INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

JULIO CÉSAR LONDOÑO ORTEGA

Email: julio.londono@correounivalle.edu.co

jclondonor@gmail.com

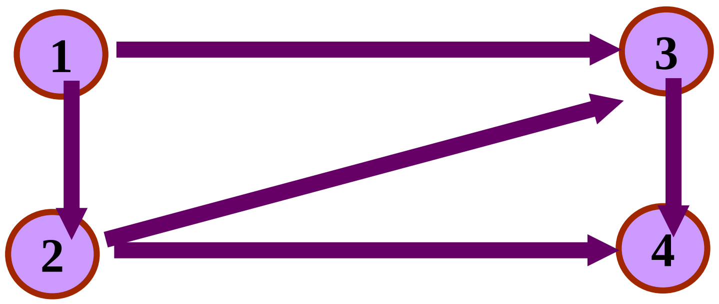
REDES

Antes de iniciar, por favor diligenciar la Evaluación del curso

http://evaluacioncursos.univalle.edu.co/

MODELOS DE REDES

DEFINICIÓN: Conjunto de nodos unidos por arcos (N, A),
Donde N: Conjunto de Nodos
A: Conjunto de Arcos
Por ejemplo, sea N = {1, 2, 3, 4} y
A = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }
La Red correspondiente sería la siguiente:



Un arco posee una capacidad asociada que puede limitar el posible flujo a través de él.
Por ejemplo:

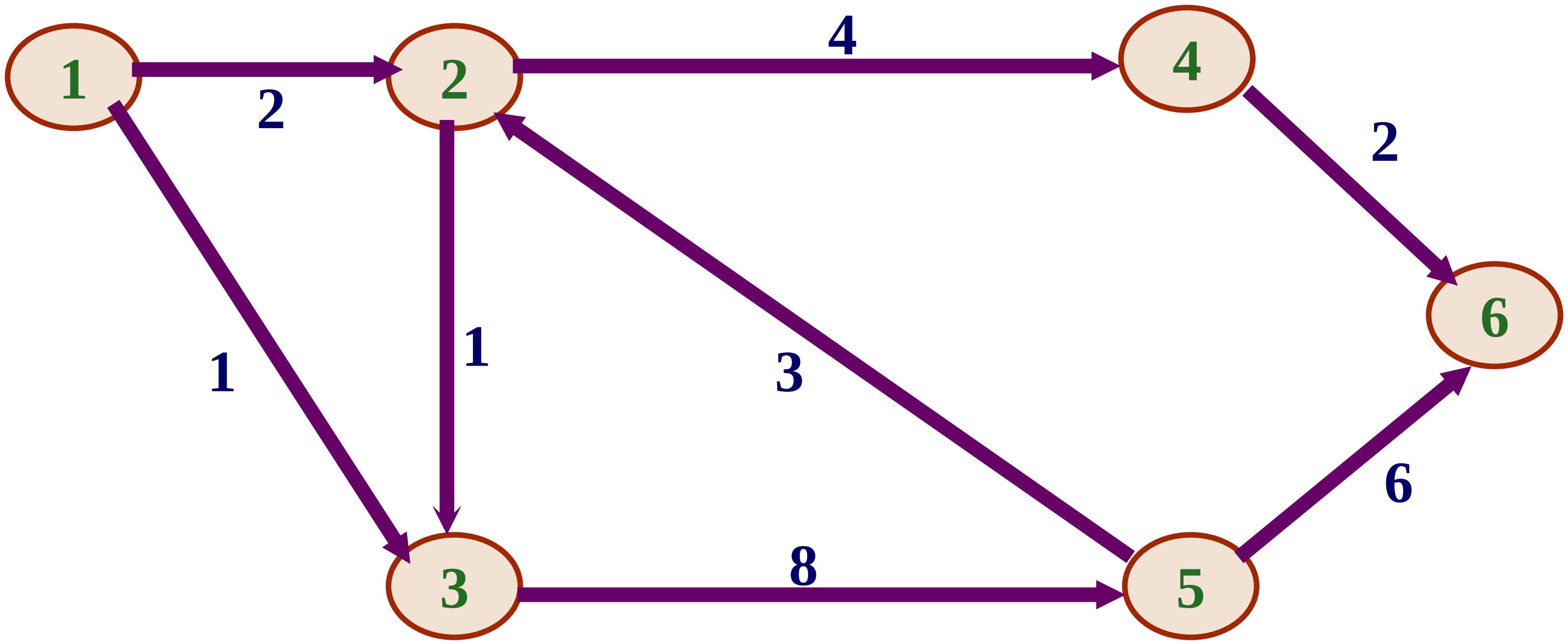
- Un flujo de petróleo a través de un oleoducto
- Flujo de productos a través de una cadena de abastecimiento
- Flujo de vehículos a lo largo de una carretera

REDES

Las redes pueden ser dirigidas u orientadas: Permiten el flujo positivo en uno de sus arcos y flujo cero en el sentido contrario

Las Redes pueden ser:

- Cíclicas: Cuando presenta al menos un ciclo
- Acíclicas: Si no presenta ciclos



Existe circuito cuando una Red dirigida es consistente con las direcciones de los flujos

REDES

Árbol: es una Red Conectada Acíclica, incluyendo un subconjunto de los nodos de la Red

Árbol de expansión: Es un árbol que incluye a todos los nodos de la Red

ALGORIMO DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Un árbol de expansión mínima de una red es un árbol cuyo costo sea mínimo.

Ejemplo, en una red de carreteras, si se desea minimizar en total de longitud de carreteras pavimentadas, que tiene múltiples alternativas para unirlas, el árbol de expansión mínima daría la respuesta

Algoritmo del Árbol de expansión mínima

El algoritmo inicia escogiendo un nodo cualquiera y se definen dos conjuntos de nodos en cada iteración, los que ya han sido conectados y los que aún no.

Cada iteración representa el arco de longitud mínima para unir uno de los nodos que ya han sido conectados con los que no lo han sido.

El algoritmo termina cuando todos los nodos han sido conectados. Sean los nodos de la red, el conjunto:

N= {1, 2, …, n}

Sean

C_k: Conjunto de nodos que se han conectado permanentemente en la iteración k del algoritmo

C'_k: Conjunto de nodos que aún no han sido conectados

Algoritmo del Árbol de expansión mínima

Paso 0: Hacer $C_o = 0$ y $C'_o = N$

Paso 1: Escoger cualquier nodo $i \varepsilon N$, hacer $k = 1$

$$C_1 = \{i\} \text{ y } C'_1 = N - \{i\}$$

Hacer $k = 2$

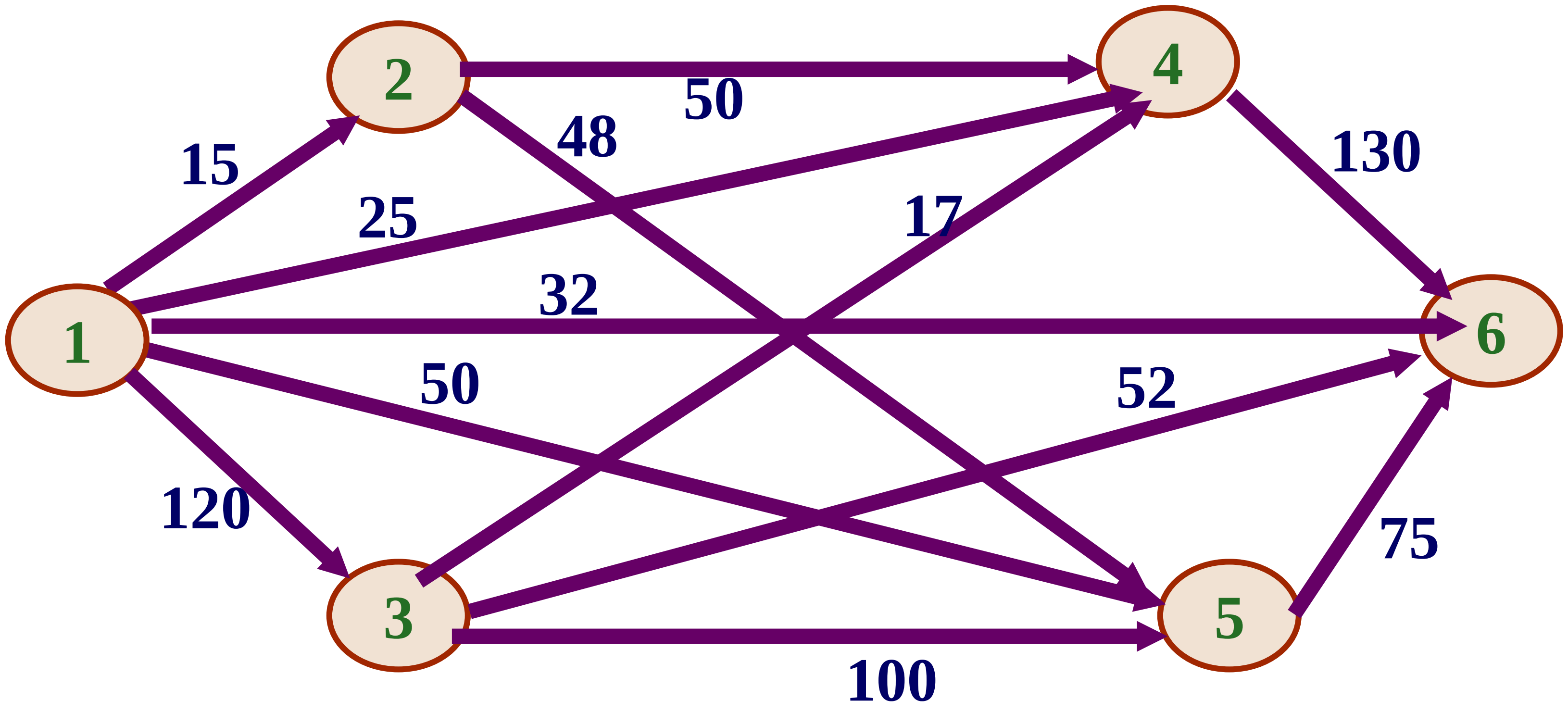
Paso k : Seleccione un nodo $j^* \in C'_{k-1}$ que produce el arco más corto hacia un nodo en el conjunto conectado C_{k-1}. Unir permanentemente a j^* y eliminarlo de C'_{k-1}, es decir:

$C_k = C_{k-1} + \{j^*\}$, $C'_k = C'_{k-1} - \{j^*\}$.

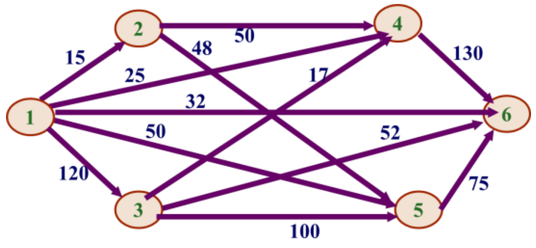
Si $C'_k = 0$, parar, de lo contrario, hacer $k = k+1$ y repetir el paso k.

Algoritmo del Árbol de expansión mínima

Ejemplo: Se muestran seis poblaciones, las cuales deben ser unidas por una red de carreteras con longitud mínima de carreteras pavimentadas. Los arcos mostrados representan todas las conexiones posibles con sus respectivas longitudes en km. Utilizar el algoritmo de expansión para unir las poblaciones.

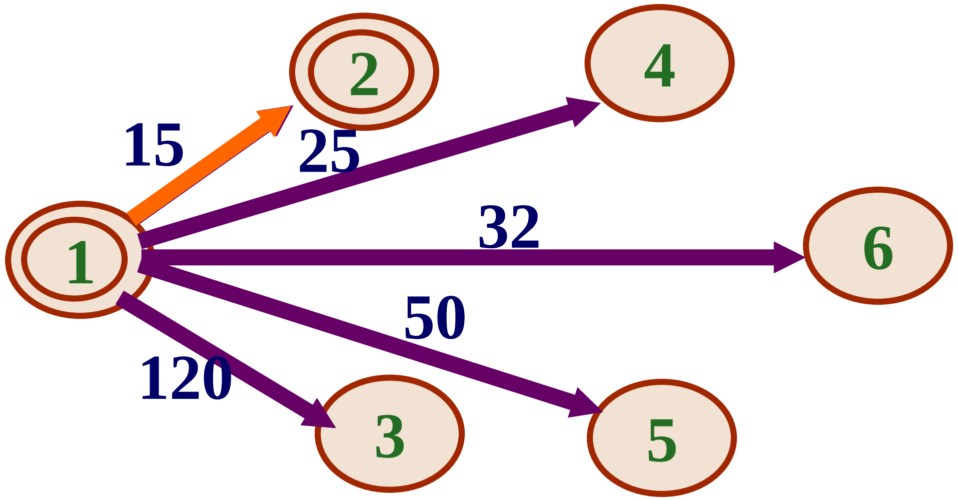


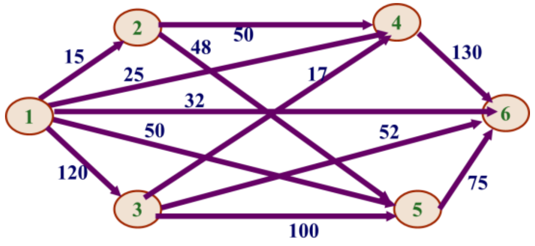
Por conveniencia se escoge el nodo 1 (los nodos que se conectan tienen doble círculo)



$$C_1 = \{1\} \text{ y } C'_1 = N - \{1\}$$

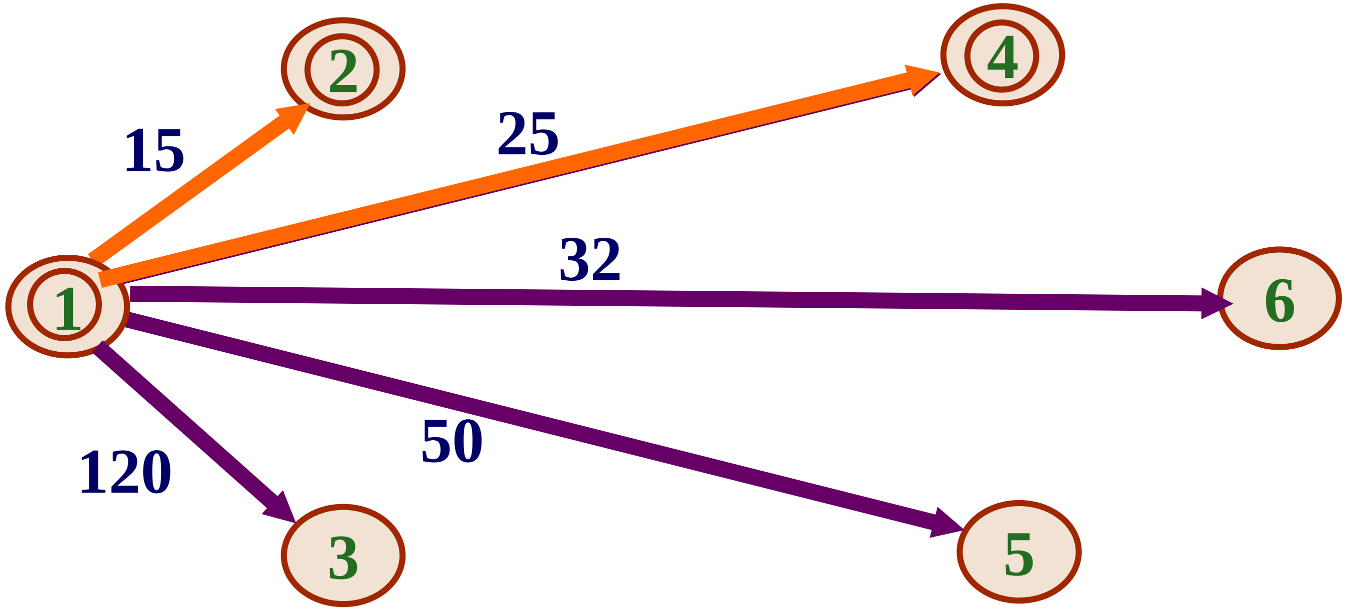
Iteración 1



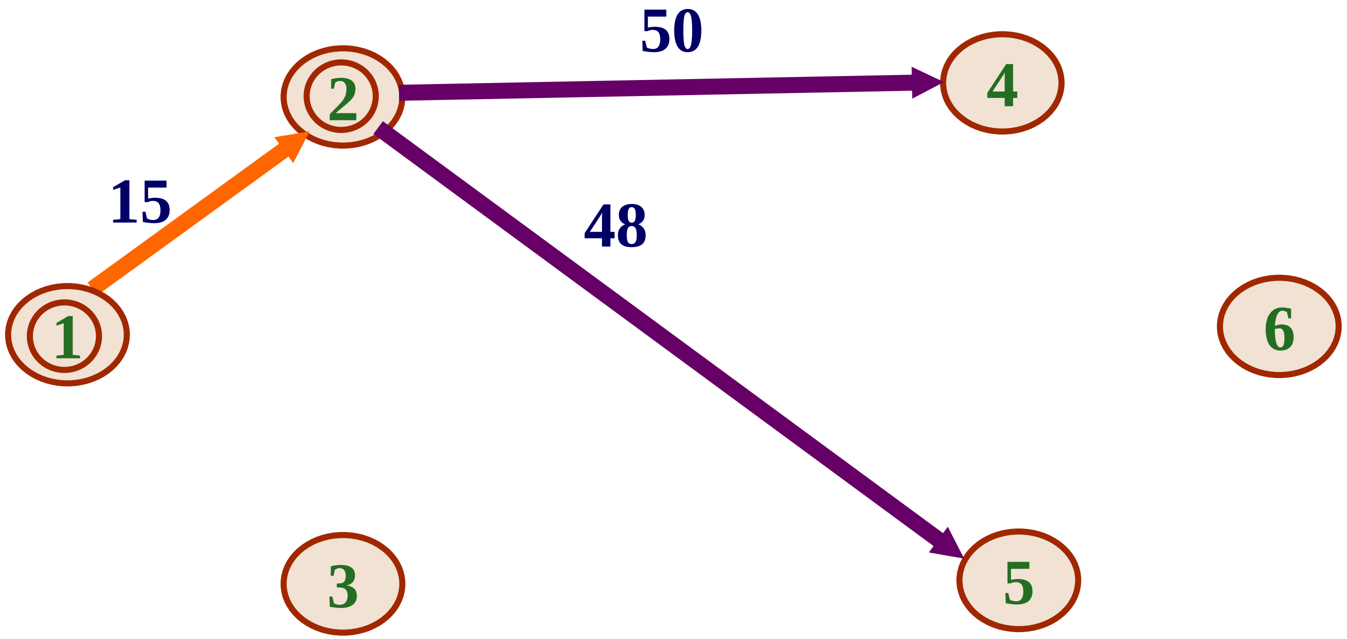


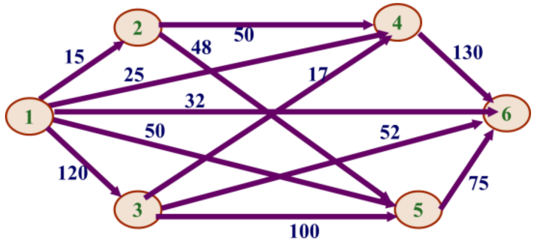
$C_1 = \{1, 2\}$ *y*

$C'_1 = N - \{1, 2\}$



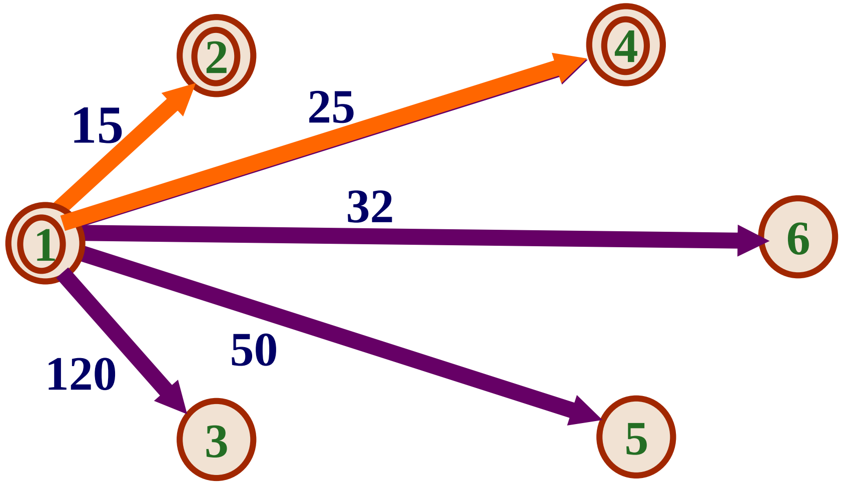
Iteración 2



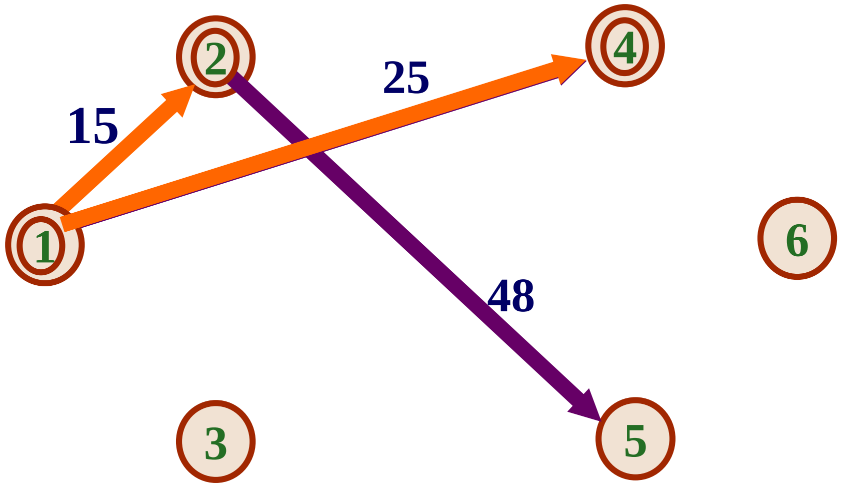


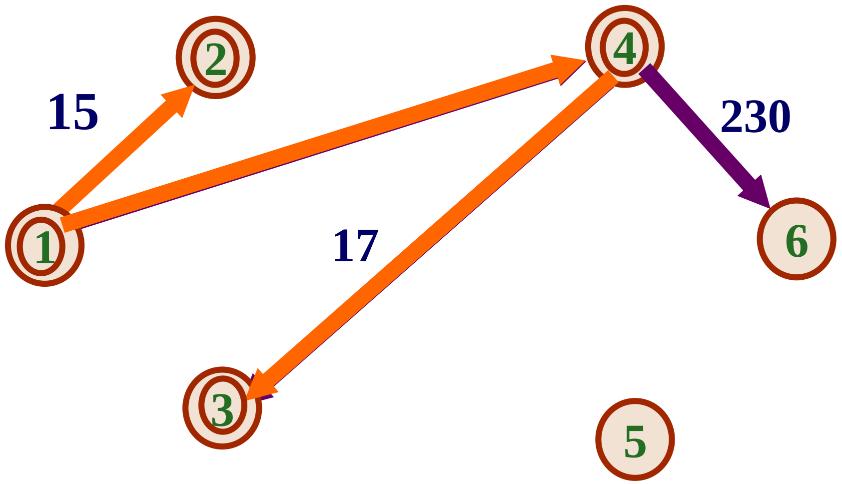
$C_2 = \{1, 2, 4\}$ y

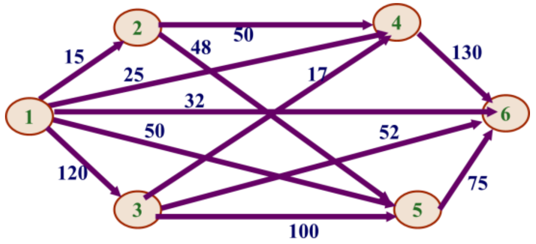
$C'_2 = N - \{1, 2, 4\}$



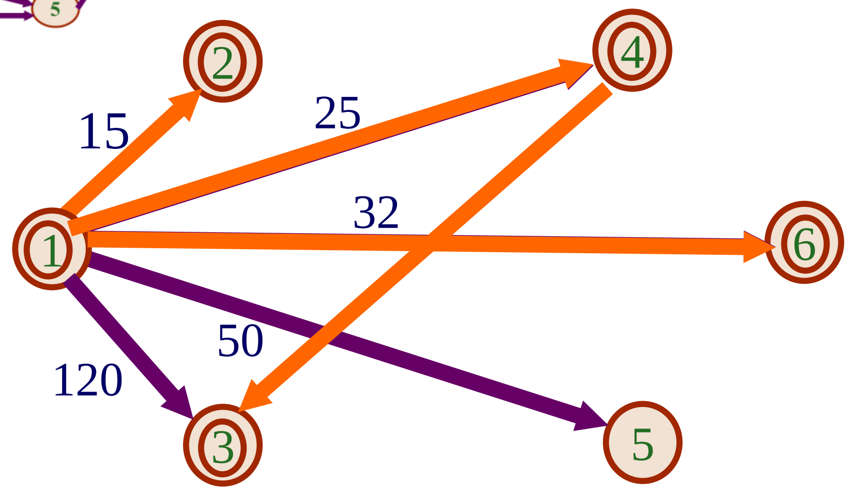
Iteración 3

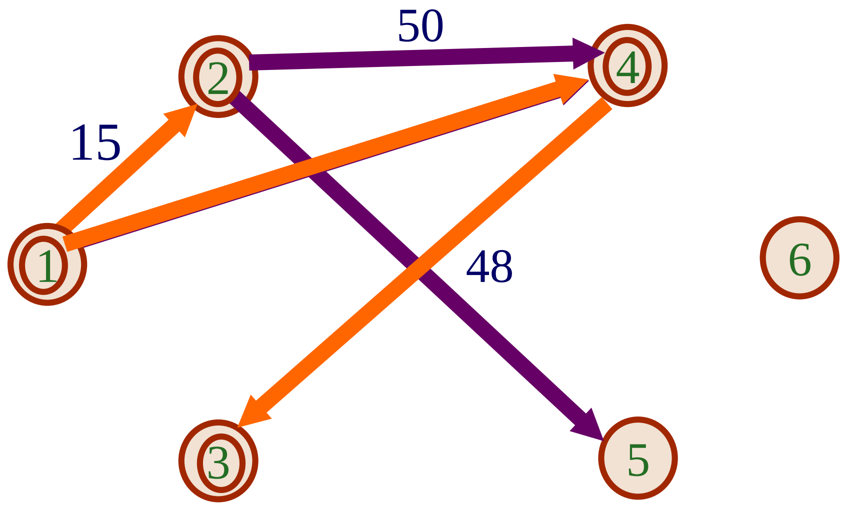




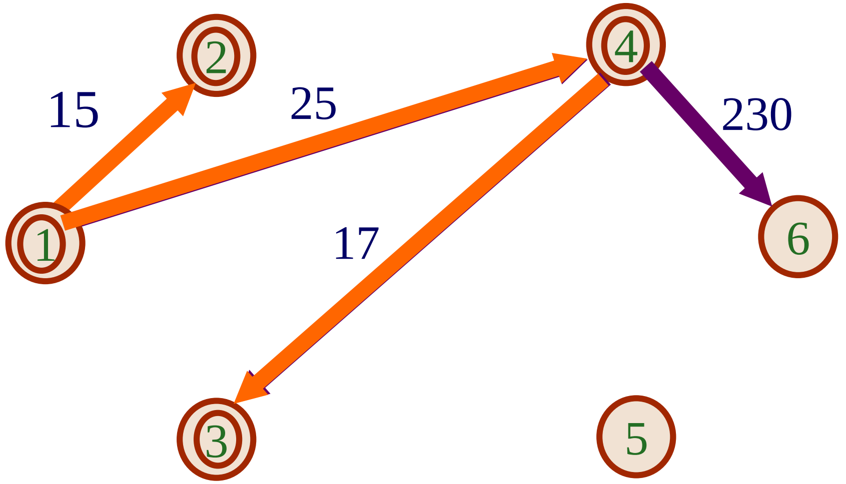


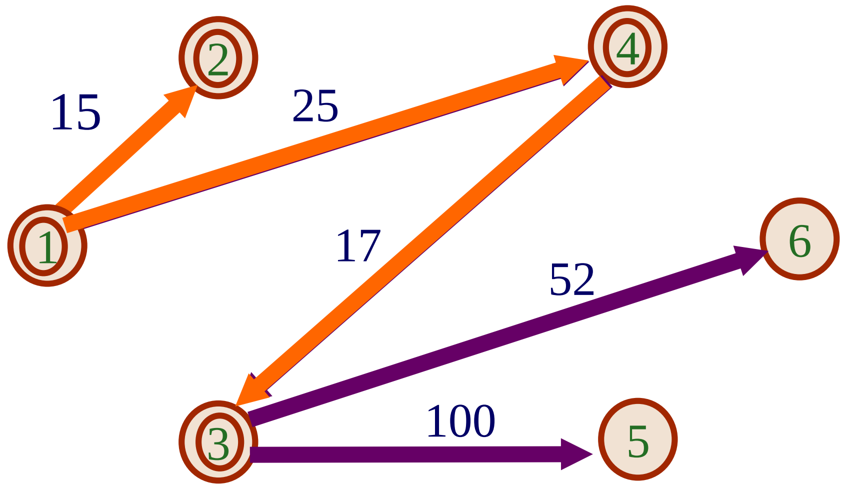
$C_3 = \{1, 2, 4, 3\}$ y $C'_3 = N - \{1, 2, 4, 3\}$

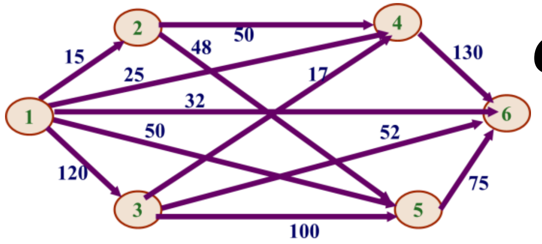




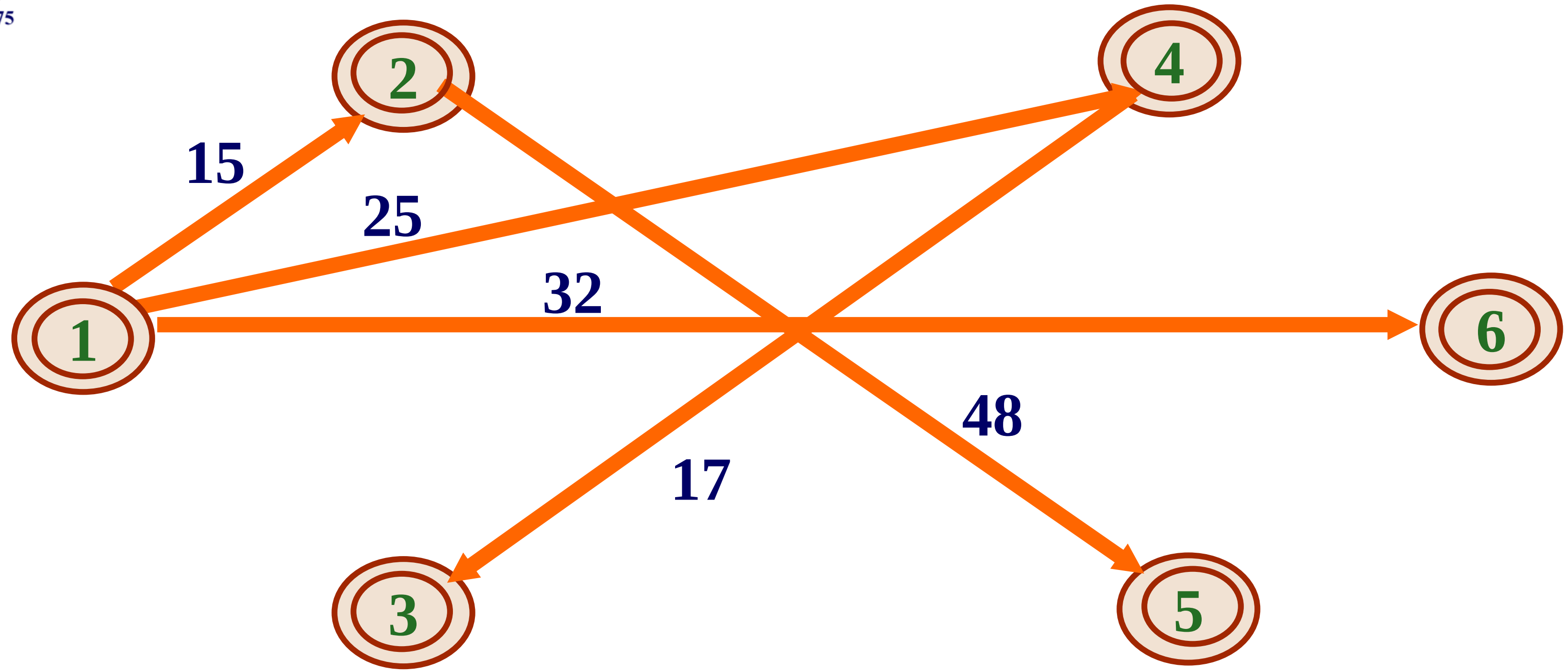
Iteración 4







$C_4 = \{1, 2, 4, 3, 6\}$ y $C'_4 = N - \{1, 2, 4, 3, 6\}$



La longitud mínima de carreteras pavimentadas es igual a:

15 +25 + 32 + 48+ 17 = 137 km.

El problema de la ruta más corta

Este problema consiste en determinar la ruta más corta entre un punto de origen y un punto de destino

Algoritmo para resolver redes cíclicas o acíclicas

Algoritmo de Dijkstra. En este algoritmo los nodos se clasifican de dos formas.

Temporales y Permanentes.

Los cálculos avanzan desde un nodo i a un nodo inmediatamente siguiente, j

Sea U_i = Distancia más corta desde el nodo de origen 1 al nodo *i*

D_{ij} = Longitud del arco (i, j)

La clasificación del nodo j se define entonces como:

$[U_j, i] = [U_i + d_{ij}, i]$, $d_{ij} \geq 0$

Una clasificación temporal se puede reemplazar con otra cuando se encuentra una ruta más corta.

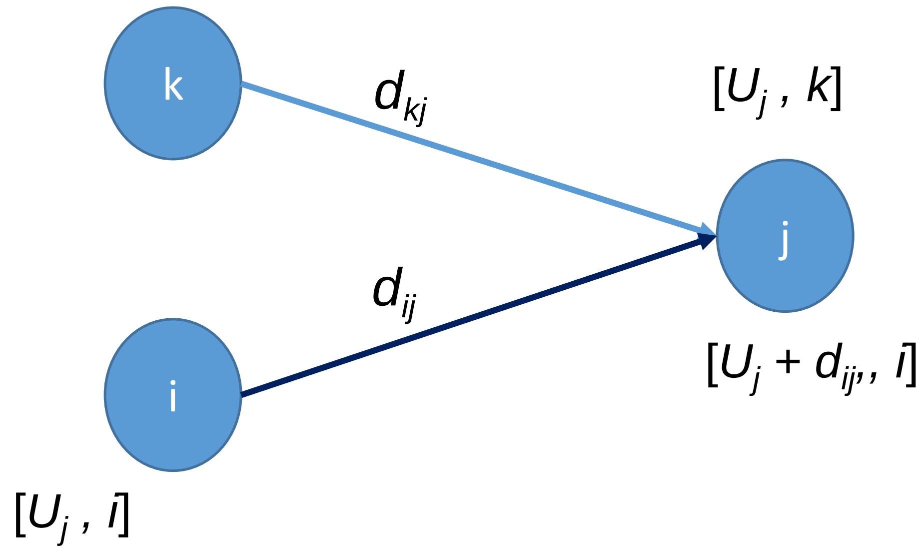
El problema de la ruta más corta

Paso 0: Clasificar el nodo de origen (nodo 1) como permanente [0, -]. Haga $i = 1$

Paso i:

