Chapitre 3 : Numérisation

John Klein

Université de Lille - CRIStAL UMR CNRS 9189

Paradoxe :

- Un signal numérique est extrait d'un signal analogique, il contient donc moins d'informations.
- Pourtant le numérique offre une qualité de traitement largement supérieure.

$\rightarrow$Pourquoi ?

Paradoxe : explications

- Un ordinateur ne sait manipuler que des données binaires (donc numérisées). Les ordinateurs offrent une capacité de calcul avec laquelle les systèmes analogiques ne peuvent pas rivaliser.

- Il est plus facile de protéger une information dans un signal numérique que dans un signal analogique. On utilise pour cela des codes-correcteurs d'erreurs. L'archétype du code-correcteur est le *checksum* binaire.

Plan du chapitre

- Les signaux numériques n'existent pas dans la nature.
- Les signaux numériques que nous traitons sur ordinateurs sont tous issus d'un signal analogique originel passé en entrée d'un système appelé convertisseur analogique/numérique (CAN).
- Ce dispositif peut se modéliser en deux sous-systèmes :
  - l'échantillonneur : il transforme le signal analogique $x(t)$ en une suite de valeurs réelles (ou complexes) x_k.
  - le quantifieur : il transforme chaque valeur x_k réelle en un niveau $\check{x}_k \in \mathbb{D}$, avec $\mathbb{D}$ un ensemble de taille finie. Comme le nombre de niveaux est fini, on peut donc attribuer un code entier à chaque niveau et ainsi les sauvegarder numériquement sur 1 ou plusieurs octets.

Echantillonnage :

- L'étape d'échantillonnage consiste simplement à enregistrer à pas (temporel) constant le signal analogique.
- Le pas est appelé période d'échantillonnage notée T_e.

FIGURE – Vue schématique « entrée / sortie »d'un échantillonneur.

Echantillonnage :

- Si l'entrée de l'échantillonneur est $x(t)$, on note $x_e(t)$ sa sortie (voir figure 1) qui vaut :

$$x_e(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } \exists n \in \mathbb{Z} \mid t = nT_e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \qquad (1)$$

- On peut aussi voir $x_e(t)$ comme un train d'impulsions :

$$x_e(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e), \qquad (2)$$

$$\text{ou encore } x_e(t) = Ш_{T_e}(t) \times x(t). \qquad (3)$$

Echantillonnage :

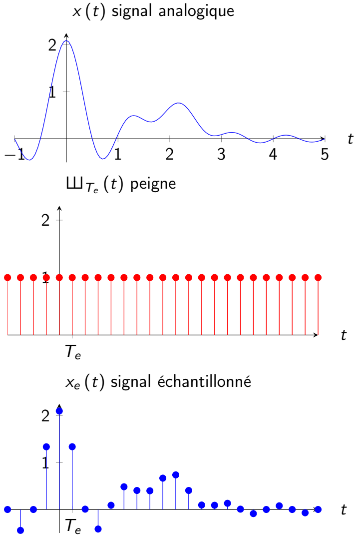


Figure – Graphique illustrant l'échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$.

Echantillonnage :

- D'un point de vue informatique, on conserve d'une part la valeur de T_e, et d'autre part, la suite de valeurs $x_n = x(nT_e)$.
- Chaque valeur x_n enregistrée individuellement est appelée échantillon du signal analogique.

Echantillonnage : impact en fréquence

- On pose $F_e = \frac{1}{T_e}$, la fréquence d'échantillonnage.
- Appliquons la TF à la formule de l'échantillonnage :

$$
\begin{aligned}
X_e(f) &= \mathcal{F}\{x_e\}(f), \\
&= \mathcal{F}\{x \times Ш_{T_e}\}(f), \\
&= \{\mathcal{F}\{x\} \star \mathcal{F}\{Ш_{T_e}\}\}(f), \\
&= \{X \star F_e Ш_{F_e}\}(f), \\
&= \left\{X \star F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nF_e}\right\}(f), \\
&= F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \{X \star \delta_{nF_e}\}(f),
\end{aligned}
$$

Echantillonnage : impact en fréquence

- Propriété générale de la distribution de Dirac :
  $g\left(v-a\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(u\right)\delta_a\left(v-u\right)du$, pour toute fonction g.

- Dans le calcul précédent, cela donne donc :

$$X_e\left(f\right) \;=\; F_e\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f-nF_e\right). \tag{4}$$

- L'échantillonnage induit une reproduction du spectre d'origine $X\left(f\right)$ tous les multiples de la fréquences d'échantillonnage.

