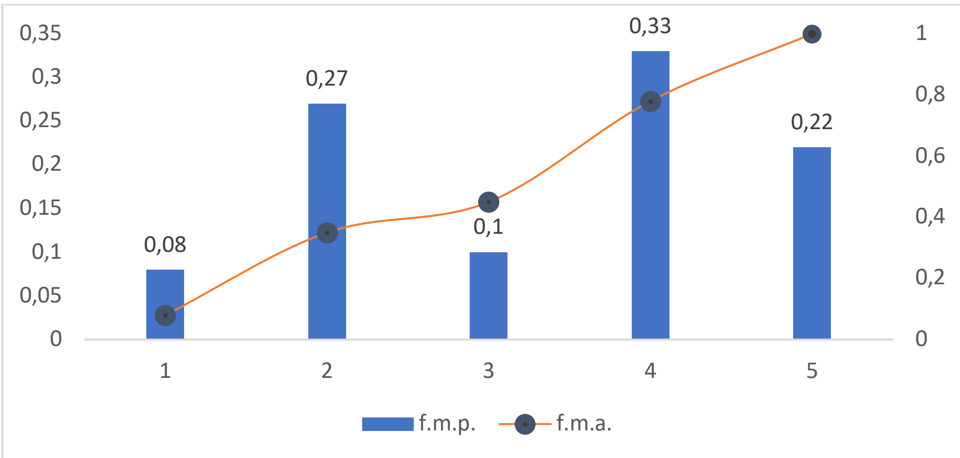
Ejercicio 3.1. Trácese la gráfica de la función de masa acumulada correspondiente a la variable aleatoria x del ejemplo de ventas de rosquillas, examinada anteriormente, donde x es el número de rosquillas vendidas a un cliente. Compárese la gráfica resultante de la figura 3.7, y explíquese las diferencias y las relaciones existentes entre ellas.

En la página 120 del libro de Harnet y Murphy presenta la tabla de f.m.p., en este ejemplo determina que la variable x es la venta de rosquillas (En unidades). En base a esta información obtenemos la f.m.a.:

x	f.m.p.	f.m.a.
1	0,08	0,08
2	0,27	0,35
4	0,10	0,45
6	0,33	0,78
12	0,22	1
$\sum P(x)$	1	

La gráfica entre f.m.p y f.m.a. es la siguiente:



Bien sabemos que la f.m.p. nos permite observar la distribución de probabilidades que incluye solamente valores discretos, pero solo aplica para observar la probabilidad elemento que compone la variable aleatoria de interés, por tanto, la Probabilidad de que se venda 1 rosquilla es del 8%. Por su lado la f.m.a. no determina la probabilidad acumulada que existe a medida que vamos analizando cada elemento que compone la variable aleatoria, por ejemplo, si es nuestro interés conocer cual es la probabilidad de que se venda al menos tres (3) rosquillas, la suma de probabilidad de 1, 2 y 3 rosquillas es de 45%. Cada una de estas funciones de masa nos permite responder diferentes preguntas sobre la probabilidad de ventas que existe en cada elemento de forma individual o colectiva.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Ejercicio 3.3. Resolver los siguientes puntos:

a) Calcúlese el valor esperado de los cinco valores siguientes: 7, 17, 16, 8, 2, suponiendo que les corresponden las probabilidades 1/3, ¼, 1/6; 1/12 y 1/6, respectivamente.

x	P(x)	x.P(x)
7	0,08	2,33
17	0,27	4,25
16	0,10	2,67
8	0,33	0,67
2	0,22	0,33
$\sum (Suma)$	1	10,25

$$\mu = E[x] = \sum xP(x) = 10,25$$

b) Hállese $E[x^2]$ para estos cinco valores, y uticense luego ese resultado y la respuesta obtenida en el apartado a) para hallar V[x].

x	x^2	$x^2P(x)$
7	49	16,33
17	289	72,25
16	256	42,67
8	64	5,33
2	4	0,67
$E[x^2]$		**137,25**

$$E[x^2] = \sum x^2P(x) = 137,25$$

x	$(E[x])^2$	$(E[x])^2P(x)$
7	105,06	35,02
17		26,27
16		17,51
8		8,76
2		17,51
$E[\mu^2]$		**105,06**

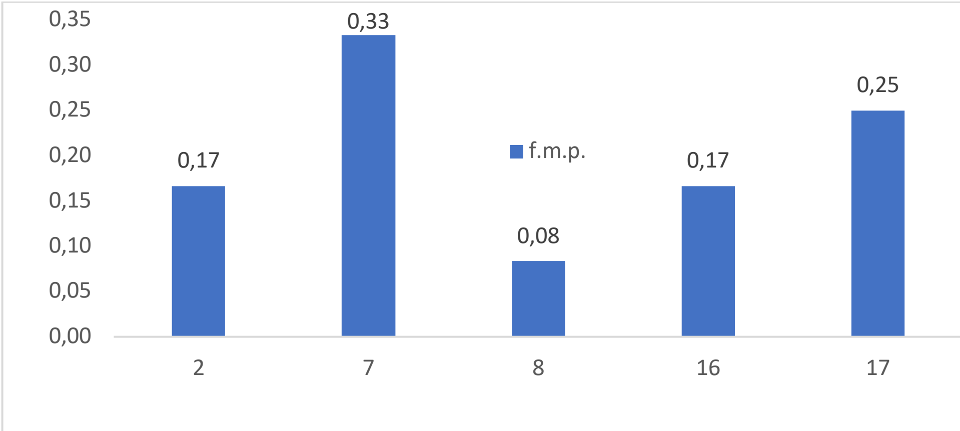
Hallar $V[x] = \mathrm{E}[\mathrm{x}^2] - (\mathrm{E}[\mathrm{x}])^2 = 137,25 - 105,06 = 32,19$

A los efectos de controlar el resultado utilizamos otro método de cálculo de la V[x]:

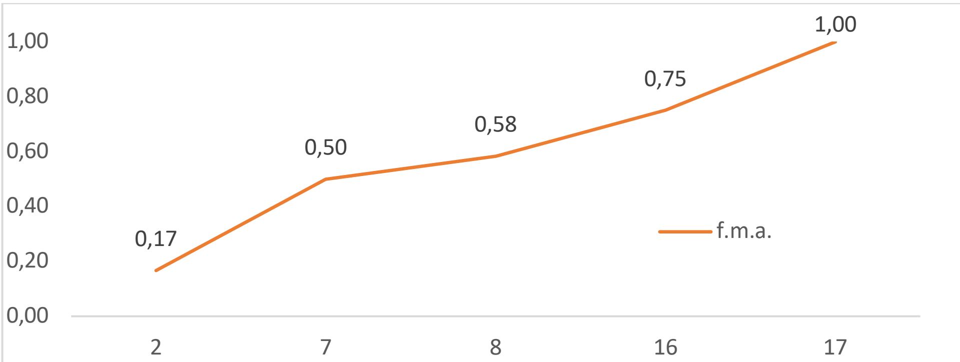
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2P(x)$
7	-3.25	10.5625	3.52083333
17	6.75	45.5625	11.390625
16	5.75	33.0625	5.51041667
8	-2.25	5.0625	0.421875
2	-8.25	68.0625	11.34375
$V[x]$			**32,19**

Ejercicio 3.4. Resolver los siguientes puntos:

a) Hágase la gráfica de f.m.p correspondiente al ejercicio 3.3.



b) Trácese la gráfica de la f.m.a. para el problema 3.3. ¿Qué probabilidad le corresponde a F(2,0), F(9,5) y F(17,0)?



- Para F(2,0) tenemos que la f.m.a es 17%.
- Para F(9,5) tenemos que la f.m.a es del 61% debido a que entre 8 a 16, cada unidad adicional corresponde 2,08%, por lo tanto, para 9,5 se requiere identificar la probabilidad que le corresponde 1,5 unidades adicionales por lo que se corresponde 3,1% adicional a la f.m.a. existente en el punto 8 con 58%, así obtenemos el valor.
- Para F(17,0) tenemos el 100%.

c) ¿Cumple la gráfica del apartado a) las dos condiciones que caracterizan a todas las funciones de probabilidad?

