0.0361	0.9834
6	0.0120	0.9954
7	0.0034	0.9988
8	0.0009	0.9997
9	0.0002	1.0000



Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Finalmente, la media y varianza de esta distribución es:

Con los datos disponibles de la distribución de Poisson tenemos que,

x	f/n	x*f/n	x^2	$x^2 \frac{f}{n}$
0	0.1353	0	0	0
1	0.2707	0.2707	1	0.2707
2	0.2707	0.5414	4	1.0828
3	0.1804	0.5412	9	1.6236
4	0.0902	0.3608	16	1.4432
5	0.0361	0.1805	25	0.9025
6	0.012	0.072	36	0.432
7	0.0034	0.0238	49	0.1666
8	0.0009	0.00752	64	0.06016
9	0.0002	0.001899	81	0.017091
	Media	2.00	Suma	6.00

Así tenemos que:

$$media\ de\ Poisson:\ \mu = \lambda = 2$$

$$varianza\ de\ Poisson: \sigma^2 = \lambda = 6 - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

Siendo $\lambda = 2$ por definición del ejercicio, Lo que cumple en lo detallado en la formula 4.6 explicada en la página 180 del libro.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom