

# Chapitre 4 : Systèmes Numériques

John Klein

Lille1 Université - CRIStAL UMR CNRS 9189



**UFR IEEA**  
Informatique, Electronique  
Electrotechnique, Informatique

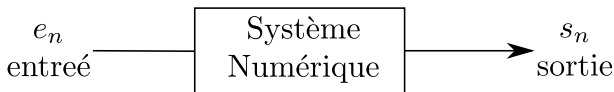


FIGURE : Vue schématique « entrée / sortie » d'un système numérique.

Quel **impact** du passage au numérique sur la modélisation des systèmes ? :

- Les résultats établis dans le chapitre 2 sont-ils conservés après échantillonnage ?
- La fonction de transfert dans le domaine de Laplace ou de Fourier est-elle toujours un outil de représentation aussi efficace ?

Le but du chapitre est de répondre à ces interrogations.

# Plan du chapitre

## 1 Généralités

## 2 Equation aux différences

- Transformée en  $Z$

## 3 Systèmes de convolution numériques

- Fonction de transfert en  $Z$  des filtres numériques
- Synthèse de filtres numériques

- Un système régi par une **équation différentielle** est l'archétype du système de convolution.
- Ces équations font intervenir des **dérivées** de signaux.
- Pour un signal analogique  $x(t)$ , on approxime sa dérivée en numérique par :

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{T_e} \approx x'(t), \quad (1)$$

quand  $t = nT_e$ .

- En itérant, on approxime sa dérivée  $m^{\text{ième}}$  en numérique par :

$$\begin{aligned} x^{(m)}(t) &\approx \frac{x_n^{(m-1)} - x_{n-1}^{(m-1)}}{T_e}, \\ &\approx \frac{x_n^{(m-2)} - 2x_{n-1}^{(m-2)} + x_{n-2}^{(m-2)}}{T_e^2}, \\ &\approx \frac{1}{T_e^m} \sum_{i=0}^m \binom{i}{m} (-1)^i x_{n-i}. \end{aligned} \quad (2)$$

- Considérons une équation différentielle générique :

$$a_p s^{(p)}(t) + \dots + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_m e^{(m)}(t) + \dots + b_1 e'(t) + b_0 e(t).$$

- En utilisant les approximations précédentes, le passage au numérique produit l'équation suivante :

$$\alpha_n s_{n-p} + \dots + \alpha_1 s_{n-1} + \alpha_0 s_n = \beta_m e_{n-m} + \dots + \beta_1 e_{n-1} + \beta_0 e_n,$$

avec  $\alpha_i = \sum_{k=i}^p \binom{k}{p} \frac{a_k}{T_e^k}$  et  $\beta_i = \sum_{k=i}^m \binom{k}{m} \frac{b_k}{T_e^k}$ .

- Cette équation est appelée **équation aux différences** et est un **système numérique**.

## Equation aux différences :

- Les systèmes régis par des équations aux différences sont toujours des **systèmes de convolution**.
- On conserve la propriété fondamentale suivante :

### Propriété

Soit un système de convolution numérique (ou filtre numérique) dont la réponse impulsionnelle<sup>a</sup> est notée  $h_n$ . Soit  $e_n$  un signal d'entrée quelconque et  $s_n$  sa sortie. On a alors :

$$s_n = \{h \star e\}_n, \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow s_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e_{n-i} h_i. \quad (4)$$

---

a. La définition de la réponse impulsionnelle reste inchangée en numérique. Il s'agit de la sortie produite quand l'entrée est l'impulsion de Dirac  $\delta_n$ .

## Catégories de filtres numériques :

### Définition

On appelle **filtre à réponse impulsionnelle finie** (RIF) tout filtre numérique tel que sa réponse impulsionnelle  $h_n$  est non-nulle pour un nombre fini de valeur de  $n$ . Autrement dit, il existe un certain entier  $M$  au delà duquel  $h_n = 0, \forall n \geq M$ .

- Quand l'équation aux différences est telle que tous les coefficients  $\alpha_i$  sont nuls sauf  $\alpha_0$ , on tombe sur filtre RIF causal avec en particulier :

$$h_i = \begin{cases} \frac{\beta_i}{\alpha_0} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (5)$$

## Catégories de filtres numériques :

### Définition

On appelle **filtre à réponse impulsionnelle infinie** (RII) tout filtre numérique tel que sa réponse impulsionnelle  $h_n$  est non-nulle pour un nombre infini de valeur de  $n$ .

- On peut montrer qu'on obtient un filtre RII à partir du moment où au moins un des coefficients  $\alpha_i$  est non nul, en plus de  $\alpha_0$ .
- Dans de telles circonstances, le calcul de la valeur actuelle de la sortie  $y_n$  dépend d'au moins une de ses valeurs passées  $y_{n-i}$ . On nomme donc parfois également les filtres RII, **filtres récurrents**.



# Plan du chapitre

- 1 Généralités
- 2 Equation aux différences
  - Transformée en Z
- 3 Systèmes de convolution numériques
  - Fonction de transfert en Z des filtres numériques
  - Synthèse de filtres numériques

Vers un **modèle** efficace de filtre numérique :

- Peut-on utiliser la **transformée de Laplace** sur un filtre numérique  $x_n$  ?
- Oui mais à condition de l'appliquer au signal échantillonné  $x_e(t)$  défini en tout  $t$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x_e\}(p) &= \int_0^{+\infty} x_e(t) e^{-pt} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e) e^{-pt} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e) e^{-pkT_e}, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x_n e^{-pkT_e}.\end{aligned}\tag{6}$$

Vers un **modèle** efficace de filtre numérique :

- Une fonction de transfert de filtre numérique n'aura pas une expression simple en Laplace à cause des exponentielles.
- En posant le **changement de variable**  $z = e^{pT_e}$ , on reconnaît un objet mathématique appelé *série entière*. Cet objet offre alors une nouvelle représentation du signal qu'on qualifie de **transformée en Z** :

### Définition

Soit  $x_n$  un signal numérique. Soit  $z \in \mathbb{C}$  une variable complexe. On appelle **Transformée en Z** de  $x_n$  la fonction notée  $X(z)$  telle que :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_n z^{-k}. \quad (7)$$

On note  $\mathcal{Z}$  l'opérateur qui à  $x_n$  associe  $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}(z)$ . Cette définition est parfois étendue pour les  $k$  négatifs.

## Transformée en Z :

La TZ est très liée à la transformée de Laplace mais présente les avantages suivants :

- une **écriture** des résultats **plus concise** et ne faisant plus apparaître le paramètre  $T_e$ . En effet, le rôle du paramètre  $T_e$  est excessivement important lors de l'échantillonnage mais une fois celui-ci terminé, il ne sera plus spécialement influent.
- une équivalence formelle avec les **séries entières** qui ont fait l'objet de nombreux développements mathématiques que l'on va pouvoir exploiter.

## Transformée en Z :

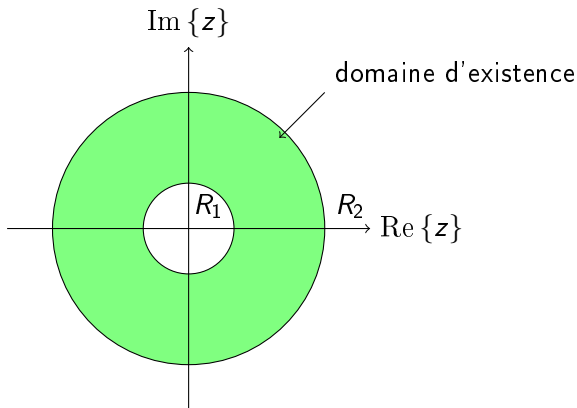
- Une transformée en Z  $X(z)$  n'est pas forcément définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Il y a même des cas où elle n'est définie nulle part.
- On sait que le **domaine de définition** d'une transformée en Z est dépend de valeurs frontière pour le module  $|z|$ . Ces bornes sont appelées **rayons** :

### Propriété

Soit  $X(z)$  la transformée en Z de la suite  $x_n$ . Pour toute transformée en Z définie sur un ensemble non vide, il existe un couple de réels  $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $R_1 \leq R_2$  et  $X(z)$  est définie pour tout  $z$  tel que  $R_1 \leq |z| \leq R_2$ .

## Transformée en Z :

- Le **domaine d'existence** d'une transformée en Z dans le cas le plus courant où  $0 < R_1 < R_2 < +\infty$  a l'allure suivante :



- Quand le signal  $x_n$  est **causal** alors on a  $R_2 = +\infty$ .

## Transformée en Z : propriétés

- **Linéarité** :  $\mathcal{Z} \{ax_n + by_n\} = a\mathcal{Z} \{x_n\} + b\mathcal{Z} \{y_n\},$
- **Retard** :  $\mathcal{Z} \{x_{n-k}\} = z^{-k} \mathcal{Z} \{x_n\},$
- **Modulation** :  $\mathcal{Z} \{a^n x_n\} (z) = X \left( \frac{z}{a} \right),$
- **Dérivation** :  $\mathcal{Z} \{nx_n\} (z) = -zX'(z),$
- **Symétrie** :  $\mathcal{Z} \{x_{-n}\} (z) = X \left( \frac{1}{z} \right),$
- **Valeur initiale** :  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} X(z) = x_0,$
- **Valeur finale** :  $\lim_{|z| \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n,$
- **Convolution** :  $\mathcal{Z} \{x_n \star y_n\} = \mathcal{Z} \{x_n\} \times \mathcal{Z} \{y_n\}.$

## Transformée en Z : propriétés

- Ces propriétés sont **valables** en des valeurs de  $z$  pour lesquelles tous les termes utilisés sont définis.
- Par exemple, si on note  $\mathcal{D}_x$  et  $\mathcal{D}_y$  les domaines d'existence de  $X(z)$  et  $Y(z)$  et que  $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \emptyset$  alors dans ce cas la propriété de linéarité n'a pas de sens.



