הכללה של "משחק החיים" של קונווי לתחום רציף – SmoothLife

סטפן ראפטר
נירנברג, גרמניה
frlndmr@web.de

8 בדצמבר, 2011

תקציר

אנו מציגים מה שלטענתנו הוא הכללה גנרית של "משחק החיים" של קונווי לתחום רציף. אנו מתארים את המודל התיאורטי ואת המימוש המפורש שלו במחשב.

1. מבוא

הופיעו הכללות רבות ל "משחק החיים" של קונווי (להלן – מה"ח) מאז שהוא הומצא בשנת 1970 [1]. ניתן לשנות כמעט את כל המאפיינים של מה"ח: מספר המצבים, הרשת, מספר השכנים, הכללים. מאפיין אחד של המה"ח המקורי הוא ה"גלשן", מבנה יציב אשר נע באלכסון על רשת הריבועים התומכת. קיימות גם "חלליות", שהן מבנים דומים אשר נעים אופקית או אנכית.

ניסיונות ליצור גלשנים (כך נכנה מבנים כאלה להלן), אשר אינם נעים באלכסון או ישר, הובילו ליצירת מבנים מלאכותיים ענקיים במה"ח המקורי. אפשרות אחרת להגיע לכך נחקרה על ידי Evans [2], בדרך של הגדלת הסביבה, והיא מכונה "גדול מהחיים" (גמה"ח). במקום 8 שכנים, הסביבה כעת מתוארת באופן הטוב ביותר באמצעות רדיוס r, ותא בעל $(2r+1)^2-1$ שכנים. הכללים יכולים להיות מורכבים כפי רצוננו, אולם לשם התחלה רצוי להשתמש רק בכללים אותם ניתן לתאר על ידי שני אינטרוולים. הללו נקראים אינטרוולי "לידה" ו- "מוות", וכל אחד מהם מאופיין על ידי שני ערכים. ניתן לציין ערכים אלה באופן מפורש, כמספר השכנים, או באמצעות "מילוי", שהוא מספר ממשי בין 0 ל 1. במקרה הראשון יש לציין גם את הרדיוס, במקרה השני ניתן להשמיט אותו.

ההכללה הטבעית של מודל אוונס היא לאפשר לרדיוס הסביבה לשאוף לאינסוף, ולקרוא לזה גבול הרצף. התא עצמו הופך במקרה זה לנקודה אינפיניטיסימלית. הדבר בוצע על ידי Pivato [3] ונחקר מתמטית. הוא קרא למודל זה RealLife ויצר סדרה של מבני "חיים דוממים", שהם מבנים שאינם מתפתחים עם הזמן.

2. SmoothLife

אנו ננקוט בגישה שונה במקצת, ונאפשר לתא שלא להיות אינפיניטסימלי, אלא בעל גודל סופי. נניח להלן שצורת התא היא עיגול (דיסק), אף כי הוא יכול להיות כל קבוצה סגורה

אירת. בתנאים אלה, המצב "חי או מת" של התא אינו נקבע על ידי ערך הפונקציה בנקודה $\vec{x}$, אלא על ידי מילוי העיגול סביב אותה נקודה. באותו אופן מטפלים במילוי הסביבה. נניח שהסביבה היא בצורת טבעת, אזי אם $f(\vec{x},t)$ היא פונקציית המצב שלנו בזמן t, נוכל לקבוע את מילוי התא (המילוי הפנימי) m כאינטגרל

$$m = \frac{1}{M} \int_{|\vec{u}|<r_i} d\vec{u} f(\vec{x} + \vec{u}, t) \tag{1}$$

והסביבה, או "המילוי החיצוני" כאינטגרל

$$n = \frac{1}{N} \int_{r_i<|\vec{u}|<r_a} d\vec{u} f(\vec{x} + \vec{u}, t) \tag{2}$$

כאן N ו- M הם גורמי נרמול, כך שהמילוי יהיה בין 0 ל 1. מכיוון שערכי הפונקציה של f נמצאים גם הם בין 0 ל 1, גורמי הנרמול הם השטחים המתאימים של הדיסק והטבעת. רדיוס הדיסק, או "הרדיוס הפנימי" נתון על ידי r_i, שהוא גם הרדיוס הפנימי של הטבעת. הרדיוס החיצוני של הטבעת נתון על ידי r_a.

