



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Rivoltare la Sfera

CANDIDATO

John R. Calabrese

RELATORE

Dott. Roberto Frigerio

CONTRORELATORE

Prof. Fulvio Lazzeri

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

∞ Introduzione

Whiskey.

Franco Franchetti, IS

È possibile rivoltare la sfera? Scopo della presente tesi è rispondere a questa domanda. Occorre però prima stabilire cosa s'intende matematicamente per *eversione*¹ della sfera. Intuitivamente possiamo farci guidare dall'idea di rivoltare un calzino. Diamo innanzitutto una definizione. Siano M e N due varietà differenziabili di dimensione finita. Siano poi f e g due immersioni della prima varietà nella seconda. Un'omotopia regolare tra f e g è un'omotopia f_t che sia un'immersione di M in N per ogni t e tale che l'applicazione indotta sui fibrati tangenti df_t sia continua. Ciò che intendiamo studiare corrisponde quindi al caso in cui M sia la sfera bidimensionale, N lo spazio euclideo tridimensionale, f l'*embedding* standard $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ e g l'*embedding* 'rivoltato' $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. Il quesito iniziale si traduce quindi in: f è regolarmente omotopa a g ?

Alla fine degli anni cinquanta del secolo scorso, la medaglia Fields Stephen Smale estendeva il lavoro svolto nella propria tesi di dottorato cercando un invariante topologico per classificare le immersioni delle sfere negli spazi euclidei, modulo omotopia regolare. In un primo articolo² studiò il caso delle immersioni di S^2 in \mathbb{R}^n e in un secondo³ estese la teoria al caso delle immersioni di S^k in \mathbb{R}^n . Nella presente tesi ripercorriamo il secondo articolo di Smale, vedendo come sia possibile classificare le immersioni delle sfere in termini di gruppi di omotopia di varietà di Stiefel.

Nel primo capitolo richiamiamo alcuni concetti di base, in particolare quello di *fibrazione di Serre*.

Nel terzo capitolo effettuiamo la costruzione dell'invariante Ω definito da Smale. Indicando con $\mathcal{S}_{k,n}$ la varietà dei k -frames di \mathbb{R}^n e con $F_k(S^k)$ il fibrato dei k -frames di S^k , osserviamo che ogni immersione f di S^k in \mathbb{R}^n induce una mappa $f_{\#} : F_k(S^k) \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} \times \mathbb{R}^n$. Fissati $x_o \in F_k(S^k)$ e $y_o \in \mathcal{S}_{k,n} \times \mathbb{R}^n$, diciamo che $f : S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una immersione *puntata* se f è una immersione e $f_{\#}(x_o) = y_o$. Una omotopia

¹Nella letteratura inglese il termine che si ritrova per indicare l'operazione di 'rivoltamento' è *eversion*.

²[Sma58]

³[Sma59]

regolare *puntata* è una omotopia regolare che a ogni stadio sia una immersione puntata. Date due immersioni f e g di S^k in \mathbb{R}^n l'invariante $\Omega(f, g)$ appartiene (per costruzione) al k -esimo gruppo di omotopia di $\mathcal{S}_{k,n}$, $\pi_k(\mathcal{S}_{k,n})$. Grazie ai risultati del secondo capitolo dimostriamo infine che Ω induce una corrispondenza biunivoca tra $\pi_k(\mathcal{S}_{k,n})$ e le classi di omotopia regolare puntata delle immersioni di S^k in \mathbb{R}^n .

In conclusione: conoscere $\pi_2(\mathcal{S}_{2,3})$ equivale ad avere la risposta al quesito iniziale.

Indice

∞	Introduzione	iii
1	Qualche Richiamo	1
1.1	Richiami di Omotopia	1
1.2	Fibrati e Fibrazioni	5
1.2.1	Fibrazioni	5
1.2.2	Fibrati	8
2	Una Fibrazione di Serre e una Equivalenza Omotopica Debole	13
2.1	Una Fibrazione di Serre	13
2.2	Una Equivalenza Omotopica Debole	20
3	Costruzione di un Invariante	31
3.1	L'Invariante Ω	31
3.2	L'Eversione della Sfera	33



Qualche Richiamo

If you don't mind, I will begin at the beginning.

Eko, 2-9

Questo capitolo ha un duplice scopo: il primo è di raccogliere organicamente alcuni concetti e risultati di base, necessari per la comprensione dei restanti capitoli, il secondo è di fissare le notazioni che saranno utilizzate.

1.1 Richiami di Omotopia

Per una trattazione introduttiva ma esauriente dell'argomento si può consultare ad esempio [Hato2].

Ci è utile richiamare i concetti di *coppia* e *tripla* di spazi topologici. Una *coppia* è un oggetto (X, A) , dove X è uno spazio topologico e $A \subseteq X$ è un suo sottospazio. Una *tripla* è una terna (X, A, B) dove $B \subseteq A \subseteq X$. Un caso di particolare importanza è costituito dalle coppie (triple) in cui il secondo (terzo) elemento della coppia (tripla) sia un punto. In tal caso si parla di *spazi con punto base* (o *spazi puntati*) e di *coppie con punto base*. Un *morfismo di coppie* $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subseteq B$. Un *morfismo di triple* $f : (X, A_1, A_2) \rightarrow (Y, B_1, B_2)$ è un morfismo di coppie $f : (X, A_1) \rightarrow (Y, B_1)$ tale che $f(A_2) \subseteq B_2$. A partire dal concetto di omotopia per spazi topologici possiamo definire il concetto di *omotopia relativa* per coppie e triple di spazi: una *omotopia di coppie* è un morfismo di coppie $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$. In maniera del tutto analoga si definisce l'*omotopia di triple*. Dati due spazi topologici X e Y , indichiamo con $[X, Y]$ l'insieme costituito dalle classi di omotopia delle funzioni continue da X in Y . Adottiamo una notazione analoga per le classi di omotopia di coppie e triple.

Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un suo sottospazio, $x_0 \in A$ un punto di A e sia \star un fissato punto di S^n (ad esempio $\star = (1, 0, \dots, 0)$). Definiamo ora due

insiemi:

$$\begin{aligned}\pi_n(X, x_o) &= [(S^n, \star), (X, x_o)], \\ \pi_n(X, A, x_o) &= [(D^n, S^{n-1}, \star), (X, A, x_o)],\end{aligned}$$

dove il primo insieme è definito per $n \geq 0$ e il secondo per $n \geq 1$. Chiamiamo il primo insieme *n-esimo gruppo di omotopia* dello spazio X con punto base x_o e il secondo insieme *n-esimo gruppo di omotopia relativa* della coppia (X, A) con punto base x_o . In realtà il primo insieme risulterà essere un gruppo solo per $n \geq 1$ e il secondo per $n \geq 2$.

Sia ora $n \geq 1$: vogliamo definire una struttura di gruppo per $\pi_n(X, x_o)$. Per fare ciò consideriamo innanzitutto il cubo n -dimensionale I^n e la coppia $(I^n, \partial I^n)$. È noto che la coppia $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$ è isomorfa alla coppia (S^n, \star) . Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}(I^n, \partial I^n) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) & \xrightarrow{\bar{f}} & (X, x_o) \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (S^n, \star) & & \end{array}$$

dove π è la proiezione sul quoziente e φ è un fissato isomorfismo. Si osserva immediatamente che π e φ inducono una corrispondenza biunivoca tra le $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_o)$ e le $\tilde{f} : (S^n, \star) \rightarrow (X, x_o)$. Questa stessa corrispondenza induce anche una corrispondenza tra le omotopie:

$$\begin{array}{ccc}(I^n \times I, \partial I^n \times I) & & \\ \pi \downarrow & \searrow H & \\ (I^n/\partial I^n \times I, \partial I^n/\partial I^n \times I) & \xrightarrow{\bar{H}} & (X, x_o) \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ (S^n \times I, \{\star\} \times I) & & \end{array}$$

Vogliamo adesso dare una struttura di gruppo a $\pi_n(X, x_o)$ tramite questa corrispondenza biunivoca. Identifichiamo dunque l'insieme $[(I^n, \partial I^n), (X, x_o)]$ con $\pi_n(X, x_o)$ ¹. Risulta ora semplice dotare $\pi_n(X, x_o)$ di una struttura di gruppo. Siano

¹Risulterà immediato verificare che la struttura di gruppo che daremo a $\pi_n(X, x_o)$ non dipende dall'omeomorfismo scelto.

$f, g \in \mathcal{C}(I^n, X)$. Se $f|_{\{1\} \times I^{n-1}} = g|_{\{0\} \times I^{n-1}}$ possiamo definire il *concatenamento* tra f e g , $f \cdot g$, nel seguente modo:

$$f \cdot g(s, t) = \begin{cases} f(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

dove $s \in [0, 1]$ e $t \in I^{n-1}$.

Senza alcuna difficoltà si dimostra che il concatenamento induce un'operazione su $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$, rendendolo un gruppo, abeliano per $n \geq 2$, con elemento neutro la classe di omotopia della mappa costante ϵ_{x_0} . In analogia con il gruppo fondamentale, se x_0 e x_1 sono due punti di uno spazio topologico X appartenenti a una stessa componente connessa per archi, i gruppi $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$ risultano essere isomorfi, dove quest'ultimo isomorfismo è *canonico* nel caso in cui $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$. Nel caso in cui X sia uno spazio connesso per archi ($\pi_0(X, x_0) = \{0\}$), si può dunque omettere il punto base x_0 , scrivendo $\pi_n(X)$.

Osserviamo infine che, analogamente a quanto accade per il gruppo fondamentale, i π_n possono essere visti come funtori dalla categoria degli spazi con punto base alla categoria dei gruppi (o degli insiemi nel caso $n = 0$). Infatti, sia $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un morfismo di spazi puntati, per ogni $n \geq 0$ consideriamo la mappa $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ così definita:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha],$$

per ogni $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$. È una semplice verifica mostrare che una tale f_* risulta essere un ben definito morfismo di gruppi (o di insiemi nel caso $n = 0$).

Un importante risultato di cui faremo uso è il seguente.

1.1.1 TEOREMA

Sia X uno spazio topologico, $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ il suo rivestimento universale, \tilde{x}_0 un punto di \tilde{X} e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Allora $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è isomorfo a $\pi_n(X, x_0)$, per ogni $n \geq 2$.

Dimostrazione

La dimostrazione è una semplice conseguenza delle proprietà dei rivestimenti. ■

Passare allo studio dei gruppi di omotopia delle triple è semplice poiché la costruzione della struttura di gruppo è simile. Sia $n \geq 2$. Consideriamo lo spazio $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$, dove J^{n-1} è la chiusura di $\partial I^n \setminus I^{n-1}$. Le triple

$$(I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1}, J^{n-1}/J^{n-1}) \\ \text{e} \quad (D^n, S^{n-1}, \star)$$

sono isomorfe. Data una coppia con punto base (X, A, x_0) , analogamente a quanto visto prima, è possibile dotare l'insieme $[(I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1}, J^{n-1}/J^{n-1}), (X, A, x_0)]$ di una struttura di gruppo, abeliano per $n \geq 3$, tramite il concatenamento di mappe. Similmente a quanto visto per il π_n , anche il π_n relativo può essere interpretato come un funtore.

Prima di concludere mostriamo un teorema di fondamentale importanza per dimostrare i risultati del capitolo successivo.

Sia (X, A, x_0) una coppia con punto base. Osserviamo innanzitutto che l'inclusione del sottospazio A nello spazio X induce un omomorfismo

$$i : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0).$$

Osserviamo inoltre che è possibile identificare $\pi_n(X, x_0)$ con $\pi_n(X, x_0, x_0)$. L'inclusione di (X, x_0, x_0) in (X, A, x_0) induce quindi un omomorfismo

$$j : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0).$$

Sia infine

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X, x_0)$$

l'omomorfismo indotto dalla restrizione delle mappe $f : (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ a $(S^{n-1}, *)$.

Si ottiene dunque il seguente risultato.

1.1.2 TEOREMA

Sia (X, A, x_0) una coppia con punto base. Siano i, j e ∂ gli omomorfismi descritti sopra. Allora la seguente successione è esatta:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Inoltre l'esattezza (in senso insiemistico) si mantiene anche nella coda della successione:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \rightarrow \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

dove non è presente alcuna struttura di gruppo.

Dimostrazione

Per la dimostrazione è utile dare una caratterizzazione dell'elemento neutro di $\pi_n(X, A, x_0)$. Una $f : (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ rappresenta l'elemento neutro di $\pi_n(X, A, x_0)$ se e solo se f è omotopa a una $g : (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$, con $g(D^n) \subseteq A$. Il resto è una semplice verifica. ■

Ci è utile per il prosieguo dare la definizione che segue.

1.1.3 DEFINIZIONE

Un morfismo di coppie $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ si dice essere una equivalenza omotopica debole se l'omomorfismo (o morfismo di insiemi nel caso $n = 0$) $f_ : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ da esso indotto è un isomorfismo.*

Vale allora il seguente lemma.

