



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۰

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

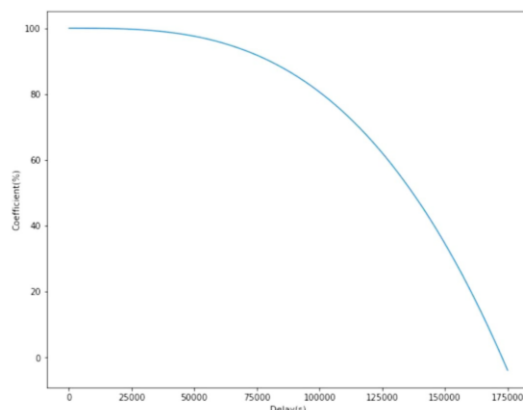
تمرین امتیازی

تاریخ تحویل: ۱۰ اردیبهشت ساعت ۲۳:۵۹

تیم طراح: دانیال بازمانده - رضا قهرمانی

قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به اثبات درستی و تحلیل زمان اجرا دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار آبی (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند مشکی) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی A₄ باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ‌شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- تأخیر در ارسال تمرین‌ها براساس نمودار زیر محاسبه خواهد شد. محور افقی نمودار، مقدار تأخیر به ثانیه و محور عمودی، ضریب اعمالی در نمره تمرین است.



درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

مبحث اصلی این تمرین، تحلیل سرشکن (Amortized Analysis) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.

این تمرین فقط شامل سوالات تئوری می‌باشد.

فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره ی دانشجویی_نام و نام خانوادگی_BonusHW** نام‌گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال BonusHW_NameFamily_980000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

سوال اول

بر روی یک پشته که اندازه‌ی آن هیچ گاه از k فراتر نمی‌رود، دنباله‌ای از اعمال پشته را انجام می‌دهیم. بعد از هر k عمل، یکی یکی کپی از کل پشته برای اهداف پشتیبانی انجام می‌گیرد. با نسبت دادن هزینه‌های سرشکن مناسب به اعمال مختلف پشته، نشان دهید که هزینه‌ی n عملیات پشته به همراه هزینه کپی $O(n)$ است. هزینه‌ی هریک از عملیات $push$ و pop از $O(1)$ و هزینه‌ی عملیات پشتیبان‌گیری از (تعداد اعضای داخل پشته) $O(n)$ است. (توجه کنید n و k هیچ ارتباطی با همدیگر ندارند و برای هر مقدار n دلخواه، هزینه‌ی n عمل برابر $O(n)$ خواهد بود.)

سوال دوم

در تحلیل جمعی (Aggregate) نشان می‌دهیم که برای هر n ، دنباله‌ای از n عمل در بدترین حالت به زمان $O(n)$ نیاز دارد. بنابراین در بدترین حالت، هزینه متوسط یا همان هزینه سرشکن برای هریک از اعمال $\frac{O(n)}{n}$ است. توجه کنید که این هزینه سرشکن برای تمامی اعمال به کار می‌رود حتی وقتی که انواع مختلفی از اعمال در یک دنباله وجود دارند. فرض کنید دنباله‌ای از n عمل بر روی یک ساختمان داده انجام می‌گیرد. اگر فرض کنیم i توانی از ۲ باشد، عمل i ام هزینه‌ای برابر i خواهد داشت و درغیراین صورت، هزینه‌ی آن ۱ خواهد بود. با استفاده از تحلیل جمعی، هزینه سرشکن هر عمل را به دست آورید.

سوال سوم

فرض کنید می‌خواهیم یک ساختمان داده پشته داشته باشیم که اعداد در آن به صورت مرتب‌شده قرار دارند. عملیات وارد کردن عدد در پشته به این صورت است که همه اعداد بزرگتر از عدد جدید از پشته حذف خواهند شد و عدد جدید و بقیه اعداد به صورت مرتب در پشته می‌مانند. عملیات خارج کردن از پشته نیز مانند پشته معمولی است و عدد روی پشته برگردانده می‌شود.

نحوه پیاده سازی این پشته با استفاده از یک پشته معمولی را توضیح دهید و نشان دهید که هزینه سرشکن عملیات ورود و خروج $O(1)$ است.

- ❖ وضعیت اولیه پشته: ۵ ۳ ۰ -۱ -۵
- ❖ وضعیت پشته بعد از درج عدد ۲: ۲ ۰ -۱ -۵
- ❖ وضعیت پشته بعد از خارج کردن یک عدد: ۰ -۱ -۵
- ❖ وضعیت پشته بعد از درج عدد -۳: -۳ -۵
- ❖ وضعیت پشته بعد از درج عدد ۵: ۵ -۳ -۵
- ❖ وضعیت پشته بعد از خارج کردن یک عدد: -۳ -۵

موفق باشید.