# Plan du chapitre

- 1 Généralités
- 2 Equation aux différences
  - Transformée en  $Z$
- 3 Systèmes de convolution numériques
  - Fonction de transfert en  $Z$  des filtres numériques
  - Synthèse de filtres numériques

- Appliquons la TZ à la forme générale de l'équation aux différences :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^p \alpha_i s_{n-i} \right\} &= \mathcal{Z} \left\{ \sum_{j=0}^m \beta_j e_{n-j} \right\}, \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathcal{Z} \{ s_{n-i} \} &= \sum_{j=0}^m \beta_j \mathcal{Z} \{ e_{n-j} \}, \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i z^{-i} S(z) &= \sum_{j=0}^m \beta_j z^{-j} E(z), \\
 \Leftrightarrow S(z) \sum_{i=0}^p \alpha_i z^{-i} &= E(z) \sum_{j=0}^m \beta_j z^{-j}.
 \end{aligned}$$

- En définissant la **fonction de transfert**  $H(z)$  du système numérique comme étant le rapport de la sortie sur l'entrée, on retrouve une forme habituelle de fraction rationnelle :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{S(z)}{E(z)}, \\ &= \frac{\sum_{j=0}^m \beta_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^p \alpha_i z^{-i}}. \end{aligned} \quad (8)$$

- On notera bien que les puissances de  $z$  sont **négatives**.

## Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- La fonction de transfert en Z est plus générale que celle dans le **domaine fréquentiel** qui s'obtient par le changement de variable  $z = e^{2i\pi fT_e}$  :

$$H(f) = H(z) \big|_{z=e^{2i\pi fT_e}}. \quad (9)$$

- La fonction  $H(f)$  n'est **pas numérique** ! Logique ? Problématique ?
  - Un filtre numérique doit fonctionner indépendamment de la façon dont un signal d'entrée  $e_n$  a été échantillonné. Il est donc normal que  $T_e$  et  $N$  ne soient pas des paramètres d'influence pour  $H(f)$ .
  - $H(f)$  représente le comportement du système numérique en fréquentiel dans le cas général.
  - $H(f)$  ne peut être manipulée par un ordinateur. Pour effectuer un filtrage côté fréquentiel, il suffit de prendre  $H_m = H\left(m\frac{F_e}{N}\right)$  et de procéder à une multiplication point par point avec  $E_m = \mathcal{TFD}\{e_n\}$ .

## Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- Pour filtrer, on a donc le choix entre les deux chemins suivants :

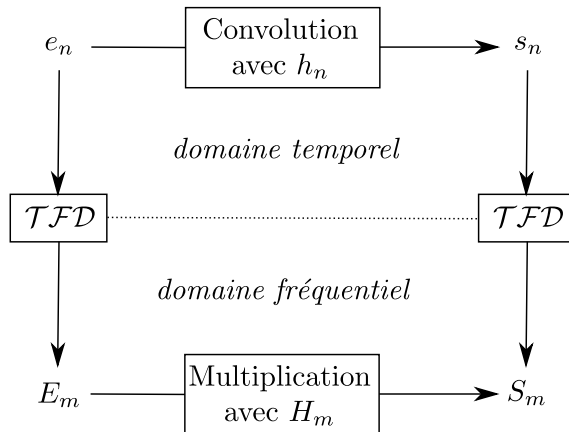
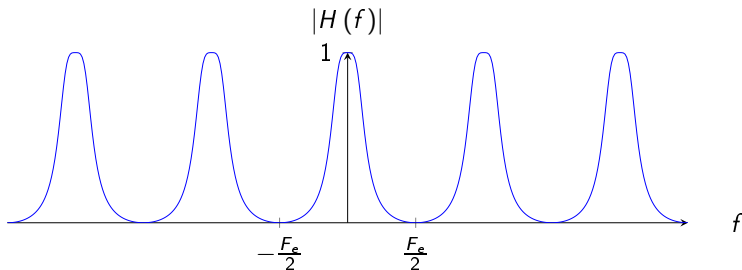


FIGURE : Lien « entrée / sortie » côté temporel ou côté fréquentiel.

## Fonction de transfert pour un filtre numérique :

- La transformée en Z encode l'échantillonnage sous-jacent qui impose une **réplique** du spectre tous les multiples de  $F_e$ .
- La fonction  $H(f)$  est donc **périodique** de période  $F_e$ . Exemple pour un passe-bas :

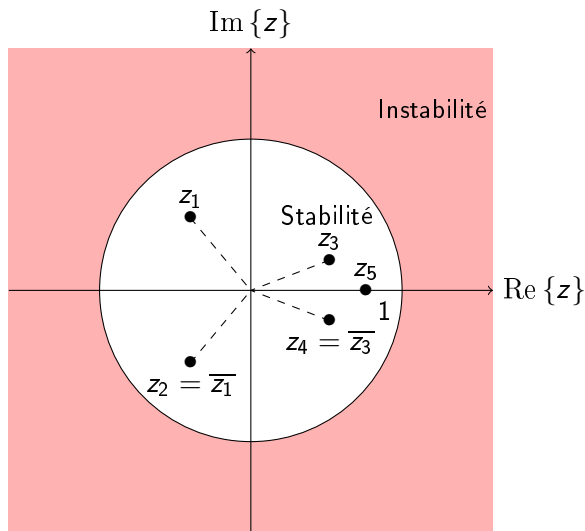


- Chaque **réplique** de la fonction de transfert va filter chaque **réplique** du signal d'entrée.