1.1.4 LEMMA

Sia (X, A, x_0) una coppia con punto base. Se per ogni compatto K di X contenente x_0 , $K \cap A$ risulta essere un retratto di deformazione di K allora l'inclusione $i : A \rightarrow X$ di A in X è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione

La dimostrazione segue facilmente dal fatto che, data una $f : S^n \rightarrow X$ e una $H : S^n \times I \rightarrow X$, $f(S^n)$ e $H(S^n \times I)$ sono compatti. ■

1.2 Fibrati e Fibrizioni

Richiamiamo brevemente la nozione di *fibrato di Serre* e alcune proprietà dei fibrati. Una particolareggiata esposizione degli argomenti che trattiamo si può trovare in [AGPo2].

1.2.1 Fibrizioni

Sia (E, p, B) una terna dove E e B sono spazi topologici e $p : E \rightarrow B$ è un'applicazione continua tra essi e sia X uno spazio topologico.

1.2.1 DEFINIZIONE

Diciamo che la terna (E, p, B) possiede la HLP² rispetto allo spazio X se per ogni omotopia $H_t : X \rightarrow B$ e per ogni sollevamento (rispetto a p) $\bar{H} : X \rightarrow E$ di H_0 esiste un sollevamento dell'intera omotopia $H_t, \tilde{H}_t : X \rightarrow E$ tale che $\tilde{H}_0 = \bar{H}$.

La precedente definizione si può riassumere con il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{H}} & E \\ \downarrow j_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

dove j_0 è l'inclusione $X \hookrightarrow X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I$.

Sia ora \mathcal{T} una classe di spazi topologici.

1.2.2 DEFINIZIONE

Una terna (E, p, B) è una \mathcal{T} -fibrato se per ogni spazio X della classe \mathcal{T} la terna (E, p, B) possiede la HLP rispetto a X .

In particolare, nel caso in cui \mathcal{T} sia la famiglia di tutti i dischi D^n con $n \geq 0$, una \mathcal{T} -fibrato (E, p, B) è detta *fibrato di Serre*.

²HLP sta per *Homotopy Lifting Property*. In questa terminologia seguiamo [AGPo2] e [Hato2]. Smale invece, in [Sma58] e [Sma59], usa la sigla CHP al posto di HLP, che sta per *Covering Homotopy Property*.

Il fatto che una data terna (E, p, B) sia una fibrazione di Serre può essere riassunto con un diagramma o, più precisamente, con una successione di diagrammi, uno per ogni n :

$$\begin{array}{ccc}
 I^n & \xrightarrow{\overline{H}} & E \\
 \downarrow j_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 I^n \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

dove si è usato il fatto che D^n è omeomorfo a I^n per ogni n .

Mostriamo innanzitutto un'importante proprietà delle fibrazioni di Serre.

1.2.3 TEOREMA

Sia (E, p, B) una terna composta da due spazi topologici e da una mappa $p : E \rightarrow B$ tra di essi. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un ricoprimento aperto di B , tale che la terna $(p^{-1}(U_\alpha), p, U_\alpha)$ sia una fibrazione di Serre per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. Allora la terna (E, p, B) è una fibrazione di Serre.

Dimostrazione

Occorre dunque mostrare l'esistenza, per ogni n , di una \tilde{H} come mostrato nel diagramma commutativo che segue.

$$\begin{array}{ccc}
 I^n & \xrightarrow{\overline{H}} & E \\
 \downarrow j_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 I^n \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

La famiglia $\mathfrak{H} = \{H^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è un ricoprimento aperto di $I^n \times I$. Sia dunque ϵ un numero di Lebesgue di \mathfrak{H} . Suddividiamo I^n in sottocubi e partizioniamo I in sottointervalli $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ in modo tale che il diametro di $C \times [t_j, t_{j+1}]$ sia minore di ϵ , per ogni sottocubo C della suddivisione e per ogni $j = 0, \dots, m-1$.

Procediamo dapprima per induzione rispetto a j . Per ipotesi, la mappa \tilde{H} che intendiamo costruire è già definita su $I^n \times \{0\}$. Supponiamo ora che \tilde{H} sia definita su $I^n \times [0, t_j]$: il passo induttivo consiste nell'estendere \tilde{H} a $I^n \times [0, t_{j+1}]$.

Sia ora c una p -faccia, con $0 \leq p \leq n$, di un cubo C della suddivisione di I^n . Per ipotesi $H(c \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_i$. Vogliamo ora sfruttare il fatto che la terna $(p^{-1}(U_i), p, U_i)$ è una fibrazione di Serre, definendo \tilde{H} su un sottocubo per volta.

Proseguiamo quindi per induzione sulla dimensione di c . Se c è una 0-faccia posso allora definire \tilde{H} su $c \times [t_j, t_{j+1}]$, senza alcun problema. Supponiamo ora di aver definito \tilde{H} su ogni insieme del tipo $c' \times [t_j, t_{j+1}]$, dove c' è una faccia, di dimensione minore di p , di un qualche cubo C della suddivisione.

Sia ora c una p -faccia. Per ipotesi induttiva \tilde{H} è definita su $c \times \{t_j\} \cup \partial c \times [t_j, t_{j+1}]$. Vogliamo estendere \tilde{H} su tutto $c \times [t_j, t_{j+1}]$. Poiché $H(c \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_i$ abbiamo già un modo per definire \tilde{H} , rimangono però da soddisfare le condizioni al bordo dettate dai valori di \tilde{H} su $c \times \{t_j\} \cup \partial c \times [t_j, t_{j+1}]$. Per soddisfare tali condizioni usiamo il fatto che esiste un omeomorfismo $\varphi : c \times [t_j, t_{j+1}] \rightarrow c \times [t_j, t_{j+1}]$ che manda $c \times \{t_j\} \cup \partial c \times [t_j, t_{j+1}]$ in $c \times \{t_j\}$, per cui la coppia $(c \times [t_j, t_{j+1}], c \times \{t_j\} \cup \partial c \times [t_j, t_{j+1}])$ è isomorfa alla coppia $(I^p \times I, I^p \times \{o\})$.

Sia H' un sollevamento di $H \circ \varphi^{-1}$, possiamo dunque definire \tilde{H} su $c \times [t_j, t_{j+1}]$ come $H' \circ \varphi$.

Si ha così la tesi. ■

Di fondamentale importanza è la seguente proprietà delle fibrazioni di Serre.

1.2.4 TEOREMA

Sia (E, p, B) una fibrazione di Serre e sia $b \in B$. Sia $F = p^{-1}(b)$ la fibra di b in E e sia $e \in F$ un punto di tale fibra. Allora, per ogni $n \geq 1$ $\pi_n(E, F, e)$ è isomorfo a $\pi_n(B, b)$.

Dimostrazione

L'isomorfismo cercato è dato proprio da $p_* : \pi_n(E, F, e) \rightarrow \pi_n(B, b, b) = \pi_n(B, b)$. La verifica che p_* sia effettivamente un isomorfismo è semplice, può comunque risultare utile notare che la tripla $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ è isomorfa alla tripla $(I^n, \partial I^n, \{o\} \times I^{n-1})$. ■

Considerando il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(F, e) & \longrightarrow & \pi_n(E, e) & \longrightarrow & \pi_n(E, F, e) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e) \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & p_* & \\
 & & & & \swarrow & & \searrow \\
 & & & & \pi_n(B, b) & &
 \end{array}$$

otteniamo il seguente corollario:

1.2.5 COROLLARIO

La successione che segue è esatta

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, e) \longrightarrow \pi_n(E, e) \longrightarrow \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e) \longrightarrow \cdots$$

e termina con

$$\cdots \longrightarrow \pi_0(F, e) \longrightarrow \pi_0(E, e) \longrightarrow \pi_0(B, b).$$

Osserviamo infine un'ultimo fatto sulle fibrazioni di Serre.

1.2.6 PROPOSIZIONE

Siano (E, p, B) e (B, p', B') due fibrazioni di Serre e sia $A \subseteq B$ un sottospazio di B . Allora le terne $(p^{-1}(A), p, A)$ e $(E, p' \circ p, B')$ sono delle fibrazioni di Serre.

1.2.2 Fibrati

Nel seguito con il termine *fibrato* intenderemo sempre *fibrato topologico localmente banale*. Richiamiamone la definizione.

1.2.7 DEFINIZIONE

Un fibrato topologico localmente banale è una quadrupla $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- F, E, B sono spazi topologici, detti fibra, spazio totale e base³,
- $p : E \rightarrow B$ è una applicazione continua, detta proiezione,
- Per ogni $b \in B$, la fibra $p^{-1}(b)$ è omeomorfa a F ,
- Per ogni $b \in B$ esiste una coppia (U_b, h_b) , detta banalizzazione locale, costituita da un intorno aperto di b e un omeomorfismo, che rendano $p^{-1}(U_b)$ un ‘prodotto’. Ovvero:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_b) & \xrightarrow{h_b} & U_b \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & U_b & \end{array}$$

dove p_1 è la proiezione sul primo fattore e il diagramma è commutativo.

Tavolta per indicare un fibrato \mathcal{F} si usa anche scrivere

$$\begin{array}{c} F \hookrightarrow E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$$

o anche $E \xrightarrow{p} B$, qualora la fibra sia sottintesa o irrilevante. La definizione asserisce sostanzialmente che lo spazio totale è localmente il prodotto della base per la fibra. Perciò possiamo interpretare lo spazio totale come un ‘prodotto deformato’. È dunque naturale aspettarsi, come nel caso degli spazi prodotto, che lo spazio totale di un fibrato a base e fibra compatte sia compatto, infatti:

1.2.8 TEOREMA

Sia $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ un fibrato e siano F e B compatti allora anche E è compatto.

La dimostrazione che segue fa un uso pesante di indici, l’idea è comunque semplice e ricalca la classica prova del fatto che il prodotto di due compatti è compatto, tramite le banalizzazioni locali.

³Sottinteso: del fibrato \mathcal{F} .

Dimostrazione

Sia $\mathfrak{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un ricoprimento aperto di E . Per ogni $b \in B$ sia (U_b, h_b) una corrispondente banalizzazione locale e sia

$$\Gamma_\alpha^b = h_b(G_\alpha \cap p^{-1}(U_b)).$$

La famiglia $\{\Gamma_\alpha^b\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è dunque un ricoprimento aperto di $U_b \times F$. Per ogni α in \mathcal{A} esistono, per definizione di topologia prodotto, dei rettangoli aperti $R_\beta^{b,\alpha} = A_\beta^{b,\alpha} \times F_\beta^{b,\alpha}$, con β che varia in un insieme \mathcal{B}_α , tali che

$$\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_\alpha} R_\beta^{b,\alpha} = \Gamma_\alpha^b.$$

Chiaramente la famiglia $\{R_\beta^{b,\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}_\alpha}$ è ancora un ricoprimento aperto di $U_b \times F$, in particolare ricopre anche l'insieme $\{b\} \times F$, che è compatto. Possiamo dunque estrarre un sottofamiglia

$$\mathfrak{R}^b = \{R_{\beta_{j,b}}^{b,\alpha_{j,b}}\}_{j=1,\dots,n_b}$$

che ricopra $\{b\} \times F$ e tale che $S \cap (\{b\} \times F)$ sia diverso dal vuoto per ogni $S \in \mathfrak{R}^b$. A ogni b possiamo associare l'insieme di indici $\mathcal{J}_b = \{\alpha_{j,b}\}_{j=1,\dots,n_b}$. Consideriamo ora l'insieme

$$A^b = \bigcap_{j=1,\dots,n_b} p_1(R_{\beta_{j,b}}^{b,\alpha_{j,b}}) = \bigcap_{j=1,\dots,n_b} A_{\beta_{j,b}}^{b,\alpha_{j,b}}.$$

A^b è un aperto di B , contenente b e contenuto in U_b . Risulta quindi:

$$A^b \times F \subseteq \bigcup_{S \in \mathfrak{R}^b} S \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}_b} \Gamma_\alpha^b$$

e dunque

$$p^{-1}(A^b) = h_b^{-1}(p_1^{-1}(A^b)) = h_b^{-1}(A^b \times F) \subseteq h_b^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}_b} \Gamma_\alpha^b\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}_b} G_\alpha,$$

dove in quest'ultima riga si è usato il fatto che A^b è contenuto in un singolo aperto banalizzante. La famiglia $\{A^b\}_{b \in B}$ è un ricoprimento aperto di B , che è compatto, possiamo dunque estrarre un sottoricoprimento finito $\{A_j^b\}_{j=1,\dots,n}$. Poniamo

$$\mathcal{J} = \bigcup_{j=1,\dots,n} \mathcal{J}_{b_j}$$

e osserviamo che è un insieme finito. Per concludere basta notare che ogni $e \in E$ sta in $p^{-1}(p(e))$ e $p(e)$ appartiene a un qualche A_j^b . Inoltre, per quanto già visto:

$$e \in p^{-1}(p(e)) \subseteq p^{-1}(A_j^b) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}_{b_j}} G_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} G_\alpha,$$

che è quanto basta per provare che $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ è un sottoricoprimento finito di \mathfrak{G} . ■

Richiamiamo anche la nozioni di *morfismo* o *trasformazione* tra fibrati.