- Chaque reproduction du spectre est appelée réplique.

Echantillonnage : impact en fréquence

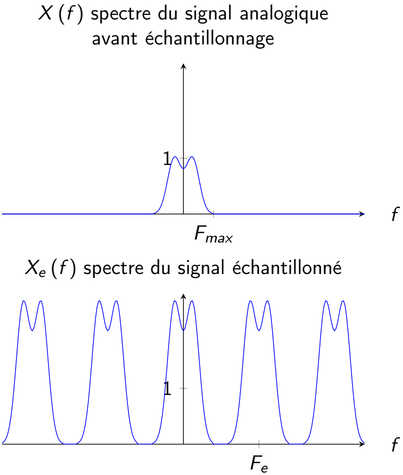


FIGURE – Graphique illustrant le phénomène de répliques spectrales après échantillonnage.

Echantillonnage : perte d'information ?

- Sur la figure, on peut récupérer $X(f)$ à partir de $X_e(f)$ car $X(f) = \frac{1}{F_e} X_e(f) \times \Pi_{\left[-\frac{F_e}{2};\frac{F_e}{2}\right]}(f)$.

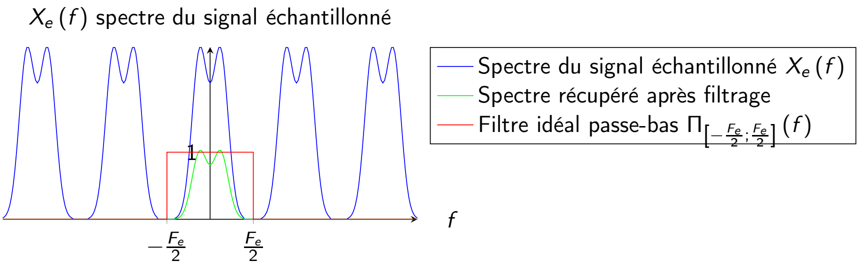


FIGURE – Fenêtrage du spectre du signal échantillonné.

Echantillonnage : perte d'information ?

- En faisant la TF inverse de $X(f)$, il est possible contre toute attente de récupérer le signal originel $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$.
- En revanche, la figure n'est pas représentative du cas général ! On a en effet le théorème suivant :

Théorème (de l'échantillonnage de Shannon)

Soit un signal $x(t)$ dont le spectre $X(f)$ est à support borné, c'est à dire qu'il existe une fréquence F_{max} telle que $\forall f > F_{max}$, $X(f) = 0$.
Si on échantillonne le signal $x(t)$ à une fréquence F_e telle que :

$$F_e \geq 2F_{max} \tag{5}$$

alors l'échantillonnage se fait sans perte d'informations.

Echantillonnage : perte d'information ?

- Pour se convaincre, poussons le calcul quand les hypothèses du théorème sont respectées :

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \frac{1}{F_e} X_e(f) \times \Pi_{\left[-\frac{F_e}{2};\frac{F_e}{2}\right]}(f),\\
\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) &= \frac{1}{F_e} \mathcal{F}^{-1}\left\{X_e \times \Pi_{\left[-\frac{F_e}{2};\frac{F_e}{2}\right]}\right\}(t),\\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{F_e}\left\{x_e \star F_e \mathrm{sinc}(\pi F_e t)\right\}(t).\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_e(nT_e)\,\mathrm{sinc}(\pi F_e(t-nT_e)).
\end{aligned}
$$

Echantillonnage : perte d'information ?

- Et si Shannon n'est pas respecté ? $\longrightarrow$ recouvrement

$X_e(f)$ spectre du signal échantillonné

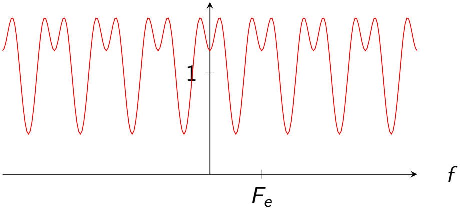


FIGURE – Graphique illustrant le phénomène de recouvrement en cas d'échantillonnage avec perte.

- Impossible de récupérer $X(f)$ en fenêtrant par une fonction porte.
- On a tout de même $x_e \longrightarrow x$ quand $F_e \longrightarrow +\infty$. Plus on prélève de points, plus x_e est proche de x.

Plan du chapitre

Quantification :

- Une machine informatique est incapable de mémoriser une valeur avec une précision infinie.
- Ceci est valable pour la variable temporelle (t) comme pour les relevés de mesures effectués (les $x_e(t)$).
- Il faut donc appliquer une étape appelée quantification qui permettra d'obtenir une suite réelle tronquée ($\check{x}_n$).

