

Facharbeit

im Seminarfach „Argumentieren und Beweisen“
- Mathematik ohne Taschenrechner

Die Herleitung einer Gleichung zu Kettenlinien unter Verwendung von Simulationen

Verfasser: John Kevin Klein
Fachlehrer: Andreas Oeljeklaus
Ausgabetermin: 13.01.2020
Abgabetermin: 26.02.2020



Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Benötigtes Vorwissen	1
2.1	Die hyperbolischen Funktionen	1
2.2	Bogenlänge einer Kurve	2
3	Ansatz über das Kräftegleichgewicht	4
4	Betrachtung und Auswertung der Simulation	5
5	Herleitung der Kettenlinie	7
5.1	Bestimmung der Differentialgleichung	7
5.2	Der Weg zur Ableitung des Areasinus hyperbolicus	8
5.3	Rückeinsetzung und Lösung der Kettenlinie	10
6	Die Parabel als Beschreibung für Kettenverläufe	12
7	Anwendungsbeispiel	13
8	Die Historie der Kettenliniengleichungsermittlung	15
 Anhang A: Materialien		
 Anhang B: Literaturverzeichnis		
 Anhang C: Erklärungen		

1 Vorwort

In der gegenwärtigen Architektur werden mithilfe von Simulationen möglichst stabile Bauformen ausgearbeitet. Damit jedoch ein exakter Plan des Bauwerks erstellt werden kann, müssen verschiedenste mathematische Formeln genutzt werden, um das Design zu optimieren. Beispielsweise beim Bau von Hochspannungsleitungen¹ oder Brückenbögen wird die Form der Kettenlinie genutzt, einer Kurve, die den Verlauf eines hängenden Seils oder einer hängenden Kette mit vernachlässigbarem Durchmesser beschreibt. Dabei ist zu beachten, dass das Seil eine gleichmäßig verteilte Eigenmasse besitzt, sowie dass das Seil sich in Ruhe befindet, damit es sich nicht bewegt und die Kräfte im Gleichgewicht stehen.

Nachdem das benötigte Vorwissen abgearbeitet wurde, betrachten wir die wirkenden Kräfte und nutzen die Erkenntnisse, um die Simulation verstehen und auswerten zu können. Danach versuchen wir die Gleichung der Kettenlinie herzuleiten. Bevor wir diese auf ein Echtweltbeispiel anwenden, müssen wir dann noch einen Schritt zurück zur Parabel machen, die uns erweiterte Erkenntnisse zur Kettenlinie liefert und auch etwas mit Ketten zu tun hat. Zum Schluss geht es um die Geschichte der Kettenlinie, also wer an der Erstermittlung beteiligt war und wer schließlich den Beweis erbracht hat. Gegenstand der Arbeit soll dabei die ganze Zeit die Kettenlinie und ihre Modellierungen mittels Mathematik, Annäherung und Simulation sein.

2 Benötigtes Vorwissen

Im Nachfolgenden werden einige Formeln erläutert, die in der Beweisführung benutzt werden.

2.1 Die hyperbolischen Funktionen

Es gibt die hyperbolischen Funktionen Sinus hyperbolicus „sinh“ und Kosinus hyperbolicus „cosh“, sowie die dazugehörigen Umkehrfunktionen Areasinus hyperbolicus „arsinh“ und Areakosinus hyperbolicus „arcosh“. Der sinh und cosh sind durch die elementaren Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definiert². Der Verlauf des Cosinus hyperbolicus ähnelt dem der Parabel und der des Sinus hyperbolicus dem einer Potenzfunktion dritten Grades. Unterschiede zwischen den Potenzfunktionen und den hyperbolischen Funktionen bestehen in der Steigung, die beim cosh am Ursprung kleiner ist, jedoch durch die Eigenschaft der Exponentialfunktion zunimmt, wodurch sie schließlich steiler ansteigt als die Parabel. Der sinh verläuft durch den Ursprung steiler als x^3 , welches den Ursprung horizontal touchiert, wird allerdings zwischen 1 und 1,5 von der Potenzfunktion überholt, die sich dann darüber befindet. Durch die gleiche Eigenschaft wie die des cosh, dass es

¹Vgl. Heuser, H., Lehrbuch der Analysis Teil 1, Stuttgart 1980, S. 296

²Vgl. ebd.

sich um eine Exponentialfunktion handelt, überholt auch der \sinh die Potenzfunktion und steigt schließlich um einiges schneller an. Der \sinh scheint punktsymmetrisch zum Ursprung zu sein, der \cosh wiederum achsensymmetrisch zur y-Achse.

2.2 Bogenlänge einer Kurve

Es wird von einer differenzierbaren, stetigen Funktion $f(x)$ ausgegangen. Die Bogenlänge³ s ist die Länge der Kurve von 0 bis b . Approximiert wird sie durch die Aufteilung des Intervalls in n gleich große Abschnitte mit der Breite $\Delta x = \frac{b}{n}$, wie in Abbildung 8 zu sehen. Ziel ist es, einen Ausdruck für s durch die Summe aller Δs zu finden, indem der Grenzwert $n \rightarrow +\infty$ berechnet wird. Die Strecken Δs_i , Δx , Δy_i sind wie in Abbildung 1 in einem rechtwinkligen Dreieck angeordnet. Der Satz des Pythagoras gibt folgende Beziehung:

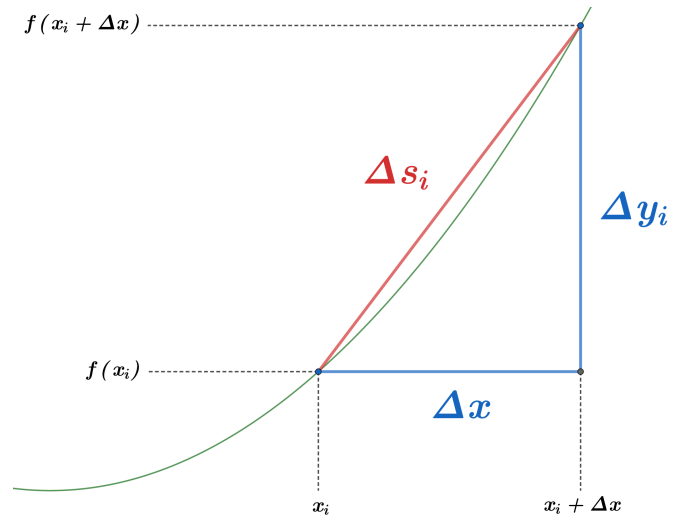


Abbildung 1: Einzelbetrachtung

$$\Delta s_i^2 = \Delta x^2 + \Delta y_i^2$$

$$| \sqrt{\quad}$$

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}$$

$$| \Delta x^2 \text{ ausklammern}$$

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x^2}\right)}$$

$$| \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x^2} = \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2$$

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2\right)}$$

$$| \text{Wurzelregel: } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Da wir s und nicht Δs_i berechnen wollen, muss nun der Grenzwert $n \rightarrow +\infty$ gebildet werden und alle Δs_i von 1 bis n aufsummiert werden, sodass unendlich viele Abschnitte mit infinitesimaler, also unendlich kleiner Breite betrachten werden können, damit die Länge der Kurve exakt berechnet wird. Durch das Symbol \sum wird diese Summenoperation ausgedrückt:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

³Vgl. Arens, T., Mathematik 2. Auflage, Heidelberg 2012, S. 422

Aus Abbildung 1 lässt sich noch eine Beziehung ablesen. Addiert man zu $f(x_i)$ das Δy_i , so gelangt man zu dem Wert $f(x_i + \Delta x)$:

$$\begin{aligned} f(x_i) + \Delta y_i &= f(x_i + \Delta x) & | - f(x_i) \\ \Delta y_i &= f(x_i + \Delta x) - f(x_i) \end{aligned}$$

Außerdem wird durch die Relation $\Delta x = \frac{b}{n}$ die Eigenschaft $\Delta x \sim \frac{1}{n}$ vorgegeben. Da Δx antiproportional zu n ist, wird, wenn der Grenzwert $n \rightarrow +\infty$ gebildet wird, automatisch der Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ mitgebildet. Beides lässt sich nun in die Gleichung überführen:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \right)^2} \cdot \Delta x$$

Berücksichtigt man den eben genannten Grenzwert, so kann man in der Klammer den Differentialquotienten von $f(x_i)$ erkennen. Damit beschreibt dieser Term die Steigung, also die erste Ableitung $f'(x_i)$. Das nicht umgeschriebene Δx tendiert währenddessen natürlich immer noch gegen 0, was durch den ersten Limes impliziert wird.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot \Delta x$$

Diese Formel für s erinnert an die Bildung des uns bereits bekannten Riemannschen Integrals durch Obersummen⁴ über das Intervall $[a, b]$. Zur Erinnerung wird dies hier aufgeführt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Und tatsächlich gleichen sich der Sachzusammenhang des Riemannschen Integrals und der Formel für die Bogenlänge, weil dieselben Größen zur Berechnung herangezogen werden. Die Summe der Teilstücke von s wird also durch Obersummen approximiert und ist somit ein Integral mit den Grenzen 0 und b :

$$s(b) = \int_0^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (1)$$

⁴Vgl. Körner H., u.a., Mathematik Neue Wege Qualifikationsphase eA, Braunschweig 2019, S. 30

3 Ansatz über das Kräftegleichgewicht

Gesucht wird eine Funktion $y(x)$, die die Kettenlinie beschreibt⁵. Die Kurve wird dadurch charakterisiert, dass sie Achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wodurch ihr Tiefpunkt auf der y-Achse liegt, und durch die im Vorwort bereits genannten Eigenschaften.

Zu sehen sind die wirkenden Kräfte auf einen beliebigen Punkt der Kettenlinie. Es wirkt eine horizontale Kraft F_h in Richtung Seilmitte und die Gewichtskraft F_g zum Boden. Die Kraft F_t wirkt tangential zur Kettenlinie und spannt sie. Diese Kraft resultiert aus den zwei anderen Kräften gemäß dem Kräfteparallelogramm. Aufgrund der vorherrschenden Gleichgewichtssituation, dass sich die Form der Kette nicht mit der Zeit ändert, die Kette also still ist, muss jeder Kraft ein äquivalenter Gegenspieler vorliegen.

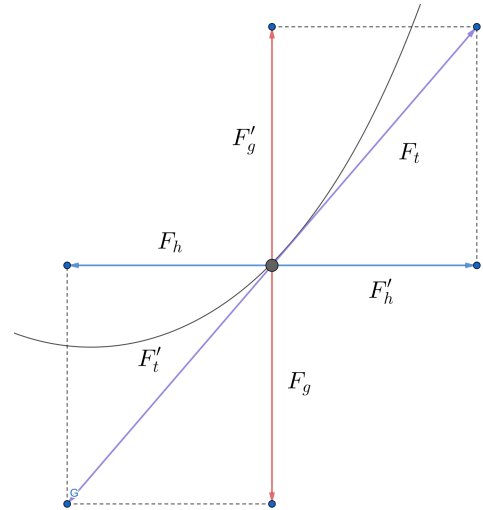


Abbildung 2: Kräfteparallelogramm

Die Kraft F_h muss an jedem Punkt der Linie gleich sein, da keine Einflüsse horizontal auf der Kette lasten, die die Kraft an einem Punkt verändern könnten⁶. Somit gilt $F_h = \text{konstant}$. Die Gewichtskraft F_g ist abhängig vom Ortsfaktor g , der konstant ist, und der Masse der Kette am jeweiligen Punkt. Die Masse ist das Produkt der Konstante μ , welche das Gewicht pro Kettenlänge ist, und der Länge der Kurve L vom niedrigsten bis zum betrachteten Punkt, da dies die Strecke an Kette ist, die vom jeweiligen Kettenglied getragen werden muss.