1.2.9 DEFINIZIONE

Siano $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ e $\mathcal{F}' = (F', E', p', B')$ due fibrati. Un morfismo tra \mathcal{F} e \mathcal{F}' è una coppia (Φ, φ) di mappe continue che renda commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\varphi} & B' \end{array}$$

1.2.10 Osservazione La nozione di fibrato (così come la nozione di morfismo tra fibrati) può essere ristretta imponendo, ad esempio, delle condizioni sulle mappe comparenti nelle definizioni.

Un fibrato è in realtà una particolare fibrazione di Serre, vale infatti:

1.2.11 TEOREMA

Sia $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ un fibrato topologico localmente banale. Allora la terna (E, p, B) è una fibrazione di Serre.

Dimostrazione

La dimostrazione è semplice e sfrutta il teorema 1.2.3. Basta considerare un ricoprimento di B , costituito da aperti banalizzanti. ■

Richiamiamo ora la definizione di *pullback* di un fibrato e una sua utile proprietà.

Sia $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ un fibrato e sia $f : X \rightarrow B$ una mappa continua tra uno spazio topologico X e la base B del fibrato \mathcal{F} .

1.2.12 DEFINIZIONE

Il fibrato pullback di \mathcal{F} tramite f è il fibrato $f^*(\mathcal{F}) = (F, f^*(E), f^*(p), X)$. Dove

$$\begin{aligned} f^*(E) &= \{(e, x) \mid e \in E, x \in X, p(e) = f(x)\}, \\ f^*(p)(e, x) &= x, \\ f^*(e, x) &= e. \end{aligned}$$

Graficamente:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{f^*} & E \\ \downarrow p^* & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

È noto il seguente teorema.

1.2.13 TEOREMA

Sia $\mathcal{F} = (F, E, p, B)$ un fibrato. Sia X uno spazio topologico localmente compatto a base numerabile e siano $f, g : X \rightarrow B$ due applicazioni continue omotope. Allora $f^*(\mathcal{F})$ è isomorfo a $g^*(\mathcal{F})$.

Ci è utile osservare un altro piccolo risultato. Data una varietà M dotata di una metrica Riemanniana, denotiamo con UM l'insieme dei vettori tangenti a M di norma unitaria:

$$UM = \{x \in TM \mid \|x\| = 1\}.$$

Lo spazio UM risulta essere un sottofibrato del fibrato tangente TM che chiameremo *fibrato unitario* (della varietà M). Dato un punto x di M indicheremo con $U_x M$ la sua fibra in UM , in analogia con la notazione per il fibrato tangente. Possiamo dunque enunciare un piccolo lemma:

1.2.14 LEMMA

Sia M una varietà Riemanniana compatta allora il suo fibrato unitario UM è compatto.

Dimostrazione

Sia n la dimensione di M . Poiché per ogni $x \in M$ la fibra $U_x M$ è omeomorfa a S^{n-1} , che è compatto, il lemma discende come conseguenza del teorema 1.2.8. ■

Per concludere richiamiamo un ultimo fatto.

1.2.15 PROPOSIZIONE

Sia $\mathcal{S}_{k,n}$ la varietà di Stiefel dei k -frames di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{G}_{k,n}$ la Grassmanniana dei k -piani di \mathbb{R}^n . Allora $\mathcal{S}_{k,n} \xrightarrow{p} \mathcal{G}_{k,n}$ è un fibrato, dove

$$p(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

per ogni $(v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{S}_{k,n}$.

Una Fibrazione di Serre e una Equivalenza Omotopica Debole

Solo uno uomo risolvere questa cosa.

IS

Fissiamo innanzitutto delle notazioni. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa \mathcal{C}^∞ tra varietà differenziabili e siano $p \in M$ un punto di M e $v \in T_p M$ un vettore dello spazio tangente a M in p . Indichiamo con $\nabla_v f(p) = df(p)[v]$ il differenziale di f in p applicato a v . Nel seguito muniamo il disco unitario k -dimensionale D^k delle coordinate sferiche generalizzate. Interpretiamo dunque i punti di D^k come coppie (r, x) , dove r è la distanza dall'origine e x è un punto del bordo di D^k , $\partial D^k = S^{k-1}$. Inoltre, se $f : D^k \rightarrow N$ è una funzione \mathcal{C}^∞ dal disco in una varietà differenziabile e $(r, x) \in D^k$ è un punto del disco con $r \neq 0$, indichiamo con $\partial_r f(r, x) = df(r, x)[v_r]$ la derivata di f lungo la coordinata radiale.

2.1 Una Fibrazione di Serre

Da qui in poi sottintenderemo $k, n \in \mathbb{N}$, $n > k \geq 1$. Sia $E = E_{k,n}$ l'insieme delle immersioni \mathcal{C}^∞ del disco k -dimensionale in \mathbb{R}^n , ovvero:

$$E_{k,n} = \text{Imm}(D^k, \mathbb{R}^n).$$

Dotiamo E della topologia \mathcal{C}^1 , introduciamo ovvero una metrica ρ così definita:

$$\rho(f, g) = \max \{ \bar{\rho}(f(y), g(y)), \bar{\rho}(df(y)[v], dg(y)[v]) \mid y \in D^k, v \in U_y D^k \}$$

dove $\bar{\rho}$ è la metrica euclidea¹. Sia $B = B_{k,n}$ l'insieme costituito dalle coppie (g, g') , dove $g \in \text{Imm}(S^{k-1}, \mathbb{R}^n)$ è una immersione della sfera $(k-1)$ -dimensionale in \mathbb{R}^n e

¹L'esistenza del massimo è garantita dalla compattezza di D^k e di UD^k . Vale la pena di osservare che questo stesso ragionamento si applica anche ai massimi e ai minimi che compaiono nel resto della sezione. Si veda anche il lemma 1.2.14.

g' è una sezione differenziabile del fibrato trasversale (rispetto allo spazio ambiente \mathbb{R}^n) di $g(S^{k-1})$, ovvero:

$$B_{k,n} = \{(g, g') \mid g \in \text{Imm}(S^{k-1}, \mathbb{R}^n), g' \in \mathcal{C}^\infty(S^{k-1}, \mathbb{R}^n), \\ g'(x) \notin dg(x)[T_x S^{k-1}] \quad \forall x \in S^{k-1}\}.$$

Dotiamo anche B di una metrica ρ' così definita:

$$\rho'((g, g'), (h, h')) = \max\{\rho_o(g, h), \bar{\rho}(g'(x), h'(x)) \mid x \in S^{k-1}\}$$

dove ρ_o è la metrica ρ introdotta sopra con l'eccezione che y varia soltanto in S^{k-1} . Definiamo ora una mappa $\pi : E \rightarrow B$. Per ogni $f \in E$ sia $\pi(f) = (g, g')$, dove g è la restrizione di f a S^{k-1} e g' è la derivata radiale di f sempre ristretta a S^{k-1} :

$$\pi(f)(x) = (g, g')(x) = (f(1, x), \partial_r f(1, x)).$$

Per come sono state definite le topologie su E e su B è facile controllare che π è una mappa continua. Lo scopo di questa sezione è dimostrare il seguente teorema.