Quantification : principe de la troncature

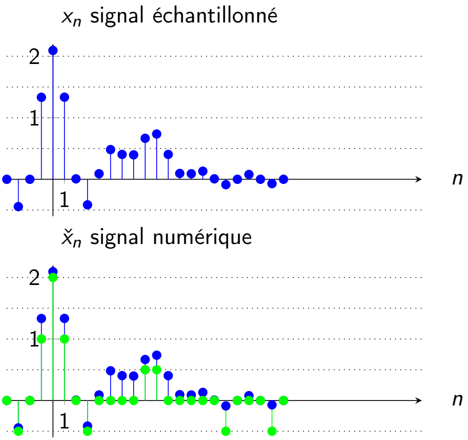


FIGURE – Quantification d'un signal échantillonné x_n.

Quantification :

- Pour quantifier un signal, il faut déjà prédéfinir les valeurs que celui-ci peut prendre après quantification.
- On appelle ces valeurs niveaux et ils sont repérés par des lignes en pointillés dans la figure précédente.
- La distance séparant deux niveaux est appelée pas de quantification.
- Plus ce pas est important, plus $\check{x}_n$ est différent de x_n et donc plus la perte d'informations est importante.
- Après la quantification, la numérisation est terminée, on peut donc qualifier $\check{x}_n$ de signal numérique.
  Dans la suite du cours, nous négligerons les effets de quantification et nous confondrons donc signaux discrets et signaux numériques.

Plan du chapitre

Analyse temporelle :

- La plupart des caractéristiques et opérations s'obtiennent en numérique en transformant les intégrales en sommes.
- Pour l'énergie et la puissance moyenne totale, on a :

$$E_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2, \quad (6)$$

$$P_x = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \sum_{n=-k}^{k} |x_n|^2. \quad (7)$$

Analyse temporelle :

- L'inter-corrélation numérique est donnée par :

$$
\begin{aligned}
C_{xy,k} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_{n-k} \text{ (si infinité d'échantillons)}, && (8)\\
&= \sum_{n=0}^{N} x_n y_{n-k} \text{ (si } N \text{ échantillons)}. && (9)
\end{aligned}
$$

- Le produit de convolution devient en numérique :

$$
\begin{aligned}
\{x \star y\}_k &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_{k-n} \text{ (si infinité d'échantillons)}, && (10)\\
&= \sum_{n=0}^{N} x_n y_{k-n} \text{ (si } N \text{ échantillons)}. && (11)
\end{aligned}
$$

Analyse temporelle :

- Comme dans le cas analogique, $\{x \star y\}_k$ est bien la version temporelle d'un nouveau signal.
- Pour ces formules, un échantillon inexistant est remplacé par un zéro. Ex : y_{-1} pour le calcul de $\{x \star y\}_0$.

Plan du chapitre

Analyse fréquentielle :

- On peut appliquer aux signaux numériques la transformée de Fourier en les considérant comme un train d'impulsions.
- Cette manipulation possède une limitation pratique importante : un système informatique ne peut traiter aucune donnée continue.
- Nous avons vu dans la section précédente que le spectre d'un signal discret peut de son côté être continu !
- Il convient de passer en « tout numérique » et d'avoir un spectre discret, donc sauvegardable et manipulable par un ordinateur.
- $\longrightarrow$ création d'un nouvel outil dédié à l'analyse fréquentielle en numérique : la Transformée de Fourier discrète (TFD).

Analyse fréquentielle : TFD

Définition

Soit x_n un signal numérique à énergie finie et N échantillons. On appelle **transformée de Fourier discrète** (TFD) de x_n, la représentation fréquentielle discrète notée X_m telle que :

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{nm}{N}}, \tag{12}$$

avec m un entier compris entre 0 et $N-1$. On note $\mathcal{TFD}$ l'opérateur qui à x_n associe $X_m = \mathcal{TFD}\{x_n\}$.

Analyse fréquentielle : TFD

- Elle fournit autant d'échantillons fréquentiels (les X_m) qu'on en avait en temporel (les x_n).

- Elle offre une représentation fréquentielle sur l'intervalle $[0, F_e]$. Il est inutile d'observer le spectre sur le reste des fréquences car l'échantillonnage provoque des répliques spectrales. La représentation fréquentielle est alors périodique et sa période est justement F_e.

- Les échantillons fréquentiels sont equi-répartis sur le segment $[0, F_e]$. La résolution fréquentielle (l'écart en fréquence entre deux échantillons) est donc forcément $\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{\tau}$ avec τ la durée d'enregistrement du signal en seconde.