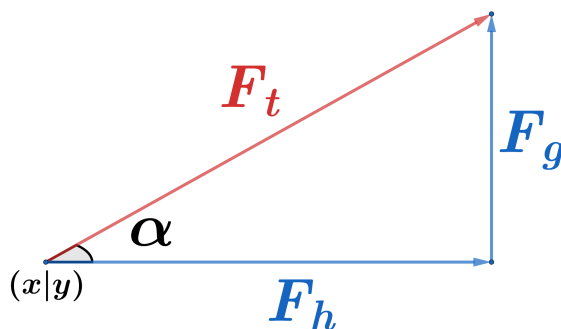


Abbildung 3: Das Kräftedreieck

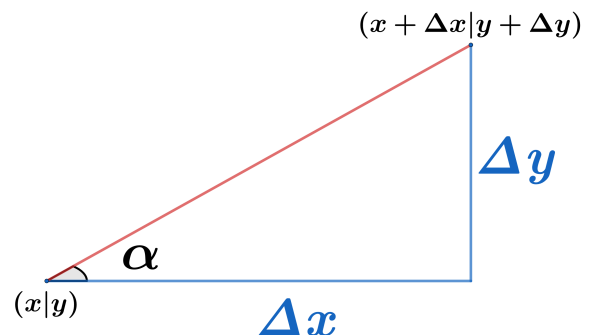


Abbildung 4: Das Steigungsdreieck

Es wird zuerst die Ableitung $y'(x)$ gesucht, um anschließend auf die Stammfunktion $y(x)$ zu

⁵Vgl. Hajiabadi, M., Die Kettenlinie, in: https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Lehre/Sem-Ausgewaehlte-hoehere-Kurven-WS2016-17/Hajiabadi%20Maikel_Die%20Kettenlinie_090217.pdf; Zugriff am 01.02.2020, S. 4

⁶Vgl. ebd.

schließen. Dazu wird das Steigungsdreieck aus Abbildung 4 zur Rate gezogen. Die Ableitung $y'(x)$ ist die Steigung am Punkt $(x|y)$ auf der Kettenlinie, die man durch Bildung des Differentialquotienten $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ erhält. Dadurch, dass ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, können trigonometrische Funktionen benutzt werden. Der Tangens beschreibt das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$. Angewandt an α ergibt dies $\tan(\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Man erkennt, dass dies der bereits gebildeten Ableitung entspricht, also gilt $y'(x) = \tan(\alpha)$. Bildet man das Kräfte-dreieck aus dem Kräfteparallelogramm, was ohne Vorzeichenwechsel geschieht, da nur Kraftbeträge betrachtet werden⁷, so erhält man einen weiteren Ausdruck für $\tan(\alpha)$. Die Kraft F_t wirkt in tangentialer Richtung und liefert somit den gleichen Winkel wie das Steigungsdreieck. Bildet man hier den Tangens erhält man $\tan(\alpha) = \frac{F_g}{F_h}$. Setzt man die beiden Ausdrücke für $\tan(\alpha)$ gleich, erhält man $y'(x) = \frac{F_g}{F_h}$.

Die Gewichtskraft berechnet sich aus $F_g = m \cdot g$. Dabei ist g konstant und die Masse wie zuvor beschrieben das Produkt aus der Massen-Längen-Konstante μ und der Länge der Kette $L(x)$ von 0 bis x .

$$F_g = \mu \cdot g \cdot L(x)$$

Dies kann in die Gleichung für $y'(x)$ eingesetzt werden.

$$y'(x) = \frac{F_g}{F_h} = \frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot L(x) \quad (2)$$

4 Betrachtung und Auswertung der Simulation

Mithilfe einer selbst geschriebenen Simulation kann man einige Funktionen ausschließen oder gegebenenfalls in Betrachtung ziehen, sodass man sie sich näher anschauen sollte. Selbstverständlich ersetzt dies nicht die Notwendigkeit eines mathematischen Beweises. Zuerst soll verdeutlicht werden, dass der Verlauf der simulierten Kette einzig und allein von den vorherrschenden Kräften und Parametern abhängt. Im Folgenden wird daher die Funktionalität der Programmierung näher erläutert.

Ausgehend vom Mittelpunkt wird jeweils die Position des nächsten Kettenglieds bestimmt. Dazu werden einige veränderbare Parameter angeboten. Der Mittelpunkt ist statisch auf dem Punkt $M(0|y_0)$. Am Ende werden die berechneten Segmente rechts vom Mittelpunkt nach links gespiegelt, um Rechenzeit zu sparen. Es wurde keine Kollisionsdetektion zwischen den einzelnen Segmenten implementiert. Man solle sich einfach vorstellen, eine Seite der Kette wäre hinter der anderen. Eine geeignetere, beziehungsweise realitätsnähere Darstellung für die Kettenlinie wäre die Möglichkeit, die Aufhängepunkte durch Regler an der x-Achse verschieben zu können, jedoch müsste man dafür die Form der Kurve kennen, was den eigentlichen Sinn der Simulation zunichte machen würde.

⁷Ebd.

Um die Position $(x_{i+1}|y_{i+1})$ des nächsten Segments ausgehend vom bereits bekannten Segment mit den Koordinaten $(x_i|y_i)$ zu finden, muss der Winkel α ermittelt werden. Auch hier gilt wie bereits berechnet, dass $\tan(\alpha) = \frac{F_g}{F_h} = \frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot L(x)$ ist. Dadurch lässt sich α durch die Umkehrfunktion Arkustangens ausrechnen:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot L(x)\right)$$

Die Funktion $L(x)$ ist im Fall der Simulation die Anzahl der Kettenglieder, die das i-te Segment tragen muss. Dies ist die Position des Segments in der Kette, minus die Hälfte aller Segmente, weil nur Positionen oberhalb der Kettenmitte berechnet werden.

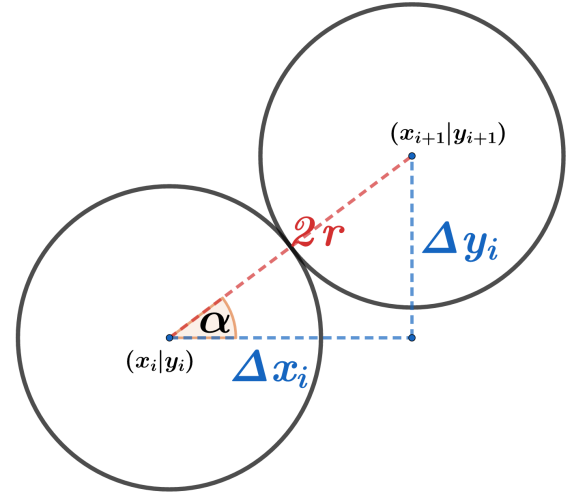


Abbildung 5: Distanzen zwischen den Segmenten

In mathematischer Sprache lässt sich dies nun wie folgt ausdrücken:

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot \left(i - \frac{l}{2}\right)\right),$$

wobei l die Gesamtanzahl aller Kettenglieder ist. Um Δx_i und Δy_i zu berechnen, benötigen wir nur noch die trigonometrischen Funktionen. Im vorliegenden rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_i) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} & \sin(\alpha_i) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(\alpha_i) &= \frac{\Delta x_i}{2r} & \sin(\alpha_i) &= \frac{\Delta y_i}{2r} & | \cdot 2r \\ \cos(\alpha_i) \cdot 2r &= \Delta x_i & \sin(\alpha_i) \cdot 2r &= \Delta y_i \end{aligned}$$

Durch die Beziehungen $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$ und $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ ergibt sich schlussendlich die Berechnungsformel.

$$x_{i+1} = x_i + \cos(\alpha_i) \cdot 2r$$

$$y_{i+1} = y_i + \sin(\alpha_i) \cdot 2r$$

Die Implementierung in der Programmiersprache Java findet sich in Quellcode 1. Das l ist äquivalent zu „length“, F_h entspricht „h“.

Um einen Nutzen aus der Simulation zu ziehen, werden einige Vergleichsfunktionen angeboten. Es wird die Auswahl zwischen einer Parabel in Grün, Cosinus hyperbolicus Funktion in Rot, und der Ellipse in Blau gelassen, die aufgrund ihrer ähnlichen Kurvenverläufe zur Kette zur

Verfügung gestellt werden. In den Abbildungen 10 - 18 sind Kettenverläufe mit jeweils großem, kleinen und mittlerem Durchhang zu verschiedenen Gliederanzahlen aufgeführt. Betrachtet man die Tabellen mit Messwertergebnissen zu der Abweichung jedes Kettenglieds zu den Kurven, so lassen sich einige Feststellungen machen. Die Ellipse hat zwar einen ähnlichen Kurvenverlauf wie die Kette, schneidet jedoch in jeder Kategorie sehr schlecht ab, da sie überall eine hohe summierte Abweichung im Vergleich zu den anderen Kurven aufweist. Die Parabel hingegen beschreibt die Verläufe der Ketten mit kleinem Durchhang sehr gut, für einen mittleren bis hohen Durchhang liefert sie allerdings nur schlechte Messergebnisse. Ähnlich wie die Parabel nähert sich die Cosh-Funktion bei allen Ketten mit leichtem Durchhang an die Kettenkurve extrem gut an. Der Cosinus hyperbolicus bietet in jeder Kategorie eine sehr gute Approximation und scheint daher die Funktion zu sein, nach der wir suchen. Ist der Radius nur noch so klein, dass die Kette den Anschein hat, eine Linie zu sein, so ist der Unterschied zwischen dem Kettenverlauf und der Cosh-Funktion nur noch so marginal, dass sie aufeinander zu liegen scheinen⁸, was unsere These nur noch weiter bekräftigt und zur Annahme verleitet, dass bei $r \rightarrow 0$ und $l \rightarrow \infty$ die Kette eine Cosinus hyperbolicus Funktion darstellt.

Eine Sache könnte bei näherer Betrachtung auffallen. Es scheint eine Anomalie in unserer These, dass je kleiner der Radius, desto besser approximiert die Cosh-Funktion die Kette, zu geben. Für hohen Durchhang beschreibt der Radius 0,25 die Kette anscheinend besser, als für den Radius 0,01⁹. Dies liegt wahrscheinlich an der Art und Weise, wie der Cosinus hyperbolicus berechnet werden muss, denn die Streckung muss mit numerischen Verfahren, die ich selbst programmiert habe, an die Kette angenähert werden. Dabei sind kleine Messfehler, gerade für hohen Durchhang, selbstverständlich. Garantieren kann ich für eine Genauigkeit des Streckfaktors von nur bis zu 4 Nachkommastellen, was die Messungenauigkeiten für hohen Durchhang erklärt. Trotz dieser Begebenheit bleibt die These standhaft, weshalb im Folgenden der Sinus hyperbolicus im Bezug zur Kettenlinie weiter untersucht wird.

