

Chapitre 3 : Numérisation

John Klein

Lille1 Université - CRIStAL UMR CNRS 9189



Paradoxe :

- Un signal numérique est extrait d'un signal analogique, il contient donc moins d'informations.
- Pourtant le numérique offre une qualité de traitement largement supérieure.

→ Pourquoi ?

Paradoxe : explications

- Un **ordinateur** ne sait manipuler que des données binaires (donc numérisées). Les ordinateurs offrent une capacité de calcul avec laquelle les systèmes analogiques ne peuvent pas rivaliser.
- Il est plus facile de **protéger** une information dans un signal numérique que dans un signal analogique. On utilise pour cela des codes-correcteurs d'erreurs. L'archétype du code-correcteur est le *checksum* binaire.

Plan du chapitre

1 Conversion analogique numérique

- Echantillonnage
- Quantification

2 Analyse des signaux numériques

- Analyse temporelle
- Analyse fréquentielle

- Les signaux numériques n'existent pas dans la nature.
- Les signaux numériques que nous traitons sur ordinateurs sont tous issus d'un signal analogique originel passé en entrée d'un système appelé **convertisseur analogique/numérique** (CAN).
- Ce dispositif peut se modéliser en deux sous-systèmes :
 - l'**échantillonneur** : il transforme le signal analogique $x(t)$ en une **suite** de valeurs réelles (ou complexes) x_k .
 - le **quantifieur** : il transforme chaque valeur x_k réelle en un **niveau** $\check{x}_k \in \mathbb{D}$, avec \mathbb{D} un ensemble de taille finie. Comme le nombre de niveaux est fini, on peut donc attribuer un code entier à chaque niveau et ainsi les sauvegarder numériquement sur 1 ou plusieurs octets.

Echantillonnage :

- L'étape d'échantillonnage consiste simplement à enregistrer à pas (temporel) constant le signal analogique.
- Le pas est appelé **période d'échantillonnage** notée T_e .

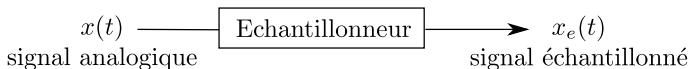


FIGURE – Vue schématique « entrée / sortie » d'un échantillonneur.

Echantillonnage :

- Si l'entrée de l'échantillonneur est $x(t)$, on note $x_e(t)$ sa sortie (voir figure 1) qui vaut :

$$x_e(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } \exists n \in \mathbb{Z} \mid t = nT_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (1)$$

- On peut aussi voir $x_e(t)$ comme un **train d'impulsions** :

$$x_e(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \delta(t - nT_e), \quad (2)$$

$$\text{ou encore } x_e(t) = \sqcap_{T_e}(t) \times x(t). \quad (3)$$

Echantillonnage :

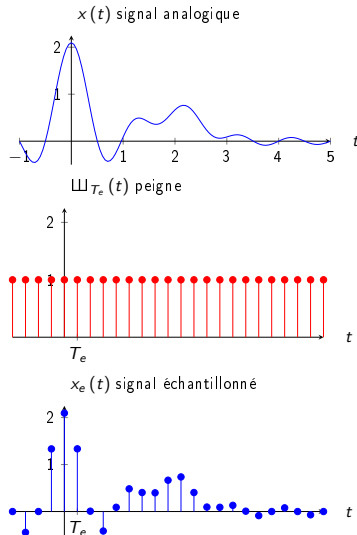


FIGURE – Graphique illustrant l'échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$.

Echantillonnage :

- D'un point de vue informatique, on conserve d'une part la valeur de T_e , et d'autre part, la suite de valeurs $x_n = x(nT_e)$.
- Chaque valeur x_n enregistrée individuellement est appelée **échantillon** du signal analogique.

Echantillonnage : impact en fréquence

- On pose $F_e = \frac{1}{T_e}$, la **fréquence d'échantillonnage**.
- Appliquons la **TF** à la formule de l'échantillonnage :

$$\begin{aligned}
 X_e(f) &= \mathcal{F}\{x_e\}(f), \\
 &= \mathcal{F}\{x \times \textstyle\bigvee_{T_e}\}(f), \\
 &= \{\mathcal{F}\{x\} \star \mathcal{F}\{\textstyle\bigvee_{T_e}\}\}(f), \\
 &= \{X \star F_e \textstyle\bigvee_{F_e}\}(f), \\
 &= \left\{ X \star F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nF_e} \right\}(f), \\
 &= F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{X \star \delta_{nF_e}\}(f),
 \end{aligned}$$

Echantillonnage : impact en fréquence

- Propriété générale de la distribution de Dirac :
 $g(v - a) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \delta_a(v - u) du$, pour toute fonction g .
- Dans le calcul précédent, cela donne donc :

$$X_e(f) = F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nF_e). \quad (4)$$

- L'échantillonnage induit une reproduction du spectre d'origine $X(f)$ tous les multiples de la fréquences d'échantillonnage.
- Chaque reproduction du spectre est appelée réplique.

Echantillonnage : impact en fréquence

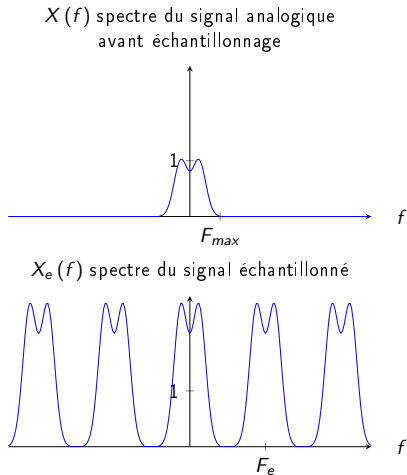


FIGURE – Graphique illustrant le phénomène de répliques spectrales après échantillonnage.

Echantillonnage : perte d'information ?

- Sur la figure, on peut récupérer $X(f)$ à partir de $X_e(f)$ car
$$X(f) = \frac{1}{F_e} X_e(f) \times \Pi_{[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]}(f).$$

$X_e(f)$ spectre du signal échantillonné

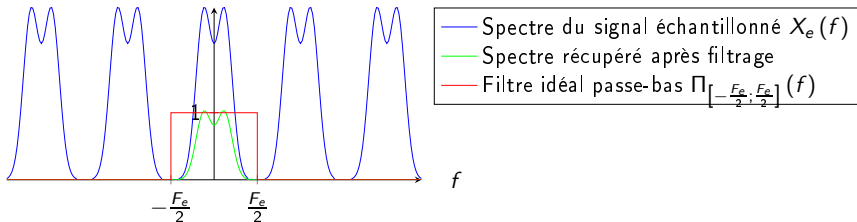


FIGURE – Fenêtrage du spectre du signal échantillonné.

Echantillonnage : perte d'information ?

- En faisant la TF inverse de $X(f)$, il est possible contre toute attente de récupérer le signal originel $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$.
- En revanche, la figure n'est pas représentative du cas général ! On a en effet le théorème suivant :

Théorème

*(de l'échantillonnage de **Shannon**) Soit un signal $x(t)$ dont le spectre $X(f)$ est à support borné, c'est à dire que il existe une fréquence F_{max} telle que $\forall f > F_{max}, X(f) = 0$. Si on échantillonne le signal $x(t)$ à une fréquence F_e telle que :*

$$F_e \geq 2F_{max} \quad (5)$$

alors l'échantillonnage se fait sans perte d'informations.

Echantillonnage : perte d'information ?

- Pour se convaincre, poussons le calcul quand les hypothèses du théorème sont respectées :

$$\begin{aligned}X(f) &= \frac{1}{F_e} X_e(f) \times \Pi_{[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]}(f), \\ \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) &= \frac{1}{F_e} \mathcal{F}^{-1}\left\{X_e \times \Pi_{[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]}\right\}(t), \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{F_e} \{x_e \star F_e \text{sinc}(\pi F_e t)\}(t). \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_e(nT_e) \text{sinc}(\pi F_e(t - nT_e)).\end{aligned}$$

Echantillonnage : perte d'information ?

- Et si Shannon n'est pas respecté ? \rightarrow recouvrement

$X_e(f)$ spectre du signal échantillonné

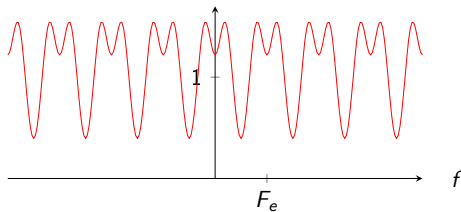


FIGURE – Graphique illustrant le phénomène de recouvrement en cas d'échantillonnage avec perte.

- Impossible de récupérer $X(f)$ en fenêtrant par une fonction porte.
- On a tout de même $x_e \rightarrow x$ quand $F_e \rightarrow +\infty$. Plus on prélève de points, plus x_e est proche de x .

Plan du chapitre

1 Conversion analogique numérique

- Echantillonnage
- Quantification

2 Analyse des signaux numériques

- Analyse temporelle
- Analyse fréquentielle

Quantification :

- Une machine informatique est incapable de mémoriser une valeur avec une **précision infinie**.
- Ceci est valable pour la variable temporelle (t) comme pour les relevés de mesures effectués (les $x_e(t)$).
- Il faut donc appliquer une étape appelée **quantification** qui permettra d'obtenir une suite réelle **tronquée** (\check{x}_n).