Conclusión: Si, se cumple las condiciones de que toda 0<=P(x)<=1 y la suma de las P(x)=1.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

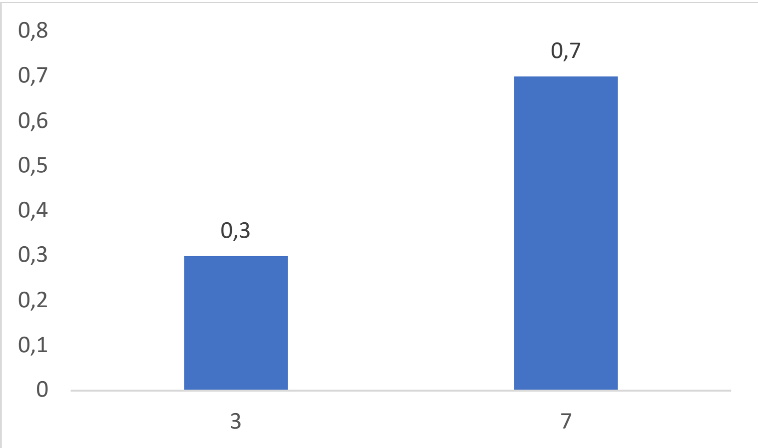
Ejercicio 3.5. Una urna contiene cinco cubos numerados del uno al cinco. Se extraen, sin reposición, muestras aleatorias de dos cubos. Se define una variable aleatoria de modo que sus valores sean iguales a la suma de los números correspondientes a los dos cubos que conforman cada muestra.

cubos
1
2
3
4
5

Se define las variables aleatorias como la suma de los números correspondientes a los dos cubos que conforman cada muestra:

Cubos utilizados	x	P(x)
1+2	3	0,3
3+4	7	0,7
Total	**10**	**1,0**

a) Hágase la gráfica de la distribución de probabilidades de esta variable aleatoria.



b) Hállase el valor esperado de esta variable aleatoria.

Cubos utilizados	x	P(x)	xP(x)
1+2	3	0.3	0.9
3+4	7	0.7	4.9
Total	**10**	μ	**6**

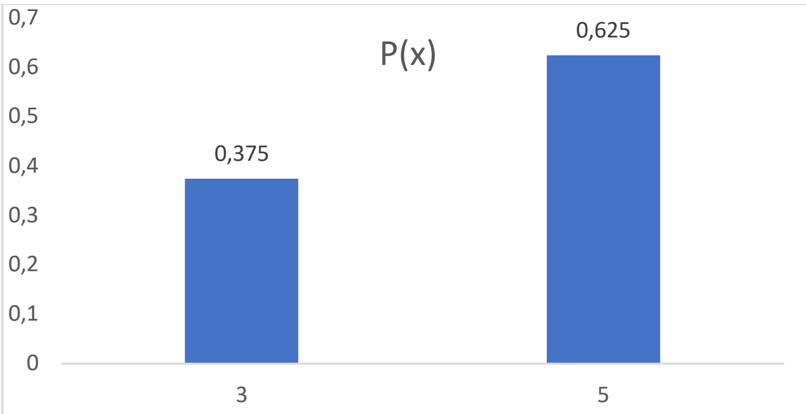
c) Determínese la desviación estándar de esta variable aleatoria.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 P(x)$	**Desvío**
7,84	2,352	
1,44	1,008	
V(x)	**3,36**	**1,83**

d) Supóngase que el experimento anterior se efectúa con reposición del cubo después de cada extracción. Hágase la gráfica de la nueva distribución de probabilidades.

Cubos utilizados	x	P(x)
1+2	3	0,375
2+3	5	0,625
Total	**8**	**1,0**



Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Ejercicio 3.6. Un profesor de estadística informa que en las calificaciones finales hay un 20% de notas A, un 30% de notas B, un 30% de notas C, un 10% de notas D y un 10% de notas F.

a) Si x es una variable aleatoria que toma el valor 4 cuando la nota es A, 3 cuando la nota es B, etc., ¿Cuál será su valor esperado?

Notas	**x**	**P(x)**	**F(x)**	**xP(x)**
A	4	0.2	0.2	0.8
B	3	0.3	0.5	0.9
C	2	0.3	0.8	0.6
D	1	0.1	0.9	0.1
E	0	0.1	1	0
	Suma	**1**	**Media**	**2.4**

La media es de 2,4 puntos las notas del curso de estadística.

b) Hállese V[x]

Notas	$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^2$	$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$
A	2.56	0.512
B	0.36	0.108
C	0.16	0.048
D	1.96	0.196
E	5.76	0.576
	Varianza	**1.44**

c) Calcúlese $\mu \pm \sigma$ y $\mu \pm 2\sigma$ para este problema. ¿Son cercanos a lo indicado por la regla práctica los porcentajes de valores de x que están dentro de estos intervalos?

El desvío estándar es $\sigma = \sqrt{1.44} = 1.2$

Por lo tanto, los intervalos y los porcentajes de probabilidad en el Intervalo:

Intervalo	***Porcentajes de probabilidad en el Intervalo***
$\mu \pm \sigma = 2.4 \pm 1.2 = 1.2\ a\ 3.6$	[0.3+0.3=0.6]
$\mu \pm 2\sigma = 2.4 \pm 2.4 = 0\ a\ 4.8$	[0.2+0.3+0.3+0.1+0.1=1.00]

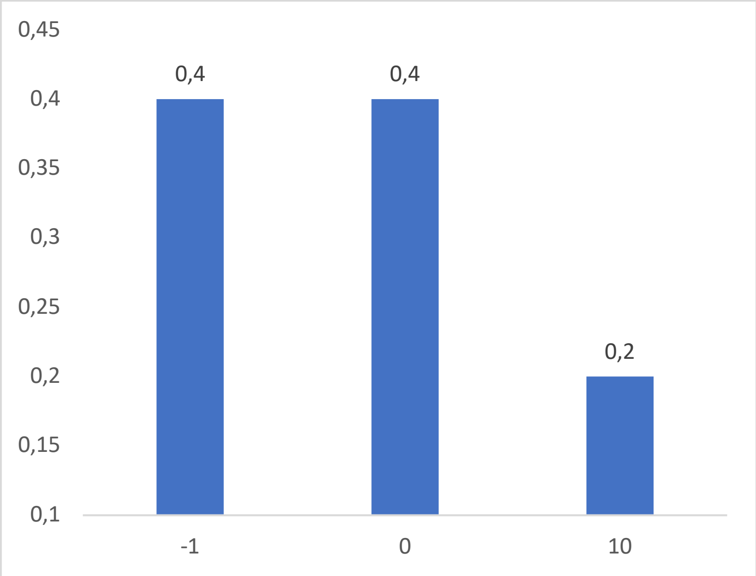
El segundo intervalo supera el valor de la nota máxima que los alumnos podrían recibir, ya que en este Intervalo el máximo es de 4.8, mientras que la nota máxima es de 4.0.

Ejercicio 3.7. Consideremos nuevamente el ejemplo de la prospección petrolífera de la sección 3.2.

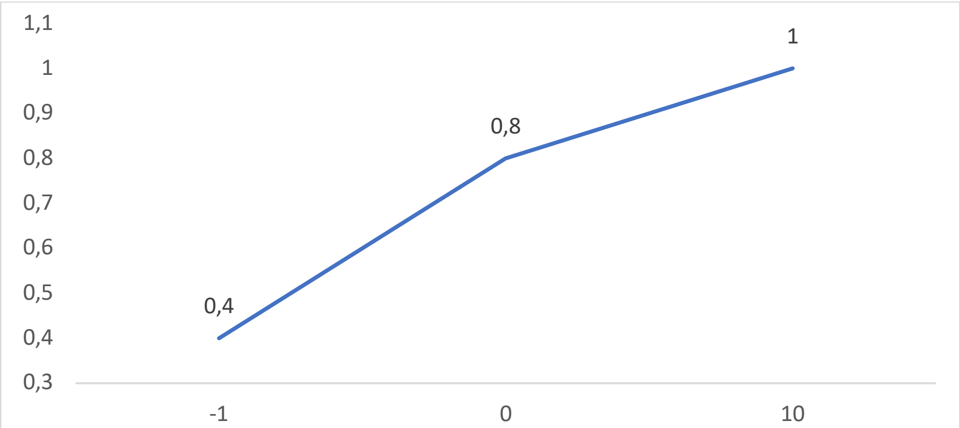
a) Dibújese la gráfica de la f.m.p. indicada en la tabla 3.4.