5 Herleitung der Kettenlinie

5.1 Bestimmung der Differentialgleichung

Die bereits bestimmte Ableitung der Kettenlinie in Gleichung (2) benötigt als weitere Information die Länge an Seil, die am Punkt $(x|y)$ getragen wird. Dies entspricht der Bogenlänge der Kurve $y(x)$ von 0 bis x . Es gilt demnach $L(x) = s(x)$. Eingesetzt in die Ableitung ergibt das

$$y'(x) = \frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx .$$

⁸Vgl. Abbildungen 16 - 18

⁹Vgl. Messwerte im Anhang

Da alle Parameter im Term vor dem Integral konstant sind, ist jener Term folglich auch konstant. Da eine mathematische und keine physikalische Beschreibung gesucht ist, ersetzen wir den Term mit einem konstanten Faktor $k \in \mathbb{R}$, der definiert wird als $k := \frac{\mu \cdot g}{F_h}$.

$$y'(x) = k \cdot \int_0^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad | \text{ ableiten}$$

$$y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

Die Funktion y wurde abgeleitet, um das Integral aufzulösen. Dies ist möglich, da laut dem uns bekannten 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung¹⁰ das hier zu sehende Integral mit den Grenzen 0 und x die Integralfunktion darstellt, dessen Umkehroperation das Ableiten ist. Der konstante Faktor k durfte dabei ignoriert werden, weil dieser beim Integrieren und Differenzieren wie gewohnt unverändert bleibt. Aus der ersten entstand dabei die zweite Ableitung. Um später einfacher rechnen zu können, substituieren wir nun $z(x) := y'(x)$.

$$z'(x) = k \cdot \sqrt{1 + z^2(x)} \quad | : \sqrt{1 + z^2(x)}$$

Es werden anschließend alle Unbekannten auf eine Seite gebracht, um weiter auflösen zu können.

$$k = \frac{z'(x)}{\sqrt{1 + z^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2(x)}} \cdot z'(x) \quad (3)$$

Diese Gleichung ist bekannt als die Differentialgleichung der Kettenlinie¹¹. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die „Ableitungen der gesuchten Funktion [enthalten]“¹². Um diese Gleichung lösen zu können, muss die Sinus hyperbolicus Funktion folgendermaßen weiter untersucht werden.

$$\cosh \xrightarrow{\text{ableiten}} \sinh \xrightarrow{\text{umkehren}} \operatorname{arsinh} \xrightarrow{\text{ableiten}} \operatorname{arsinh}'$$

5.2 Der Weg zur Ableitung des Areasinus hyperbolicus

Mittels Summenregel werden die Summanden separiert abgeleitet.

$$\cosh'(x) = \left(\frac{1}{2} e^x \right)' + \left(\frac{1}{2} e^{-x} \right)'$$

Der erste Summand verändert sich nicht, da die e-Funktion abgeleitet sich selbst ergibt. Der zweite Summand wird mit der Kettenregel abgeleitet, wobei die äußere Funktion e^x ist, die sich erneut nicht verändert und die innere Funktion $-x$. Dies ist abgeleitet -1 und wechselt dadurch

¹⁰Vgl. Arens, Mathematik, S. 351

¹¹Vgl. Hajiabadi, Kettenlinie, S. 4

¹²Grigorian, A., Gewöhnliche Differentialgleichungen, in: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/odelect15.pdf>; Zugriff am 04.02.2020, S. 1, Z. 9f.

nach Anwendung der Regel das Vorzeichen des zweite Summanden.

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x)$$

Das Ergebnis ist laut Definition der Sinus hyperbolicus. Als nächstes wird die Umkehrfunktion des sinh gebildet¹³, indem ein y , welches keine Verbindung zur gesuchten Kettenlinie aufweist, dem sinh gleichgesetzt wird und anschließend ein Variablentausch vollzogen wird, bei dem x und y getauscht werden.

$$\begin{aligned} x &= \sinh(y) = \frac{1}{2}e^y - \frac{1}{2}e^{-y} & | \cdot 2e^y \\ x \cdot 2e^y &= \frac{1}{2}e^y \cdot 2e^y - \frac{1}{2}e^{-y} \cdot 2e^y \end{aligned}$$

Mittels Distributivgesetz wurden die hinzu multiplizierten $2e^y$ auf die Subtrahenden aufgeteilt. Nun werden die Brüche gekürzt und einige Potenzregeln angewendet.

$$\begin{aligned} 2xe^y &= e^y \cdot e^y - e^{-y} \cdot e^y & | a^b \cdot a^c &= a^{b+c} \\ 2xe^y &= e^{y+y} - e^{-y+y} \\ 2xe^y &= e^{2y} - e^0 & | a^{b \cdot c} &= (a^b)^c \\ 2xe^y &= (e^y)^2 - 1 & | - 2xe^y \\ 0 &= (e^y)^2 - 2e^y x - 1 \end{aligned}$$

Mann kann hier einen quadratischen Term erkennen, der mit der p-q-Formel lösbar ist. Dabei ist $p = -2x$ und $q = -1$; die Basis des quadratischen Terms, nach der aufgelöst wird, ist e^y .

$$\begin{aligned} e^{y_{1,2}} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ e^{y_{1,2}} &= -\frac{-2x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2x}{2}\right)^2 - (-1)} \\ e^{y_{1,2}} &= x \pm \sqrt{x^2 + 1} & | \ln() \\ y_{1,2} &= \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

Wie man in Abbildung 19 sehen kann, verläuft der Graph des Terms im Logarithmus bei negativem Operator ausschließlich unterhalb der x-Achse. Da der Logarithmus für reelle Zahlen nur im positivem Bereich definiert ist, können wir das Minus ausschließen¹⁴ und erhalten für

¹³Vgl. Peters, T., Die Bedeutung der Areafunktionen, in: <http://www.mathe-seiten.de/areafun.pdf>; Zugriff am 04.02.2020, S. 2f.

¹⁴Vgl. ebd.

den arsinh folgenden Term:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Jetzt muss nur noch der Areasinus hyperbolicus abgeleitet werden¹⁵. Dazu wird zuerst die Kettenregel angewandt. Die äußere Funktion ist der $\ln(x)$ mit der Ableitung $\frac{1}{x}$, die innere Ableitung wird multipliziert.

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)'$$

Die Ableitung, welche berechnet werden muss, lässt sich erst durch Summenregel aufteilen, dann muss die Wurzel abgeleitet werden. Die allgemeine Ableitung einer Quadratwurzel ist $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aufgrund der Kettenregel muss noch der abgeleitete Term unter der Wurzel multipliziert werden.

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' \right)$$

Dies lässt sich wie eine einfache quadratische Funktion ableiten.

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

Der Bruch kann noch durch 2 gekürzt werden. Die 1 als Summand erweitern wir mit $\sqrt{x^2 + 1}$, damit anschließend addiert werden kann.

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ \operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) && | \text{ Bruchmultiplikation} \\ \operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} && | \text{ Terme kürzen} \\ \operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

5.3 Rückeinsetzung und Lösung der Kettenlinie

Nach der Berechnung der Ableitung des Areasinus hyperbolicus fällt auf, dass Gleichung 3 ebendiese enthält. Nur wird dort nicht der $\operatorname{arsinh}'(x)$ berechnet, sondern der $\operatorname{arsinh}'(z(x))$. Dieses Erkenntnis lässt sich in die Gleichung einbetten.

$$k = \operatorname{arsinh}'(z(x)) \cdot z'(x)$$

¹⁵Vgl. Heuser, Lehrbuch, S. 301

Hier erkennen wir eine angewandte Kettenregel! Die äußere Funktion ist $\operatorname{arsinh}(x)$ und die innere $z(x)$. Wird mit dem unbestimmten Integral integriert, so löst sich die Kettenregel auf und die verschachtelte Funktion kommt zum Vorschein.

$$\int k \, dx = \int (\operatorname{arsinh}'(z(x)) \cdot z'(x)) \, dx$$

$$kx + c_1 = \operatorname{arsinh}(z(x)) + c_2 \quad | \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die linke Seite wurde als normale lineare Funktion integriert. Dabei fielen die Konstanten c_1 und c_2 an, die durch Subtraktion zu einer Konstante vereint werden können¹⁶.

$$kx + c_1 - c_2 = \operatorname{arsinh}(z(x)) \quad | \quad c := c_1 - c_2$$

$$kx + c = \operatorname{arsinh}(z(x)) \quad | \quad \sinh()$$

$$\sinh(kx + c) = z(x)$$

Wir haben ursprünglich $z(x) = y'(x)$ gesetzt. Das kann nun rückgängig gemacht werden: $y'(x) = \sinh(kx + c)$. Um den gleichen Trick wie eben zu verwenden, werden beide Seiten mit k multipliziert. Anschließend wird integriert.

$$\int k \cdot y'(x) \, dx = \int \sinh(kx + c) \cdot k \, dx$$

Auf der linken Seite verändert sich nur, dass $y'(x)$ zu $y(x)$ wird. Der konstante Faktor k bleibt erhalten. Bei der rechten Seite lässt sich erneut eine angewandte Kettenregel erkennen. Das k ist die Ableitung des, von dem Sinus hyperbolicus umschlossenem, inneren Terms. Das Integral der äußeren Funktion haben wir bereits durch Differenzierung bestimmt. Es ist der Cosinus hyperbolicus.

$$k \cdot (y(x) + d_1) = \cosh(kx + c) + d_2 \quad | \quad : k - d_1$$

$$y(x) = \frac{1}{k} \cdot \cosh(kx + c) + \frac{d_2}{k} - d_1 \quad | \quad d := \frac{d_2}{k} - d_1$$

$$y(x) = \frac{1}{k} \cdot \cosh(kx + c) + d \quad \blacksquare \quad (4)$$

Nachdem alle restlichen Konstanten unter d zusammengefasst wurden, kann festgestellt werden, dass Gleichung (4) folglich die Menge aller möglichen Kettenlinien mittels einer modifizierten Cosinus hyperbolicus Funktion beschreibt.

¹⁶Vgl. Hajiabadi, Kettenlinie, S. 5

6 Die Parabel als Beschreibung für Kettenverläufe

Es bleibt immer noch die Frage offen, warum die Parabel die Kette in der Simulation für kleinen Durchhang so gut beschreibt. Nach einigen Überlegungen und Experimenten konnte ich eine These formulieren. Ist der Durchhang klein, so sind die Winkel zwischen den Segmenten natürlich auch klein. Wir können die Kleinwinkelnäherungen der trigonometrischen Funktionen benutzen, um $y(x)$ rechnerisch für kleine Winkel anzunähern¹⁷. Für kleine Winkel gilt $\tan(\alpha_i) \approx \alpha_i$, $\sin(\alpha_i) \approx \alpha_i$ und $\cos(\alpha_i) \approx 1$. Betten wir diese Erkenntnisse in die Gleichungen ein, so ist $\Delta y_i \approx 2r \cdot \alpha_i$ und $\Delta x_i \approx 2r$. Wir konnten den Tangens von α_i mittels einer linearen Funktion mit der Variable i bestimmen. Bei kleinen Winkeln kann man den Tangens weglassen. Somit ist $\tan(\alpha_i) \approx \alpha_i \approx \frac{\mu \cdot g}{F_h} \cdot \left(i - \frac{l}{2}\right)$. Da α_i eine lineare Funktion annähert, muss auch Δy_i eine lineare Funktion sein, weil nur mit einer Konstanten multipliziert wird¹⁸. Δx_i hingegen ist etwa konstant¹⁹. Die Sekantensteigung berechnen wir mit $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Wir teilen also eine lineare durch eine konstante Funktion. Daraus resultiert wieder eine lineare Funktion²⁰ als Sekantensteigungsterm, der bei genügend Segmenten die Ableitung am Punkt $(x_i|y_i)$ widerspiegelt. Wir können daraus eine Approximation für die Kettenlinie durch Integration bekommen. Es resultiert ein quadratischer Term. Das zeigt, dass für kleine Winkel beziehungsweise kleinen Durchhang eine Parabel die Kettenlinie recht gut beschreibt²¹.

Bereits im Vorwort wurde festgelegt, dass die Masse im Seil gleichmäßig verteilt sein muss. In vielen Brücken ist dies jedoch nicht der Fall, da das Seil als Träger für etwaige Stahlkonstruktionen und Straßen dient. Ein Beispiel dafür sind Hängebrücken, weil die Seile durch die Last der Straße verformt werden. Die Masse des Seils ist in solchen Fällen unerheblich, denn sie ist extrem gering im Vergleich zur zu tragenden Last.

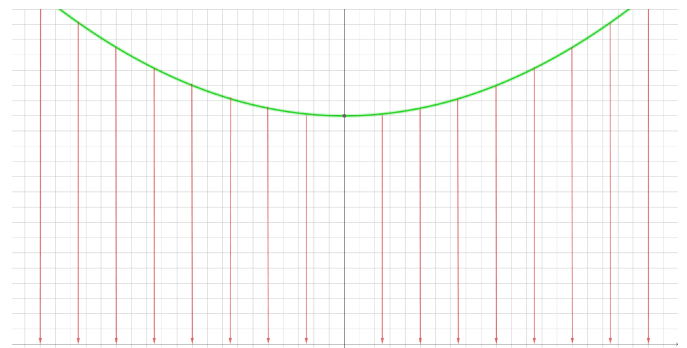


Abbildung 6: Seil unter konstanter Linienlast

Es wird von einer „konstanten Linienlast“²² gesprochen. Das heißt, dass die Masse nicht gleichmäßig im Seil, sondern gleichmäßig entlang der x-Achse verteilt ist.