## Fonction de transfert numérique : stabilité

- La définition de la **stabilité** pour un système numérique est identique au cas analogique.
- Un filtre numérique causal est **stable** si tous les **pôles** de la fonction de transfert  $H(z)$  sont dans le **cercle unité**. Si on note  $z_i$  les pôles de  $H(z)$ , on a  $|z_i| < 1$  (inégalité stricte) pour tout  $i$ .
- Tous les filtres **RIF** sont **stables**.

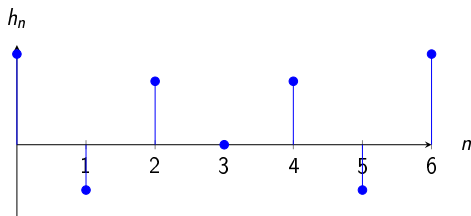
## Fonction de transfert numérique : stabilité





## Fonction de transfert numérique : phase linéaire

- Un filtre RIF causal est à phase linéaire si il y a une symétrie (ou une anti-symétrie) dans la suite  $h_n$  correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre. Comme le filtre est RIF, on sait qu'il existe  $N$  tel que  $h_N > 0$  et  $h_n = 0$  pour tout  $n > N$ . La phase sera linéaire si on a  $h_{n+i} = h_{N-i}$  pour tout  $i$  entre 0 et  $N$ . Pour illustration, la réponse impulsionnelle suivante satisfait cette condition :



- Aucun RII ne peut être à phase linéaire.

# Plan du chapitre

- 1 Généralités
- 2 Equation aux différences
  - Transformée en  $Z$
- 3 Systèmes de convolution numériques
  - Fonction de transfert en  $Z$  des filtres numériques
  - Synthèse de filtres numériques

## Synthèse de filtres numériques :

- Pour fabriquer aisément un filtre numérique, il faut obtenir sa fonction de transfert en  $Z$ .
- Nous supposons partir d'un cahier des charges similaire au cas analogique et exprimé sous forme d'un gabarit.
- Comme en analogique, on se focalise sur la synthèse de passe-bas.
- On donne deux méthodes de synthèse de RIF et deux autres pour les RII.
- Pour les RIF, connaître  $H(z)$  est équivalent à connaître  $h_n$ .

## Méthode de la fenêtre (RIF) :

- 1 Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences  $[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]$ . En effet, nous obtiendrons à la fin une réponse impulsionnelle  $h_n$  qui est supposé résulter de l'échantillonnage d'une réponse continue  $h(t)$ .
- 2 Trouver une fonction continue  $H_{gab}(f)$  qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
- 3 Calculer la transformée de Fourier inverse de  $H_{gab}(f)$  pour obtenir une réponse impulsionnelle continue  $h_{gab}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{gab}\}(t)$ . On multipliera de plus  $h_{gab}(t)$  par la constante  $T_e$ .
- 4 Échantillonner  $h_{gab}(t)$  au pas de  $T_e$  symétriquement autour de zéro de sorte à obtenir  $N$  échantillons  $\tilde{h}_n$ .
- 5 (optionnel) Fenêtrer par une fonction de pondération  $w_n$  pour atténuer « l'effet mesure ».

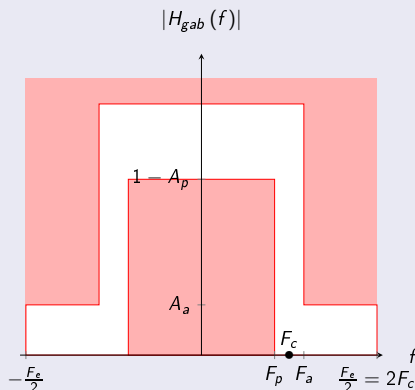
## Méthode de la fenêtre :

- ⑥ Décaler la réponse de sorte à la rendre causale  $h_n = \tilde{h}_{n-k}$  avec  $k$  la partie entière de  $\frac{N}{2}$ .
  - ⑦ Vérifier que le gabarit est respecté en calculant  $H_m = \mathcal{TFD}\{h_n\}$ .
- + Avantage : grâce à l'étape 6, le filtre obtenu est causal. Comme l'échantillonnage de l'étape 4 est symétrique le filtre est à déphasage linéaire.
- Inconvénient : cette méthode nécessite le calcul explicite de  $h_{gab}(t)$  (rarement disponible). A cause de l'étape 6, le filtre a un régime transitoire potentiellement long.