2.1.1 TEOREMA

La tripla (E, π, B) è una fibrazione di Serre.

Dimostrazione

La dimostrazione è piuttosto articolata e occorre procedere per piccoli passi. Ciò che vogliamo provare è che la tripla (E, π, B) possiede la HLP rispetto ai cubi. Siano quindi P un cubo, $h_t^o : P \rightarrow B$ un'omotopia e \bar{h} un sollevamento di h_o^o . Dunque, per ogni $p \in P$, $h_t^o(p)$ è una coppia $(h_t(p), h'_t(p))$ costituita da un'immersione della sfera e da un campo di vettori a essa trasversali, mentre $\bar{h}(p)$ è un'immersione di tutto il disco che al bordo si comporta come $h_o(p)$, con derivata radiale $h'_o(p)$. Ciò che vogliamo è estendere \bar{h} a un'omotopia \bar{h}_t definita su tutto l'intervallo unitario I .

Sia $\epsilon_1(t, p, x)$ la distanza tra $h'_t(p)(x)$ e lo spazio tangente a $h_t(p)(S^{k-1})$ in $h_t(p)(x)$ e siano:²

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \min\{\epsilon_1(t, p, x) \mid t, p, x\}, \\ \epsilon_2 &= \min\{\|\nabla_v h_t(p)(x)\| \mid t, p, x, v \in U_x S^{k-1}\}, \\ (2.1) \quad \epsilon &= \frac{1}{10} \min\{1, \epsilon_1, \epsilon_2\}. \end{aligned}$$

Vogliamo ora definire una trasformazione lineare $Q_t(p)(x)$ di \mathbb{R}^n , al variare di $p \in P$, $x \in S^{k-1}$ e $t \in [0, \delta]$, dove quest'ultimo δ verrà specificato in seguito. Grazie alla compattezza di $P \times S^{k-1} \times I$ si sceglierà δ in modo da rendere ben definito e continuo (rispetto a t, p e x) l'angolo $\alpha_t(p)(x) \in [0, \pi[$ formato da $h'_o(p)(x)$ e $h'_t(p)(x)$. Sia $V_t(p)(x)$ il piano generato da $h'_o(p)(x)$ e $h'_t(p)(x)$. Sia $Q_t^*(p)(x)$ l'isometria di \mathbb{R}^n che su $V_t(p)(x)$ agisce come la rotazione di angolo $\alpha_t(p)(x)$ e sull'ortogonale

²Per semplicità adottiamo la convenzione di non specificare l'insieme di definizione delle variabili qualora dovessero variare sul loro intero dominio di definizione.

di $V_t(p)(x)$ è l'identità (qualora $V_t(p)(x)$ dovesse essere una retta, $Q_t^*(p)(x)$ sarà l'identità di \mathbb{R}^n , indicata con e). Come funzione di t , p e x Q^* risulta essere continua e in particolare $Q_t^*(p)$ è differenziabile rispetto a x . Infine definiamo $Q_t(p)(x)$ come $Q_t^*(p)(x)$ moltiplicato per lo scalare $\frac{\|h'_t(p)(x)\|}{\|h'_0(p)(x)\|}$, chiaramente le stesse proprietà di continuità e differenziabilità viste per Q^* valgono per Q . Vale inoltre:

$$(2.2) \quad Q_t(p)(x)[h'_0(p)(x)] = h'_t(p)(x).$$

Premettiamo ora un lemma.

2.1.2 LEMMA

Sia X uno spazio topologico a base numerabile e localmente compatto, sia $w : X \rightarrow \mathcal{G}_{k,n}$ una mappa omotopa a una costante. Esiste allora una mappa $u : X \rightarrow S^{n-1}$ tale che $u(x)$ sia ortogonale al piano $w(x)$, per ogni $x \in X$. Inoltre, nel caso in cui X sia una varietà differenziabile e w una mappa \mathcal{C}^∞ , u risulta essere \mathcal{C}^∞ .

Dimostrazione

Sia $\mathcal{S}_{k+1,n}^o$ la varietà di Stiefel ortonormale. Sia $p : \mathcal{S}_{k+1,n}^o \rightarrow \mathcal{G}_{k,n}$ la mappa che a ogni $(k+1)$ -frame ortonormale associa il piano generato dai primi k vettori: $\mathcal{S}_{k+1,n}^o \xrightarrow{p} \mathcal{G}_{k,n}$ è un fibrato. Sia inoltre $\pi : \mathcal{S}_{k+1,n}^o \rightarrow S^{n-1}$ la proiezione sull'ultima componente: $\mathcal{S}_{k+1,n}^o \xrightarrow{\pi} S^{n-1}$ è un fibrato.

$$\begin{array}{ccccc} w^*(X) & \xrightarrow{\quad w^* \quad} & \mathcal{S}_{k+1,n}^o & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & S^{n-1} \\ \sigma \downarrow \text{dashed} & & \downarrow p & & \\ X & \xrightarrow{\quad w \quad} & \mathcal{G}_{k,n} & & \end{array}$$

Poiché w è omotopa a una costante il suo pullback $w^*(X)$ è isomorfo a un fibrato banale. Da ciò ricaviamo l'esistenza di una sezione globale σ . Ponendo $u = \pi \circ w^* \circ \sigma$ si trova la mappa cercata, la quale risulta essere \mathcal{C}^∞ nell'analogo caso differenziabile. ■

Vogliamo ora applicare il lemma 2.1.2. Sia $X = I \times P \times S^{k-1}$ e sia w la mappa che associa alla terna (t, p, x) il k -piano $w(t, p, x)$ generato da $h'_t(p)(x)$ e dall'immagine tramite $h_t(p)$ dello spazio tangente a S^{k-1} in x , ovvero:

$$w(t, p, x) = \text{Span} \{ h'_t(p)(x), dh_t(p)(x)[T_x S^{k-1}] \}.$$

Per soddisfare le ipotesi del lemma 2.1.2 occorre prima dimostrare che w è omotopa a una costante.

2.1.3 LEMMA

La mappa w appena definita è omotopa a una costante.