Este ejemplo desarrollado en la tabla 3.4. de la página 113 del libro de Harned y Murphy, nos permite identificar la siguiente información:

x	P(x)	F(x)
-1	0.4	0.4
0	0.4	0.8
10	0.2	1
Suma	**1**	



b) Hágase la gráfica de la f.m.a.
Basados en la información calculada en el punto anterior la f.m.a. es:



c) Hállase E[x] para esta variable.

x	P(x)	Media
-1	0.4	-0.4
0	0.4	0
10	0.2	2
	Media	**1.6**

d) Determínese V[x] usando primero la fórmula (3.4) y luego la (3.6).

Fórmula 3.4.

$$V[x] = \sum (x-\mu)^2 P(x)$$

x	**P(x)**	$(\boldsymbol{x-\mu})^2$	$(\boldsymbol{x-\mu})^2\boldsymbol{P(x)}$
-1	0.4	6.76	2.7
0	0.4	2.56	1.0
10	0.2	70.56	14.1
		Varianza	**17.84**

Fórmula 3.6.

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

<table>
<tr><th>x</th><th>P(x)</th><th>x^2</th><th>x^2P(x)</th><th>$(\boldsymbol{E[x]})^2$</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>0.4</td><td>1</td><td>0.4</td><td rowspan="3">2.56</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">0.2</td><td>100</td><td>20</td></tr>
<tr><td>$E[x^2]$</td><td>20.4</td><td></td></tr>
</table>

$$V[x] = 20.4 - 2.56 = 17.84$$

Ejercicio 3.19. Resuelva los siguientes puntos:

a) Dada una variable aleatoria x con media 10 y varianza 9, hállense el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $y = 12 + 2x$.

Sabemos que el valor esperado es igual a $E(x) \equiv \mu \equiv \sum xP(x)$.

A su vez, por definición del ejercicio sabemos que $\mu = 10 \therefore E(x) = 10$

La varianza de variables aleatorias $V[x] = \sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$, por definición del ejercicio abemos que $\sigma^2 = 9 \therefore V[x] = 9$. Ahora bien, dado que tenemos la siguiente variable aleatoria $y = 12 + 2x$.

Y teniendo en cuenta la Esperanza de una transformación lineal de la página 130 del libro de Harnett y Murphy tenemos;

$$E[y] = E[12 + 2x] = 12 + 2E[x] = 12 + 2(10)$$

$$E[12 + 2x] = 32$$

Finalmente, para la varianza tenemos

$$V[y] = V[12 + 2x] = 2^2 V[x] = 4 \times 9$$

$$V[12 + 2x] = 36$$

b) Se da una variable aleatoria x con E[x]=5 y V[X]=9, y otra variable aleatoria y con E[y]=10 y V[y]=25. Se sabe, además, que las variables x e y son independientes.

1. Calcúlese E[x.y], E[x+2y] y E[13-2x]

$$E[x.y] = E[x].E[y] = 5 \times 10 = 50$$

$$E[x + 2y] = E[x] + 2E[y] = 5 + 2(10) = 5 + 20 = 25$$

$$E[13 - 2x] = 13 - 2E[x] = 13 - 2(5) = 13 - 10 = 3$$

2. Hállense V[x-y], V[x+2y] y V[13-2x]

$V[x - y]$ por definición de independencia de la varianza desarrollada en la página 142 del libro de Harnett y Murphy tenemos que $V[x + y] = V[x - y]$, por lo tanto,

$$V[x + y] = V[x] + V[y] = 9 + 25 = 34$$

Ahora para resolver esta $V[x + 2y]$ requerimos previamente definir por independencia desarrollada en la página 142 de Harnett y Murphy donde $V[ax + by] = a^2V[x] + b^2V[y]$ por lo tanto,

$$V[x + 2y] = 1^2V[x] + 2^2V[y] = V[x] + 4V[y] = 9 + 2(25) = 9 + 100 = 109$$

Finalmente, para $V[13 + 2x] = V[k] + b^2V[x] = V[13] + 2^2V[x] = 0 + 4(9) = 36$

3. ¿Cuál es el valor de C[x,y]?

Por definición en la página 139 del libro de Harnett y Murphy tenemos que

$$C[x, y] = E[x.y] - E[x]E[y] = 50 - 50 = 0$$

Por independencia entre x e y.

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Ejercicio 3.20. Los datos de la tabla siguiente representan las ventas realizadas en los últimos cuatro años por una de las más grandes compañías de automóviles.

P(x)	**x**
0,250	2483000
0,250	2519000
0,250	2511000
0,250	2495000
1	**E[X]=?**

Por definición $E[x] = \sum x.P(x)$ por lo tanto,

P(x)	**x**	**x.P(x)**
0.25	2483000	620750
0.25	2519000	629750
0.25	2511000	627750
0.25	2495000	623750
	E[X]	**2502000**

a) Calcúlese los cuatro valores de y = a + bx, donde a = - 2500 y b = 1/1000.

$$y = -2500 + \left[\left(\frac{1}{1000}\right)(x)\right]$$

P(x)	**x**	**x.P(x)**	**Y=-2500+[(1/1000)x]**	**Y**
0.25	2483000	620750	$-2500 + \left[\left(\frac{1}{1000}\right)(2483000)\right]$	-17
0.25	2519000	629750	$-2500 + \left[\left(\frac{1}{1000}\right)(2519000)\right]$	19
0.25	2511000	627750	$-2500 + \left[\left(\frac{1}{1000}\right)(2511000)\right]$	11
0.25	2495000	623750	$-2500 + \left[\left(\frac{1}{1000}\right)(2495000)\right]$	-5
	E[X]	**2502000**		

b) Resuélvase E[x] determinando E[y] = E[a + bx]. Se obtiene el valor buscado despejando E[x] en la expresión correspondiente a la regla 5 de modo que

$$E[x] = \frac{E[a + bx] - a}{b}$$

Así tenemos que,

$$E[y] = a + bE[x] = -2500 + \left(\frac{1}{1000}\right)(2502000) = -2500 + 2502 = 2$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Entonces,

$$E[x] = \frac{2 + 2500}{1/1000} = 2502000$$

c) Calcúlese V[x] determinando V[a + bx], y despejando luego V[x] en la expresión correspondiente a la regla 6, de modo que

$$V[x] = \frac{V[a + bx]}{b^2}$$

Sabemos que, $V[a \pm bx] = b^2 V[x] = \left(\frac{1}{1000}\right)^2 V[x]$

Por otra parte, tenemos que para $V[x]$ necesitamos calcularla de la siguiente manera:

$V[x] = \sum (x - \mu)^2 \, P(x)$, ver página 129 del libro de Harnett y Murphy.

$\boldsymbol{(x-\mu)^2 P(x)}$	**Resultado**
$(2483000 - 2502000)^2 \times 0.25)$	90,250,000.00
$(2519000 - 2502000)^2 \times 0.25$	72,250,000.00
$(2511000 - 2502000)^2 \times 0.25$	20,250,000.00
$(2495000 - 2502000)^2 \times 0.25$	12,250,000.00
$\boldsymbol{V[x] = \sum (x-\mu)^2 \, P(x)}$	**195,000,000.00**

Así estamos en condiciones de calcular

$$V[a \pm bx] = b^2 V[x] = \left(\frac{1}{1000}\right)^2 (195000000) = 195$$

Finalmente probamos la formula

$$V[x] = \frac{V[a + bx]}{b^2}$$

$$V[x] = \frac{195}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2} = 195000000$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

Ejercicio 3.21. Algunas personas afirman que en otoño puede predecirse el rigor del invierno (x) por medio de la cantidad de pelusa de una oruga (y). Se ha realizado un estudio de este fenómeno considerando tres grados de rigor invernal (1=moderado, 2=medio, 3=severo), y tres categorías para la densidad de la pelusa de la oruga {y=1,2,3}. En la tabla siguiente de probabilidades conjuntas se presentan los resultados de este estudio.

x (invierno)

		1	2	3	Total
y(pelusa)	1	0,10	0,05	0,05	0,20
	2	0,10	0,20	0,20	0,40
	3	0,05	0,15	0,20	0,40
	Total	**0,25**	**0,40**	**0,35**	**1**

a) Hállense $P_x(2)$, $P_y(2)$ y $P_{x|y}(3|2)$

$$P_x(2) = \sum P(2,y) = P(2,1) + P(2,2) + P(2,3) = 0,05 + 0,20 + 0,15 = 0,40$$

$$P_y(2) = \sum P(x,2) = P(1,2) + P(2,2) + P(3,2) = 0,10 + 0,20 + 0,20 = 0,40$$

$P_{x|y}(3|2)$, corresponde a una probabilidad condicional, ver página 134 del libro de Harnett y Murphy, así tenemos

$$P_{x|y}(x|y) = P(x = x|y = y) = \frac{P(x,y)}{P_y(y)}$$

Por lo tanto,

$$P_{x|y}(3|2) = \frac{0,20}{0,40} = 0,50$$

Que salen de aquí:

x (invierno)