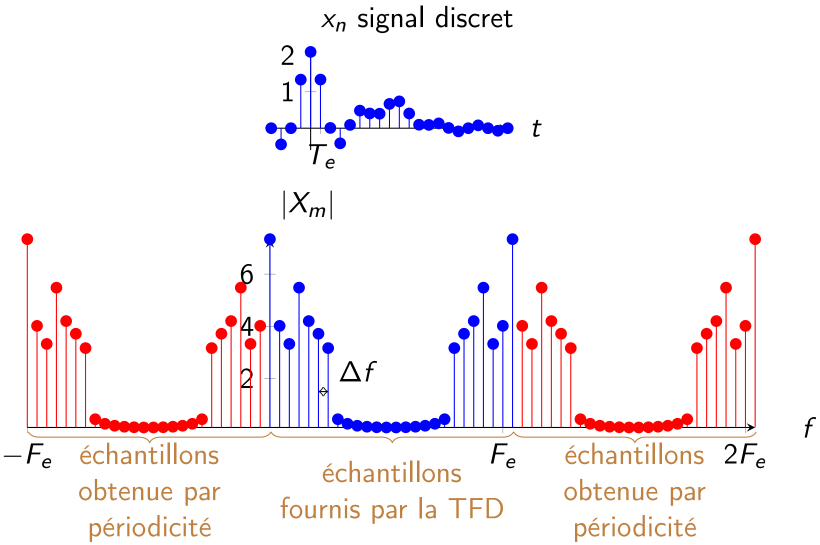
Analyse fréquentielle : TFD

- Formellement, la représentation fréquentielle $X_{num}(f)$ qu'on obtient grâce à la TFD est donc une fonction des fréquences qui est F_e-périodique et telle que $\forall f \in [0; F_e]$:

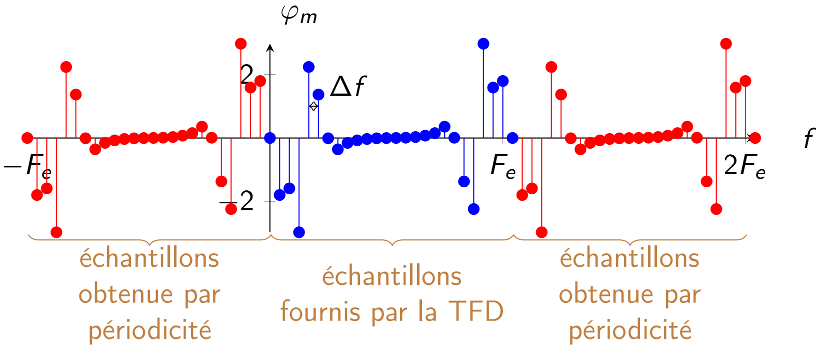
$$X_{num}(f) = \begin{cases} X_m \text{ si } f = \frac{mF_e}{N} = m \times \Delta f \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \tag{13}$$

- On confondra la suite X_m et la fonction $X_{num}(f)$, de même qu'on confond la suite x_n et la fonction $x_e(t)$.

Analyse fréquentielle : TFD (illustration)



Analyse fréquentielle : TFD (illustration)



Analyse fréquentielle : TFD

- Tout comme la TF, la TFD est une opération sans perte.
- Il existe donc un processus inverse appelé transformée de Fourier discrète inverse :

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{TFD}^{-1}\left(X_m\right), \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{2i\pi\frac{mn}{N}}. \end{aligned} \tag{14}$$

- Pour la mise en pratique sur ordinateur, il existe un algorithme appelé *Fast Fourier Transform* (FFT) qui fonctionne si le nombre d'échantillons N est une puissance de 2.

Analyse fréquentielle : TFD et TF

- Il faut bien comprendre que la TFD est un outil d'analyse différent de la TF.
- Un lien existe dans certains cas seuleument :
  - Partons d'un signal analogique $x(t)$ a priori non-nul pour toute valeur de t.
  - Le signal enregistré est $\breve{x}(t) = x(t) \times \Pi_{[0;\tau]}(t)$.
  - Supponsons que Shannon s'applique, on a alors :

$$\frac{1}{F_e}\breve{X}_m = \breve{X}\left(\frac{mF_e}{N}\right), \tag{15}$$

pour tout entier m compris entre $-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ [1].

- Dans le prochain chapitre, nous ne spécifierons plus que le signal est fenêtré en abandonnant la notation $\breve{x}_n$ au profit de x_n.

1. pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.