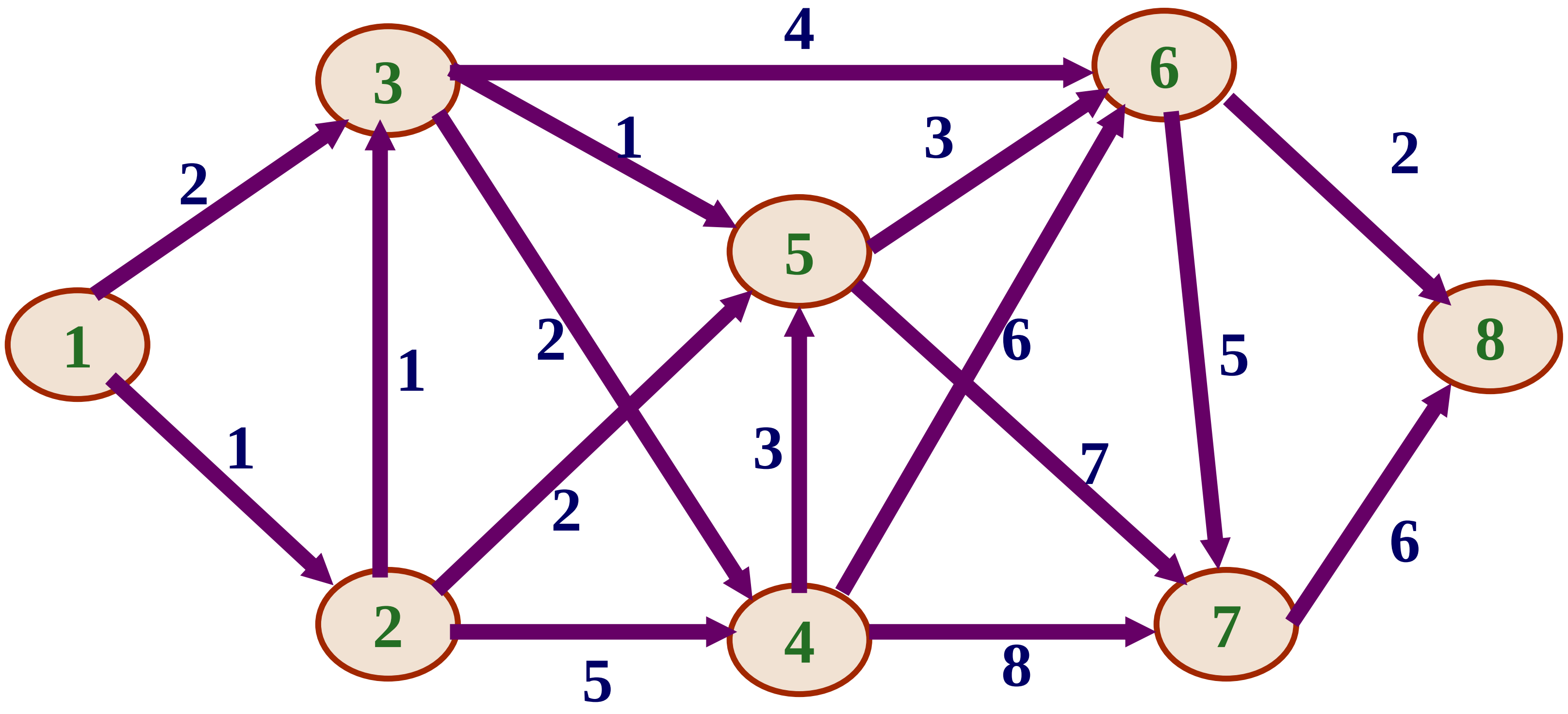
a) Calcular las clasificaciones temporales $[U_i + d_{ij}, i]$ para cada nodo j al que se puede llegar desde el nodo i, siempre y cuando j no esté en clasificación permanente.

Si el nodo j está clasificado con $[U_j, k]$, a través de otro nodo k diferente de i y si $U_i + d_{ij} < U_j$, reemplazar la clasificación temporal por $[U_k + d_{kj}, i]$ con clasificación temporal $[U_i + d_{ij}, i]$

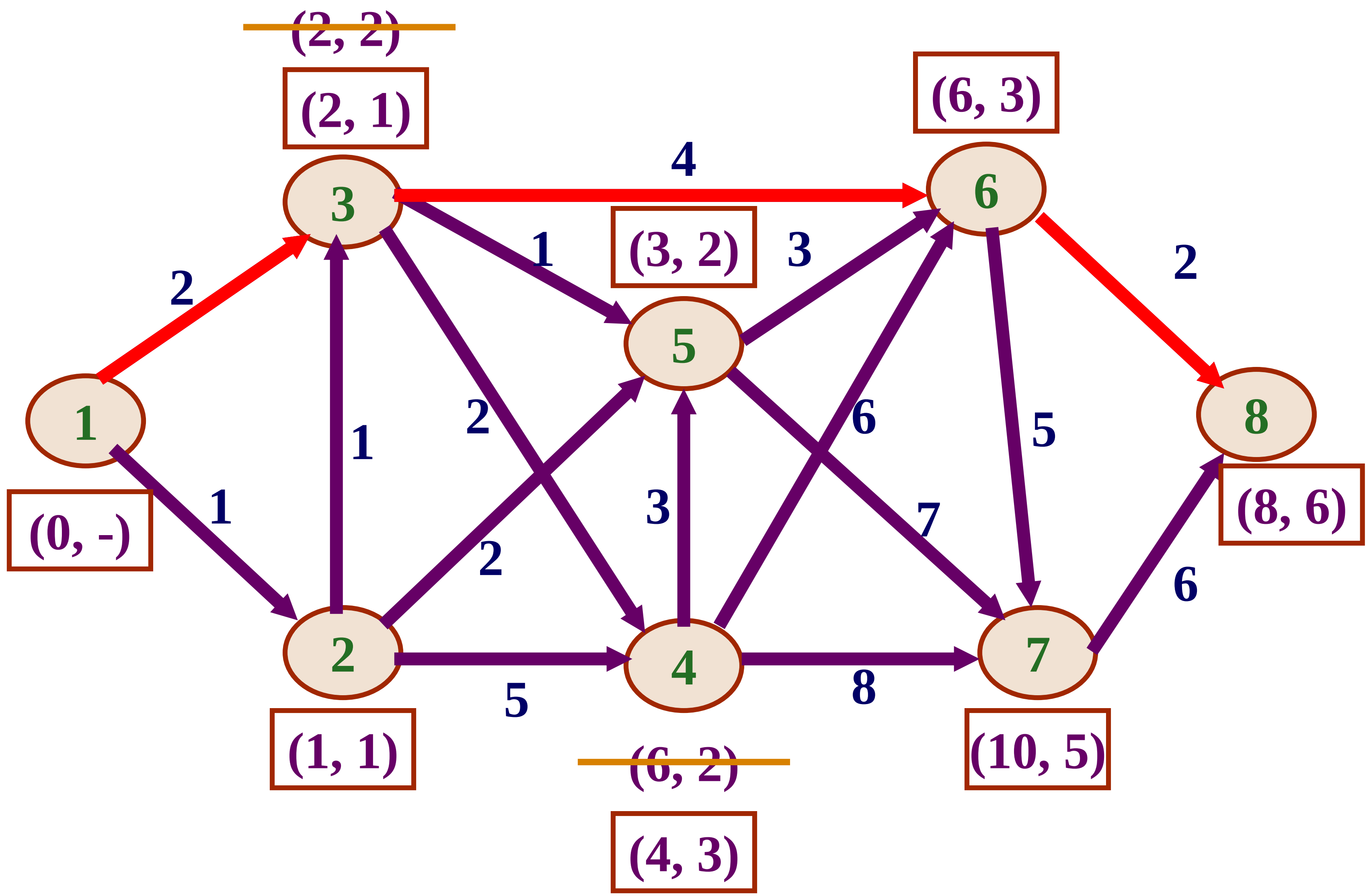


b) Si todos los nodos son permanentes parar, de lo contrario seleccionar la clasificación $[Ur, s]$, con la distancia más corta entre todas las clasificaciones temporales rompiendo empates en forma arbitraria. Haga i = r, clasifique el nodo r como permanente y repita el paso i.

El problema de la ruta más corta



El problema de la ruta más corta

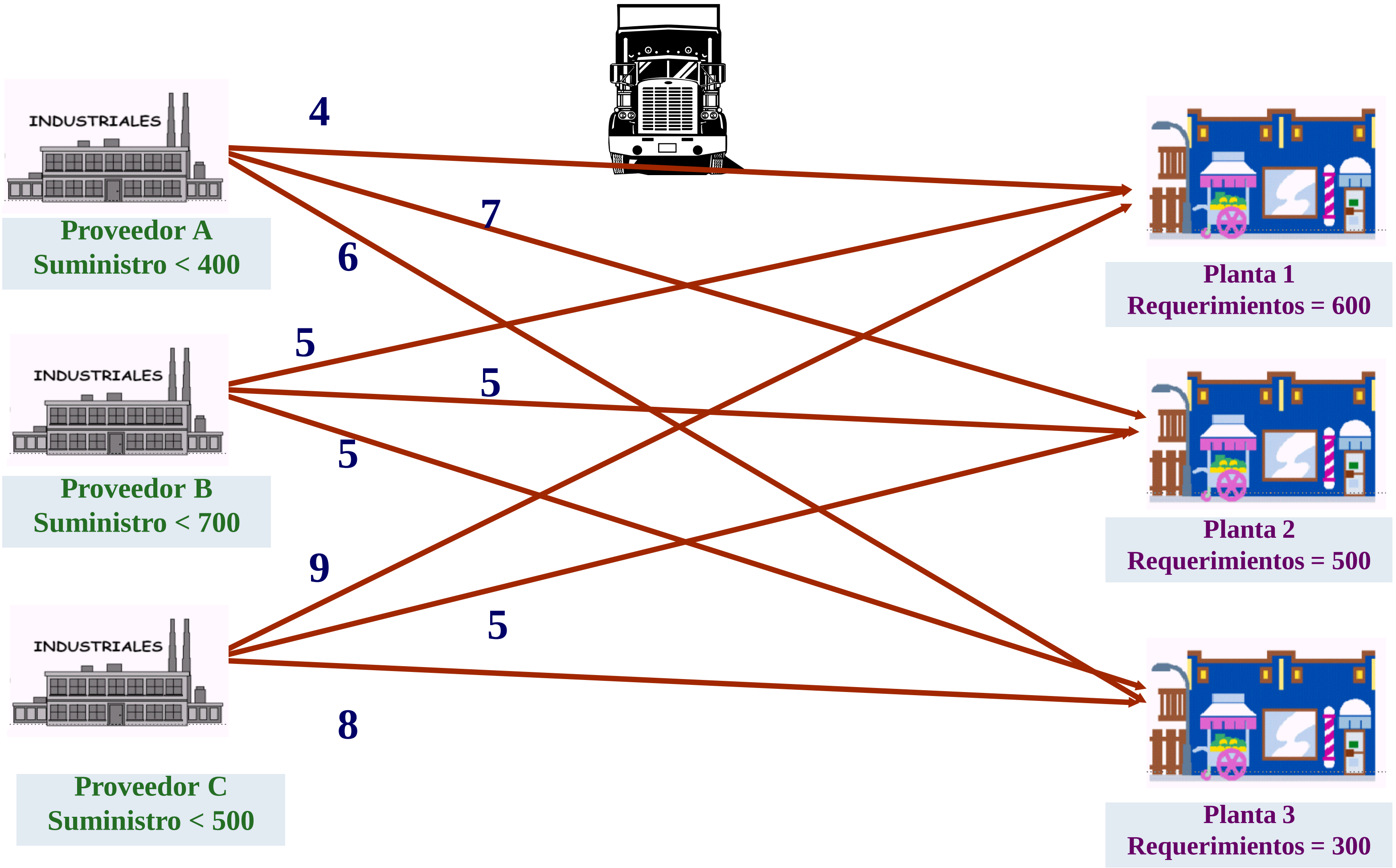


Resultados del algoritmo de Dijkstra

NODO	DISTANCIA MAS CORTA DESDE EL NODO 1	RUTA OPTIMA*
2	1	1 - 2
3	2	1 - 3
4	4	1 - 3 - 4
5	3	1 - 2 - 5
6	6	1 - 3 - 6
7	10	1 - 2 - 5 - 7
8	8	1 - 3 - 6 - 8

* Existen rutas óptimas alternativas, ya que hubo empates durante el desarrollo del ALGORITMO

El problema del transporte



El método del transporte – Solución asignación manual

Planta / Prov.	1	2	3	CAPACIDAD
A	$\boxed{4}$ 300	$\boxed{7}$ 100	$\boxed{6}$ 0	400
B	$\boxed{5}$ 300	$\boxed{5}$ 400	$\boxed{5}$ 0	700
C	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{8}$ 300	500
DEMANDA	600	500	300	1400

Existe un ciclo, por lo tanto puede mejorarse - Costo total : $ 7800

El método del transporte – Solución asignación manual

Prov. \ Planta	1	2	3	CAPACIDAD
A	4 400	7	6 0	400
B	5 200	5 500	5 0	700
C	9 0	5 0	8 300	500
DEMANDA	600	500	300	1400

No hay ciclo, modelo mejorado - Costo total : $ 7500

El problema del transporte

Cuando la configuración de la red está dada, el problema se convierte en definir de qué proveedores (fuentes) deben abastecerse los clientes (destinos)

Este es un problema que se resuelve mediante programación lineal, que permite encontrar los flujos óptimos.

Ejemplo: Problema de transporte

- Considere un problema relacionado con la asignación de proveedores a clientes.

La información relacionada con las demandas de los clientes es la siguiente:

Cliente	Demanda
Bogotá	600
Pasto	450
Medellín	350
Quito	200

La información relacionada con la capacidad de los proveedores es la siguiente:

Proveedor	Capacidad
Bogotá	700
Pasto	500
Medellín	400

Ejemplo: Problema de transporte

La información relacionada con los costos de distribución es la siguiente:

Destino Origen	Bogotá	Pasto	Medellín	Quito
Bogotá	7	36	18	75
Pasto	34	9	38	32
Medellín	18	36	9	80

Ejemplo: El problema del transporte

C.D. \ Cliente	BOG	PAS	MED	QUI	Capacidad
BOG	7	36	18	72	700
PAS	34	9	38	32	500
MED	18	36	9	80	400
Demanda	600	450	350	200	1600

Solución factible basada en costos mínimos

Cliente / C.D.	BOG	PAS	MED	QUI	Capacidad	
BOG	7 600	36	18	72 100	700	100
PAS	34	9 450	38	32 50	500	50
MED	18	36	9 350	80 50	400	50
Demanda	600	450	350	200	1600	
	0	0	0	150		

<u>7x600+9x450+9x350+32x50+72x100+80x50=24.200</u>

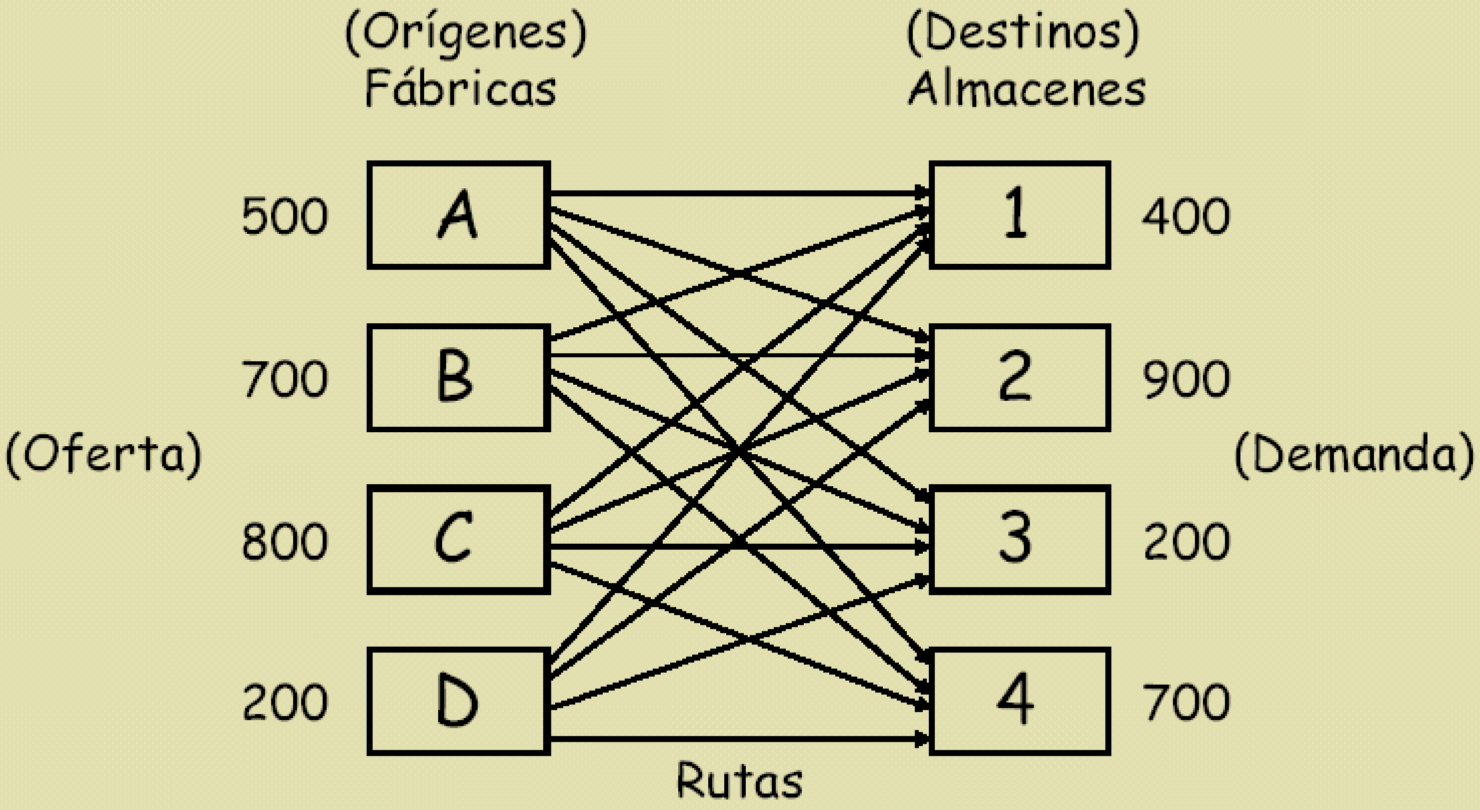
Método de Aproximación de Vogel

- Este modelo está relacionado con la búsqueda de una solución óptima realizando aproximaciones.
- El método parte de una solución inicial factible, que sirve de entrada para ser evaluada por otro modelo con el fin de encontrar una mejor solución.

Pasos de Método

1. Para cada fila y columna en el que haya algún suministro o alguna demanda, calcular la diferencia no negativa entre los dos más pequeños costos de embarque asociados con las variables no asignadas. “Costo de Oportunidad”.
2. Identificar la fila con mayor “Costo de Oportunidad”.
3. Colocar la **máxima asignación** posible a la ruta no usada que tenga el **menor costo de embarque** en la fila seleccionada.
4. Reajustar la oferta y la demanda.
5. Eliminar la columna con demanda cero y la fila con oferta cero.
6. Calcular los nuevo Costos de Oportunidad y Volver a empezar del paso 1.

Ejemplo Aproximación Vogel



Nuestra "meta" es seleccionar las <u>"Rutas"</u> y las <u>"Cantidades"</u> que deben enviarse para <u>"Minimizar el Costo Total de Transporte"</u>

Ejemplo Aproximación Vogel

	1	2	3	4	Oferta	**C. O**
A	12	13	4	6	500	2
B	6	4	10	11	700	2
C	10	5	9	4	800	1
D	4	12	8	10	200	4
Dem.	400	900	200	700	2200	
C. O	2	1	4	2		

Ejemplo Aproximación Vogel

	1	2	3	4	Oferta	C. O
A	12	13	4 200	6	~~300~~	2
B	6	4	~~10~~	11	700	2
C	10	5	~~9~~	4	800	1
D	4 200	~~12~~	~~8~~	~~10~~	~~0~~	~~4~~
Dem.	~~200~~	900	200	700	2200	
C. O	~~4~~	1	~~5~~	2		

Ejemplo Aproximación Vogel

	1	2	3	4	Oferta	**C. O**
A	12	13	4 200	6 300	0	~~6~~
B	6	4	10	11	700	2
C	10	5	9	4	800	1
D	4 200	12	8	10	0	~~4~~
Dem.	200	900	~~200~~	~~400~~	2200	
C. O	4	1	~~5~~	2		

Ejemplo Aproximación Vogel

	1	2	3	4	Oferta	**C. O**
A	12	13	4 200	6 300	0	~~6~~
B	6 200	4	10	11	500	2
C	10	5	9	4	800	5
D	4 200	12	8	10	0	~~4~~
Dem.	~~0~~	900	~~200~~	400	2200	
C. O	~~4~~	1	~~5~~	2		

Ejemplo Aproximación Vogel

	1	2	3	4	Oferta	**C. O**
A	12	13	4 200	6 300	0	~~6~~
B	6 200	4 500	~~10~~	~~11~~	~~0~~	~~7~~
C	~~10~~	5 400	~~9~~	4 400	~~400~~	1
D	4 200	~~12~~	~~8~~	~~10~~	0	~~4~~
Dem.	0	~~400~~	~~200~~	~~0~~	2200	
C. O	~~4~~	1	~~5~~	~~7~~		

Balanceo del Problema de Transporte

Considere el siguiente problema de transporte:

- Dos fuentes de suministro, con capacidad cada una de 5.000 unidades
- Tres zonas de demanda con requerimientos de 4.000, 2.000 y 2.500 unidades respectivamente.
- Los costos de transporte de una unidad de producto son los siguientes:

Caso Suministro en Exceso

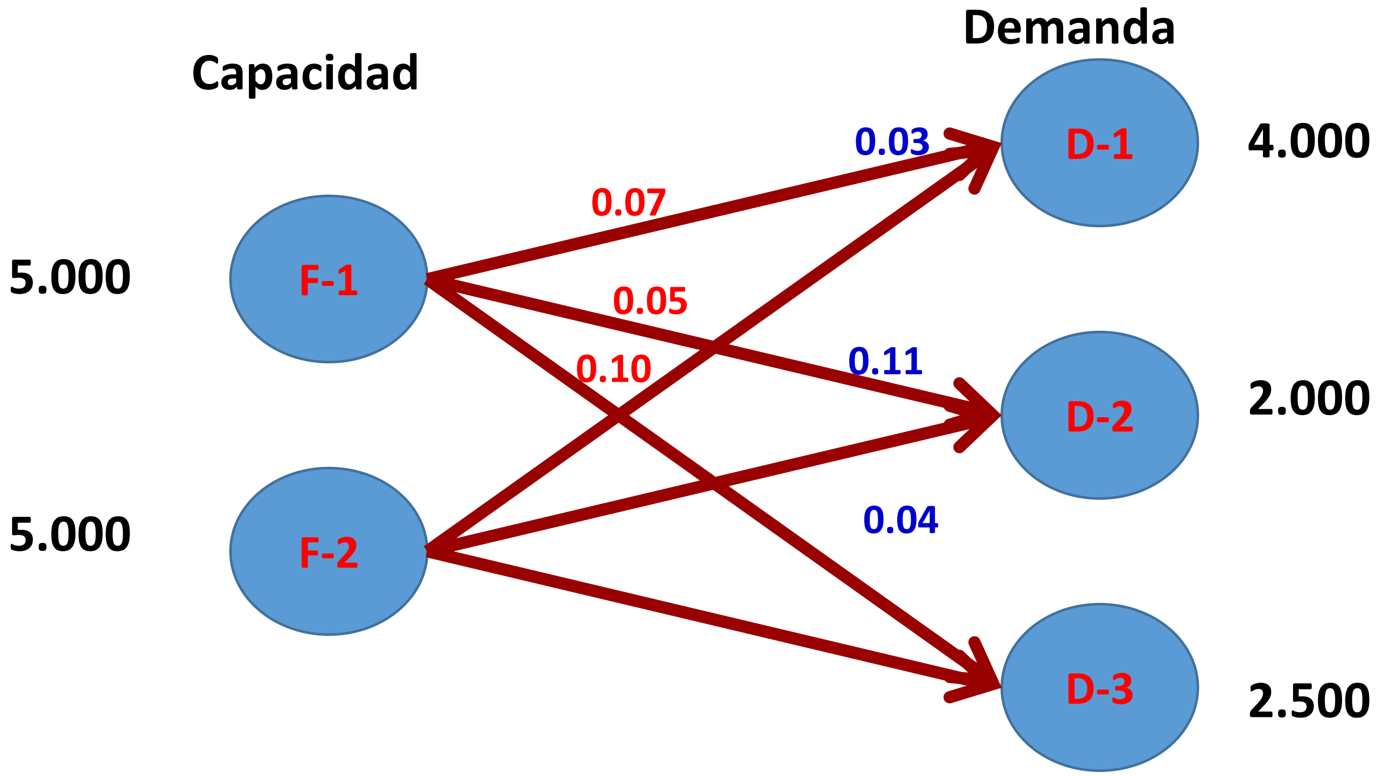
	Zona 1	Zona 2	Zona 3
Fuente 1	0.07	0.05	0.1
Fuente 2	0.03	0.11	0.04

Observar que en esta caso el suministro (10.000) es superior a la demanda (8.500)

Balanceo del Problema de Transporte

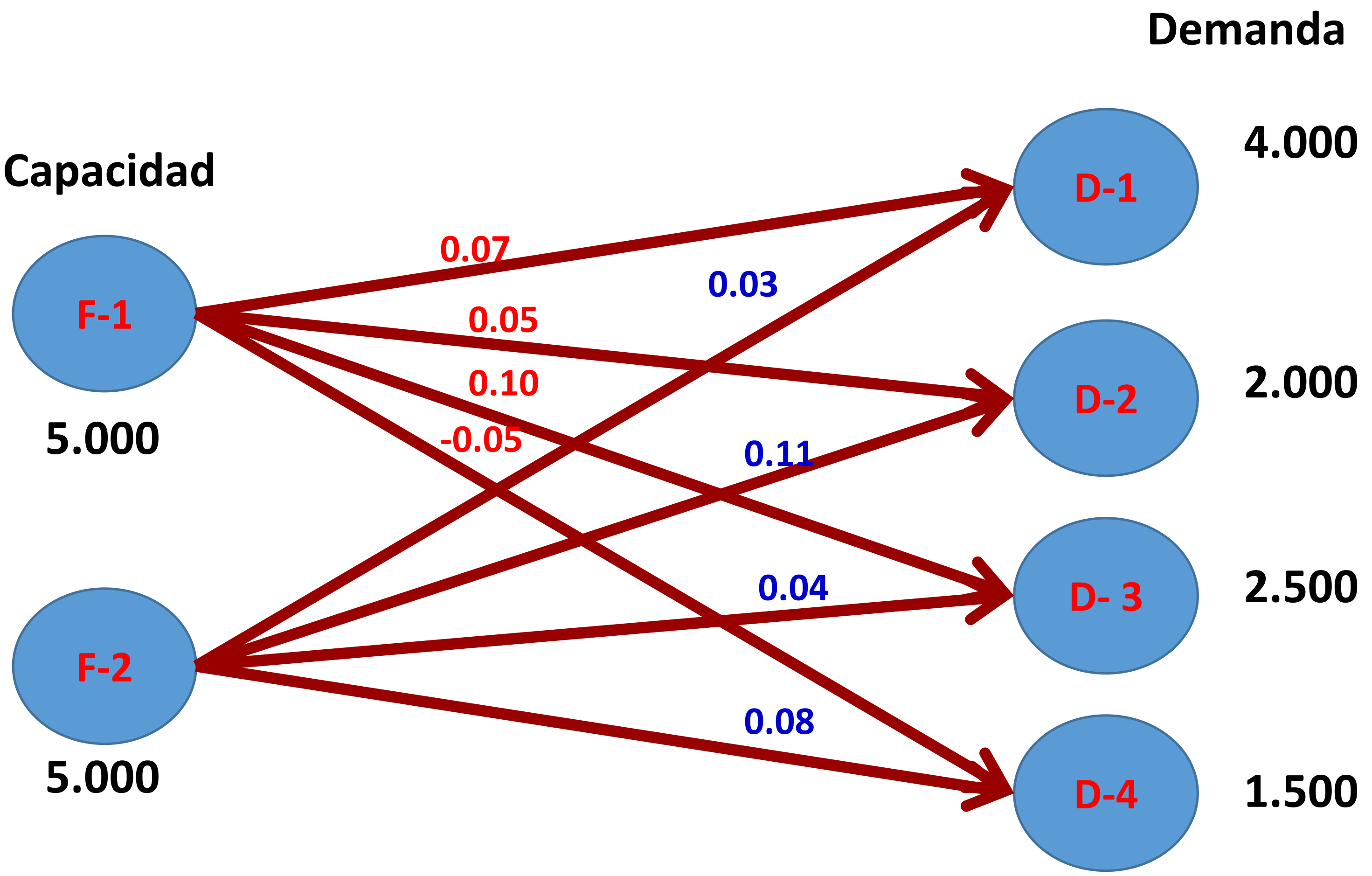
El problema a resolver es el siguiente

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	
Fuente 1	0.07	0.05	0.1	5000
Fuente 2	0.03	0.11	0.04	5000
	4000	2000	2500	