במה"ח המקורי מצבו של תא בצעד הזמן הבא נקבע על ידי שני מספרים: מצב החיים של התא עצמו, שהוא 0 או 1, ומספר השכנים החיים, אשר יכול להיות בין 0 ל 8. ניתן למדל את כל הכללים האפשריים במטריצה 2×9, המכילה את המצבים החדשים עבור השילובים המתאימים. ניתן לקרוא לה מטריצת המעבר.

כעת, במקרה שלנו, הדבר שקול למצב חדש של הנקודה $\vec{x}$ אשר נקבע על ידי שני המספרים m ו- n. המצב החדש נתון על ידי פונקציה $s(n,m)$. נקרא לה פונקציית המעבר. היא מוגדרת על האינטרוול $[0,1]\times[0,1]$ ומקבלת ערכים בטווח $[0,1]$. על מנת שהמצב יהיה דומה למצב במה"ח, בוחרים לרוב $r_a = 3r_i$ (קוטר הסביבה הוא ברוחב 3 תאים).

3. מימוש במחשב

אף כי המודל התיאורטי הוא פשוט, אופן היישום שלו במחשב אינו מיידי, מכיוון שהמחשב אינו יכול לטפל בערכים אינפיניטסימליים, תחומים רציפים וכו'. אולם, הוא יכול לטמפ במספרים ממשיים בדרך של חשבון נקודה צפה, וכפי שמסתבר, הדבר מספיק לצרכינו. ניתן גם למדל את התחום הרציף באמצעות רשת ריבועים, שהוא בסיס הנתונים החישובי האידאלי. לכן, נוכל לממש את הפונקציה שלנו $f(\vec{x},t)$ כמערך float.

בעת מימוש של האינטגרלים על התחומים העגולים אנו נתקלים בבעיה. מעגלים מפוקסלים נוטים להיות בעלי שפה משוננת. לכן, או שנאפשר לרדיוס המעגל להיות כה גדול, עד

שהפיקסלציה עקב הרשת המרובעת הבסיסית שלנו תהיה זניחה, מה שיגרום לזמן חישוב עצום, או שנשתמש בפתרון אחר המשמש במצבים דומים רבים: anti-aliasing. קחו למשל את האינטגרציה של האזור הפנימי. עבור התא $\vec{x}$, ערכי הפונקציה נלקחים במיקומים $\vec{x}+\vec{u}$. נגדיר $l = \left|\vec{x}\right|$. עבור אזור anti-aliasing בעובי b סביב השפה אנחנו לוקחים את ערך הפונקציה כפי שהוא כאשר $l < r_i - b/2$, עבור $l > r_i + b/2$ אנחנו לוקחים 0. בתחום הביניים אנחנו מכפילים את ערך הפונקציה ב $b/(r_i + b/2 - l)$. באותו אופן מטפלים בשפה הפנימית ובשפה החיצונית של הטבעת. לרוב בוחרים $b = 1$.

עלינו גם לבנות את פונקציית המעבר $s(n,m)$ באופן מפורש. למרבה המזל, נוכל להגביל עצמנו בתחילה, כמו בגמה"ח, לארגעה פרמטרים: גבולות אינטרוולי הלידה והמוות. על מנת לשמור על חלקות ולהישאר ברוח ה- anti-aliasing שהוגדר לעיל, אנו משתמשים בפונקציות מדרגה חלקות במקום במדרגות קשיחות. נקרא להן פונקציות סיגמואידה על מנת להדגיש את החלקות הזו. לדוגמה, נוכל להגדיר:

$$\sigma_1(x,a) = \frac{1}{1+\exp\left(-4(x-a)/\alpha\right)} \tag{3}$$

$$\sigma_2\left(x,a,b\right) = \sigma_1(x,a)(1-\sigma_1\left(x,b\right)) \tag{4}$$

$$\sigma_m\left(x,y,m\right) = x\left(1-\sigma_1\left(m,0.5\right)\right) + y\sigma_1\left(m,0.5\right) \tag{5}$$

אזי נוכל להגדיר את פונקציית המעבר כ

$$s(n,m) = \sigma_2\left(n, \sigma_m\left(b_1,d_1,m\right), \sigma_m\left(b_2,d_2,m\right)\right) \tag{6}$$

כאשר אינטרוולי הלידה והמוות נתונים על ידי $\left[b_1,b_2\right]$ ו- $\left[d_1,d_2\right]$, בהתאמה. רוחב הצעד נתון על ידי α. מכיוון שיש לנו שני סוגים שונים של צעדים, יש לנו α_n ו- α_m. שימו לב ש anti-aliasing וחלקות פונקציית המעבר אינן נדרשים על מנת שסימולציית המחשב תעבוד. הם רק הופכים את הבעיה לחלקה יותר ומאפשרים לבחור רדיוסים קטנים יותר לסביבה ולאזור הפנימי על מנת להשיג זמני חישוב מהירים יותר לצעדי הזמן.

4. צעידה חלקה בזמן

עד עתה הפכנו הכל לחלק ורציף, חוץ מדבר אחד: צעדי הזמן הם עדיין דיסקרטיים. בזמן t, הפונקציה $s(n,m)$ מחושבת לכל $\vec{x}$, מה שנותן את הערך החדש $f(\vec{x},t+1)$ בזמן $t+1$. אם נחשוב על ההפעלה של $s(n,m)$ כאופרטור לא לינארי S, נוכל לרשום

$$f\left(\vec{x},t+1\right) = S\left[s(n,m)\right]f\left(\vec{x},t\right) \tag{7}$$

על מנת שתהיה לנו היכולת לקבל צעדי זמן קטנים כרצוננו, אנו משתמשים בזמן האינפיניטסימלי dt ומפרשים מחדש את פונקצית המעבר כקצב השינוי של הפונקציה $f\left(\vec{x},t\right)$ במקום ערך הפונקציה החדש. אזי נוכל לרשום

$$f\left(\vec{x},t+dt\right)=f\left(\vec{x},t\right)+dtS\left[s(n,m)\right]f\left(\vec{x},t\right) \tag{8}$$

כאשר כאן הגדרנו $s(n,m)$ חדשה, אשר מקבלת ערכים בטווח [1,1-] במקום [0,1].
אם פונקציית המעבר בסכמת הצעידה בזמן הדיסקרטית הייתה $s_d(n,m)$, אזי הפונקציה החלקה היא
$s(n,m)=2s_d(n,m)-1$ היא גם סכמת האינטגרציה הפשוטה ביותר של המשוואה האינטגרו-דיפרנציאלית

$$\partial_t f\left(\vec{x},t\right)=S\left[s(n,m)\right]f\left(\vec{x},t\right) \tag{9}$$

משוואה זו מובילה לצורת חיים אחרת. אותם גלשנים גנריים לא יימצאו באותם ערכי לידה ומוות כמו בגרסה עם צעידה בזמן דיסקרטית, אולם גם היא יוצרת גלשנים, מבנים תונדים ויציבים.

5. מסקנות

תיארנו מודל להכללה של "משחק החיים" של קונווי לטווח רציף של ערכים ותחום רציף. מטריצת המעבר 2x9 של משחק החיים הוכללה לפונקציית מעבר $s(n,m)$. סביבת 8 הפיקסלים ותא הפיקסל היחיד של מה"ח הוכלל לסביבה טבעתית ותא בצורת דיסק. סט הכללים הוכלל לארבעה מספרים ממשיים: גבולות אינטרוולי הלידה והמוות. המאפיין הדיסקרטי האחרון שנותר הוא הצעידה בזמן. הצענו שיטה לצעידה רציפה בזנן אשר מפרשת מחדש את פונקציית המעבר כמהירות השינוי.

בטכניקה עם שני הרדיוסים בוצע שימוש בקונטקסטים אחרים [4], אולם לא תוארו שם גלשנים. היה גם יישום ממוחשב של גרסה רציפה של מה"ח ללא טכניקת הרדיוס הפנימי, ולא נמצאו שם גלשנים [5].

המטרה של מציאת גלשן אשר יכול לנוע בכל כיוון שהוא הושגה. הוא דומה הן לגלשן והן לחללית ממה"ח. הוא דומה גם למבנים שנמצאו בגמה"ח. לפיכך, לדעתנו מצאנו את הגלשן המוכלל הגנרי, ואנו קוראים לו "הגלשן החלק".

איור 1: הגלשן החלק עבור $r_a=21$, $b_1=0.278$, $b_2=0.365$, $d_1=0.267$, $d_2=0.445$, $\alpha_n=0.028$, $\alpha_m=0.147$, בתנועתו ימינה ולמעלה.

ביבליוגרפיה

[1] Conway's "Game of Life", 1970
[2] "Larger than Life; it's so nonlinear", Kellie Michele Evans, PhD thesis, 1996
[3] "RealLife: the continuum limit of Larger Than Life cellular automata",
Marcus Pivato, 2007
[4] "Dynamics of Complex Systems", Yaneer Bar-Yam, 1997, (section 7.2: pattern formation)
[5] "Continuous Spatial Automata", Bruce J. MacLennan, 1990