Quantification : principe de la troncature

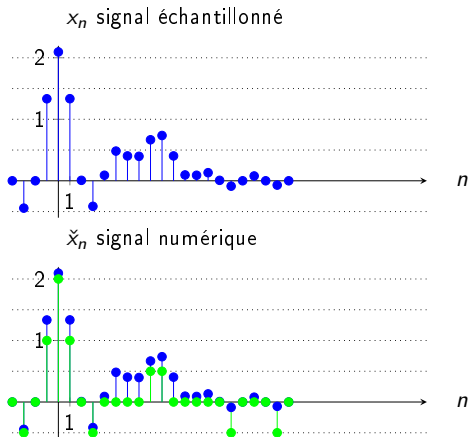


FIGURE – Quantification d'un signal échantillonné x_n .

Quantification :

- Pour quantifier un signal, il faut déjà prédéfinir les valeurs que celui-ci peut prendre après quantification.
- On appelle ces valeurs **niveaux** et ils sont repérés par des lignes en pointillés dans la figure précédente.
- La distance séparant deux niveaux est appelée **pas de quantification**.
- Plus ce pas est important, plus \check{x}_n est différent de x_n et donc plus la **perte d'informations** est importante.
- Après la quantification, la **numérisation** est **terminée**, on peut donc qualifier \check{x}_n de signal numérique.
Dans la suite du cours, nous négligerons les effets de quantification et nous confondrons donc signaux discrets et signaux numériques.

Plan du chapitre

- 1 Conversion analogique numérique
 - Echantillonnage
 - Quantification
- 2 Analyse des signaux numériques
 - Analyse temporelle
 - Analyse fréquentielle

Analyse temporelle :

- La plupart des caractéristiques et opérations s'obtiennent en numérique en transformant les intégrales en sommes.
- Pour l'énergie et la puissance moyenne totale, on a :

$$E_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2, \quad (6)$$

$$P_x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \sum_{n=-k}^k |x_n|^2. \quad (7)$$

Analyse temporelle :

- L'inter-corrélation numérique est donnée par :

$$C_{xy,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n-k} \text{ (si infinité d'échantillons),} \quad (8)$$

$$= \sum_{n=0}^N x_n y_{n-k} \text{ (si } N \text{ échantillons).} \quad (9)$$

- Le produit de convolution devient en numérique :

$$\{x \star y\}_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{k-n} \text{ (si infinité d'échantillons),} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=0}^N x_n y_{k-n} \text{ (si } N \text{ échantillons).} \quad (11)$$

Analyse temporelle :

- Comme dans le cas analogique, $\{x \star y\}_k$ est bien la **version temporelle** d'un nouveau signal.
- Pour ces formules, un **échantillon inexistant** est remplacé par un **zéro**.
Ex : y_{-1} pour le calcul de $\{x \star y\}_0$.

Plan du chapitre

- 1 Conversion analogique numérique
 - Echantillonnage
 - Quantification
- 2 Analyse des signaux numériques
 - Analyse temporelle
 - Analyse fréquentielle

Analyse fréquentielle :

- On peut appliquer aux signaux numériques la transformée de Fourier en les considérant comme un **train d'impulsions**.
- Cette manipulation possède une limitation pratique importante : un système informatique ne peut traiter **aucune donnée continue**.
- Nous avons vu dans la section précédente que le spectre d'un signal discret peut de son côté être **continu** !
- Il convient de passer en « **tout numérique** » et d'avoir un spectre discret, donc sauvegardable et manipulable par un ordinateur.
- → création d'un **nouvel outil** dédié à l'analyse fréquentielle en numérique : la **Transformée de Fourier discrète** (TFD).

Analyse fréquentielle : TFD

Définition

Soit x_n un signal numérique à énergie finie et N échantillons. On appelle **transformée de Fourier discrète** (TFD) de x_n , la représentation fréquentielle discrète notée X_m telle que :

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{nm}{N}}, \quad (12)$$

avec m un entier compris entre 0 et $N - 1$. On note \mathcal{TFD} l'opérateur qui à x_n associe $X_m = \mathcal{TFD}\{x_n\}$.

Analyse fréquentielle : TFD

- Elle fournit **autant d'échantillons fréquentiels** (les X_m) qu'on en avait en temporel (les x_n).
- Elle offre une représentation fréquentielle sur l'**intervalle** $[0, F_e]$. Il est inutile d'observer le spectre sur le reste des fréquences car l'échantillonnage provoque des répliques spectrales. La représentation fréquentielle est alors **périodique** et sa période est justement F_e .
- Les échantillons fréquentiels sont equi-répartis sur le segment $[0, F_e]$. La **résolution fréquentielle** (l'écart en fréquence entre deux échantillons) est donc forcément $\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{\tau}$ avec τ la durée d'enregistrement du signal en seconde.