¹⁷Vgl. Kommer, C., u. a., Tutorium Physik fürs Nebenfach, Heidelberg 2015, S. 754

¹⁸Vgl. Abbildungen 22, 23

¹⁹Vgl. Abbildungen 20, 21

²⁰Vgl. Abbildungen 24, 25

²¹Dies sollte nicht mit einem mathematischen Beweis gleichgestellt werden, denn es war nur eine quantitative Analyse des Verhaltens der Simulation mit Rückschluss auf das generelle Verhalten von Kettenlinien. Selbst in den Abbildungen 20 - 25 kann man noch klar Krümmungen und dadurch Ungenauigkeiten erkennen. Zudem gilt dies für Kettenlinien nur im kleinen Intervall, dass eine niedrige Steigung aufweist, da außerhalb des Intervalls die Steigung nicht mehr linear ist.

²²Hajiabadi, Kettenlinie, S. 10

Im Folgenden soll der Verlauf dieser Kurve bestimmt werden. Da der Ansatz der gleiche wie bei der Kettenlinie ist, können wir erneut von $y'(x) = \frac{F_g}{F_h}$ ausgehen. Die durch einen Punkt im Seil zu tragende Masse ist proportional zu der Distanz des Punktes vom Tiefpunkt des Seils, welcher per unserer Definition auf der y-Achse liegt. Daher ist F_g diesmal die proportionale Funktion $F_g = g \cdot \mu \cdot x$. Daraus folgt unser Ansatz.

$$y'(x) = \frac{g \cdot \mu}{F_h} \cdot x$$

Durch Integration der vorliegenden proportionalen Funktion erhalten wir:

$$y(x) = \int \left(\frac{g \cdot \mu}{F_h} \cdot x \right) dx = \frac{g \cdot \mu}{2F_h} \cdot x^2 + c$$

Geändert hat sich wie üblich der Exponent der Variable, sowie der Koeffizient $\frac{1}{2}$, der direkt in den Bruch gewandert ist. Wie man sehen kann beschreibt eine gestauchte, entlang der y-Achse um c verschobene Parabel die Kette unter konstanter Linienlast am besten.

7 Anwendungsbeispiel

Um ein Gefühl für den Umgang mit der Kettenlinie zu bekommen, berechnen wir nun ein Echtweltbeispiel für eine Fußgängerbrücke. Die Ruderkanalbrücke in der Stadt Plovdiv in Bulgarien ist eine „Spannbandbrücke“²³. Durch ihre Bauart, die sich signifikant von Hängebrücken unterscheidet, nimmt sie die Form einer Kettenlinie an.



Abbildung 7: Ruderkanalbrücke in Plovdiv²⁴

²³Troyano, L. F., Bridge Engineering: A Global Perspective, 2003, S. 514

²⁴Bildquelle: <https://mapio.net/pic/p-41872757/>; Zugriff am 24.02.2020

Wir möchten den Hauptbogen der Brücke modellieren²⁵. Seine horizontale Länge beträgt 150m und die Aufhängepunkte liegen auf einer Höhe von 6,4m. Die Brücke hängt um 3,2m durch. Diese Angaben genügen, um ein Modell der Brücke mittels der Kettenliniengleichung zu erstellen. Wir legen den Scheitelpunkt mit der Höhe h auf die y -Achse. Da wir keine horizontale Verschiebung benötigen, entfernen wir den konstanten Summanden c aus der cosh Funktion der allgemeinen Kettenliniengleichung. Die Modellierungsfunktion f , die wir berechnen möchten, liegt demnach in der Form $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + d$ vor. Der Parameter a ist lediglich eine Substitution für $\frac{1}{k}$. Weil durch a geteilt wird, muss gelten $a \neq 0$. Der Scheitelpunkt ist $S(0|h)$, was in f eingesetzt werden kann, um d zu berechnen.

$$\begin{aligned} h &= f(0) \\ h &= a \cdot \cosh\left(\frac{0}{a}\right) + d \\ h &= a \cdot \cosh(0) + d \\ h &= a + d & | - a \\ d &= h - a \end{aligned}$$

Der Faktor $\cosh(0)$ evaluiert zu 1, wovon man sich im GTR überzeugen kann²⁶. Setzt man den Ausdruck für d nun zurück in die Gleichung ein, so erhält man $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + h - a$. Die Höhe h der Brücke vom Boden erhalten wir, indem wir den Durchhang von der Aufhangshöhe abziehen: $h = 6,4 - 3,2 = 3,2$. Damit ergibt sich die Funktion $f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 3,2 - a$.

Der einzige Parameter, der nun noch bestimmt werden muss, ist a . Um diesen zu berechnen, benötigen wir einen weiteren Punkt. Wir wissen, dass die horizontale Entfernung zwischen den Aufhängepunkten 150m beträgt. Ein Aufhängepunkt muss daher die Koordinaten $(75|6,4)$ besitzen, da dies die Entfernung zur y -Achse und die Höhe des Punktes ist. Numerisch können wir a im GTR berechnen, indem wir den Punkt in f einsetzen. Dazu erstellen wir zwei Funktionen

$$\begin{aligned} Y_1 &= x \cdot \cosh\left(\frac{75}{x}\right) + 3,2 - x \\ Y_2 &= 6,4 \end{aligned}$$

und bestimmen mit dem *intersect* Befehl bei geeignetem Window den Schnittpunkt, welcher bei $x = 879,439$ liegt, was schließlich das gesuchte a ist. Damit haben wir die Modellierungsfunktion für die Brücke gefunden²⁷.

$$f(x) = 879,439 \cdot \cosh\left(\frac{x}{879,439}\right) - 879,439 + 3,2 \quad -75 \leq x \leq 75$$

²⁵Vgl. Chen, W.-F./Duan, L., Handbook of International Bridge Engineering, Washington D. C. 2014, S. 289f.

²⁶Den Cosinus hyperbolicus findet man im CATALOG des GTR unter dem Buchstaben C.

²⁷Vgl. Abbildung 9

8 Die Historie der Kettenliniengleichungsermittlung

Schon im 17. Jahrhundert beschäftigten sich wahre Koryphäen der Mathematik mit dem Problem der Kettenlinie. Galileo Galilei war der erste, der sich nachweislich dem Problem einer hängenden Kette mit konstanter Dichte widmete²⁸. Fälschlicherweise vermutete er, dass jene Kette die Form einer Parabel annimmt, was jedoch später von Joachim Jungius widerlegt wurde, ohne die wahre Form ergründet zu haben²⁹. Dies gelang den Mathematikern Johann Bernoulli, Christiaan Huygens und Gottfried Wilhelm Leibniz, die mit physikalisch-mathematischen Methoden die Differentialgleichung hergeleitet haben.

Jakob Bernoulli stellte 1690 die Herausforderung, die Kettenlinie zu finden, in einer wissenschaftlichen Zeitschrift³⁰. Der im Briefwechsel mit Leibniz stehende Huygens schlägt diesem daraufhin vor, dass er die von ihm gerade erst entwickelte Infinitesimalrechnung, den Hauptgegenstand der Analysis, mit diesem Problem auf die Probe stellen könne und schickt ihm anbei seine Lösung zum Vergleich. Leibniz, der ebenso bereits eine geometrische Lösung vorweisen kann, beschließt den Interessentenkreis für dieses Problem zu erweitern, indem er eine „Art Preisausschreiben [...] zur Lösung des Problems“³¹ ausruft. Darauf reagierte Johann Bernoulli, der nachher stolz auf seine Leistung als erst 17-Jähriger zurückblickte, weil er das Problem vor seinem älteren Bruder Jakob Bernoulli gelöst hatte³². Sein ebenfalls geometrischer Beweis war im Gegensatz zu den anderen zwei Beweisen klarer formuliert³³, was auch daran lag, dass einige Beweise zu der Zeit so geschrieben wurden, dass nur Personen sie lesen können, die das nötige Hintergrundwissen zur benutzten Schrift haben, um „geistigen Diebstahl vorzubeugen“³⁴. Wie bei einer Geheimschrift sozusagen fand der Briefwechsel zwischen Leibniz und Huygens nur verschlüsselt statt. Leibniz schloss das Thema Kettenlinie ab, indem er den vollständigen Beweis durch Analysis und Berechnung der Differentialgleichung mit seinem Kalkül erbrachte, so wie es Huygens vorgeschlagen hatte.

Die Berechnung solcher Gleichungen mittels Analysis war ein Meilenstein für die Mathematik, was sich auch an der Komplexität der Beweise widerspiegelt. Vergleicht man den geometrischen Beweis Huygens mit dem neuen Beweis Leibniz', so erkennt man die immense Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für die Naturwissenschaften³⁵ und die Kettenlinie ist, was das angeht, ein Paradebeispiel. Der Fakt, dass sich einige der wichtigsten Wissenschaftler jener Zeit, von Galileo bis Leibniz, mit der Kettenlinie beschäftigten, zeigt ihre Signifikanz, die sie noch bis heute innehat. Ich finde es wirklich bemerkenswert, dass uns neue Technologie ermöglicht, derartige Konzepte tiefer zu ergründen, die schon seit Jahrhunderten untersucht werden.

²⁸Körner, Wege, S. 198

²⁹Vgl. Swetz F., u. a., Learn from the Masters, Washington D. C. 1995, S. 128

³⁰Vgl. Ern , M., Catenaria. Leibniz und die Kettenlinie, in: S. Beier (Hg.), Leibniz - Auf den Spuren des großen Denkers, Hannover 2006, S.52

³¹Ebd.