## Exemple

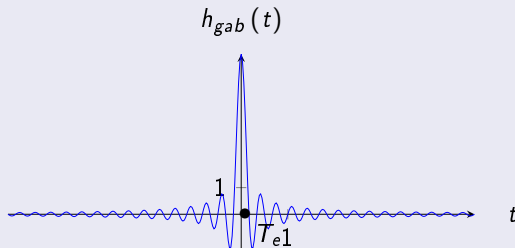
Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

- Pour la 1<sup>ère</sup> étape, il faut anticiper des problèmes de **recouvrement** car nous allons échantillonner à l'étape 4. La fréquence maximale de la fonction de transfert est la fréquence de coupure  $F_c$  d'où  $F_e > 2F_c$  (Shannon). Choisissons par exemple  $F_e = 4F_c$  et  $F_c = \frac{F_p + F_a}{2}$  :



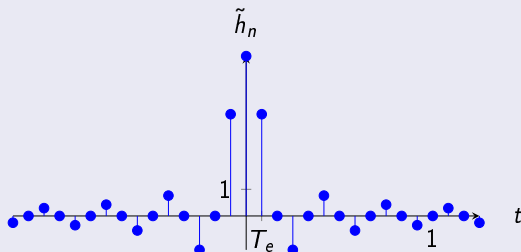
## Exemple

- Pour la 2<sup>ème</sup> étape, nous avons tout intérêt à choisir un filtre idéal :  $H_{gab}(f) = \Pi_{[-F_c; F_c]}(f)$ . Ce choix va faciliter l'étape suivante et on sait qu'il n'y a pas meilleur choix.
- Pour la 3<sup>ème</sup> étape, il a été vu que si  $H_{gab}(f) = \Pi_{[-F_c; F_c]}(f)$  alors  $h_{gab}(t) = 2F_c \text{sinc}(2\pi F_c t)$ . On donne ci-après le tracé de cette fonction :



## Exemple

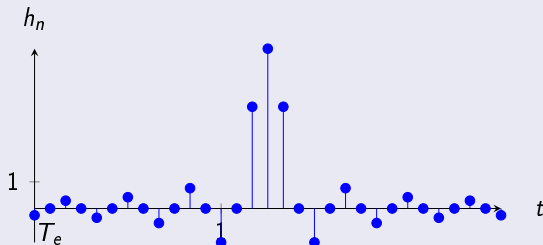
- Pour la 4<sup>ème</sup> étape, il est plus commode de choisir  $N$  impair, prenons par exemple  $N = 31$ . On conservera donc les échantillons suivants :  $\{\tilde{h}_{-15} = T_e h_{gab}(-15 T_e), \dots, \tilde{h}_{15} = T_e h_{gab}(15 T_e)\}$ . Le signal numérique  $\tilde{h}_n$  est alors donné par le graphique suivant :





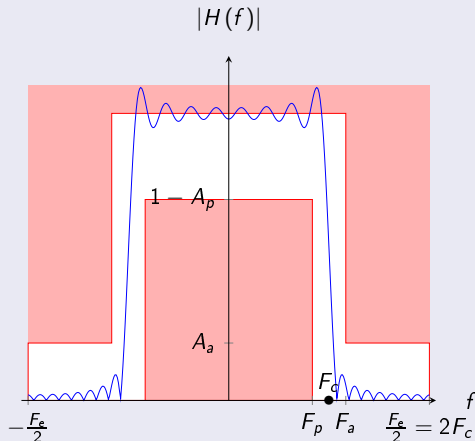
## Exemple

- On passe la 5<sup>ème</sup> étape pour arriver à la 6<sup>ème</sup>, où il suffit de poser  $\{h_0 = \tilde{h}_{-15}, \dots, h_{30} = \tilde{h}_{15}\}$  car la partie entière de  $\frac{N}{2}$  vaut ici 30. Le signal numérique  $h_n$  est alors donné par le graphique suivant :



## Exemple

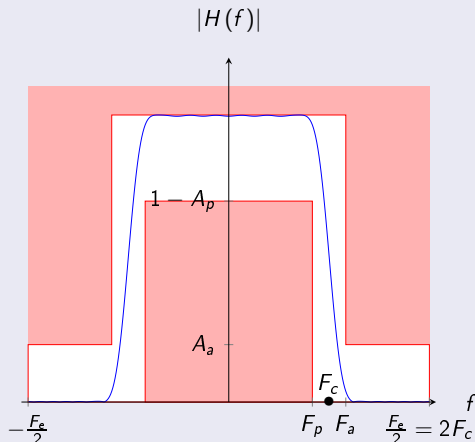
- Pour la 7<sup>ème</sup> étape, on vérifie si la TFD de  $h_n$  respecte le gabarit :



La fréquence de coupure est bien localisée mais la fonction de transfert déborde du gabarit à cause oscillations en bande passante.