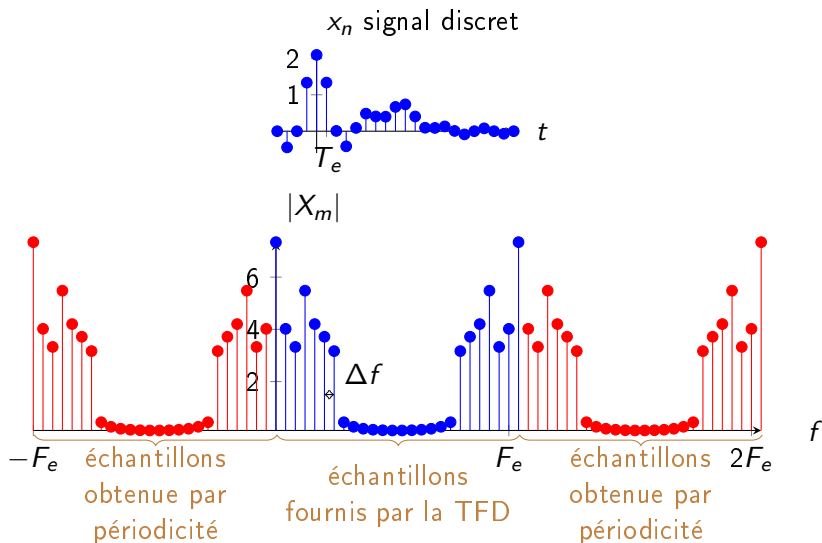
Analyse fréquentielle : TFD

- Formellement, la représentation fréquentielle $X_{num}(f)$ qu'on obtient grâce à la TFD est donc une fonction des fréquences qui est F_e -périodique et telle que $\forall f \in [0; F_e]$:

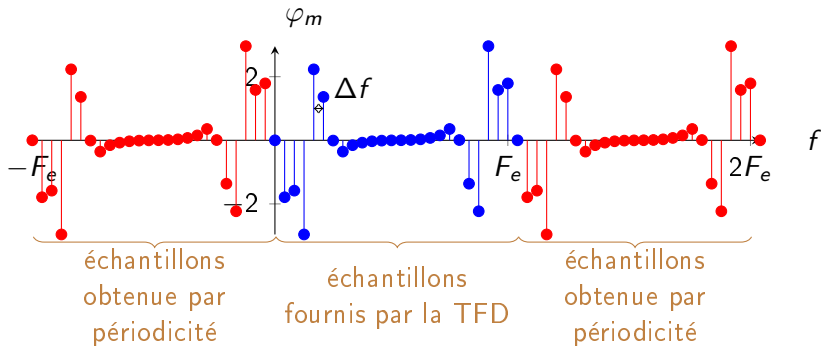
$$X_{num}(f) = \begin{cases} X_m & \text{si } f = \frac{mF_e}{N} = m \times \Delta f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (13)$$

- On confondra la suite X_m et la fonction $X_{num}(f)$, de même qu'on confond la suite x_n et la fonction $x_e(t)$.

Analyse fréquentielle : TFD (illustration)



Analyse fréquentielle : TFD (illustration)



Analyse fréquentielle : TFD

- Tout comme la TF, la TFD est une opération **sans perte**.
- Il existe donc un processus inverse appelé **transformée de Fourier discrète inverse** :

$$\begin{aligned}x_n &= \mathcal{TFD}^{-1}(X_m), \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{2i\pi \frac{mn}{N}}.\end{aligned}\tag{14}$$

- Pour la mise en pratique sur ordinateur, il existe un algorithme appelé *Fast Fourier Transform* (**FFT**) qui fonctionne si le nombre d'échantillons N est une puissance de 2.

Analyse fréquentielle : TFD et TF

- Il faut bien comprendre que la TFD est un outil d'analyse **différent** de la TF.
- Un lien existe dans certains cas seulement :
 - Partons d'un **signal analogique** $x(t)$ a priori non-nul pour toute valeur de t .
 - Le **signal enregistré** est $\check{x}(t) = x(t) \times \Pi_{[0;\tau]}(t)$.
 - Supposons que **Shannon** s'applique, on a alors :

$$\frac{1}{F_e} \check{X}_m = \check{X} \left(\frac{mF_e}{N} \right), \quad (15)$$

pour tout entier m compris entre $-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ¹.

- Dans le prochain chapitre, nous ne spécifierons plus que le signal est fenêtré en abandonnant la notation \check{x}_n au profit de x_n .

1. pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .