Chapitre 2 : Systèmes analogiques

John Klein

Lille1 Université - CRIStAL UMR CNRS 9189

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

UFR IEEA Informatique, Electronique Electrotechnique, Informatique

Notion de **système** :

- un signal est toujours la sortie d'un disposif émetteur et l'entrée d'un dispositif récepteur.
- Les entités traversées par un signal sont appelées **systèmes**.
- Un système est toujours excité par une entrée et fournit une sortie :

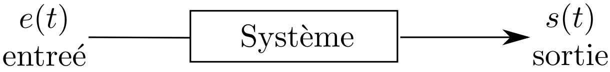


FIGURE – Vue schématique « entrée / sortie »d'un système.

- But du chapitre : trouver un lien mathématique reliant $s(t)$ à $e(t)$.

Deux situations différentes concernant les systèmes :

- Soit le traiteur cherche à agir sur le signal et le seul moyen d'y arriver est de mettre au point un système prenant en entrée ce signal et donner en sortie l'effet escompté (démarche de synthèse d'un système).
- Soit le traiteur est obligé d'utiliser un système qu'il ne maîtrise pas. Par exemple, pour un signal télécom, l'atmosphère est aussi un système sur lequel on ne peut pas intervenir. Il faut alors chercher à caractériser ce système pour éventuellement corriger plus tard ses effets indésirables (démarche d'analyse d'un système).

Plan du chapitre

La réponse d'un système à une entrée de type impulsion de Dirac joue un rôle clé dans l'analyse de dernier.

Définition

Soit une impulsion de Dirac centrée sur l'origine des temps $\delta(t)$. Pour un système donné, on appelle **réponse impulsionnelle** la sortie fournie par le système quand on lui présente $\delta(t)$ en entrée.

Déterminer le lien mathématique entre entrée et sortie dépend des **propriétés** du système.
Liste des propriétés possibles :

- **Linéarité** : Soit une entrée $e_1(t)$ produisant en sortie d'un système donné la sortie $s_1(t)$. Soit une autre entrée $e_2(t)$ produisant en sortie du même système la sortie $s_2(t)$. Si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'entrée $ae_1(t) + be_2(t)$ produit en sortie du système le signal $as_1(t) + bs_2(t)$ alors le système est dit linéaire. On interprête cette propriété comme le fait que « les effets sont proportionels aux causes ».
  Exemple pratique : un moteur électrique. Si on met un courant deux fois plus fort, le moteur tourne deux fois plus vite. En réalité, les systèmes sont souvent linéraires que dans une certaine gamme d'utilisation.

Liste des propriétés possibles :

- **Stationnarité** : Soit une entrée $e(t)$ pour le système et $s(t)$ la sortie correspondante. On dit que le système est stationnaire si $\forall\theta \in \mathbb{R}$, l'entrée retardée $e(t-\theta)$ produit la sortie $s(t-\theta)$. On interprête cette propriété comme le fait que la sortie du système ne dépend pas de l'origine des temps. Les mêmes causes produisent les mêmes effets indépendamment du moment où on utilise le système.
  En pratique un système est souvent quasi-stationnaire du fait de certains jeux mécaniques ou de diverses charges électriques.

- **Continuité** : Soit $e_n(t)$ une suite de signaux d'entrées dont les sorties respectives sont notées $s_n(t)$. Le système est continu si l'entrée $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} e_n(t)$ produit en sortie $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} s_n(t)$. Le système tolère le passage à la limite. Un dérivateur est un exemple de système non-continu.

Liste des propriétés possibles :

- **Instantanéité** : Un système est instantané si sa sortie $s(t)$ ne dépend que de l'entrée à l'instant présent $e(t)$: $s(t) = g \circ e(t)$ avec g une fonction quelconque. Un exemple de système instantané est un gain pur. Ces systèmes sont en pratique assez rares et théoriques. Une simple résistance a par exemple un certain temps de réaction même si il est négligeable. On oppose souvent à cette catégorie de systèmes, les systèmes **dynamiques** qui peuvent reposer sur un effet mémoire et dont la sortie dépend des valeurs passées de l'entrée. Un cas typique de systèmes dynamiques sont les systèmes régis par les équations différentielles.

- **Causalité** : Un système est causal si la relation liant la sortie à l'entrée ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée ou de la sortie. Les effets ne peuvent précéder les causes. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, les systèmes non-causaux sont assez répandus mais ils ne sont utilisables que si le signal d'entrée a été préalablement enregistré avant traitement.

Liste des propriétés possibles :

- **Stabilité** :
  - au sens large : Soit $e(t)$ une entrée bornée[1]. Si la sortie produite par $e(t)$ est elle aussi bornée alors le système est stable. Si on reprend l'exemple du moteur électrique, un courant borné ne peut donner une vitesse infinie.
  - au sens strict : un système est stable au sens strict si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers 0 au bout d'un certain temps : $\lim_{t \longrightarrow \infty} h(t) = 0$. La stabilité stricte est une propriété assez naturelle, toujours dans l'exemple du moteur, si on l'excite avec une impulsion il va démarrer puis décélérer progressivement sous l'effet des forces de frottement jusqu'à revenir à une vistesse nulle.
- **Réalisabilité** : un système est réalisable si il est causal et stable. Attention : Ne pas confondre réalisable et utilisable (les systèmes non-causaux étant bien utilisables).

1. Si $e(t)$ est bornée alors $\exists M > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}, e(t) \leq M$.

On caractérise facilement le lien entrée/sortie dans un cas particulier :

Définition

Un système linéraire, stationnaire et continu est appelé **système de convolution** (ou **filtre**).

On a alors la propriété suivante pour de tels systèmes :

Propriété

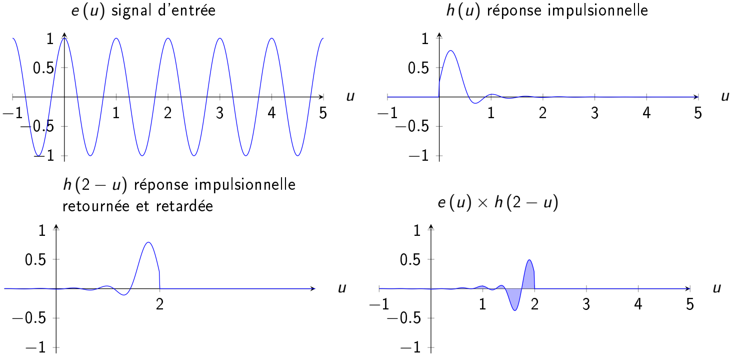
Soit un système de convolution dont la réponse impulsionnelle est notée $h(t)$. Soit $e(t)$ un signal d'entrée quelconque et $s(t)$ sa sortie. On a alors :

$$s = h \star e, \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u)\, h(t-u)\, du. \tag{2}$$

Pour les systèmes de convolution :

- Connaître $h(t)$ c'est connaître entièrement le système.
- On sait maintenant prédire de façon explicite la sortie du système.
- Le calcul d'un produit de convolution est néanmoins assez coûteux :



Propriétés du produit de convolution pour faciliter le calcul. Soient x, y et z trois signaux à énergie finie, on a :

- commutativité : $x \star y = y \star x$,
- associativité : $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$,
- distributivité par rapport à l'addition : $x \star (y + z) = x \star z + y \star z$,
- élément neutre : $x \star \delta = x$.

Autre propriété des systèmes de convolution :

- Un filtre est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour les temps négatifs : $\forall t < 0,\ h(t) = 0$.

- Comme la TF d'une telle fonction est forcément complexe, la phase $\varphi_H(f)$ n'est pas la fonction nulle.

- Autrement dit <u>tout filtre causal déphase</u> !

Plan du chapitre

Avantage des systèmes de convolution : lien mathématique simple dans le domaine fréquentiel :

$$s = h \star e \quad \Leftrightarrow \quad S(f) = H(f) \times E(f).$$

Définition

Soit un système de convolution de réponse impulsionnelle $h(t)$. On appelle **fonction de transfert** la TF de la réponse impulsionnelle : $H = \mathcal{F}\{h\}$.

Lien avec l'automatique : fonction de transfert dans le domaine de Laplace :

- Si on note p la variable de Laplace, on a $p = \sigma + 2i\pi f$, d'où le lien suivant :
$$H(f) = \left. H(p) \right|_{p=2i\pi f}. \tag{3}$$
- On passe donc directement du domaine de Laplace au domaine de Fourier mais le sens inverse n'est pas direct.
- Pour rappel, la **transformée de Laplace** d'un signal à énergie finie $x(t)$ est notée $X(p)$ et de définit pour tout $p \in \mathbb{C}$ par :
$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt. \tag{4}$$

- Si $|H(f_0)|$ est faible, alors exciter le système avec un signal qui oscille principalement à la fréquence f_0 n'aura quasiment **aucun effet** en sortie.

Définition

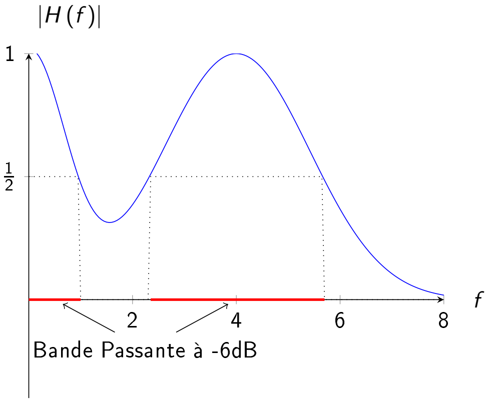
Soit un système de fonction de transfert $H(f)$. On appelle **bande passante à x décibels** du système la plage des fréquences $BP \subset \mathbb{R}$ telle que $\forall f \in BP$, $20 \log(|H(f)|) > x$.

Bande passante :

- La bande passante à 0dB correspond aux fréquences pour lesquelles, le système est amplificateur.
- On appelle **bande arrêtée**, le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de la bande passante.
- Dans ce cas de figure, la bande arrêtée correspond aux fréquences pour lesquelles le système est atténuateur.
- La bande passante la plus couramment utilisée est la bande passante à -3dB car elle correspond aux fréquences pour lesquelles le module de la sortie est au moins aussi élevé que environ 70% du module de l'entrée.

Bande passante :

- Quand ce ratio tombe à 50%, il s'agit de la bande passante à -6dB. Cette bande est observable à la figure suivante :



Plan du chapitre

- Un filtre idéal qui laisse passer complètement la bande passante et élimine totalement la bande arrêtée. La fonction de transfert idéale est telle que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 \text{ si } f \in BP \\ 0 \text{ si } f \notin BP \end{cases} . \quad (5)$$

- En ce qui concerne la phase, l'ideal est evidemment d'avoir $\varphi_H(f) = 0$ pour toute fréquence f.

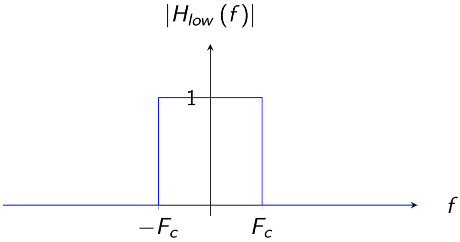
- On définit plusieurs natures de filtre en fonction que la zone des fréquences que l'on souhaite préserver est constituée de basses fréquences, de hautes fréquences, d'un segment de fréquences ou encore du complémentaire d'un segment.

Filtre idéal passe-bas :

- Dans le cas d'un filtre passe-bas, les fréquences d'intérêt sont les basses fréquences.

- La fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal est donc une fonction porte :
$$H_{low}(f) = \Pi_{[-F_c;F_c]}(f)\,. \tag{6}$$

- Le paramètre F_c codant la largeur de la porte est appelée **fréquence de coupure**. En $f = F_c$, la fonction de transfert passe de 1 à 0.



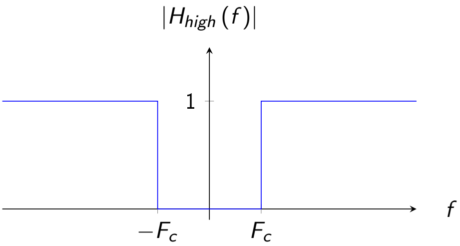
Filtre idéal passe-bas :

- Introduisons la fonction de transfert du passe-bas idéale normalisée H_{nlow} avec la fréquence de coupure unité $F_c = 1\text{Hz}$.
- On passe de H_{nlow} à H_{low} par un simple changement de variable :

$$H_{nlow}\left(\frac{f}{F_c}\right) = H_{low}\left(f\right).$$

Filtre idéal passe-haut :

- Dans le cas d'un filtre passe-haut, les fréquences d'intérêt sont les hautes fréquences.

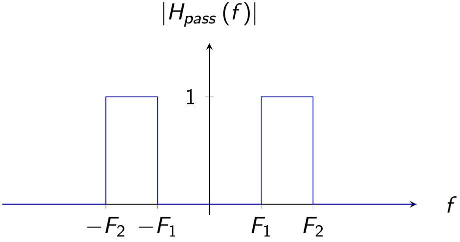


- On se ramène à l'étude du passe-bas normalisé par le changement de variable :

$$H_{high}(f) = H_{nlow}\left(\frac{F_c}{f}\right).$$

Filtre idéal passe-bande :

- Dans le cas d'un filtre passe-bande, les fréquences d'intérêt sont comprises dans un segment de l'axe des fréquences $[F_1, F_2]$.

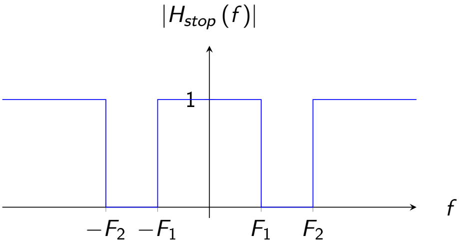


- Si on pose $W = F_2 - F_1$ et $F_0 = \sqrt{F_1 F_2}$, on se ramène à l'étude du passe-bas normalisé par le changement de variable :

$$H_{band}(f) = H_{nlow}\left(\frac{F_0}{W}\frac{\left(\frac{f}{F_0}\right)^2 - 1}{\frac{f}{F_0}}\right).$$

Filtre idéal coupe-bande :

- Dans le cas d'un filtre coupe-bande, on souhaite supprimer les fréquences comprises dans un segment de l'axe des fréquences $[F_1, F_2]$.



- Si on pose $W = F_2 - F_1$ et $F_0 = \sqrt{F_1 F_2}$, on se ramène à l'étude du passe-bas normalisé par le changement de variable :

$$H_{stop}(f) = H_{nlow}\left(\frac{W}{F_0}\frac{\frac{f}{F_0}}{\left(\frac{f}{F_0}\right)^2 - 1}\right).$$

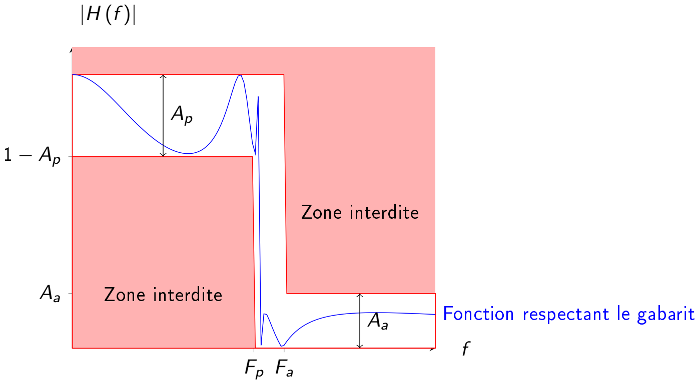
Plan du chapitre

1. Propriétés des systèmes

2. Systèmes de convolution et filtrage
   - Fonction de transfert et bande passante
   - Filtres idéaux
   - Synthèse de filtres réalisables

- Objectif : pouvoir utiliser des filtres en mode « on-line » (temps réel),
- Idée : trouver une approximation de la fonction de transfert idéale telle que sa TF inverse soit nulle pour les temps négatifs (causalité).

Comment approximer ? En définissant une tolérance à s'écarter de la fonction idéale :



Définition

On appelle **gabarit** d'un filtre la zone du plan dans lequel le graphe de $|H(f)|$ est autorisée à passer. Une zone similaire peut être définie pour le graphe de $\varphi_H(f)$.

Le gabarit est une sorte de cahier des charges d'un filtre et il est entièrement déterminé par les quatre paramètres suivant :

- A_p : ondulation maximale en bande passante,
- A_a : ondulation maximale en bande arrêtée,
- F_p : fréquence frontière de la bande passante,
- F_a : fréquence frontière de la bande arrêtée.

Si on part d'un problème de synthèse d'un filtre réalisable autre qu'un passe-bas, on doit :

1. Déterminer le gabarit du filtre en question,
2. Transformer ce gabarit en gabarit pour passe-bas, en appliquant le changement de variable adéquat aux deux enveloppes du gabarit,
3. Trouver une fonction satisfaisant le gabarit passe-bas,
4. Transformer la fonction trouvée à l'aide du changement de variable inverse pour obtenir celle désirée.

Comment respecter le gabarit ?

- La forme générique d'une équation différentielle reliant la sortie d'un système $s(t)$ à son entrée $e(t)$ est :

$$a_n s^n(t) + \ldots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t), \tag{7}$$

  avec les $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ et $\{b_i\}_{i=0}^{m}$ des constantes réelles ou complexes.
- Passons en Laplace :

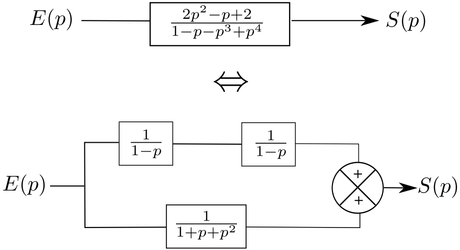
$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j p^j}. \tag{8}$$

- Cette forme de fonction s'appelle fraction rationnelle.
- Trouver la bonne fonction = Trouver les bons coefficients a_j et b_i.

- On appelle l'entier n l'ordre du filtre.
- Les racines du polynôme $\sum_{j=0}^{n} a_j p^j$ sont appelées les pôles de la fonction de transfert.
- Les racines du polynôme $\sum_{i=0}^{m} b_i p^i$ sont appelées les zéros de la fonction de transfert

Avantage des fractions rationnelles :

- Une fraction rationnelle d'ordre n peut être décomposée en somme de cascades de fractions rationnelles d'ordre 1 ou 2 :



- Les filtres d'ordre 1 et 2 sont facilement réalisable sous forme de circuits électroniques à bases de résistances, condendateurs et bobines avec éventuellement des amplificateurs opérationnels.

Stabilité des fractions rationnelles :

Propriété

Soit un système de convolution représenté par une fonction de transfert type fraction rationnelle d'ordre n. Soient $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ les pôles de cette fonction. Le système est stable au sens strict si et seulement si : $\forall i$

$$\mathrm{Re}\left\{p_i\right\} < 0. \tag{9}$$

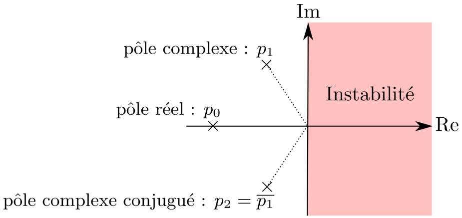


FIGURE – Domaine de stabilité pour les pôles d'une fraction rationnelle.

Comment trouver les coefficients d'une fraction rationnelle ? en contraignant le problème avec :

- Pour un passe-bas :
  - $|H(0)| = 1$ ce qui impose $a_0 = b_0$,
  - $\lim\limits_{f \longrightarrow +\infty} |H(f)| = 0$ ce qui impose $m < n$,
- En rajoutant des propriétés sur les dérivées de la fraction.
- Selon les propriétés souhaitées, on définit alors différentes familles de filtres.

Filtres de Butterworth :

- La propriété recherchée est la platitude maximale en bande passante (dérivées à l'ordre $2n$ nulles en $f = 0$ si ordre du filtre est n)

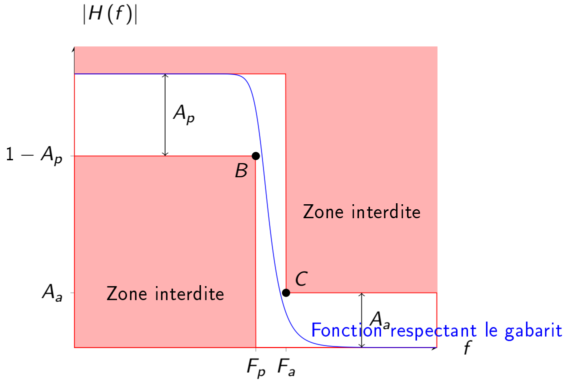
- Le module de la fonction de transfert de cette famille en fréquentiel est :

$$|H_{butter}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_c}\right)^{2n}}}, \tag{10}$$

  avec F_c la fréquence de coupure à -3dB : $|H_{butter}(F_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- On prend $F_c \in [F_p; F_a]$.

Filtres de Butterworth : comment choisir l'ordre n ?



- Il faut que la fonction $|H(f)|$ passe au dessus du point B de coordonnées $(F_p; 1 - A_p)$ et en dessous du point C de coordonnées $(F_a; A_a)$

Filtres de Butterworth : comment choisir l'ordre n ?

D'un point de vue mathématique, on a donc les contraites suivantes :

$$\begin{cases} |H(F_p)| \geq 1 - A_p \\ |H(F_a)| \leq A_a \end{cases} .$$

Filtres de Butterworth : comment touver la phase ? (valable pour les autres familles)

- (1) : On cherche une fonction $G(p)$ telle que $|G(p)|_{p=2i\pi f}| = |H(f)|^2$. Pour Butterworth, on a :

$$G(p) = \frac{1}{1 + (-1)^n \left(\frac{p}{2\pi F_c}\right)^{2n}}, \tag{11}$$

- (2) : On cherche les pôles de $G(p)$ que l'on note $\{p_i\}_{i=1}^{2n}$.

Filtres de Butterworth : comment touver la phase ? (valable pour les autres familles)

- (3) On sélectionne les n pôles stables :

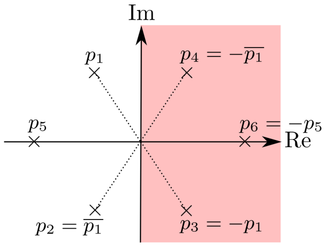


FIGURE – Pôles de la fonction $|G(p)|$.

- (4) On ré-ordonne les pôles de sorte que les pôles stables soient les n premiers et on obtient la fonction souhaitée en posant :

$$H(p) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p - p_i}.$$

Filtres de Butterworth : comment touver la phase ? (valable pour les autres familles)

- Exemple : filtre de Butterworth d'ordre $n = 2$ et de fréquence de coupure $F_c = \frac{1}{2\pi}$Hz.

$$|H(p)| = \frac{1}{\sqrt{1+p^4}}. \tag{12}$$

Filtres de Butterworth : graphes

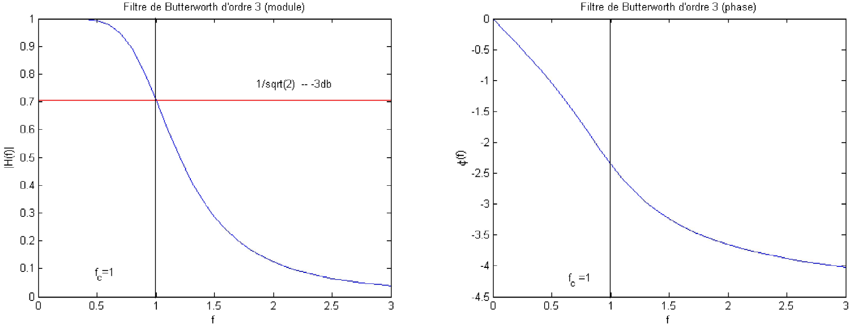


FIGURE – Module et phase d'un filtre de Butterworth

Filtres de Tchebychev :

- Les filtres de Tchebychev sont plus sélectifs que ceux de Butterworth.
- A ordre égal, les filtres de Tchebychev passent « plus vite » de la bande passante à la bande arrêtée.
- En contre-partie, les filtres de Tchebychev autorisent des ondulations (ripple).
- Les ondulations sont néfastes car la qualité du filtre n'est alors pas constante en fonction de f.
- Il existe deux types de filtres de Tchebychev selon que les ondulations sont autorisées en bande passante (type I) ou en bande arrêtée (type II).

Filtres de Tchebychev :

- Les modules des fonctions de transfert en fréquentiel sont données par les équations suivantes :

$$\text{type I} : |H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2\left(\frac{f}{F_p}\right)}}, \tag{13}$$

$$\text{type II} : |H(f)| = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2\left(\frac{f}{F_a}\right)}{1+\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^2\left(\frac{f}{F_a}\right)}}, \tag{14}$$

$$\text{avec } T_n(u) = \begin{cases} \cos\left(n \arccos\left(u\right)\right) \text{ si } |u| < 1 \\ \mathrm{ch}\left(n \text{ argch}\left(u\right)\right) \text{ si } |u| \geq 1 \end{cases}. \tag{15}$$

- Le paramètre ϵ code l'amplitude des ondulations de la manière suivante :
  - pour le type I, en bande passante, l'amplitude maximale est $1 - \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$,
  - pour le type II, en bande arrêtée, l'amplitude maximale est $\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$.

