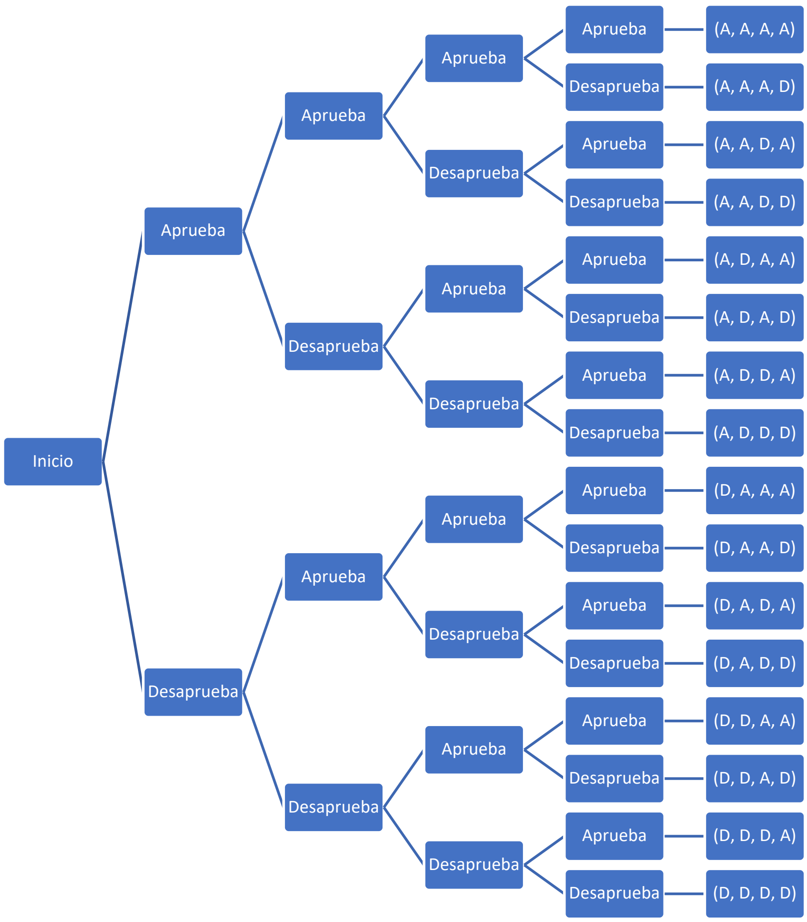
Ejercicio 2.5. Supóngase que, en el concurso del Reader's Digest que envía a personas diferentes anuncios de un concurso, indicando que el "ganador del gran premio" será escogido "al azar" entre estas. Así se ofrece un gran premio, 500 segundos premios y 1.000 terceros premios. Hay 50.000 personas que pueden resultar ganadoras y ninguna puede obtener más de un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que el lector sea uno de los ganadores si se halla entre los 50.000 concursantes?

Solución:
Cantidad total de ganadores = 1 + 500 + 1000 = 1501 ganadores (Resultado que confirma el suceso). Así:

$$P(Ganar) = \frac{1.501}{50.000} = 0{,}003002$$

Ejercicio 2.6. Cuatro estudiantes son calificados en cierto curso como aprobados o suspendidos.

a) Descríbase el espacio muestral para este experimento. Dibújese el diagrama de árbol.



b) ¿Cuántos resultados diferentes hay si es importante tener en cuenta cuáles son los estudiantes aptos y cuáles los no aptos? ¿Cuántos resultados hay si sólo interesa el número de aptos y el de no aptos?

$$N = 2.2.2.2 = 16$$

Entonces existen 16 resultados posibles.

Respecto a los resultados si sólo nos interesa el número de aptos y no aptos, sabemos que existe 4 estudiantes y cada uno de estos tiene dos opciones, por lo que tenemos 8 resultados.

c) Si se considera que "apto" y "no apto" son igualmente posibles, ¿cuáles son los valores de P(0 aptos), P(1 aptos), P(2 aptos), P(3 aptos) y P(4 aptos)? ¿Es igual a 1 la suma de estos valores?

$$P(0\ aptos) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$
$$P(1\ aptos) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$
$$P(2\ aptos) = \frac{6}{16} = 0{,}375$$
$$P(3\ aptos) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$
$$P(4\ aptos) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

$$Suma\ Probabilidades = P(0\ aptos) + P(1\ aptos) + P(2\ aptos) + P(3\ aptos) + P(4\ aptos) = 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}375 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 1$$

Ejercicio 2.7. En la extracción de una carta de un mazo de naipes, ¿Cuál es la probabilidad de obtener una "cara"? (Se llaman caras las cartas J, Q y K).

Existe 4 bloques de cartas (Corazones, Rombos, Tréboles y Bastos) los cuales están compuestos por un total de 52 cartas. Sabemos que existen tres cartas por cada bloque que componen las caras, por lo tanto la cantidad de caras existentes es de 12. (3x4).

$$P(Cara) = \frac{3 \times 4}{52} = \frac{12}{52} = 0{,}23$$

Ejercicio 2.8. Supóngase que tiene que inspeccionar dos de cinco establecimientos de ventas al por menor que han sido previamente escogidos.

a) Describa el espacio muestral para el experimento "elegir dos establecimientos sin reposición". [sugerencia: Denomine a los establecimientos 1, 2, 3, 4 y 5 y haga una lista de todos los pares. En este caso, el orden no es importante]

$$P(s) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$[(1{,}2); (1{,}3); (1{,}4); (1{,}5); (2{,}1); (2{,}3); (2{,}4); (2{,}5);$$
$$(3{,}1); (3{,}2); (3{,}4); (3{,}5); (4{,}1); (4{,}2); (4{,}3); (4{,}5);$$
$$(5{,}1); (5{,}2); (5{,}3); (5{,}4)]$$

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la inspección esté incluido el establecimiento 1?

Sabemos que la cantidad de inspecciones en el que está incluido el establecimiento 1 es 8.

$$[(1{,}2); (1{,}3); (1{,}4); (1{,}5); (2{,}1); (2{,}3); (2{,}4); (2{,}5);$$
$$(3{,}1); (3{,}2); (3{,}4); (3{,}5); (4{,}1); (4{,}2); (4{,}3); (4{,}5);$$
$$(5{,}1); (5{,}2); (5{,}3); (5{,}4)]$$

$$P(1) = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que los establecimientos 1 ó 2 estén incluidos en la inspección?

$$[(1{,}2); (1{,}3); (1{,}4); (1{,}5); (2{,}1); (2{,}3); (2{,}4); (2{,}5);$$
$$(3{,}1); (3{,}2); (3{,}4); (3{,}5); (4{,}1); (4{,}2); (4{,}3); (4{,}5);$$
$$(5{,}1); (5{,}2); (5{,}3); (5{,}4)]$$

$$P(1 \text{ ó } 2) = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

Ejercicio 2.9. Los datos siguientes describen determinadas características de los estudiantes inscritos en cierta universidad.

	Hombres	**Mujeres**	**Más de 21 años**
Primer Año	1325	1100	125
Segundo Año	1200	900	175
Tercer Año	900	850	325
Cuarto Año	725	775	950
Graduados	1350	875	2225

a) ¿Cuántos estudiantes están inscriptos en esta universidad?

La suma de la columna hombres es un total de 5500 y de mujeres es de 4500, por lo tanto, la cantidad de inscriptos es de 10000 alumnos.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido “al azar” sea mujer?

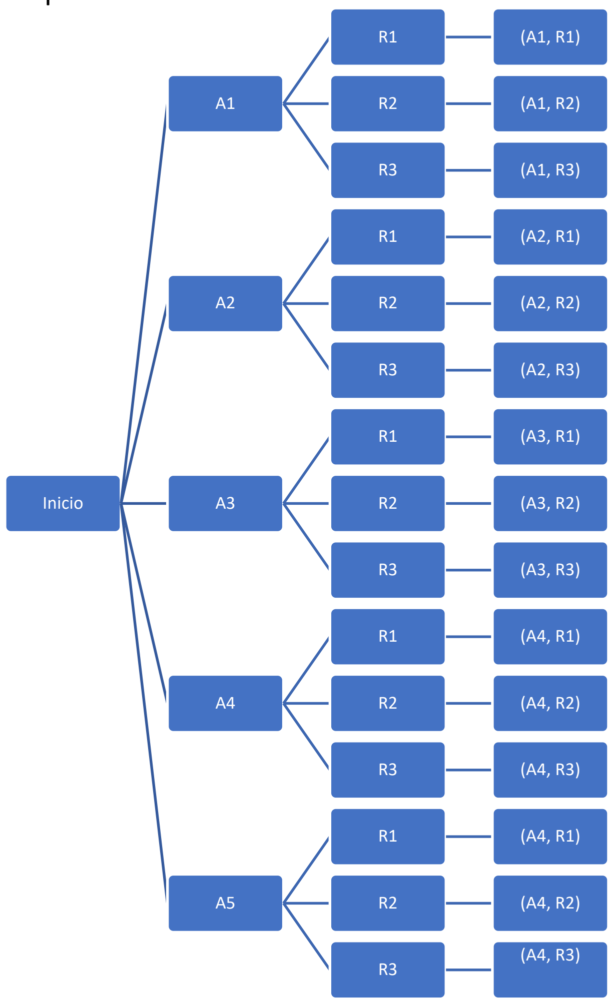
$$P(mujer) = \frac{4500}{10000} = 0{,}45$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar pertenezca al cuarto año?

$$P(4^{\underline{o}}\ año) = \frac{1500}{10000} = 0{,}15$$

Ejercicio 2.10. Ciertas acciones han sido clasificadas de una a cinco de acuerdo a los dividendos que pagan, y de uno a tres según el riesgo de la inversión.

a) Dibújese un diagrama de árbol para representar las diversas formas en que dichas acciones pueden ser clasificadas.



N=5x3=15

b) Si una acción tiene la misma posibilidad de ser clasificada en cada punto del espacio muestral, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los puntos muestrales?

$$P(1) = \frac{1}{15} = 0{,}66\overline{6}$$

c) ¿A cuantos puntos muestrales les corresponde una clasificación ≤3 en cuanto a los dividendos, o ≤2 en cuanto al riesgo? Calcúlese P(dividendos ≤3, o riesgo ≤2 por medio de la formula (2.2.).

$$[(A_1,R_1);(A_1,R_2);(A_1,R_3);(A_2,R_1);(A_2,R_2);(A_2,R_3);(A_3,R_1);(A_3,R_2);(A_3,R_3);$$
$$(A_4,R_1);(A_4,R_2);(A_4,R_3);(A_5,R_1);(A_5,R_2);(A_5,R_3)]$$

Formula 2.2. $P(suceso) = P(1\,punto\,muestral) \times \binom{Número\ de\ puntos}{muestrales\ pertinentes}$

$$P(dividendos\ \leq 3\ ó\ riesgo\ \leq 2) = \frac{1}{15}(13) = 0{,}86$$

Ejercicio 2.11. Cierta compañía, que vende puertas para chocheras accionadas electrónicamente, anuncia que cada cliente puede elegir el código de la frecuencia de onda colocando **nueve interruptores** en una de **dos posiciones** posibles (por ejemplo, + o -).

a) ¿cuántos intentos diferentes tendría que hacer un ladrón para asegurarse de hallar el código correcto? (La respuesta “todos los códigos posibles” no es suficiente.) ¿Cuál es la probabilidad de que el ladrón acierte si hace una elección al azar?

$$N = 2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 512$$
$$P(acierte) = \frac{1}{512} = 0{,}0019$$

b) Supóngase que el ladrón sabe que el código correcto se obtiene colocando **ocho de los interruptores en (+) y uno en (-)**. En este caso, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en una elección al azar?

El ladrón necesita saber 9 posiciones de los interruptores y sabe que solo uno de los 9 debe estar en negativo.

$$P(acierte) = \frac{1}{9} = 0{,}11$$

Ejercicio 2.17.

a) Un cronista deportivo desea clasificar 10 equipos. ¿De cuántas formas puede hacerlo si supone que no hay empate?

$${}_{10}P_{10} = 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 4628800$$

b) ¿Cuántas combinaciones diferentes son posibles si solamente se consideran los tres primeros lugares (primero, segundo, tercero)?

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120$$

c) ¿Cuántas clasificaciones diferentes son posibles si sólo se consideran los tres primeros lugares?

$$ {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720 $$

Ejercicio 2.24. El entrenador de un equipo de futbol se ha enterado por fuentes secretas de que su oponente hará jugar a uno de tres centros delanteros posibles, y que solamente considera dos alienaciones posibles. Su información es limitada, pero se las ha ingeniado para determinar las probabilidades siguientes:

Defensa	P	Alienación	
		A	B
I	0,30	P(A∩I)=?	P(B∩I)=?
II	0,50	P(A∩II)=?	P(B∩II)=?
III	0,20	P(A∩III)=?	P(B∩III)=?
	1,00	P(A) = 0,60	P(B)=?

a) Si P(A | I) = 0,20, hállese P(A∩I).

$$ P(A \cap I) = P(I)P(A|I) = 0{,}30 \times 0{,}20 = 0{,}06 $$

b) Hállese P(A∪I).

$$ P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) = 0{,}60 + 0{,}30 - 0{,}06 = 0{,}84 $$

c) Suponiendo que P(A|II) = 0,8, complétese la tabla indicada anteriormente.

$$ P(A \cap I) = P(I)P(A|I) = 0{,}30 \times 0{,}20 = 0{,}06 $$
$$ P(A \cap II) = P(I)P(A|I) = 0{,}50 \times 0{,}80 = 0{,}40 $$
$$ P(A \cap III) = P(A) - P(A \cap I) - P(A \cap II) = 0{,}60 - 0{,}06 - 0{,}40 = 0{,}14 $$
$$ P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40 $$
$$ P(B \cap I) = P(I) - P(A \cap I) = 0{,}30 - 0{,}06 = 0{,}24 $$
$$ P(B \cap II) = P(II) - P(A \cap II) = 0{,}50 - 0{,}40 = 0{,}10 $$
$$ P(B \cap III) = P(III) - P(A \cap III) = 0{,}20 - 0{,}08 = 0{,}12 $$

Con la información completa tenemos:

Defensa	**P**	**Alienación**	
		A	**B**
I	0,30	0,06	0,24
II	0,50	0,40	0,10
III	0,20	0,14	0,06
	1,00	P(A) = 0,60	0,40

d) Determínese si son independientes las elecciones de la alienación y del defensa.

Para que sean independientes, se entiende que tanto los defensas como las alineaciones existentes deben cumplir igualdad.

$$P(A|B) = P(A) \text{ o bien } P(B|A) = P(B)$$

Sabemos que P(A | I) = 0,20 y P(I) = 0,30, por lo tanto, no cumple la igualdad y estos no son independientes.

También sabemos que P(A|II) = 0,8 y P(II)=0,50, igualmente no cumple igualdad y, por lo tanto, no son independientes.

Para P(A|III) =0,14/0,20=0,70 y P(III) = 0,20, por lo tanto, no son independientes.

Respecto a P(B|I) = 0,24/0,3 = 0,80 y P(I) = 0,3, no son independientes.

Luego para P(B|II) = 0,10/0,50 = 0,20 y P(II) = 0,50, no son independientes.

Finalmente, P(B|III) = 0,06/0,20 = 0,30 y P(III) = 0,20, no son independientes.

Ejercicio 2.29. Doscientas estrategias de venta son clasificadas como: "muy efectiva", "moderadamente efectiva" o "no efectiva", conjuntamente con tres estrategias de precios (I, II, III), como se indica a continuación:

	Estrategias de precios			
	I	II	III	Totales
Muy efectiva	20	50	30	100
Moderadamente efectiva	20	20	20	60
No efectiva	20	10	10	40
Totales	60	80	60	200

a) Constrúyase una tabla análoga en el que se muestre una probabilidad conjunta en cada casilla.

Se calcula la participación de cada celda respecto al total (200):

	Estrategias de precios			
	I	II	III	Totales
Muy efectiva	20/200	50/200	30/200	100/200
Moderadamente efectiva	20/200	20/200	20/200	60/200
No efectiva	20/200	10/200	10/200	40/200

Totales	60/200	80/200	60/200	200/200

Por lo tanto, la probabilidad conjunta es:

	Estrategias de precios			
	I	II	III	Totales
Muy efectiva	0,10	0,25	0,15	0,50
Moderadamente efectiva	0,10	0,10	0,10	0,30
No efectiva	0,10	0,05	0,05	0,20
Totales	0,30	0,40	0,30	1,00

b) Usando la formula (2.15), calcúlese la probabilidad marginal P(muy efectiva).

La formula 2.15 de probabilidad marginal es:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{k} P(D \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)(D|E_i)$$

$$P(D) = P(E_1)(D|E_1) + P(E_2)(D|E_2) + \cdots + P(E_k)(D|E_k)$$

Por lo tanto, a para calcular la Prob. Marginal P(muy efectiva) es:

$$P(muy\ efectivo) = P(I)(M.E.|I) + P(II)(M.E.|II) + \cdots + P(III)(M.E.|III)$$

En base a los resultados de la probabilidad conjunta tenemos que:

$$P(I) = 0{,}30$$
$$P(II) = 0{,}40$$
$$P(III) = 0{,}30$$
$$P(M.E.|I) = \frac{0{,}10}{0{,}40} = 0{,}25$$
$$P(M.E.|II) = \frac{0{,}25}{0{,}30} = 0{,}66\bar{6}$$
$$P(M.E.|III) = \frac{0{,}15}{0{,}30} = 0{,}50$$

$$P(muy\ efectivo) = 0{,}30 \times 0{,}25 + 0{,}40 \times 0{,}66\bar{6} + 0{,}30 \times 0{,}50 = 0{,}4916664$$

c) Determínese mediante la regla de Bayes la probabilidad a posteriori P(estrategia de precios II | muy efectiva).

La probabilidad a posteriori: $P(II|M.E.)$

$$P(II|M.E.) = \frac{0{,}4 \times 0{,}625}{0{,}4916664} = 0{,}50$$

Ejercicio 2.30. Utilice la regla de Bayes en el problema 2.24. para hallar la probabilidad de que se emplee la alienación A, dado que el defensa será III.

Teniendo en cuenta la tabla de probabilidad conjunta:

Defensa	**P**	**Alienación**	
		A	**B**
I	0,30	0,06	0,24
II	0,50	0,40	0,10
III	0,20	0,14	0,06
	1,00	P(A) = 0,60	0,40

Primero hallamos la probabilidad marginal de A:

$$P(A) = 0{,}60$$
$$P(B) = 0{,}40$$
$$P(III|A) = \frac{0{,}14}{0{,}60} = 0{,}42\overline{42}$$
$$P(III|B) = \frac{0{,}06}{0{,}40} = 0{,}15$$
$$\sum P(A) = 0{,}6 \times 0{,}4242 + 0{,}40 \times 0{,}15 = 0{,}3145452$$

Finalmente, la regla de bayes para P(A|II) es:

La probabilidad a posteriori: $P(A|II)$

$$P(A|III) = \frac{P(A)P(III|A)}{\sum P(A)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}23\overline{3}}{0{,}3145452} = \frac{0{,}14}{0{,}3145452} = 0{,}445$$

Ejercicio 2.31. Hágase uso de la regla de Bayes con los datos del problema 2.22. para calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga el hábito de fumar, dado que su edad de esta persona es inferior a 30 años.

El ejercicio nos pide hallar P(Fuma|<30 años).

La tabla de probabilidad conjunta del ejercicio 2.22. sugiere que:

	Edad			
	<30	***30-50***	***>50***	***Total***
Fuma	0,25	0,0625	0,125	0,4375
No fuma	0,25	0,1875	0,125	0,5625
Total	**0,50**	**0,25**	**0,25**	**1,00**

Hallamos la probabilidad marginal

$$P(fuma) = 0{,}4375$$
$$P(no\ fuma) = 0{,}5625$$
$$P(< 30|fuma) = \frac{0{,}25}{0{,}4375} = 0{,}571428571$$
$$P(< 30|no\ fuma) = \frac{0{,}25}{0{,}5625} = 0{,}4444444$$

$$\sum P(f) = 0{,}4375 \times 0{,}571428571 + 0{,}5625 \times 0{,}4444444 = 0{,}5$$

probabilidad a posteriori: $P(f| < 30)$

$$P(f| < 30) = \frac{P(f)P(< 30|f)}{\sum P(f)} = \frac{0{,}4375 \times 0{,}571428571}{0{,}5} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$$