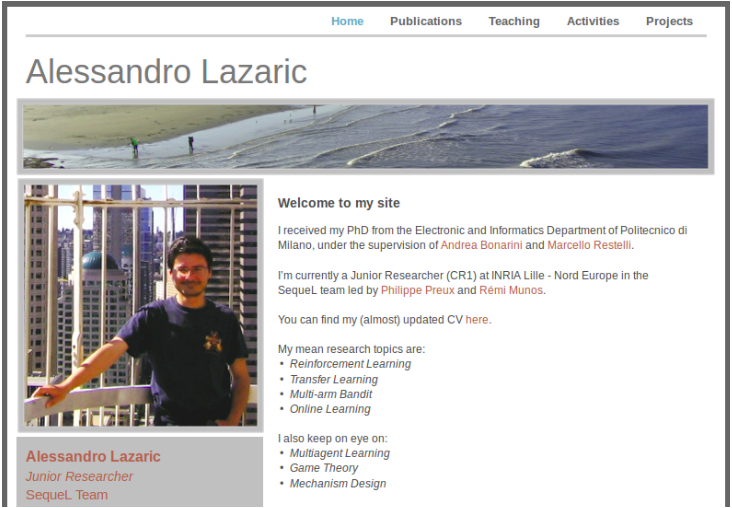
A2DI: Apprentissage par Renforcement : modélisation

John Klein

Lille1 Université - CRIStAL UMR CNRS 9189

- d'après un document d'Alessandro Lazaric -

Visitez sa homepage



Changeons un peu de sujet et parlons d'apprentissage par renforcement !

- On a plus d'exemples $\mathbf{x}^{(i)}$.

- On a plus de solutions associées $y^{(i)}$.

- .. mais on a une fonction de récompense r.

Changeons un peu de sujet et parlons d'apprentissage par renforcement !

- On a plus d'exemples $\mathbf{x}^{(i)}$.
- On a plus de solutions associées $y^{(i)}$.
- .. mais on a une fonction de récompense r.

Changeons un peu de sujet et parlons d'apprentissage par renforcement !

- On a plus d'exemples $\mathbf{x}^{(i)}$.
- On a plus de solutions associées $y^{(i)}$.
- .. mais on a une fonction de récompense r.

Changeons un peu de sujet et parlons d'apprentissage par renforcement !

- On a plus d'exemples $\mathbf{x}^{(i)}$.
- On a plus de solutions associées $y^{(i)}$.
- .. mais on a une fonction de récompense r.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment modéliser un problème d'apprentissage de cette nature.

Plan du chapitre

Définition :

Reinforcement learning is learning what to do – how to map situations to actions – so as to **maximize** a numerical **reward** signal in an **unknown uncertain** environment. The learner is not told which actions to take, as in most forms of machine learning, but she must discover which actions yield the most reward by trying them (**trial–and–error**). In the most interesting and challenging cases, actions may affect not only the immediate reward but also the next situation and, through that, all subsequent rewards (**delayed reward**).

"An introduction to reinforcement learning",
Sutton and Barto (1998).

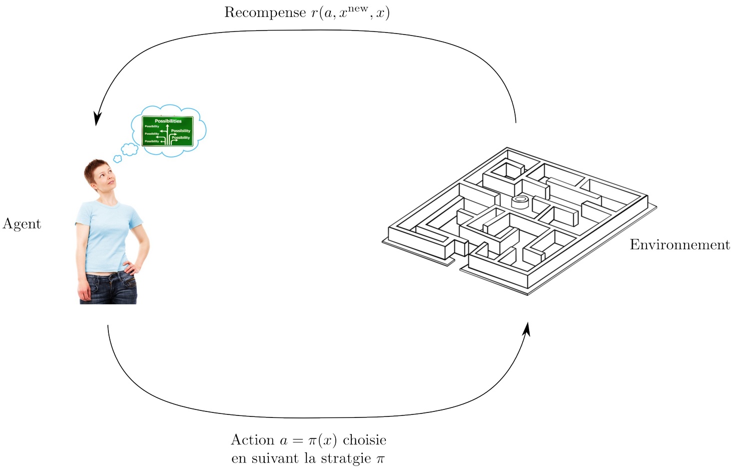
RL : un concept né de la psychologie animale (Pavlov)

RL : un concept né de la psychologie animale (Pavlov)

.. puis adapté en automatique et en informatique

RL : un concept né de la psychologie animale (Pavlov)

.. puis adapté en automatique et en informatique



RL : comparaison avec les autres paradigmes :

- L'apprentissage supervisé offre de bonnes performances, mais la supervision coûte cher !
- L'apprentissage supervisé n'offre pas de réelles garanties de performances.
- L'apprentissage par renforcement offre de telles garantie tout en nécessitant une forme de supervision beaucoup plus faible.

RL : comparaison avec les autres paradigmes :

- L'apprentissage supervisé offre de bonnes performances, mais la supervision coûte cher !
- L'apprentissage supervisé n'offre pas de réelles garanties de performances.
- L'apprentissage par renforcement offre de telles garantie tout en nécessitant une forme de supervision beaucoup plus faible.

RL : comparaison avec les autres paradigmes :

- L'apprentissage supervisé offre de bonnes performances, mais la supervision coûte cher !
- L'apprentissage supervisé n'offre pas de réelles garanties de performances.
- L'apprentissage par renforcement offre de telles garantie tout en nécessitant une forme de supervision beaucoup plus faible.

RL : Quelle démarche ?

- Trouver comment modéliser le problème.
- Trouver comment résoudre exactement le problème.
- Trouver comment résoudre incrémentallement le problème.
- Trouver comment résoudre efficacement le problème.
- Trouver comment résoudre approximativement le problème.

RL : Quelle démarche ?

- Trouver comment modéliser le problème.
- Trouver comment résoudre exactement le problème.
- Trouver comment résoudre incrémentallement le problème.
- Trouver comment résoudre efficacement le problème.
- Trouver comment résoudre approximativement le problème.

RL : Quelle démarche ?

- Trouver comment modéliser le problème.
- Trouver comment résoudre exactement le problème.
- Trouver comment résoudre incrémentallement le problème.
- Trouver comment résoudre efficacement le problème.
- Trouver comment résoudre approximativement le problème.

RL : Quelle démarche ?

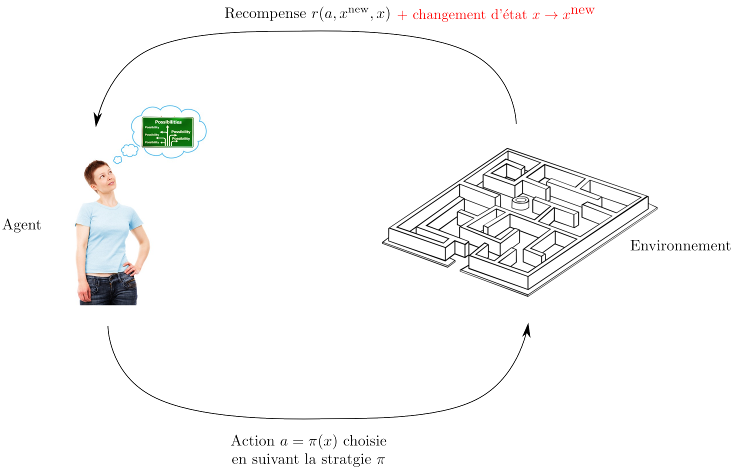
- Trouver comment modéliser le problème.
- Trouver comment résoudre exactement le problème.
- Trouver comment résoudre incrémentallement le problème.
- Trouver comment résoudre efficacement le problème.
- Trouver comment résoudre approximativement le problème.

RL : Quelle démarche ?

