Curso: Estadística

Sesión 2: Teoría de Probabilidades

Lic. Jose O. Henao M.[1]

[1]Economista / Investigador del Programa Internacional de Democracia Sociedad y Nuevas Economías (PIDESONE)
Universidad Surcolombiana / Universidad de Buenos Aires

Mar, 2020

Contenido

Introducción[1]

Suceso o evento subconjunto de los resultados posibles en una situación de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Probabilidad número entre 0 y 1, que indica cuán posible es la ocurrencia de un suceso. Si el suceso tiene probabilidad cero entonces su ocurrencia podría ser imposible y si tiene 1 entonces su ocurrencia es segura.

El valor entre 0 y 1 representa el grado de posibilidad de ocurrencia entre un suceso.

[1] Introducción al análisis estadístico - Harnett, D. Murphy, J.

Modelo Probabilistico

Parte 1

Para especificar la probabilidad asociada con una situación dada, se define el **modelo probabilistico** como aque que requiere definir en qué experimento se basa y sus resultados. Así tenemos que:

- **Experimento**: Es cualquier situación que puede ser repetida bajo condiciones esencialmente estables (controladas).
- **Puntos muestrales**: son los diferentes resultados de un experimento
- **Espacio Muestral**: Es el conjunto de posibles resultados. Puede ser discreto o continuo

Ejemplo:

Si definimos el experimento "lanzar una moneda una vez", el espacio muestral correspondiente tendrá solamente dos puntos muestrales: $\{Cara, Cruz\}$.

Si el experimento consiste en "lanzar dos veces", entonces el espacio muestral tendrá cuatro puntos:
$\{Cara, Cara; Cara, Cruz; Cruz, Cara; Cruz, Cruz\}$

Podemos definir que el **espacio muestral** puede ser:

- **Discreto**: Resultados separados entre sí y contables.
- **Continuo**: Resultados se obtienen por medición y no por conteo (no separable)

Mientras que los **puntos muestrales** pueden ser:

- **Finitos**: el número de resultados posibles es limitado.
- **Infinitos**: no hay límite para el número de resultados

Probabilidad subjetiva y objetiva

Parte 1

La primer forma de determinar la probabilidad y la más tradicional consiste en definir esta como un **frecuencia relativa** con que ocurre un suceso en gran cantidad de repeticiones del experimento.

- **Subjetiva**: Estimaciones objetidas como guía, el conocimiento previo, la información y la experiencia
- **Objetiva**: Evidencia objetiva No dependen de quien haga la determinación

La **probabilidad de un suceso** es el cociente entre el número de resultados que lo conforman y el numero de resultados igualmente posibles del espacio muestral.

$$P(Suceso) = \frac{N^{o}\, resultadosdelsuceso}{N^{o}\, Totalderesultadosdelespaciomuestral}$$

Probabilidad subjetiva y objetiva
Parte 2

Propiedades de la Probabilidad

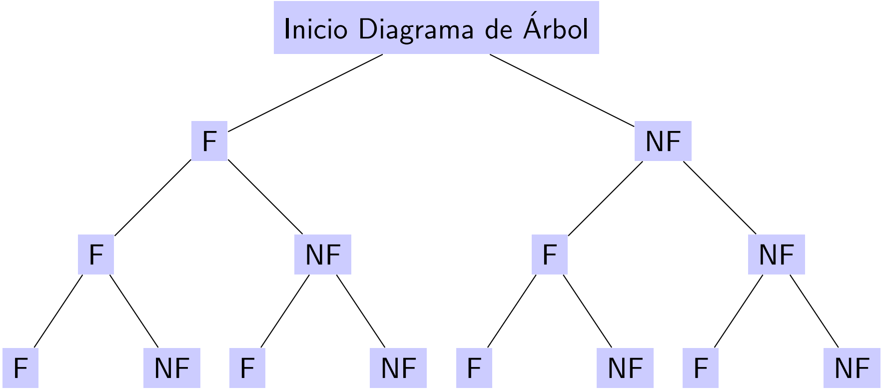
Propiedad 1: $1{,}0 \geq P(E_i) \geq 0$

Propiedad 2: P(S)=1,0

Reglas de conteo

Parte 1

Permite conocer el número total de resultados posibles de un experimento.
Ejemplo: Existen 3 personas las cuales tienen 2 resultados posibles [Fuma (F), No fuma(NF)]



.