³²Vgl. Swetz, Masters, S. 129

³³Vgl. ebd., S. 128

³⁴Ern , Catenaria, S. 51

³⁵Vgl. Swetz, Masters, S. 128

Anhang A: Materialien

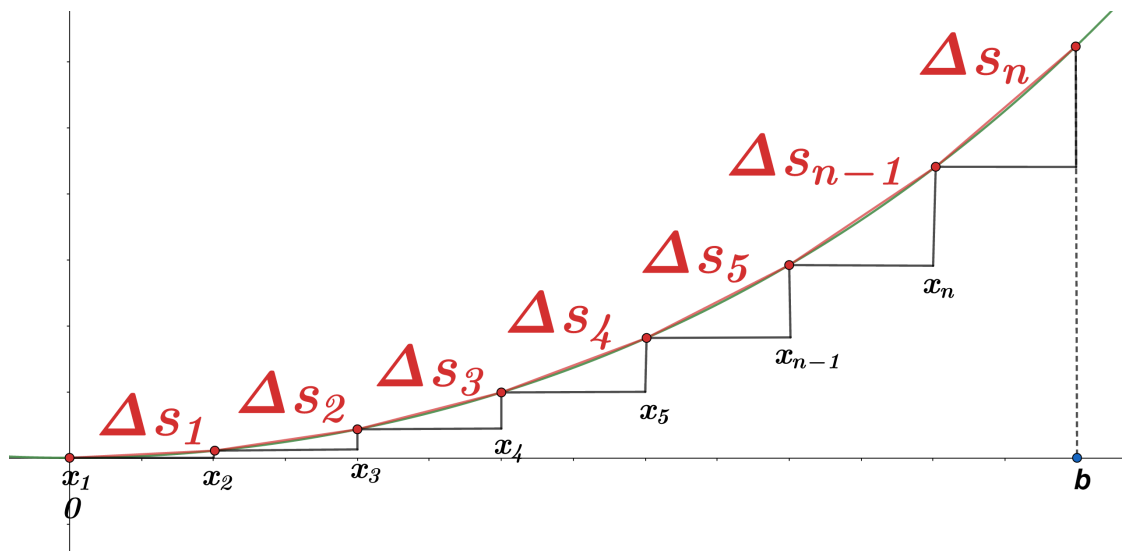


Abbildung 8: Die aufgespaltene Bogenlänge s

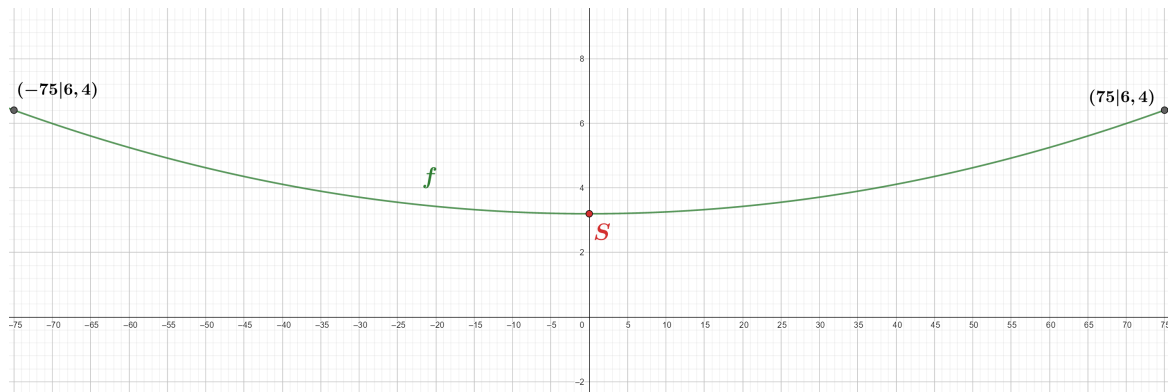


Abbildung 9: Die Modellierungsfunktion f

Berechnungsimplementierung

Der volle Code mit ausführbarem Programm ist auf

<https://github.com/johnbow/Kettenlinien-Simulation>

zu finden. Anbei befindet sich dort auch eine *README* Datei, die zeigt wie das Programm auf dem eigenen Rechner auszuführen ist, sowie die Python-Datei, die zur Auswertung der erzeugten Messdaten genutzt wurde.

```
/**
 * Berechnung der Position aller Segmente unter den gegebenen
 * Parametern. Berechnung fängt in der Kettenmitte an, wobei jeweils
 * das Segment rechts davon berechnet wird. Da die Kette symmetrisch ist,
 * darf am Ende der Berechnungen an der y-Achse gespiegelt werden.
 */
public void update() {
    // setzt die Koordinate des mittleren Kettengliedes auf (0|y0)
    segments.get(length/2).setPosition(0, y0);
    double mu = mass/length;

    for (int i = length/2+1; i < length; i++) {
        // berechnet den Winkel zwischen den
        // benachbarten Segmenten
        double alpha = Math.atan(((i-length/2.0)*mu*g)/h);
        // berechnet die neue x Koordinate
        segments.get(i).setX(segments.get(i-1).x + Math.cos(alpha)*2*Segment.radius);
        // berechnet die neue y Koordinate
        segments.get(i).setY(segments.get(i-1).y + Math.sin(alpha)*2*Segment.radius);
    }

    // spiegelt die rechten Punkte nach links
    for (int i = 0; i < length/2; i++) {
        segments.get(i).setPosition(-segments.get(length-i-1).x,
                                    segments.get(length-i-1).y);
    }

    // berechnet die Vergleichskurven
    updateFunctions();
}
```

Quellcode 1: Java-Implementierung der Kettenlinienberechnung

$$r = 1 \quad l = 17$$

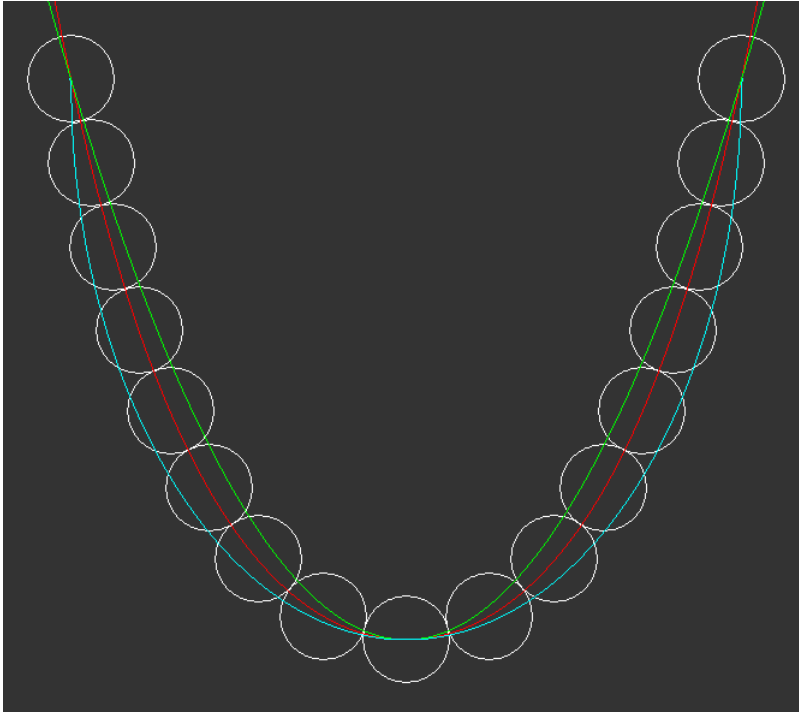


Abbildung 10: $F_h = 100$ $m = 100$

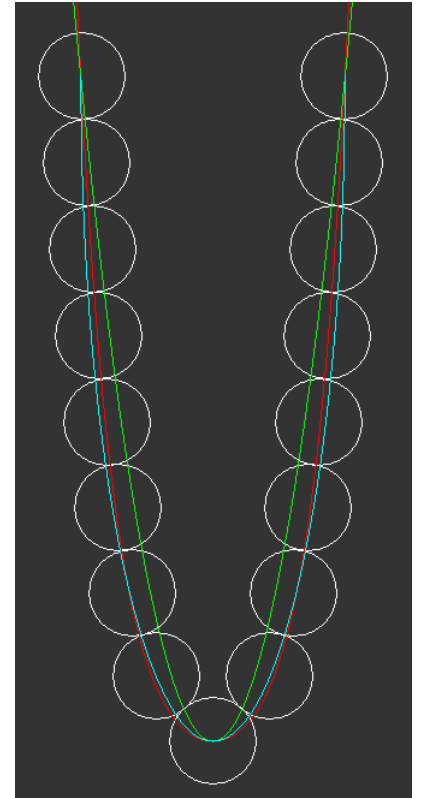


Abbildung 11: $F_h = 50$ $m = 200$

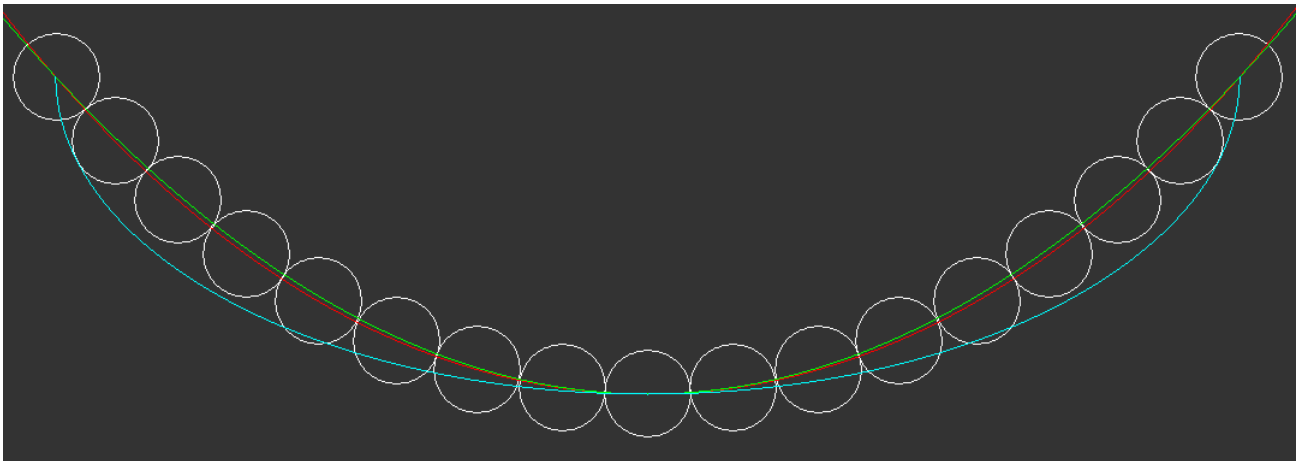


Abbildung 12: $F_h = 200$ $m = 50$

$$r = 0.25 \quad l = 81$$

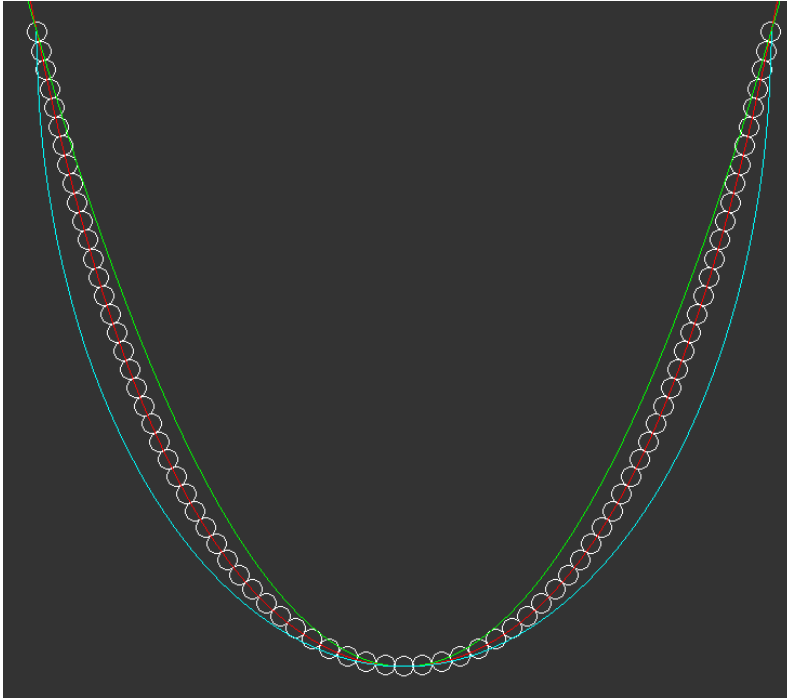


Abbildung 13: $F_h = 100$ $m = 100$

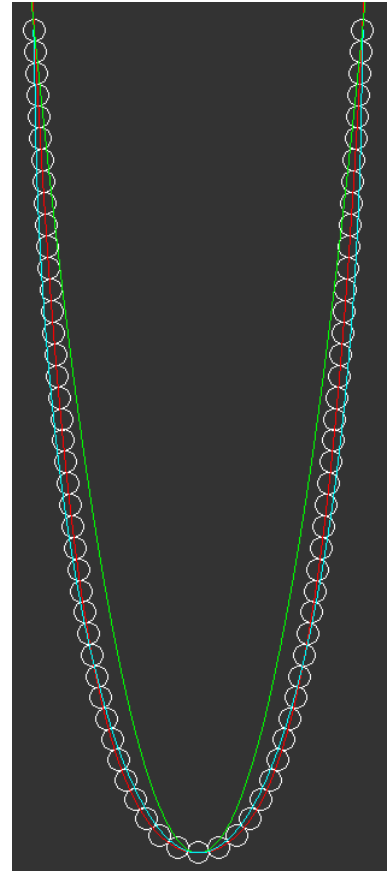


Abbildung 14: $F_h = 50$ $m = 200$

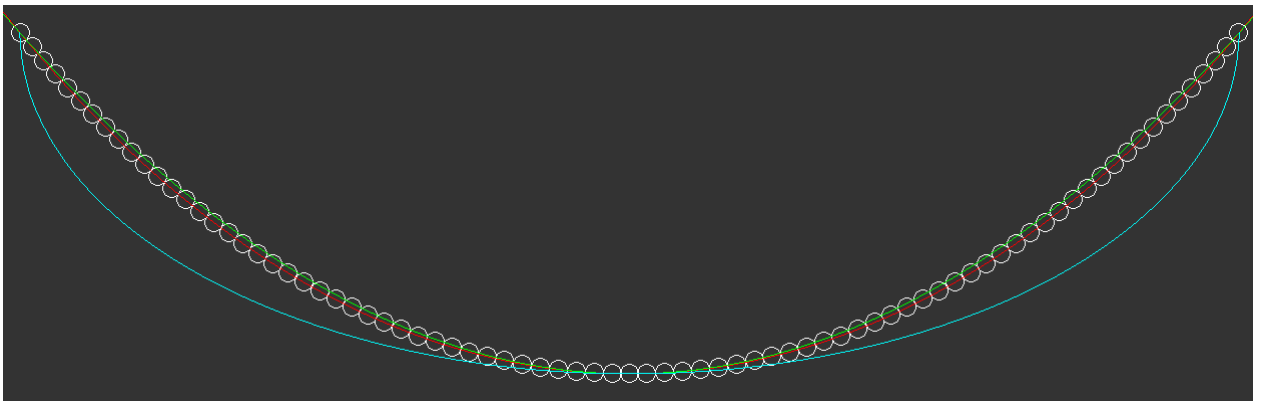


Abbildung 15: $F_h = 200$ $m = 50$

$$r = 0.01 \quad l = 1999$$

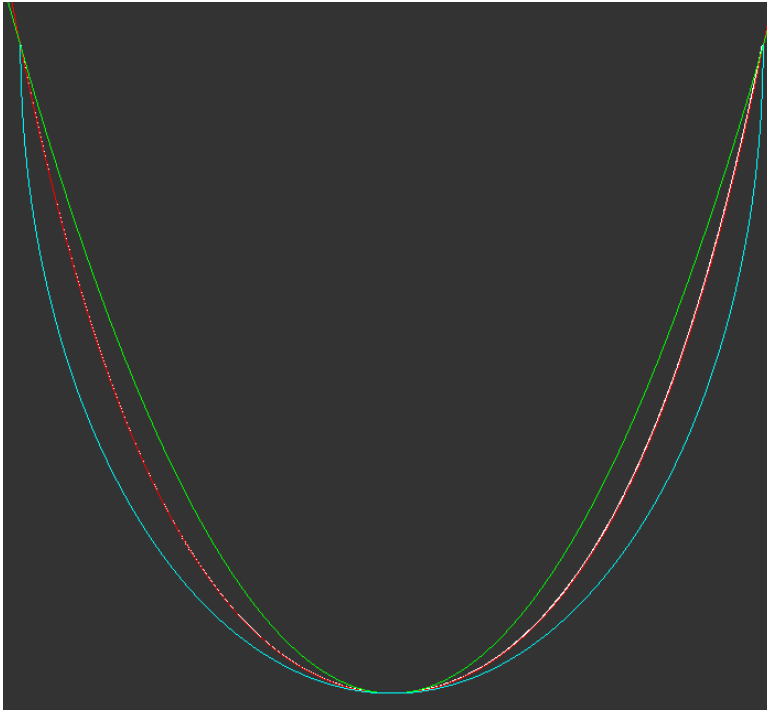


Abbildung 16: $F_h = 100$ $m = 100$

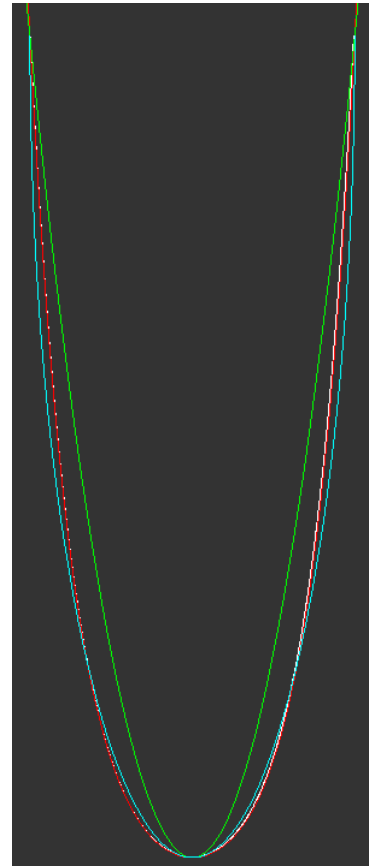


Abbildung 17: $F_h = 50$ $m = 200$

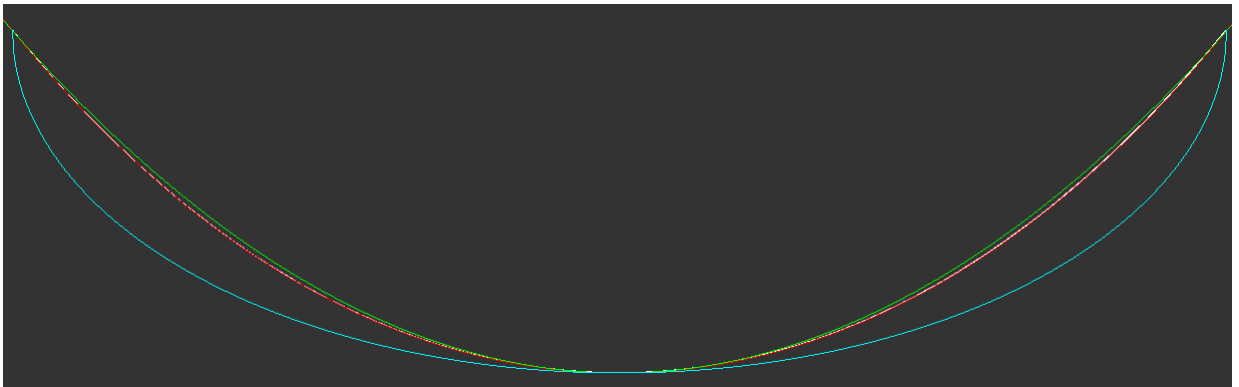


Abbildung 18: $F_h = 200$ $m = 50$

Tabellen zur durchschnittlichen Abweichung

Berechnet durch die Summierung aller Abstände der Segmente von der jeweiligen Vergleichskurve und dann Division durch die Anzahl der Segmente, wodurch die Werte schließlich die durchschnittliche Distanz der Segmente von der Kurve abbilden.

$r = 1 \quad l = 17$	$F_h = 100 \quad m = 100$	$F_h = 50 \quad m = 200$	$F_h = 200 \quad m = 50$	Σ
Parabel	0,611	1,518	0,059	2,188
Cosh	0,054	0,382	0,018	0,454
Ellipse	1,231	1,275	0,808	3,314

$r = 0.25 \quad l = 81$	$F_h = 100 \quad m = 100$	$F_h = 50 \quad m = 200$	$F_h = 200 \quad m = 50$	Σ
Parabel	0,851	2,230	0,091	3,172
Cosh	0,058	0,117	0,022	0,197
Ellipse	1,700	1,261	1,119	4,080

$r = 0.01 \quad l = 1999$	$F_h = 100 \quad m = 100$	$F_h = 50 \quad m = 200$	$F_h = 200 \quad m = 50$	Σ
Parabel	0,880	2,251	0,094	3,225
Cosh	0,047	0,147	0,022	0,216
Ellipse	1,705	1,319	1,141	4,165

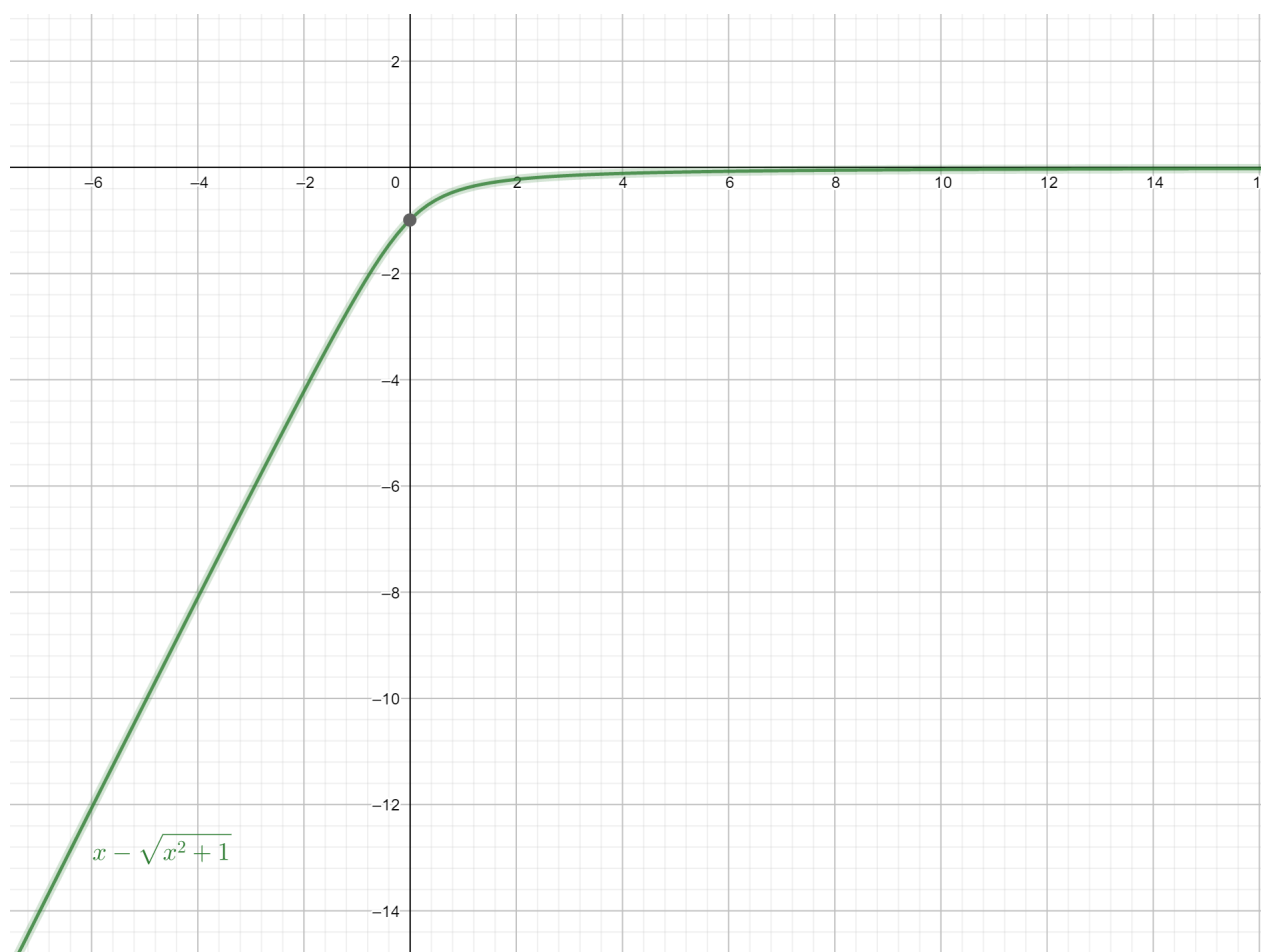


Abbildung 19: Graph des „falschen“ e^y

Messdaten zur Parabelapproximation³⁶

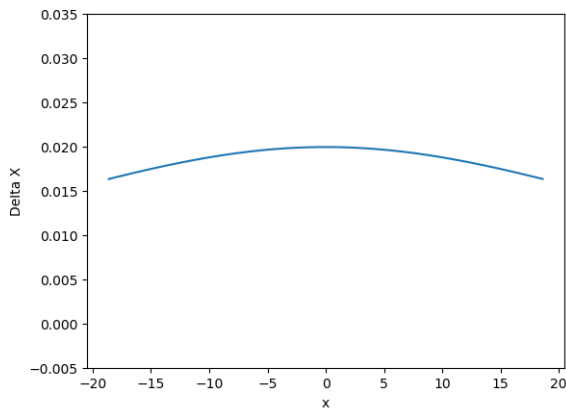


Abbildung 20: Δx bei kleinem Durchhang

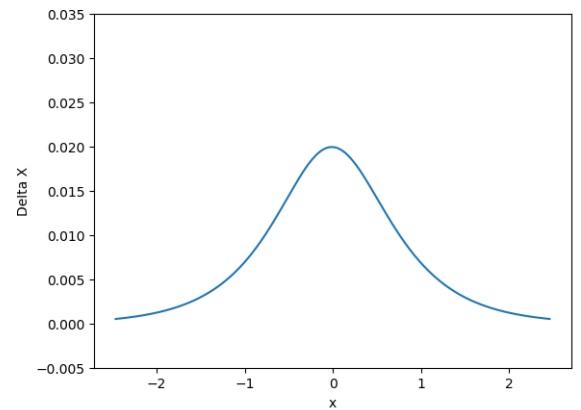


Abbildung 21: Δx bei großem Durchhang

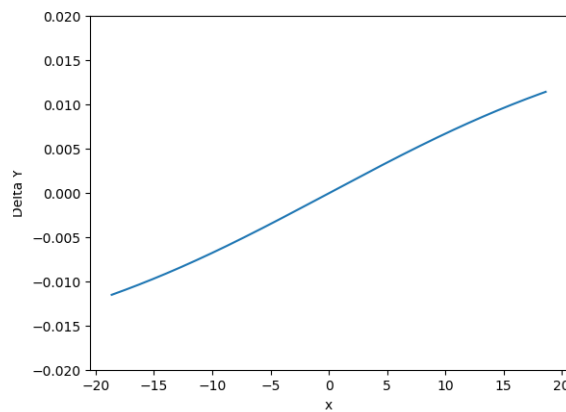


Abbildung 22: Δy bei kleinem Durchhang

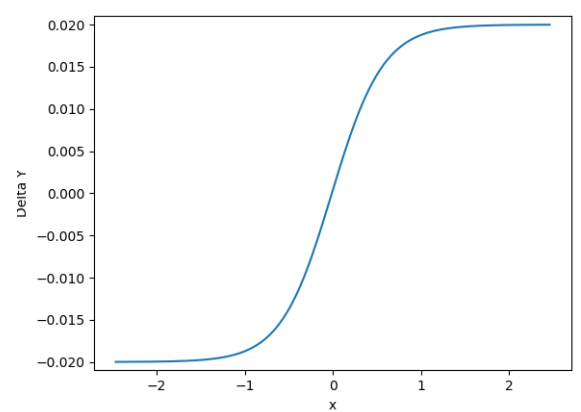


Abbildung 23: Δy bei großem Durchhang

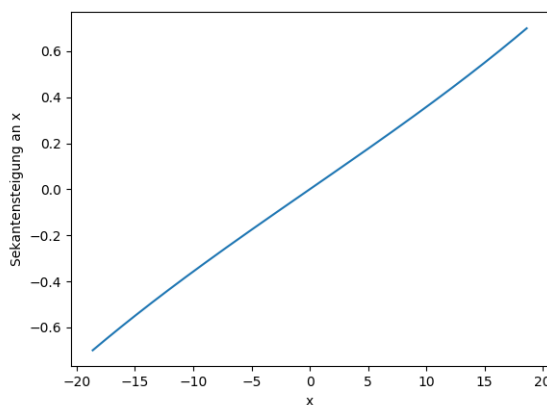


Abbildung 24: Sekantensteigung bei kleinem Durchhang

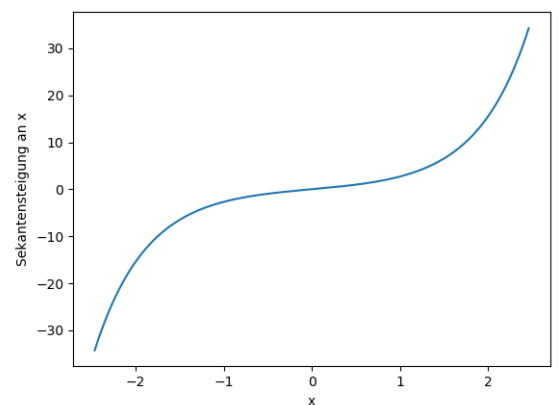


Abbildung 25: Sekantensteigung bei großem Durchhang

³⁶Die Messdaten wurden alle mit dem Standard-Ortsfaktor gemessen. Große Durchhänge wurden mit dem Verhältnis $\frac{F_h}{m} = \frac{1}{7}$ und kleine Durchhänge mit $\frac{F_h}{m} = \frac{7}{1}$ bestimmt.

Anhang B: Literaturverzeichnis

Buchliteratur

1. Arens, T., Mathematik 2. Auflage, Heidelberg 2012
2. Chen, W.-F./Duan, L., Handbook of International Bridge Engineering, Washington D. C. 2014
3. Ern , M., Catenaria. Leibniz und die Kettenlinie, in: S. Beier (Hg.), Leibniz - Auf den Spuren des großen Denkers, Hannover 2006
4. Heuser, H., Lehrbuch der Analysis Teil 1, Stuttgart 1980
5. Kommer, C., u. a., Tutorium Physik fürs Nebenfach, Heidelberg 2015
6. Körner H., u.a., Mathematik Neue Wege Qualifikationsphase eA, Braunschweig 2019
7. Swetz F., u. a., Learn from the Masters, Washington D. C. 1995
8. Troyano, L. F., Bridge Engineering: A Global Perspective, 2003

Internetadressen

1. Grigorian, A., Gewöhnliche Differentialgleichungen, in: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/odelect15.pdf>; Zugriff am 04.02.2020
2. Hajiabadi, M., Die Kettenlinie, in: https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Lehre/Sem-Ausgewaehlte-hoehere-Kurven-WS2016-17/Hajiabadi%20Maikel_Die%20Kettenlinie_090217.pdf; Zugriff am 01.02.2020
3. Peters, T., Die Bedeutung der Areafunktionen, in: <http://www.mathe-seiten.de/areafun.pdf>; Zugriff am 04.02.2020

Grafiken

1. <https://mapio.net/pic/p-41872757/>

Es folgt ein Ausdruck der relevanten Internetquellen in folgender Reihenfolge:

1. Grigorian: Seite 1
2. Hajiabadi: Seite 3, 4, 5, 9, 10
3. Peters: Seite 2, 3

1 Einführung

1.1 Was ist eine DGL

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (abgekürzt mit *DGL*) hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

wobei x eine unabhängige reelle Variable ist, $y = y(x)$ eine gesuchte Funktion (und $y^{(k)}$ die k -te Ableitung von y), und F eine gegebene Funktion von $n + 2$ Variablen. Die Zahl n , die die maximale Ordnung der Ableitung $y^{(k)}$ in (1.1) ist, heißt die *Ordnung* von der DGL. Man sagt auch, dass (1.1) eine DGL n -ter Ordnung ist.

Die Gleichung (1.1) heißt “*differential*”, weil sie die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Eigentlich stellt die Gleichung (1.1) eine Beziehung zwischen verschiedenen Ableitungen von $y(x)$ dar. Die Differentialgleichung (1.1) heißt “*gewöhnlich*”, weil die Ableitungen $y^{(k)}$ gewöhnlich sind, im Gegensatz zu partiellen Ableitungen. Es gibt auch die partiellen Differentialgleichungen, wo die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und deshalb die partiellen Ableitungen benutzt werden müssen, aber in diesem Kurs betrachten wir nur gewöhnliche DGLen.

Gewöhnliche DGLen entstehen in verschiedenen Gebieten von Mathematik, als auch in Wissenschaften und Technik, da viele Naturgesetze mittels Differentialgleichungen formuliert werden können. In meisten Anwendungen braucht man eine Lösung $y(x)$ von (1.1) (mit gegebenen Randbedingungen) analytisch oder numerisch zu ermitteln. Es gibt bestimmte spezielle Typen von DGLen, die sich explizit analytisch lösen lassen. Andererseits, für ziemlich generellen Typen von DGLen kann man verschiedene Eigenschaften von Lösungen beweisen ohne sie explizit zu berechnen, z.B. die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Differenzierbarkeit, usw. In diesem Kurs werden wir die beiden Richtungen erforschen: explizit Lösungen zu bestimmen und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen zu beweisen.

Am Anfang besprechen wir verschiedene Beispiele von DGLen 1er und 2er Ordnung, die sich explizit lösen lassen.

1.2 DGLen erster Ordnung

Eine allgemeine DGL 1er Ordnung hat die Form $F(x, y, y') = 0$. Häufig kann diese Gleichung bezüglich y' gelöst werden, und man erhält die DGL in der *expliziten* Form:

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

wobei $y = y(x)$ eine gesuchte reelle Funktion einer reellen Variablen x , und $f(x, y)$ eine gegebene Funktion von zwei reellen Variablen. Wir betrachten das Paar (x, y) als ein Punkt in \mathbb{R}^2 . Der Definitionsbereich von f ist dann eine Teilmenge D von \mathbb{R}^2 . Die Menge D heißt auch der Definitionsbereich von DGL (1.2).

Definition. Sei $y(x)$ eine reelle Funktion, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Die Funktion $y(x)$ heißt eine (*spezielle*) Lösung von (1.2) genau dann, wenn

1. für jedes $x \in I$, der Punkt $(x, y(x))$ ein Element von D ist;

2 Herleitung der Formel

2.1 Hilfssätze

Für die Rechnungen auf den folgenden Seiten brauchen wir des Öfteren zwei Aussagen:

1. Diese Aussage sollte bekannt sein und wird nur erwähnt, um sie erneut ins Gedächtnis zu rufen:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

2. Sei $f(x) = y$ eine Funktion, so lässt sich die Kurvenlänge L zwischen x_1 und x_2 folgendermaßen berechnen:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Beweis:

Gehen wir zunächst davon aus, dass die Funktion für ein kleines Stück konstant sei, so können wir die Länge ds folgendermaßen darstellen:

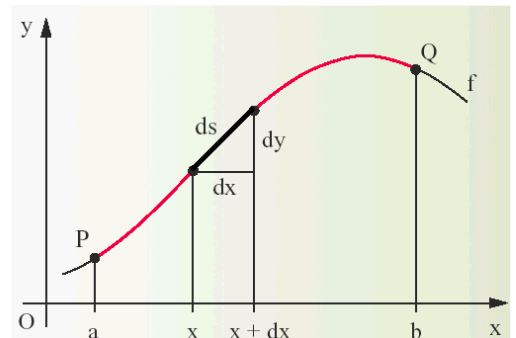
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)} \\ \Rightarrow ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \end{aligned}$$

Wenn wir das zu betrachtende Stück nun infinitesimal klein werden lassen, so ergibt sich folgender Term:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

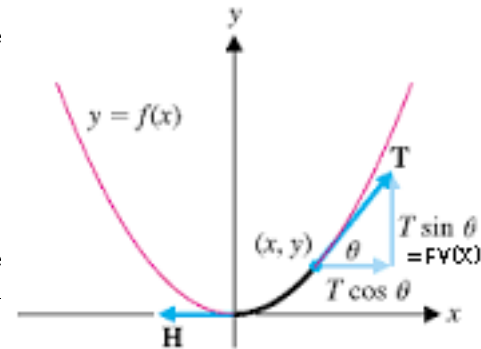
Summiert man nun die "Menge aller Punkte zwischen x_1 und x_2 ", so folgt die Aussage.

q.e.d.



2.2 “Ursprüngliche“ Version

Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Zuerst betrachten wir die “ursprüngliche“ Herleitung (, jene mit welcher das Problem zu Zeiten von Leibniz, Huygens und Bernoulli gelöst wurde). Bei dieser Herleitung betrachtet man folgende Kräfte, welche auf jeden Punkt des Seils wirken, jedoch nicht alle stets gleich sind: Die vertikale Kraft $F_V(x)$, die horizontale Kraft $F_H(x)$ und die Spannkraft (engl. Tension) $T(x)$, welche die “gesamtwirkende Kraft“ auf unseren Punkt darstellt (“zieht“ den Punkt also in **tangentiale** Richtung). Schnell stellt man fest, dass die horizontale Kraft in jedem Punkt gleich ist, da sich entgegengesetzte Kräfte ausgleichen, in welche Richtung wir die wirkende Kraft nun betrachten spielt hierbei keine Rolle, da es nur um die Beträge der jeweiligen Kräfte geht. Wäre die horizontale Kraft nicht konstant, so müsste sich das Seil weiterhin bewegen um den Kräfteausgleich zu bewirken. (Anmerkung: die horizontal wirkende Kraft wird lediglich von den Aufhängepunkten des Seils beeinflusst) $\Rightarrow F_H(x) = H \neq 0$ konstant. Aber was ist nun mit den anderen Kräften?



Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass sich $F_V(x)$ sich als Produkt der Länge des Seilstücks L vom Scheitel bis zum betrachteten Punkt $(x|y)$ ($L = s(x)$), multipliziert mit der Masse je Meter Seil μ und dem (Erd-)Beschleunigungsfaktor g dargestellt werden kann. Es gilt also:

$$F_V(x) = \mu \cdot g \cdot s(x) = \mu \cdot g \cdot \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

jedoch können wir die Kräfte auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} F_H(x) &= T(x) \cdot \cos(\Theta) \\ F_V(x) &= T(x) \cdot \sin(\Theta) \\ \Rightarrow y' &= \tan(\Theta) = \frac{F_V(x)}{F_H(x)} = \frac{\mu \cdot g}{H} \cdot s(x) \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich nach Differenzierung nach x die **DGL der Kettenlinie**:

$$\Rightarrow y'' = k \cdot \sqrt{1 + y'^2}, \quad k := \frac{\mu \cdot g}{H}$$

Diese gilt es nun zu lösen, hierfür substituiere zunächst $z := y'$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} z' = k \cdot \sqrt{1 + z^2} &\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int k dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = kx + d \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite wird mittels erneuter Substitution gelöst:

$$\begin{aligned} z &=: \sinh(u) \Rightarrow dz = \cosh(u) du \\ &\Rightarrow \int \frac{\cosh(u) du}{\sqrt{\cosh^2(u)}} = u + e \\ &\Rightarrow \sinh^{-1}(z) + e = kx + d \Leftrightarrow z = \sinh(kx + d) - e \\ &\Rightarrow y' = \sinh(kx + d) - e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{k} \cosh(kx + d) + e', \quad [e' := -e + f \text{ (konstante die beim Integrieren entsteht)}]$$

Wobei die Kettenlinie oft mit folgendem Term in “schönerer Form“ dargestellt wird:

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + C$$

Hier beschreibt x_0 die Verschiebung in x-Richtung und C die Verschiebung in y-Richtung bezüglich des ursprünglichen Scheitels, welcher die y-Koordinate a besaß. Es bleibt außerdem festzuhalten, dass NICHT jede $a \cosh(bx)$ Funktion eine Kettenlinie darstellt. Es muss weiterhin gelten $b = \frac{1}{a}$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3 Unverkennbare Ähnlichkeit zur Parabel

Nun kennt man die exakte Gleichung der Kettenlinie. Jedoch hatte Galilei damals gar nicht so unrecht, was die Ähnlichkeit zwischen der Kettenlinie und der Parabel angeht, äußerlich sehen sich die Kurven nun mal auf jeden Fall ähnlich. Im folgenden Abschnitt werden inhaltliche Ähnlichkeiten vorgestellt.

3.1 Die Kettenlinie ist KEINE Parabel

Dies funktioniert dank der bereits geleisteten Vorarbeit nun denkbar einfach. Beweis: Nehme an, es handle sich bei der Kettenlinie um eine Parabel, d.h.:

$$\exists f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}$$

sodass sich mithilfe der **DGL der Kettenlinie** folgende Bedingung ergibt:

$$\begin{aligned} y'' &= k \cdot \sqrt{1 + y'^2} = 2a \\ \Leftrightarrow y' &= \sqrt{\left(\frac{2a}{k}\right)^2 - 1} \quad | a_1 := \sqrt{\left(\frac{2a}{k}\right)^2 - 1} \\ \Rightarrow y &= a_1 x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies ist aber offensichtlich keine Parabelgleichung! \nexists

3.2 Taylorentwicklung der Kettenlinie

Obwohl es sich bei der Kettenlinie nicht um eine Parabel handelt, weist diese dennoch eine gewisse "Verwandtschaft" zur Parabel auf, betrachte hierfür die Taylorentwicklung der Kettenlinie.

Stelle zunächst die *n-te Ableitung der Kettenlinie* auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right), \quad f''(x) = \frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ \Rightarrow f^{(2n)} &= \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} \cdot a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad f^{(2n+1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} \cdot a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Taylorentwicklung für die Kettenlinie:

$$Tf(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n-1} \cdot \cosh\left(\frac{x_0}{a}\right)}{(2n)!} \cdot (x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n} \cdot \sinh\left(\frac{x_0}{a}\right)}{(2n+1)!} \cdot (x - x_0)^{2n+1}$$

Betrachte nun $Tf(x; 0)$ genauer. Da $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$ ist, ergibt sich sofort:

$$Tf(x; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a^{2n-1} \cdot (2n)!}$$

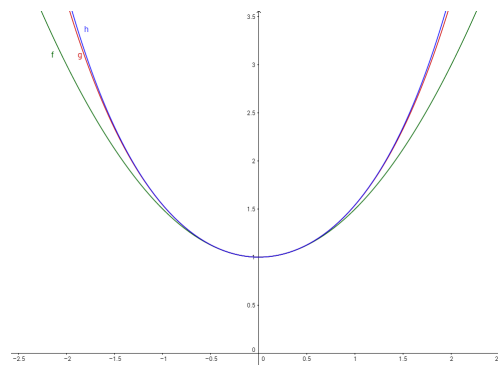
Man sieht also schon, dass die Partialsummen der Taylorentwicklung Polynome vom Grad $2n$ mit **ausschließlich graden Exponenten** sind, was eine Parabelform schlussfolgert. Um sich dies zu verdeutlichen, betrachte folgende Situation:

Sei $h(x) := \cosh(x)$, so gilt für die Partialsummen S_k der Taylorentwicklung dieser Funktion:

$$S_k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow S_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 =: f(x), \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 =: g(x).$$

Und man sieht mit Hilfe der Grafik, dass die **Parabeln** f und g gute Approximationen der Kettenlinie h für einen kleinen Bereich um die 0 sind.



3.3 Die Kettenlinie wird zu Parabel

In den vorherigen beiden Abschnitten hat man gezeigt, dass es sich bei der Kettenlinie nicht um eine Parabel handelt, diese jedoch mittels einer Parabel approximiert werden kann. Dennoch ist es möglich, ein hängendes Seil bzw. eine hängende Kette so zu beeinflussen, dass sie Parabelform annimmt. Ein Beispiel dafür sieht man hier: die Golden Gate Bridge. Die hier abgebildeten Seile bilden nämlich keine, wie man anfangs vielleicht vermuten mag, Kettenlinien, sondern Parabeln, also Vorsicht!



Man betrachte nun also Seile unter **konstanter Linienlast**, d.h. das Eigengewicht des Seils kann vernachlässigt werden (bei hinreichend schweren Konstruktionen). Sei q die Masse der Brücke pro Meter, so folgt:

$$\begin{aligned} V(x) &= q \cdot g \cdot x \\ \Rightarrow y' &= \frac{q \cdot g}{H} \cdot x \\ \Rightarrow y &= \frac{q \cdot g}{H} \cdot x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heißen Areafunktionen. Woher dieser Name kommt, und wie man ihre Werte anschaulich gewinnen kann, untersuchen wir in diesem Artikel.

Die hyperbolischen Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Ähnlich wie die trigonometrischen Funktionen einen Kreis parametrisieren, parametrisieren die hyperbolischen Funktionen einen Hyperbel. Dies sieht man leicht ein, wenn man von der Gleichung der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1$$

ausgeht und $x = \pm \cosh(t)$ sowie $y = \sinh(t)$ substituiert:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4} = 1.$$

Dieser „hyperbolische Pythagoras“ ist nur eine von vielen bemerkenswerten Formeln, die den engen Zusammenhang zwischen trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen widerspiegeln. Diese Ähnlichkeit offenbart sich (wie so oft) am Direktesten im Komplexen, denn dort gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Die Formeln für die Beziehungen der hyperbolischen Funktionen sind so zahlreich wie die entsprechenden trigonometrischen, so dass wir hier nicht daran denken können, in dieser Richtung weiter zu gehen.

Die Umkehrfunktionen

Wir benötigen für unsere Diskussion nur den hyperbolischen Cosinus und den hyperbolischen Sinus. Für diese beiden Funktionen werden wir nun die Umkehrfunktionen berechnen. Wir setzen

$$y = \frac{e^x \pm e^{-x}}{2}$$

und multiplizieren mit $2e^x$. Dann bringen wir alle Terme auf eine Seite und erhalten

$$e^{2x} - 2ye^x \pm 1 = 0.$$

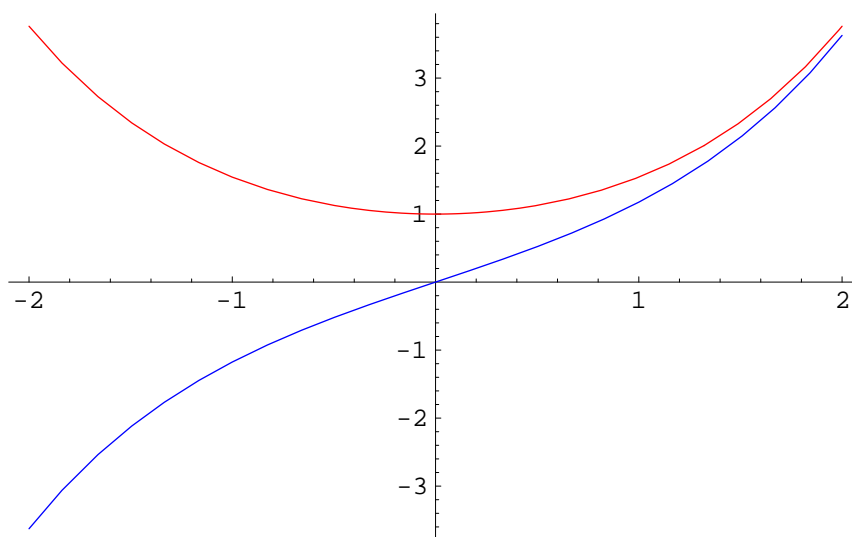


Abbildung 1.1: Die Funktionen \cosh (rot) und \sinh (blau).

Auflösen dieser quadratischen Gleichung in e^x liefert

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 \mp 1}.$$

Da e^x für reelles x stets positiv ist, müssen wir nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel berücksichtigen und erhalten somit

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Diese Funktionen werden als *Areafunktionen* bezeichnet. Doch wieso?

Die Bedeutung der Fläche

Bei den trigonometrischen Funktionen ist die Bedeutung der Umkehrfunktionen klar: Sie geben die Länge des Kreisbogens am Einheitskreis an, die dem gegebenen Wert für \cos bzw. \sin entspricht. Daher auch die Bezeichnung *Arkusfunktionen* für \arccos und \arcsin . Haben die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen eine ähnlich anschauliche Bedeutung? Sie haben.

Dazu betrachten wir nur den rechten Ast der Einheitshyperbel. Für jeden Punkt (x, y) dieses Astes können wir ein $t \in \mathbb{R}$ wählen mit $x = \cosh t$ und $y = \sinh t$. Dann ist $|t|$ gleich dem Flächeninhalt des in Abbildung 1.3 eingezeichneten Hyperbelsektors.

Da der Hyperbelast offenbar spiegelsymmetrisch zur x -Achse ist, reicht es, die Fläche der oberen Hälfte des Hyperbelsektors zu berechnen. Dazu ergänzen wir die eingezeichnete Ursprungsgerade zum Punkt (x, y) zu einem Dreieck, indem wir die Gerade von (x, y) nach

Anhang C: Erklärungen

„Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe. Verwendete Informationen aus dem Internet sind nach Maßgabe der Lehrkraft vollständig zur Verfügung gestellt worden.“

„Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.“

Ort, Datum

John Kevin Klein