- Trouver comment modéliser le problème.
- Trouver comment résoudre exactement le problème.
- Trouver comment résoudre incrémentallement le problème.
- Trouver comment résoudre efficacement le problème.
- Trouver comment résoudre approximativement le problème.

Plan du chapitre

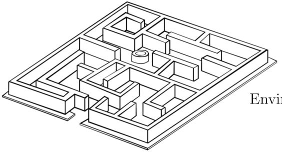
RL : soyons un peu plus précis sur le mécanisme :



RL : soyons un peu plus précis sur le mécanisme :

Recompense $r(a, x^{\text{new}}, x)$ + changement d'état $x \to x^{\text{new}}$

Agent

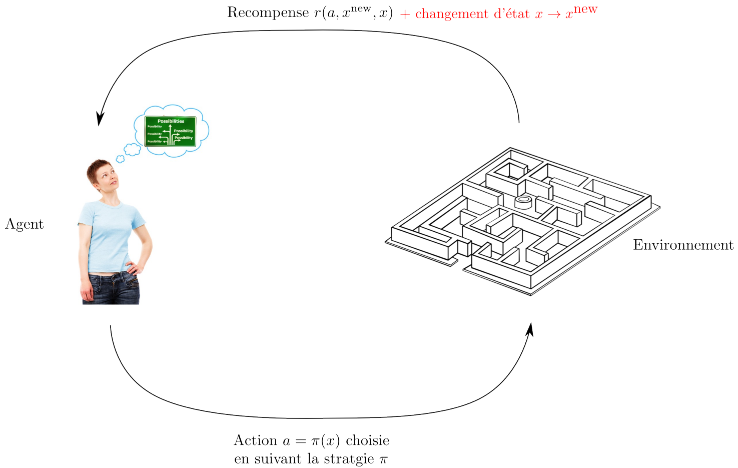


Environnement

Action $a = \pi(x)$ choisie
en suivant la stratgie π

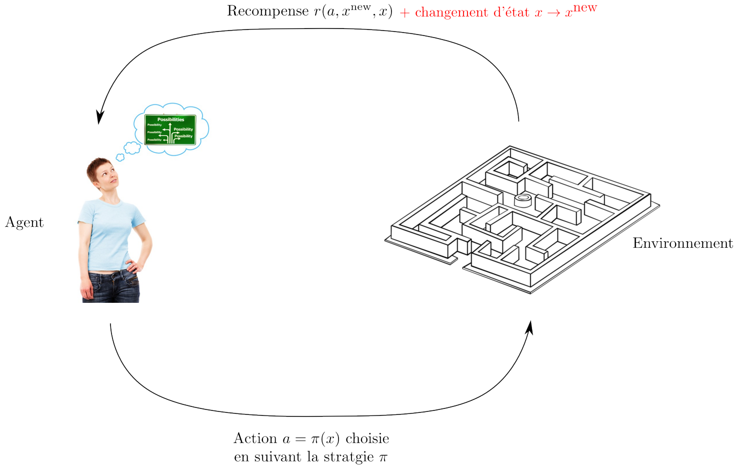
a est une action.

RL : soyons un peu plus précis sur le mécanisme :



a est une action. x_t est l'état dans lequel on est à l'instant t (suite à nos actions).

RL : soyons un peu plus précis sur le mécanisme :



a est une action. x_t est l'état dans lequel on est à l'instant t (suite à nos actions). π est la politique (stratégie) qu'on a suivi pour choisir nos actions.

Chaînes de Markov

Pause proba !

Définition (Chaîne de Markov)

Soit X l'espace d'état un sous-ensemble borné compact d'un espace Euclidien, le système dynamique à temps discret $(x_t)_{t\in\mathbb{N}} \in X$ est une chaîne de Markov si il satisfait la proriété de Markov :

$$\mathbb{P}(x_{t+1} = x \,|\, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_0) = \mathbb{P}(x_{t+1} = x \,|\, x_t),$$

Etant donné un état initial $x_0 \in X$, la chaîne de Markov est entièrement caractérisée par les probabilité de transition p

$$p(y|x) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x).$$

Processus de Décision Markovien

Définition (Processus de Décision Markovien)

Un **Processus de Décision Markovien** est un quadruplet $M = (X, A, p, r)$ où

- X est l'espace d'état,
- A est l'espace d'action,
- $p(y|x, a)$ est la probabilité de transition avec

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a),$$

- $r(x, a, y)$ est la fonction de récompense suite à la transition (x, a, y).

Processus de Décision Markovien

Définition (Processus de Décision Markovien)

Un **Processus de Décision Markovien** est un quadruplet $M = (X, A, p, r)$ où

- X est l'espace d'état,
- A est l'espace d'action,
- $p(y|x, a)$ est la probabilité de transition avec

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a),$$

- $r(x, a, y)$ est la fonction de récompense suite à la transition (x, a, y).

Processus de Décision Markovien

Définition (Processus de Décision Markovien)

Un **Processus de Décision Markovien** est un quadruplet $M = (X, A, p, r)$ où

- X est l'espace d'état,
- A est l'espace d'action,
- $p(y|x, a)$ est la probabilité de transition avec

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y|x_t = x, a_t = a),$$

- $r(x, a, y)$ est la fonction de récompense suite à la transition (x, a, y).

Processus de Décision Markovien

Définition (Processus de Décision Markovien)

Un **Processus de Décision Markovien** est un quadruplet $M = (X, A, p, r)$ où

- X est l'espace d'état,
- A est l'espace d'action,
- $p(y|x, a)$ est la probabilité de transition avec

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a),$$

- $r(x, a, y)$ est la fonction de récompense suite à la transition (x, a, y).

Processus de Décision Markovien

Définition (Processus de Décision Markovien)

Un **Processus de Décision Markovien** est un quadruplet $M = (X, A, p, r)$ où

- X est l'espace d'état,
- A est l'espace d'action,
- $p(y|x, a)$ est la probabilité de transition avec

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a),$$

- $r(x, a, y)$ est la fonction de récompense suite à la transition (x, a, y).

Processus de Décision Markovien : hypothèses nécessaires

- hypopthèse temporelle : le temps est discret (non continu)

$$t \rightarrow t+1$$

- hypothèse Markovienne : l'état courant x et l'action a sont des statistiques suffisantes pour le prochain état y

$$p(y|x,a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a)$$

- hypothèse de récompense : la récompense est entièrement définie par tout ou partie des transitions

$$r(x,a,y)$$

- hypothèse de stationnarité : la dynamique et la récompense n'évoluent pas dans le temps

$$p(y|x,a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a) \qquad r(x,a,y)$$

Processus de Décision Markovien : hypothèses nécessaires

- hypopthèse temporelle : le temps est discret (non continu)

$$t \to t+1$$

- hypothèse Markovienne : l'état courant x et l'action a sont des statistiques suffisantes pour le prochain état y

$$p(y|x,a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a)$$

- hypothèse de récompense : la récompense est entièrement définie par tout ou partie des transitions

$$r(x,a,y)$$

- hypothèse de stationnarité : la dynamique et la récompense n'évoluent pas dans le temps

$$p(y|x,a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a) \qquad r(x,a,y)$$

Processus de Décision Markovien : hypothèses nécessaires

- hypopthèse temporelle : le temps est discret (non continu)

$$t \rightarrow t + 1$$

- hypothèse Markovienne : l'état courant x et l'action a sont des statistiques suffisantes pour le prochain état y

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a)$$

- hypothèse de récompense : la récompense est entièrement définie par tout ou partie des transitions

$$r(x, a, y)$$

- hypothèse de stationnarité : la dynamique et la récompense n'évoluent pas dans le temps

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a) \qquad r(x, a, y)$$

Processus de Décision Markovien : hypothèses nécessaires

- hypopthèse temporelle : le temps est discret (non continu)

$$t \rightarrow t + 1$$

- hypothèse Markovienne : l'état courant x et l'action a sont des statistiques suffisantes pour le prochain état y

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a)$$

- hypothèse de récompense : la récompense est entièrement définie par tout ou partie des transitions

$$r(x, a, y)$$

- hypothèse de stationnarité : la dynamique et la récompense n'évoluent pas dans le temps

$$p(y|x, a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = y | x_t = x, a_t = a) \qquad r(x, a, y)$$

Est-ce que le formalisme du MDP[1] *est suffisamment puissant ?*

$\Rightarrow$ Essayons !

1. MDP : Markov Decision Process

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

Exemple : gestion du stock d'un magasin

A chaque mois t, un magasin contient x_t exemplaires d'un article et la demande pour cet article est D_t. A la fin de chaque mois, le manager peu commander a_t exemplaires de plus à son fournisseur. De plus, on sait que :

- le coût du stockage de x exemplaires est $h(x)$,
- le coût de l'achat de a exemplaires est $C(a)$,
- le revenu des ventes de q exemplaires est $f(q)$,
- si la demande D est supérieure à la disponibilité x, les clients qui n'ont pu être servis partent.
- le nombre d'exemplaires à la fin de l'année est $g(x)$.
- Contrainte : la capacité maximum de stockage est M.

Processus de Décision Markovien : Exemple

- Espace d'état : $x \in X = \{0, 1, \ldots, M\}$.
- Espace d'action : il n'est pas possible de commander plus d'exemplaires que la capacité du magasin, donc l'espace d'action dépend de l'état courant. Formellement, à l'état x, $a \in A(x) = \{0, 1, \ldots, M - x\}$.
- Dynamique : $x_{t+1} = [x_t + a_t - D_t]^+$.
  Problème : la dynamique doit être Markovienne et stationnaire !
- La demande D_t est stochastique et dépend du temps. Formellement, $D_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}oi$.
- Récompense : $r_t = -C(a_t) - h(x_t + a_t) + f([x_t + a_t - x_{t+1}]^+)$.

Processus de Décision Markovien : Exemple

- Espace d'état : $x \in X = \{0, 1, \ldots, M\}$.
- Espace d'action : il n'est pas possible de commander plus d'exemplaires que la capacité du magasin, donc l'espace d'action dépend de l'état courant. Formellement, à l'état x, $a \in A(x) = \{0, 1, \ldots, M - x\}$.
- Dynamique : $x_{t+1} = [x_t + a_t - D_t]^+$.
  Problème : la dynamique doit être Markovienne et stationnaire !
- La demande D_t est stochastique et dépend du temps. Formellement, $D_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}oi$.
- Récompense : $r_t = -C(a_t) - h(x_t + a_t) + f([x_t + a_t - x_{t+1}]^+)$.

Processus de Décision Markovien : Exemple

- Espace d'état : $x \in X = \{0, 1, \ldots, M\}$.
- Espace d'action : il n'est pas possible de commander plus d'exemplaires que la capacité du magasin, donc l'espace d'action dépend de l'état courant. Formellement, à l'état x, $a \in A(x) = \{0, 1, \ldots, M - x\}$.
- Dynamique : $x_{t+1} = [x_t + a_t - D_t]^+$.
  Problème : la dynamique doit être Markovienne et stationnaire !
- La demande D_t est stochastique et dépend du temps. Formellement, $D_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}oi$.
- Récompense : $r_t = -C(a_t) - h(x_t + a_t) + f([x_t + a_t - x_{t+1}]^+)$.

Processus de Décision Markovien : Exemple

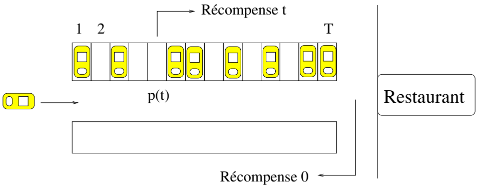
- Espace d'état : $x \in X = \{0, 1, \dots, M\}$.
- Espace d'action : il n'est pas possible de commander plus d'exemplaires que la capacité du magasin, donc l'espace d'action dépend de l'état courant. Formellement, à l'état x, $a \in A(x) = \{0, 1, \dots, M - x\}$.
- Dynamique : $x_{t+1} = [x_t + a_t - D_t]^+$.
  Problème : la dynamique doit être Markovienne et stationnaire !
- La demande D_t est stochastique et dépend du temps. Formellement, $D_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}oi$.
- Récompense : $r_t = -C(a_t) - h(x_t + a_t) + f([x_t + a_t - x_{t+1}]^+)$.

Processus de Décision Markovien : Exemple

- Espace d'état : $x \in X = \{0, 1, \ldots, M\}$.
- Espace d'action : il n'est pas possible de commander plus d'exemplaires que la capacité du magasin, donc l'espace d'action dépend de l'état courant. Formellement, à l'état x, $a \in A(x) = \{0, 1, \ldots, M - x\}$.
- Dynamique : $x_{t+1} = [x_t + a_t - D_t]^+$.
  Problème : la dynamique doit être Markovienne et stationnaire !
- La demande D_t est stochastique et dépend du temps. Formellement, $D_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{L}oi$.
- Récompense : $r_t = -C(a_t) - h(x_t + a_t) + f([x_t + a_t - x_{t+1}]^+)$.

Processus de Décision Markovien : Exercice

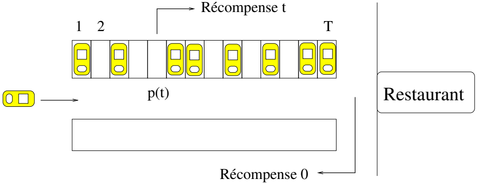
Le problème du parking Un conducteur veut garer sa voiture le plus près possible du restaurant.



- Le conducteur ne peut voir si une place est libre avant d'être devant.
- Il y a P places.
- A chaque place i, le conducteur peut soit continuer soit se garer (si la place est libre).
- Plus on est près du restaurant, plus la satisfaction est grande.
- Si le conducteur ne trouve pas de place, il part chercher un autre restaurant.

Processus de Décision Markovien : Exercice

Le problème du parking Un conducteur veut garer sa voiture le plus près possible du restaurant.



- Le conducteur ne peut voir si une place est libre avant d'être devant.
- Il y a P places.
- A chaque place i, le conducteur peut soit continuer soit se garer (si la place est libre).
- Plus on est près du restaurant, plus la satisfaction est grande.
- Si le conducteur ne trouve pas de place, il part chercher un autre restaurant.

Processus de Décision Markovien : Exercice

Le problème du parking

Processus de Décision Markovien : Politique (ou stratégie)

Définition (Politique)

Une règle de décision π_t peut être

- Déterminististe : $\pi_t : X \to A$,
- Stochastique : $\pi_t : X \to \Delta(A)$,

Une politique (strategie, plan) peut être

- Non-stationnaire : $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$,
- Stationnaire (Markoviennne) : $\pi = (\pi, \pi, \pi, \ldots)$.

Rq : MDP M + politique stationnaire $\pi \Rightarrow$ chaîne de Markov des états X_t avec pour probabilité de transition $p(y|x) = p(y|x, \pi(x))$.

Processus de Décision Markovien : Politique (ou stratégie)

Définition (Politique)

Une règle de décision π_t peut être

- Déterminististe : $\pi_t : X \rightarrow A$,
- Stochastique : $\pi_t : X \rightarrow \Delta(A)$,

Une politique (strategie, plan) peut être

- Non-stationnaire : $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$,
- Stationnaire (Markoviennne) : $\pi = (\pi, \pi, \pi, \ldots)$.

Rq : MDP M + politique stationnaire $\pi \Rightarrow$ chaîne de Markov des états X_t avec pour probabilité de transition $p(y|x) = p(y|x, \pi(x))$.

Processus de Décision Markovien : Politique (ou stratégie)

Définition (Politique)

Une règle de décision π_t peut être

- Déterminististe : $\pi_t : X \to A$,
- Stochastique : $\pi_t : X \to \Delta(A)$,

Une politique (strategie, plan) peut être

- Non-stationnaire : $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$,
- Stationnaire (Markoviennne) : $\pi = (\pi, \pi, \pi, \ldots)$.

Rq : MDP M + politique stationnaire $\pi \Rightarrow$ chaîne de Markov des états X_t avec pour probabilité de transition $p(y|x) = p(y|x, \pi(x))$.

Processus de Décision Markovien : Politique (ou stratégie)

Exemple : gestion du stock d'un magasin

- Politique stationnaire n°1

$$\pi(x) = \begin{cases} M - x & \text{si } x < M/4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Politique stationnaire n°1

$$\pi(x) = \max\{(M - x)/2 - x; 0\}$$

- Politique non-stationnaire

$$\pi_t(x) = \begin{cases} M - x & \text{si } t < 6 \\ \lfloor (M - x)/5 \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

Plan du chapitre

Comment évaluer une politique - comparer deux politiques ?

$\Rightarrow$ fonction de valeur !

Optimalité à horizon d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.

- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.

- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.

- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

Optimalité à horizon d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.

- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.

- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.

- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

Optimalité à horizon d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.
- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.
- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.
- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

Optimalité à horizon d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.
- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.
- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.
- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.

$$V^{\pi}(t,x) = \mathbb{E}\left[\sum_{s=t}^{T-1} r(x_s, \pi_s(x_s)) + R(x_T) \middle| \, x_t = x; \pi \right],$$

où R est la fonction de valeur de l'état final.

- *Utile quand :* il y a une *deadline* explicite à respecter.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon finie T : *deadline* au temps T, l'agent se focalise sur la récompense cumulée jusqu'à T.

$$V^{\pi}(t,x) = \mathbb{E}\Big[\sum_{s=t}^{T-1} r(x_s, \pi_s(x_s)) + R(x_T) \Big| \, x_t = x; \pi\Big],$$

où R est la fonction de valeur de l'état final.

- *Utile quand :* il y a une *deadline* explicite à respecter.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.

$$V^{\pi}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(x_t, \pi(x_t)) \,|\, x_0 = x; \pi\right],$$

  avec facteur d'affaiblissement $0 \leq \gamma < 1$:
  - petit = récompense à court terme, grand = récompense à long terme
  - pour tout $\gamma \in [0, 1)$ la suite converge toujours (pour des récompenses bornées)

- *Utile quand :* la *deadline* est incertaine et/ou le problème fait explicitement référence à un facteur d'affaiblissement.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec afaiblissement : le problème est sans fin mais les récompenses à court terme ont une importance plus élévée.

$$V^{\pi}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(x_t, \pi(x_t)) \,|\, x_0 = x; \pi\right],$$

  avec facteur d'affaiblissement $0 \leq \gamma < 1$:
  - petit = récompense à court terme, grand = récompense à long terme
  - pour tout $\gamma \in [0, 1)$ la suite converge toujours (pour des récompenses bornées)

- *Utile quand :* la *deadline* est incertaine et/ou le problème fait explicitement référence à un facteur d'affaiblissement.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.

$$V^{\pi}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} r(x_t, \pi(x_t)) | x_0 = x; \pi\right],$$

où T est le 1er temps (aléatoire) où un état terminal est atteint.

- *Utile quand :* il y a un but connu ou une condition d'échec.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec états terminaux : le problème prend fin mais l'agent va atteindre un état terminal.

$$V^{\pi}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} r(x_t, \pi(x_t)) | x_0 = x; \pi\right],$$

où T est le 1er temps (aléatoire) où un état terminal est atteint.

- *Utile quand :* il y a un but connu ou une condition d'échec.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

$$V^\pi(x) = \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} r(x_t, \pi(x_t)) \,|\, x_0 = x; \pi \right].$$

- *Utile quand :* le système a besoin d'être constamment contrôlé au fil du temps.

Fonction de valeur d'une politique

- Horizon infinie avec récompense moyenne : le problème est sans fin mais l'agent se focalise seulement sur la moyenne des récompenses (attendue).

$$V^\pi(x) = \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} r(x_t, \pi(x_t)) \,|\, x_0 = x; \pi \right].$$

- *Utile quand :* le système a besoin d'être constamment contrôlé au fil du temps.

Fonction de valeur d'une politique

Note : les espérances sont prises sous $p_{X_1,\ldots,X_t|X_0=x_0;\pi}$.

Une politique non-stationnaire π partant de x_0 donne

$$(x_0, r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, \ldots)$$

où $r_t = r(x_t, \pi_t(x_t))$ et $x_t \sim p(\cdot|x_{t-1}, a_t = \pi(x_t))$ sont des réalisations aléatoires. La fonction de valeur (affaiblie à horizon infinie) est

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_{(x_1,x_2,\ldots)}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(x_t, \pi(x_t)) \,\middle|\, x_0 = x; \pi\right],$$

Fonction de valeur d'une politique

Note : les espérances sont prises sous $p_{X_1,\ldots,X_t|X_0=x_0;\pi}$.

Une politique non-stationnaire π partant de x_0 donne

$$(x_0, r_0, x_1, r_1, x_2, r_2, \ldots)$$

où $r_t = r(x_t, \pi_t(x_t))$ et $x_t \sim p(\cdot|x_{t-1}, a_t = \pi(x_t))$ sont des réalisations aléatoires. La fonction de valeur (affaiblie à horizon infinie) est

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_{(x_1,x_2,\ldots)}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(x_t, \pi(x_t)) \,|\, x_0 = x; \pi\right],$$

Fonction de valeur d'une politique

Exemple : gestion du stock d'un magasin

Simulation

Fonction de valeur optimale et politique optimale

Definition (Politique optimale et fonction de valeur optimale)

La solution d'un MDP est une politique optimale π^* *satisfaisant*

$$\pi^* \in \arg\max_{\pi \in \Pi} V^\pi$$

en tout état $x \in X$, *où* Π *l'ensemble des politiques considérées.*

La fonction de valeur correspondante est la fonction de valeur optimale

$$V^* = V^{\pi^*}$$

Fonction de valeur optimale et politique optimale

Definition (Politique optimale et fonction de valeur optimale)

La solution d'un MDP est une politique optimale π^* *satisfaisant*

$$\pi^* \in \arg\max_{\pi \in \Pi} V^\pi$$

en tout état $x \in X$*, où* Π *l'ensemble des politiques considérées.*

La fonction de valeur correspondante est la fonction de valeur optimale

$$V^* = V^{\pi^*}$$

Fonction de valeur optimale et politique optimale

Remarques

1. $\pi^* \in \arg\max(\cdot)$ et non $\pi^* = \arg\max(\cdot)$ car un MDP peut admettre **plusieurs** politiques optimales.
2. π^* atteint la grande fonction de valeur possible en **chaque** état.
3. Il existe toujours une politique optimale **deterministe**.
4. Hormis pour des problèmes à horizon finie, il existe toujours une politique optimale **stationnaire**.

Messages importants du chapitre :

- un MDP est un modèle puissant pour représenter l'interaction entre un agent et un environnement stochastique.

- La fonction de valeur est l'objectif que l'on devra maximiser (voir Chap. suivant).

Messages importants du chapitre :

- un MDP est un modèle puissant pour représenter l'interaction entre un agent et un environnement stochastique.
- La fonction de valeur est l'objectif que l'on devra maximiser (voir Chap. suivant).