Filtres de Tchebychev : graphes

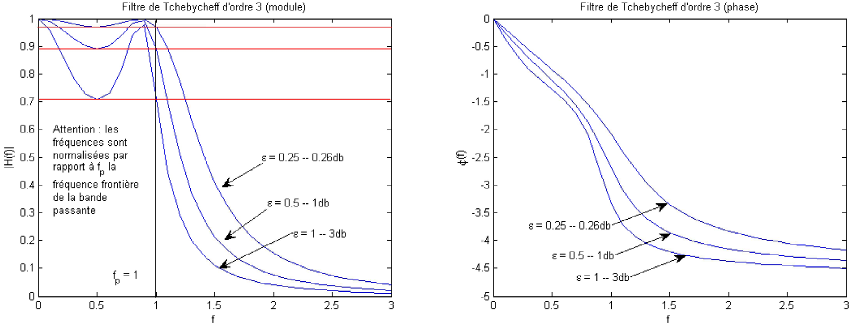


Figure – Module et phase de filtres de Tchebychev de type I

Filtres de Tchebychev : graphes

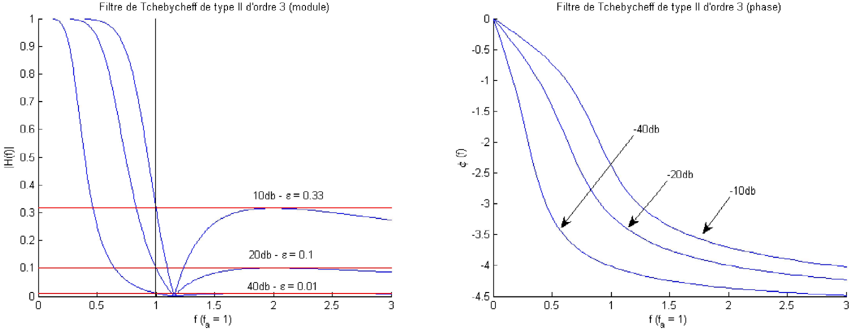


FIGURE – Module et phase de filtres de Tchebychev de type II

Filtres elliptique :

- Le filtre elliptique est encore plus sélectif que celui de Tchebycheff.
- En contre-partie, des ondulations sont présentes à la fois en bande passante et en bande arrêtée.
- La fonction de transfert en fréquentiel du filtre elliptique est donnée par :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 R_n^2\left(\xi, \frac{f}{F_c}\right)}}. \tag{16}$$

- ϵ est un paramètre régulant l'intensité des ondulations, ξ influe sur la sélectivité et R_n est une fraction rationnelle dont l'expression présente peu d'intérêt.

Filtres elliptique : graphes

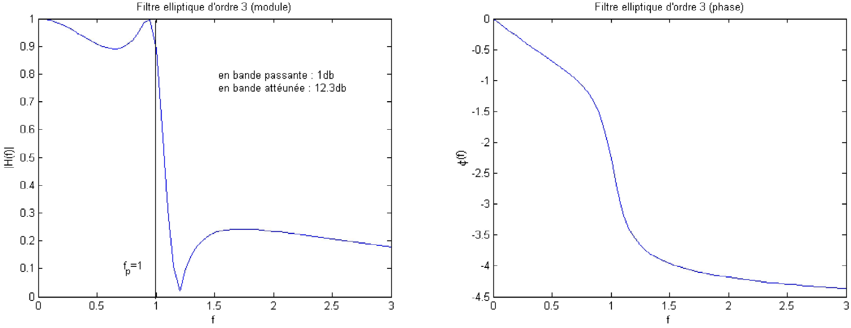


FIGURE – Module et phase d'un filtre elliptique

Filtres de Bessel :

- Le filtre de Bessel se distingue par une propriété sur la phase plutôt que sur le module.
- Ce filtre est à déphasage quasi-linéaire dans la bande passante : $\forall f \in BP$, $\varphi_H(f) \approx -2\pi t_0 f$. Un tel déphasage se traduit que par un retard pur de t_0 entre la sortie et l'entrée.
- La forme générique de la fonction de transfert en fréquentiel de ce filtre est donnée par :

$$H(f) = \frac{\Theta_n(0)}{\Theta_n\left(i\frac{f}{F_c}\right)}, \tag{17}$$

$$\text{avec } \Theta_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}i!\,(n-i)!}u^i. \tag{18}$$

Filtres de Bessel : graphes

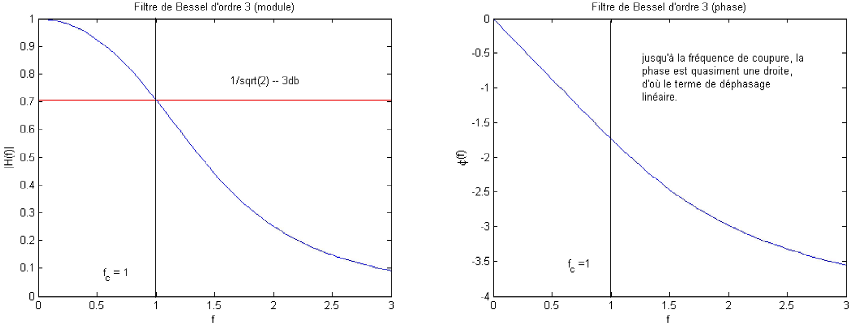


Figure – Module et phase d'un filtre de Bessel