## Exemple

- Le choix  $N = 31$  revient à multiplier  $h_{gab}(t)$  par la porte temporelle assez étroite  $\Pi_{[0;31\tau_e]}(t)$ . Côté fréquentiel, on récolte donc une convolution avec un sinus cardinal ce qui se traduit par ces oscillations parasites. Rajoutons l'étape 5 :



## Remarque

En ayant choisi  $N = 31$ , la TFD ne peut donner que 31 valeurs spectrales  $H_m$  équi-réparties entre 0 et  $F_e$ . La qualité du dessin devrait donc être beaucoup plus approximative. Deux solutions sont possibles pour **augmenter artificiellement la résolution fréquentielle** d'une fonction de transfert numérique :

- la première consiste à rajouter des zéros à la suite  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ . On parle de **zero-padding**. La TFD fournira alors autant de valeurs spectrales supplémentaires qu'on a rajouté de zéros.
- la deuxième consiste à **échantillonner** la fonction de transfert  $H(z)$  obtenue par changement de variable à partir de  $H(z)$ .

Attention ! Dans les deux cas, cela permet seulement d'avoir un tracé plus complet mais cela ne gomme absolument pas « **l'effet mesure** ». C'est bien pour cela qu'on observe des oscillations quand l'étape 5 n'est pas effectuée.

## Méthode de discrétisation en fréquences (RIF) :

- 1 Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences  $[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]$  (même explication que la méthode précédente).
- 2 Trouver une fonction continue  $H_{gab}(f)$  qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
- 3 Discrétiser la fonction  $H_{gab}(f)$  à la même résolution que la TFD, i.e.  $\frac{F_e}{N}$  situés sur l'intervalle  $[0; F_e]$ .
- 4 Conserver les  $N$  échantillons  $H_m = F_e \times H_{gab}(m\frac{F_e}{N})$ .
- 5 Appliquer la TFD inverse pour obtenir  $h_n = \mathcal{TFD}^{-1}\{H_m\}$ .

## Méthode de discrétisation en fréquences :

- + Avantage : la méthode est simple à mettre en oeuvre et on a l'assurance de respecter le gabarit.
- Inconvénient : on ne sait pas si le filtre est causal ou à phase linéaire.

## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle (RII) :

- ❶ Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences  $[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]$  (même explication que la méthode précédente).
- ❷ Trouver une fonction continue  $H_{gab}(p)$  (domaine de Laplace) qui satisfait le gabarit et qui est une fraction rationnelle à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
- ❸ Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples :  

$$H_{gab}(p) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{p-p_i}$$
 avec les  $\{p_i\}_{i=1}^n$  les pôles complexes de la fonction de transferts et les  $\{a_i\}_{i=1}^n$  des constantes complexes.
- ❹ Obtenir la fonction de transfert dans le domaine Z par changement de variable :  $H(z) = T_e \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}}$ .

## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

- + Avantage : on a l'assurance que la réponse impulsionnelle  $h_n$  telle que  $\mathcal{Z}\{h_n\}(z) = H(z)$  coïncide avec la fonction  $h(t)$  telle que  $\mathcal{L}\{h\}(p) = H_{gab}(p) : h_n = h(nT_e)$  pour tout  $n$ . Grâce à ce point le gabarit est automatiquement respecté puisqu'on retrouvera dans la bande  $[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}]$  la même fonction que  $H_{gab}$  mais à condition que le recouvrement soit faible ce qui impose souvent de choisir  $F_e \gg F_c$  !
- Inconvénient : la méthode ne s'adresse qu'aux fonctions de transfert type fraction rationnelle et il faut effectuer la décomposition en éléments simples.

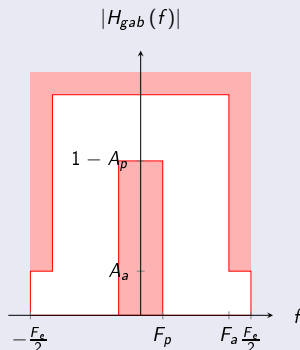


## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

### Exemple

Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

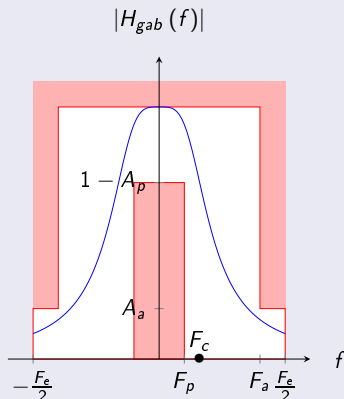
- Pour la 1<sup>ère</sup> étape, il faut anticiper d'éventuels problèmes de recouvrement. La fréquence maximale de la fonction de transfert est la fréquence de coupure  $F_c$  d'où  $F_e > 2F_c$  (Shannon). Choisissons par exemple  $F_e = 1\text{Hz}$  et  $F_c = \frac{1}{2\pi}$  :



## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

### Exemple

- Pour la 2<sup>ème</sup> étape, supposons qu'un filtre de Butterworth d'ordre 2 satisfait le gabarit :  $H_{gab}(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$  si  $F_c = \frac{1}{2\pi}$ .



## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

### Exemple

- Passons à la 3<sup>ème</sup> étape qui consiste à faire la décomposition en éléments simples. Dans notre cas, on obtient

$$H_{gab}(p) = \frac{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{p + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{i\frac{\sqrt{2}}{2}}{p + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

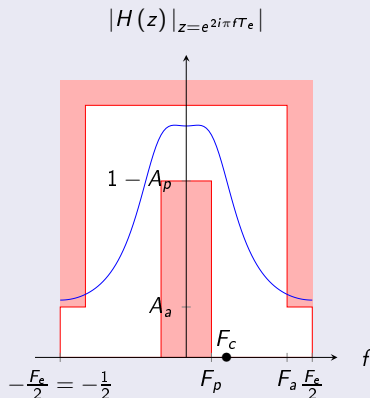
- Pour la 4<sup>ème</sup> et dernière étape, il ne reste plus qu'à procéder au changement de variable d'où

$$H(z) = \frac{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)T_e} z^{-1}} + \frac{i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)T_e} z^{-1}}.$$

## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

### Exemple

- Pour vérification, on peut calculer  $H(f)$  à partir de  $H(z)$  et tracer son module :

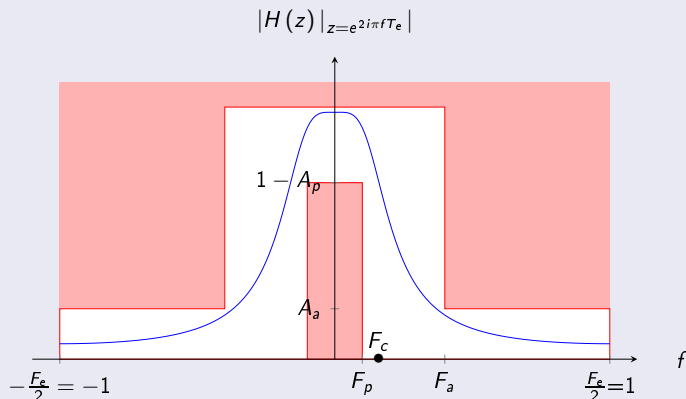


On constate alors que le gabarit n'est pas respecté.

## Méthode par invariance de la réponse impulsionnelle :

### Exemple

- Nous avons pris  $F_e = 1\text{Hz}$  ce qui est largement supérieur à  $F_c$  mais le filtre de Butterworth étant peu sélectif le recouvrement sera malgré tout assez important. Passons à  $F_e = 2\text{Hz}$  :



## Méthode par transformation bilinéaire :

- ① Restreindre le gabarit à l'intervalle des fréquences numériques  $f_{num} \in \left[-\frac{F_e}{2}; \frac{F_e}{2}\right]$  (même explication que la méthode précédente).
- ② Transformer ce gabarit en gabarit analogique à l'aide du changement de variable :  $f_{ana} = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f_{num} T_e)$ .
- ③ Trouver une fonction continue  $H_{gab}(p)$  (domaine de Laplace) qui satisfait le gabarit à l'aide d'une approche vue au chapitre 2.
- ④ Effectuer le changement de variable  $p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  (appelé transformation bilinéaire) pour obtenir  $H(z) = H_{gab}(p) \big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ .

## Méthode par transformation bilinéaire :

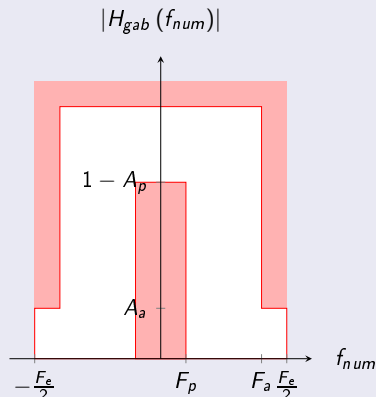
- + Avantage : La transformation bilinéaire fait correspondre le domaine de stabilité des fractions rationnelles en analogique (demi-plan gauche) à celui des fractions rationnelles en numérique (cercle unité). On est donc assuré que le filtre est stable.
- Inconvénient : Comme la méthode précédente, la méthode ne s'adresse qu'aux fonctions de transfert type fraction rationnelle puisque nous souhaitons que  $H(z)$  en soit aussi une. La méthode n'assure pas que le gabarit sera respecté, une étape de vérification s'impose donc.

## Méthode par transformation bilinéaire :

### Exemple

Pour un gabarit de départ identique à celui vu au chapitre 2 :

- Pour la 1<sup>ère</sup> étape, considérons le même gabarit que dans l'exemple précédent et qui concerne donc le filtre numérique souhaité. L'axe des fréquences est alors ici  $f_{num}$  :





## Méthode par transformation bilinéaire :

### Exemple

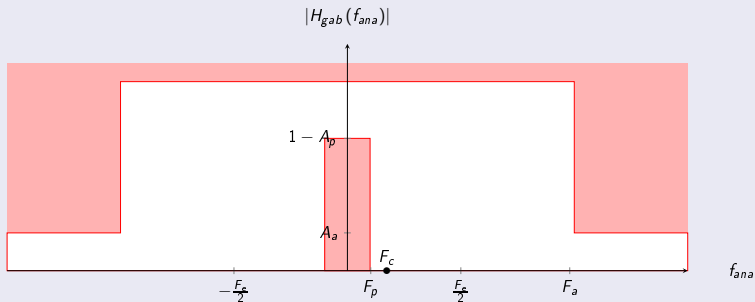
- Pour la 2<sup>ème</sup> étape, il faut modifier ce gabarit en changeant l'axe des fréquences qui devient  $f_{ana}$ . Les seuls paramètres concernés sont donc  $F_p$ ,  $F_a$  et  $F_c$ . Les modifications de leurs valeurs sont données dans le tableau suivant :