		1	2	3	Total
y(pelusa)	1	0,10	0,05	0,05	0,20
	2	0,10	0,20	**0,20**	**0,40**
	3	0,05	0,15	0,20	0,40
	Total	0,25	0,40	0,35	1

b) ¿Podría llegarse, a partir de estos datos, a la conclusión de que x e y son independientes (o dependientes)? Explíquese.

Conclusión: NO, porque $P_x(3) \neq P_{x|y}(3|2) \therefore 0,40 \neq 0,50$

c) Determínense E[x] y E[y]

$$E[x] = 1(0,25) + 2(0,40) + 3(0,35) = 2,1$$

$$E[y] = 1(0,20) + 2(0,40) + 3(0,40) = 2,2$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

d) Hállense E[x.y] y E[x+y]

$$E[x.y] = 2{,}1 \times 2{,}2 = 4{,}62$$

x	P(x)	xP(x)	y	P(y)	yP(y)	x	y	P(x,Y)	X.Y	E[X.Y]
1	0.25	0.25	1	0.2	0.2	1	1	0.05	1	0.05
2	0.4	0.8	2	0.4	0.8	1	2	0.1	2	0.2
3	0.35	1.05	3	0.4	1.2	1	3	0.1	3	0.3
						2	1	0.08	2	0.16
						2	2	0.16	4	0.64
						2	3	0.16	6	0.96
						3	1	0.07	3	0.21
						3	2	0.14	6	0.84
						3	3	0.14	9	1.26
Suma	**1**	**E[x]=2.1**		**1**	**E[y]=2.2**			**1**	**E[X.Y] =**	**4.62**

$$E[x + y] = 2{,}1 + 2{,}2 = 4{,}3$$

x	P(x)	xP(x)	y	P(y)	yP(y)	x	y	P(x,y)	x+y	E[x+y]
1	0.25	0.25	1	0.2	0.2	1	1	0.05	2	0.1
2	0.4	0.8	2	0.4	0.8	1	2	0.1	3	0.3
3	0.35	1.05	3	0.4	1.2	1	3	0.1	4	0.4
						2	1	0.08	3	0.24
						2	2	0.16	4	0.64
						2	3	0.16	5	0.8
						3	1	0.07	4	0.28
						3	2	0.14	5	0.7
						3	3	0.14	6	0.84
Suma		**E[x]=2.1**			**E[y]=2.2**			**1**	**E[x+y] =**	**4.3**

e) Encuéntrese C[x,y]

$$C[x, y] = E[x.y] - E[x]E[y] = 4{,}62 - (2{,}1 \times 2{,}2) = 0$$

f) Hállese E[5x-3y]

$$E[5x - 3y] = 5E[x] - 3E[y] = 5(2{,}1) - 3(2.2) = 10{,}5 - 6{,}6 = 3{,}9$$

g) Resuélvase V[5x-3y]

$$V[5x - 3y] = 5^2V[x] - 3^2V[y]$$

Así hallamos cada varianza,

$$V[x] = \sum (x - \mu)^2\, P(x)$$

$$V[x] = (1 - 2{,}1)^2(0{,}25) + (2 - 2{,}1)^2(0{,}4) + (3 - 2{,}1)^2(0{,}35)$$

$$V[x] = 0{,}3025 + 0{,}0004 + 0{,}2835$$

$$V[x] = 0{,}6089$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom

$$V[y] = (1 - 2{,}2)^2(0{,}2) + (2 - 2{,}2)^2(0{,}4) + (3 - 2{,}2)^2(0{,}4)$$

$$V[y] = 0{,}288 + 0{,}016 + 0{,}256$$

$$V[y] = 0{,}56$$

Teniendo entonces,

$$V[5x - 3y] = 5^2V[x] - 3^2V[y]$$

$$V[5x - 3y] = 5^2(0{,}6089) - 3^2(0{,}56) = 20{,}04$$

Jose O. Henao Monje
Twitter: @johenaom