Los resultados observados del **diagrama de árbol** para el experimento detallado anteriormente:

Numero total de resultados $=$

$$\left\{ \begin{array}{c} (F,F,F);(F,F,NF);(F,NF,F);(F,NF,NF); \\ (NF,F,F);(NF,F,NF);(NF,NF,F);(NF,NF,NF) \end{array} \right\} = 8\ \textit{resultados}$$

Que puede calcularse a través del siguiente método:

$$N = 2.2.2 = 8$$

Que equivale a 3 personas cada una con dos opciones disponibles (F,NF)

Regla básica del conteo

Numero total de puntos muestrales:

$$N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$$

En el ejemplo $\mathrm{n}_1 = 2, n_2 = 2\, y\; n_3 = 2\,,\; así\, N = n_1 \times n_2 \times n_3 = 8$

Probabilidad de un suceso

$$\mathbf{P(Suceso)} = P(1\,\textit{punto muestra}) \times \begin{pmatrix} \textit{Número de puntos} \\ \textit{muestrales pertinentes} \end{pmatrix}$$

Suma de probabilidades mediante una multiplicación

Ejemplos:

- Existe 4 políticas de precios y 3 planes publicitarios para estas políticas. P(un punto muestral)=1/12. Queremos conocer la probabilidad de que la estrategia sea Precios=1 o estrategia = a 2 o más. Sabemos que Nº muestrales = 9 por lo tanto,
  $P(Precio = 1 \text{ ó } Publicidad \geq 2) = (\frac{1}{12}) \times (9) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
- Probemos con el caso de los fumadores y no fumadores. Hallar P(2 fumadores, 1 no fumador)

Permutaciones

de n objetos tomados de x en x:

$$ {}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!} $$

Cada ordenamiento de un conjunto de objetos se llama "Permutación".

Combinaciones

de n objetos tomados de x en x:

$$ {}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

Conjunto de objetos en el que el orden carece de importancia.

Algunos ejemplos:

- **Premutación**: Existe una empresa con 4 proyectos de inversión y debe elegir y ordenar los mejores. ¿Cuantos ordenamientos puede hacer con 2 proyectos de inversión de los 4 existentes? Con n=4 y x=2 tenemos:

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} == \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

- **Combinación**: Fuerza aerea decide firmar contrato con 2 entre 6 compañias para un equipo de computación. Número de diferentes formas en que pueden elegirse las dos compañias ganadoras. Con n=6 y x=2 tenemos:

$$_4C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} == \frac{6!}{2!(4!)} = 15$$

Reglas de Probabilidad

Parte 1

- $P(\bar{A}) = $ *Probabilidad de que no ocurra A en una realización del* experimento.
  $P(\bar{A})$*se llama probabilidad del complemento de A*.

- $P(A \mid B) = $ *Probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B*.
  $P(A \mid B)$ *se llama probabilidad condicional de A dado B*.

- $P(A \cap B) = $ *Probabilidad de que ocurran tanto A como B* en una realización del experimento.
  $P(A \cap B)$ *se llama probabilidad de la intersección de A y B*, o la probabilidad conjunta de A y B.

- $P(A \cup B) = $ *Probabilidad de que ocurran tanto A o bien B* o ambos, en una realización del experimento.
  $P(A \cup B)$ *se llama probabilidad de la unión de A y B*.

Regla de prob. del complemento

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Regla de prob. del condicional

De A, dado B

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{w}{b}$$

De B, dado A

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{w}{a}$$

Reglas de Probabilidad

Parte 3

Regla general de multiplicación

$$P(A \cup B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Regla general de la adición

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

Probabilidad Marginal

Parte 1

- Un suceso ocurre siempre conjuntamente con otros sucesos.
- Valores en los márgenes de una tabla de probabilidad conjunto que proporciona las probabilidades de cada evento por separado.

$$P(D) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i)(D \mid E_i)$$

Probabilidad Marginal

Parte 2

Ejemplo:

Tab. 1. Datos disponibles

	E1	E2	E3	Total fila
B	490	1970	1455	3915
D	10	30	45	85
Total	500	2000	1500	4000

Tab. 2. Prob. Conjunta y Marginal

	E1	E2	E3	Total fila
B	490/4000	1970/4000	1455/4000	**3915/4000**
D	10/4000	30/4000	45/4000	**85/4000**
Total	**500/4000**	**2000/4000**	**1500/4000**	**4000/4000=1**

Regla de Bayes

Parte 1

Método utilizado para calcular las probabilidades posteriores.
Creada por el Reverendo y filósofo Inglés Thomas Bayes (1702-1761).

Para introducir este tipo de probabilidad, es necesario tener en cuenta:

Prob. Apriori

Determinadas antes de tomar en cuenta nueva información.

Prob. Aposteriori

Deteminadas despues de tomar en cuenta nueva información a la luz de la regla de Bayes.

Regla de Bayes

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(E_j)P(A|E_j)}$$

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+\ldots+P(E_k)P(A|E_k)}$$

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(Suceso)P(inf.muestral|suceso)}{\sum_j P(suceso_j)P(inf.muestral|suceso_j)}$$

Ejercicios

Ejercicios de este capítulo
Hacer click en la imagen y esta lo llevará a mi página web:

Bibliografía I

- Harnett, D. & Murphy, J.,
  Introducción al análisis estadístico.
  Cap. 2.

- Anderson, D. Sweeney, D & Williams, T.,
  Estadística para Administración y Economía.
  Cap. 4, 5 y 6.