Balanceo del Problema de Transporte

Suponga que la empresa desea donar las unidades en exceso a una entidad, recibiendo por cada unidad donada un beneficio tributario, por ejemplo de 0.05 desde la fuente 1 y de 0.08 desde la fuente 2



Balanceo del Problema de Transporte

Caso Demanda en Exceso

- Dos fuentes de suministro, con capacidad cada una de 300 y 500 unidades
- Cuatro zonas de demanda con requerimientos de 200, 100, 400 y 300 unidades respectivamente.
- Los costos de transporte de una unidad de producto son los siguientes:

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
Fuente 1	0.1	0.05	0.07	0.09
Fuente 2	0.09	0.11	0.08	0.07

Para balancear el problema, se crea un nodo ficticio que suministre, la cantidad producto que se requiere para satisfacer la demanda.

Se puede suponer, que para cubrir la demanda insatisfecha, es necesario acudir a una fuente externa, donde los costos de adquisición podrían ser más elevados, por ejemplo, 21, 19, 22 y 20 para cada destino respectivamente

Algoritmo de mejora finita

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5 1500	3 100	2 100	6	**1700**
Planta 2	4 200	7 500	8 1300	10	**2000**
Planta 3	6	5 400	3 100	8 1200	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**34600**

$$5 - 2 + 3 - 5 + 7 - 4 = 4$$

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5 1400	3 100	2 200	6	**1700**
Planta 2	4 300	7 400	8 1300	10	**2000**
Planta 3	6	5 500	3	8 1200	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**34200**

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5	3 200	2 1500	6	**1700**
Planta 2	4 1700	7 300	8	10 300	**2000**
Planta 3	6	5 500	3	8 900	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**24600**

Algoritmo de Escalón

Paso 0: Hallar un plan de embarque factible inicial

Paso 1 A: Prueba de optimalidad, cálculo de los costos reducidos. (Conducir y girar en los semáforos)

Paso 1 B: Verificación de los costos reducidos. Si todos los costos reducidos son no negativos, la solución actual es óptima

Paso 2: Cambio hacia un plan de embarque mejorado

a) Escoja la celda cuyo costo reducido es más negativo
b) Determine el número máximo de unidades que puede ser enviado a la celda identificada en (a), ya que cada unidad enviada a esta celda reduce los costos totales del embarque en el valor de costo reducido.

Algoritmo de Escalón

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5	3 200	2 1500	6	**1700**
Planta 2	4 1700	7	8	10 300	**2000**
Planta 3	6	5 800	3	8 900	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**24600**

Costo Reducido: 5-3+5-8+10-4=5

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5	3 200	2 1500	6	**1700**
Planta 2	4 1700	7	8	10 300	**2000**
Planta 3	6	5 800	3	8 900	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**24600**

Costo Reducido: 3-5+3-2=-1

Algoritmo de Escalón

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5	3 1000	2 700	6	**1700**
Planta 2	4 1700	7	8	10 300	**2000**
Planta 3	6	5	3 800	8 900	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**23800**

Nuevo plan de embarque. Se continua el algoritmo, hasta que no se pueda mejorar más.

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4	Capacidad
Planta 1	5	3 1000	2	6 700	**1700**
Planta 2	4 1700	7	8	10 300	**2000**
Planta 3	6	5	3 1500	8 200	**1700**
Demandas	**1700**	**1000**	**1500**	**1200**	**23100**

Solución óptima

La Asignación De Personal a Tareas

La complejidad de este problema radica en su condición dicotómica, ejemplo, si se tienen *n* máquinas a las cuales deben asignarse *n* operarios, la decisión de asignar el operario i en la maquina j es se asigna o no se asigna.

Suponga que se tienen cuatro operarios para ser asignados a cuatro máquinas para que desarrollen en ellas una tarea específica, como información disponible se tiene el tiempo que tarda cada operario en realizar dicha labor en cada maquina.

El Tiempo total de procesamiento [hr.] para realizar la tarea por cada operario en cada máquina.

	MAQUINA			
OPERARIO	1	2	3	4
1	25	20	28	30
2	24	22	25	23
3	30	30	28	25
4	38	32	30	30

Método Húngaro para la Asignación de Personal

Step 1 – Find the minimum element in each row. Construct a new matrix by subtracting from each cost the minimum cost in its row. For this new matrix, find the minimum cost in each column. Construct a new matrix by subtracting from each cost the minimum cost in its column.

Step 2 – Draw the minimum number of lines (horizontal or vertical) that are needed to cover all the zeros in the reduced cost matrix. If n lines are required, an optimal solutions is available among the covered zeros in the matrix. If fewer than n lines are needed, proceed to step 3.

Step 3 – Find the smallest nonzero element (call its value k) in the reduced cost matrix that is uncovered by the lines drawn in Step 2. Now subtract k from each uncovered element of the reduced cost matrix and add k to each element that is covered by two lines. Return to step 2.

Paso 1. Encuentre el elemento menor en cada fila. Construya una nueva matriz restando a cada costo el costo mínimo en su fila. Para esta nueva matriz, encuentre el mínimo costo en cada columna. Construya una nueva matriz restando a cada costo el costo mínimo en su columna.

Paso 2. Dibuje el numero mínimo de líneas (horizontal o vertical) que sean necesarias para cubrir todos los ceros en la matriz de costos reducidos. Si *n* líneas son requeridas, una solución óptima está disponible entre los ceros cubiertos en la matriz. Si menos de *n* líneas son necesarias, proceda al paso 3.

Paso 3. Encuentre el elemento más pequeño que no sea cero (llame a su valor *k*) en la matriz de costos reducidos que no es cubierta por las líneas dibujadas en el paso 2. Ahora reste *k* a cada elemento no cubierto de la matriz de costos reducidos y sume *k* a cada elemento que está cubierto por las dos líneas. Retorne al paso 2.

Considere la siguiente matriz de costos para la asignación de cuatro trabajadores a cuatro tareas

		TAREAS			
		1	2	3	4
EMPLEADOS	1	14	5	8	7
	2	2	12	6	5
	3	7	8	3	9
	4	2	4	6	10

Aplique el algoritmo Húngaro para realizar la asignación

		TAREAS				
		1	2	3	4	Fila mínima
EMPLEADOS	1	14	5	8	7	5
	2	2	12	6	5	2
	3	7	8	3	9	3
	4	2	4	6	10	2

Reducción por filas

		TAREAS			
		1	2	3	4
EMPLEADOS	1	9	0	3	2
	2	0	10	4	3
	3	4	5	0	6
	4	0	2	4	8

		TAREAS			
		1	2	3	4
EMPLEADOS	1	9	0	3	2
	2	0	10	4	3
	3	4	5	0	6
	4	0	2	4	8
	Columna mínima	0	0	0	

Reducción por columnas

		TAREAS			
		1	2	3	4
EMPLEADOS	1	9	0	3	0
	2	0	10	4	1
	3	4	5	0	4
	4	0	2	4	6

		TAREAS			
		1	2	3	4
EMPLEADOS	1	10	0	3	0
	2	0	9	3	0
	3	5	5	0	4
	4	0	1	3	5

Solución óptima encontrada, número de mínimo de líneas para cubrir, igual al número de tareas a asignar

Solución:

- Empleado 1 asignado a la tarea 2
- Empleado 2 asignado a la tarea 4
- Empleado 3 asignado a la tarea 3
- Empleado 4 asignado a la tarea 1

Valor de la solución:

Z=5+5+3+2

Z=15

TALLER

Una empresa ha preseleccionado 5 candidatos para ocupar 4 puestos de trabajo en dicha empresa. Los puestos de trabajo consisten en manejar 4 máquinas diferentes (un trabajador para cada máquina). La empresa puso a prueba a los 5 trabajadores en las 4 máquinas, realizando el mismo trabajo todos ellos en cada una de las máquinas, obteniendo los siguientes tiempos:

	Máquina1	**Máquina2**	**Máquina3**	**Máquina4**
Cand1	10	6	6	5
Cand2	8	7	6	6
Cand3	8	6	5	6
Cand4	9	7	7	6
Cand5	8	7	6	5