Dimostrazione

Sia $\iota : \{o\} \times P \times S^{k-1} \rightarrow I \times P \times S^{k-1}$ l'inclusione e sia $w_o = w \circ \iota$. Poiché I è contrattile si ha che w è omotopa w_o . Tramite l'inclusione di $P \times S^{k-1}$ in $P \times D^k$ e grazie all'esistenza di \bar{h} , w_o si fattorizza nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc}
 P \times S^{k-1} & \xrightarrow{w_0} & \mathcal{G}_{k,n} \\
 & \searrow & \nearrow w' \\
 & P \times D^k &
 \end{array}$$

dove w' è la mappa che associa alla coppia $(p, (r, x))$ il k -piano generato da $\partial_r \bar{h}(p)(1, x)$ e dall'immagine tramite $\bar{h}(p)|_{\partial D^k}$ dello spazio tangente a S^{k-1} in x , ovvero:

$$w'(p, (r, x)) = \text{Span} \left\{ \partial_r \bar{h}(p)(1, x), d\bar{h}(p)|_{\partial D^k}(1, x) [T_x S^{k-1}] \right\}.$$

Dalla contraibilità di $P \times D^k$ si ha che w' è omotopa a una costante, dunque w_0 è omotopa a una costante e dunque anche w risulta esserlo. ■

Otteniamo finalmente una mappa $u : I \times P \times S^{k-1} \rightarrow S^{n-1}$, punto per punto ortogonale a w . Inoltre, poiché $w(t, p, x)$ è differenziabile in x , anche $u(t, p, x)$ risulta essere differenziabile in x .

Scegliamo ora $\delta > 0$ tale che per ogni $t, t_0 \in I$ con $|t - t_0| \leq \delta$ e per ogni $p \in P$, $x \in S^{k-1}$, $v \in U_x S^{k-1}$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(2.3) \quad \alpha_{t_0, t}(p)(x) < \pi,$$

$$(2.4) \quad \|h'_t(p)(x) - h'_{t_0}(p)(x)\| < \frac{\epsilon}{10} \min \{1, \|h'_s(q)(y)\| \mid s, q, y\},$$

$$(2.5) \quad \|\nabla_v h_t(p)(x) - \nabla_v h_{t_0}(p)(x)\| < \frac{\epsilon}{10},$$

$$(2.6) \quad \|h_t(p)(x) - h_{t_0}(p)(x)\| < \frac{\epsilon}{100 \max \{\|\nabla_w u(s, q, y)\| \mid s, q, y, w\}},$$

dove $\alpha_{t_0, t}(p)(x)$ denota l'angolo tra $h'_{t_0}(p)(x)$ e $h'_t(p)(x)$. Inoltre, poiché $\alpha_{t_0, t}(p)(x) = \alpha_t(p)(x)$, (2.3) garantisce la buona definizione di $Q_t(p)(x)$. Se il termine destro dell'ultima disuguaglianza non dovesse essere definito verrà omessa l'intera disuguaglianza. Poiché le funzioni che compaiono nelle disuguaglianze sono continue e poiché $I \times P \times S^{k-1}$ è compatto un tale δ esiste. Inoltre la disuguaglianza (2.4), per $t \leq \delta$, implica:

$$(2.7) \quad \|Q_t(p)(x) - Q_0(p)(x)\| < \frac{\epsilon}{10} \min \{1, \|h'_0(q)(y)\| \mid q, y\}.$$

Sia ora r_0 con $1/2 < r_0 < 1$ tale che per ogni $r \in [r_0, 1]$, $t \leq \delta$, $p \in P$, $v \in U_x S^{k-1}$ siano verificate le seguenti condizioni:

$$(2.8) \quad \left\| \frac{\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x)}{1 - r_0} \right\| < 2 \|\partial_r \bar{h}(p)(1, x)\|,$$

$$(2.9) \quad \|\partial_r \bar{h}(p)(r, x) - \partial_r \bar{h}(p)(1, x)\| < \frac{\epsilon}{10},$$

$$(2.10) \quad \|\nabla_v \bar{h}(p)(r, x) - \nabla_v \bar{h}(p)(1, x)\| < \frac{\epsilon}{10},$$

$$(2.11) \quad \|\nabla_v \bar{h}(p)(r, x) - \nabla_v \bar{h}(p)(1, x)\| < \frac{\epsilon}{10 \max \{\|\nabla_v Q_s(q)(y)\| \mid s, q, y, v\}}.$$

Anche qui, se il termine destro dell'ultima disuguaglianza non dovesse essere definito basterà omettere l'intera disuguaglianza. Con motivazioni analoghe a quelle usate per l'esistenza di δ si ottiene l'esistenza di un tale r_0 . Poniamo $r_1 = r_0 + (1/3)(1 - r_0)$.

Siano poi $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ delle funzioni reali differenziabili definite su I soddisfacenti le seguenti condizioni:

$$(2.12) \quad \alpha(r) = 0, \quad \text{per } 0 \leq r \leq r_1,$$

$$(2.13) \quad \alpha(1) = 1, \quad \alpha'(1) = 0,$$

$$(2.14) \quad |\alpha(r)| \leq 1, \quad |\alpha'(r)| < \frac{2}{(1 - r_0)},$$

$$(2.15) \quad \beta(r) = 0, \quad \text{per } 0 \leq r \leq r_0,$$

$$(2.16) \quad \beta(1) = \beta'(1) = 0,$$

$$(2.17) \quad \|\beta'(r)\| > 10 \|\alpha'(r)\|, \quad \text{per } r_1 \leq r \leq 1,$$

$$(2.18) \quad \|\beta(r)\| \leq 20.$$

Sia

$$M(t) = \max \{ \|h_t(p)(x) - h_0(p)(x)\| \mid p, x \}.$$

Abbiamo ora tutti gli ingredienti necessari per definire \bar{h}_t , per $t \leq \delta$. Prima di scrivere una formula esplicita torna utile fare un breve riepilogo.

Siamo partiti con una omotopia $h_t^0 : P \rightarrow B$ composta da un'immersione $h_t(p)$ della sfera e da un campo di vettori $h'_t(p)$ a essa trasversali. Abbiamo inoltre un sollevamento $\bar{h}(p)$ di $h_0(p)$. Dunque $h_0(p)$ è il bordo di una immersione di tutto il disco e $h'_0(p)$ ne è la derivata radiale. Vogliamo ora seguire l'omotopia $h_t^0(p)$ con delle immersioni dell'intero disco, in modo da soddisfare le condizioni al bordo dettate dalla proiezione π .

Per r vicino a 0 possiamo sfruttare $\bar{h}(p)$, ponendo $\bar{h}_t(p)(r, x) = \bar{h}(p)(r, x)$. Per r vicino a 1 sfruttiamo $Q_t(p)$ per soddisfare le condizioni sulla derivata radiale di $\bar{h}_t(p)$ e poniamo $\bar{h}_t(p)(1, x) = h_t(p)(x)$. Per far sì che $\bar{h}_t(p)$ sia sempre un'immersione sfruttiamo $u(t, p, x)$. Raccordiamo infine il tutto tramite le due funzioni $\alpha(r)$ e $\beta(r)$.