	$f_{num}$	$f_{ana}$
$F_p$	0.1	0.103
$F_a$	0.4	0.98
$F_c$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0.16$	0.1734

## Méthode par transformation bilinéaire :

### Exemple

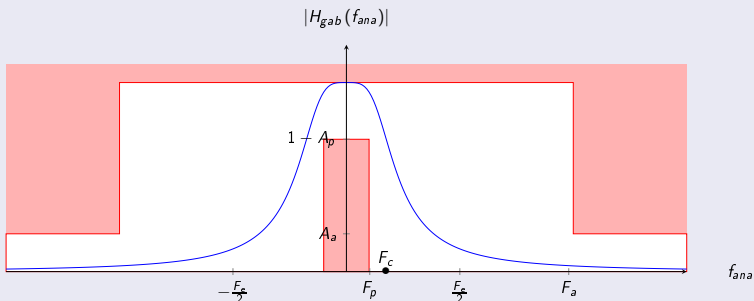
- On aboutit au gabarit analogique suivant :



## Méthode par transformation bilinéaire :

### Exemple

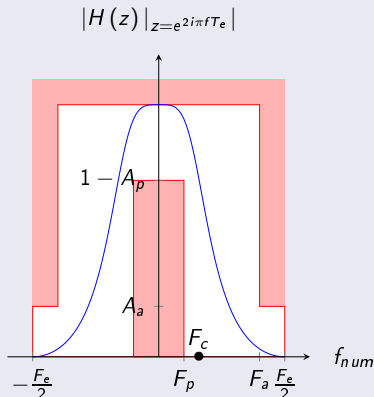
- Passons à la 3<sup>ème</sup> étape et supposons qu'un filtre de Butterworth d'ordre 2 satisfait le gabarit analogique. Pour  $F_c = 0.1734$ , on a  $H_{gab}(p) = \frac{157.91}{p^2 + 17.7715p + 157.9137}$ . Son tracé (en module) s'intègre bien dans le gabarit analogique :



## Méthode par transformation bilinéaire :

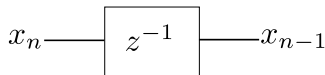
### Exemple

- Pour la 4<sup>ème</sup> étape, il ne reste plus qu'à procéder au changement de variable pour obtenir  $H(z)$  dont l'expression explicite présente peu d'intérêt. En revanche, on peut vérifier que le gabarit numérique est respecté :

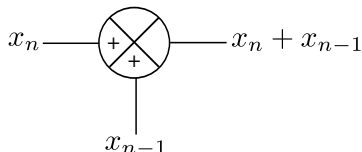


## Réalisation de filtres numériques :

- Un filtre numérique s'effectue à l'aide de composants de base d'électronique numérique.
- Trois composants sont nécessaires pour reproduire sous forme de circuits une équation aux différences :
  - l'opérateur retard,

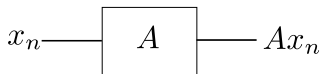


- le sommateur,



## Réalisation de filtres numériques :

- le gain.



- Chacun de ces composants correspond à une fonction de **logique combinatoire et séquentielle**. Par exemple, l'opérateur retard correspond à une bascule D.

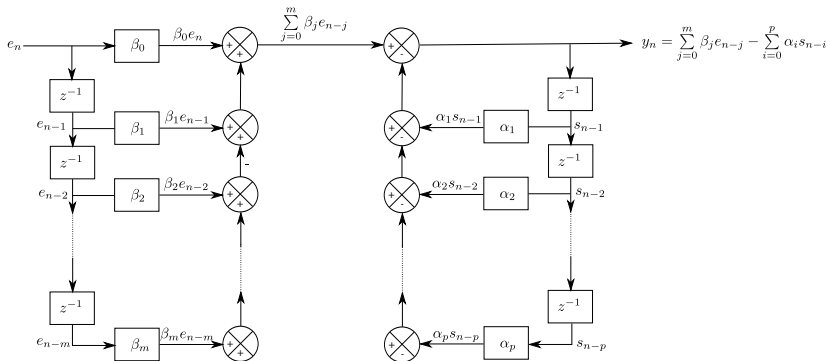
## Réalisation de filtres numériques :

- Grâce aux **méthodes de synthèse** nous savons obtenir  $H(z)$  dont l'expression contient les **coefficients** de l'équation aux différences correspondant au système que nous souhaitons réaliser :

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i s_{n-i} = \sum_{j=0}^m \beta_j e_{n-j}.$$

## Réalisation de filtres numériques :

- Le **circuit** d'électronique numérique correspondant à une équation quelconque est :



**FIGURE :** Vue schématique d'un circuit correspondant à une équation aux différences.