Esplicitamente, per $t \leq \delta$:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \bar{h}_t(p)(r, x) = & (e + \alpha(r)(Q_t(p)(x) - e)) [\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x)] \\ & + \alpha(r)(h_t(p)(x) - h_0(p)(x)) \\ & + \beta(r)M(t)u(t, p, x) + \bar{h}(p)(1, x). \end{aligned}$$

Le cui derivate sono:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \partial_r \bar{h}_t(p)(r, x) = & (e + \alpha(r)(Q_t(p)(x) - e)) [\partial_r \bar{h}(p)(r, x)] \\ & + (\alpha'(r)(Q_t(p)(x) - e)) [\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x)] \\ & + \alpha'(r)(h_t(p)(x) - h_0(p)(x)) + \beta'(r)M(t)u(t, p, x). \end{aligned}$$

Per $v \in T_x S^{k-1}$:

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad \nabla_v \bar{h}_t(p)(r, x) &= [\nabla_v \bar{h}(p)(r, x) - \nabla_v \bar{h}(p)(1, x)] \\
 &\quad + (\alpha(r)(Q_t(p)(x) - e)) [\nabla_v \bar{h}(p)(r, x) - \nabla_v \bar{h}(p)(1, x)] \\
 &\quad + (\alpha(r) \nabla_v Q_t(p)(x)) [\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x)] \\
 &\quad + \alpha(r) (\nabla_v h_t(p)(x) - \nabla h_o(p)(x)) \\
 &\quad + \beta(r) M(t) \nabla_v u(t, p, x) + \nabla_v \bar{h}(p)(1, x).
 \end{aligned}$$

Per concludere ci basta mostrare che:

$$(2.22) \quad \bar{h}_o(p) = \bar{h}(p),$$

$$(2.23) \quad \bar{h} \in \mathcal{C}([0, \delta] \times P \times D^k, \mathbb{R}^n),$$

$$(2.24) \quad \bar{h}_t(p)(1, x) = h_t(p)(x),$$

$$(2.25) \quad \partial_r \bar{h}_t(p)(1, x) = h'_t(p)(x),$$

$$(2.26) \quad \bar{h}_t(p) \in \mathcal{C}^\infty(D^k, \mathbb{R}^n),$$

$$(2.27) \quad \bar{h}_t(p) \in \text{Imm}(D^k, \mathbb{R}^n).$$

Infatti (2.22)-(2.27) implicano la tesi.

Osserviamo che (2.22)-(2.26) discendono direttamente dalla definizione (2.19) di \bar{h}_t .

Resta dunque da mostrare che $\bar{h}_t(p)$ sia un'immersione, ovvero che il suo differenziale, punto per punto, sia iniettivo. Basta dunque verificare che, per ogni $v \in T_{(r,x)} D^k$, $v \neq 0$ valga $\nabla_v \bar{h}_t(p)(r, x) = d(\bar{h}_t(p))(r, x)[v] \neq 0$.

Siano $t \in [0, \delta]$, $p \in P$, $r \in]0, 1]$, $x \in S^{k-1}$, $v \in T_{(r,x)} D^k$ fissati.³ Innanzitutto v può essere scritto come $v = v_r + v_x$, dove v_x è la proiezione di v su $T_x S^{k-1}$ e v_r è la proiezione di v su $(T_x S^{k-1})^\perp$. Si ha dunque:

$$(2.28) \quad \nabla_v \bar{h}_t(p)(r, x) = \rho_r \partial_r \bar{h}_t(p)(r, x) + \rho_x \nabla_w \bar{h}_t(p)(r, x)$$

dove w è v_x normalizzato e ρ_r, ρ_x sono scalari opportuni. Ciò che vogliamo mostrare è che $\rho_r \neq 0$ o $\rho_x \neq 0$.

2.1.4 LEMMA

Esiste un vettore $b' \in \mathbb{R}^n$, con $\|b'\| < \epsilon^4$ tale che

$$\nabla_w \bar{h}_t(p)(r, x) = \nabla_w \bar{h}(p)(1, x) + b'.$$

Dimostrazione

Da (2.14), (2.7) e (2.10) segue

$$\| (e + \alpha(r)(Q_t(p)(x) - e)) [\nabla_w \bar{h}(p)(r, x) - \nabla_w \bar{h}(p)(1, x)] \| < \frac{2\epsilon}{10}.$$

³Per r vicino a zero $\bar{h}_t(p)(r, x) = \bar{h}(p)(r, x)$, perciò la singolarità in $r = 0$ delle coordinate sferiche non comporta alcun problema.

⁴Si veda (2.1) per la definizione di ϵ .

Da (2.14) e (2.11)

$$\left\| \left(\alpha(r) \nabla_w Q_t(p)(x) \right) \left[\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x) \right] \right\| < \frac{\epsilon}{10}.$$

Da (2.14) e (2.5)

$$\left\| \alpha(r) \left(\nabla_w h_t(p)(x) - \nabla_w h_o(p)(x) \right) \right\| < \frac{\epsilon}{10},$$

e da (2.18) e (2.6)

$$\left\| \beta(t) M(t) \nabla_w u(t, p, x) \right\| < \frac{2\epsilon}{10}.$$

Allora, combinando queste quattro disuguaglianze con la (2.21) si ottiene la tesi. ■

2.1.5 LEMMA

Esistono $b, u, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta, \Delta' \in \mathbb{R}$, con $\|b\| < \epsilon$, $\Delta > 10\Delta'$, $\|\bar{u}\| = 1$ e $u = u(t, p, x)$ tali che

$$\partial_r \bar{h}_t(p)(r, x) = \partial_r \bar{h}(p)(1, x) + b + \Delta u + \Delta' \bar{u}.$$

Dimostrazione

Da (2.20) si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_r \bar{h}_t(p)(r, x) &= \partial_r \bar{h}(p)(1, x) - \left(\alpha(r) (Q_o(p)(x) - Q_t(p)(x)) \right) \left[\partial_r \bar{h}(p)(1, x) \right] \\ &\quad - \left(e + \alpha(r) (Q_t(p)(x) - e) \right) \left[\partial_r \bar{h}(p)(1, x) - \partial_r \bar{h}(p)(r, x) \right] \\ &\quad + \left(\alpha'(r) (Q_t(p)(x) - e) \right) \left[\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x) \right] \\ &\quad + \alpha'(r) M(t) \bar{u} + \beta'(r) M(t) u(t, p, x), \end{aligned}$$

dove \bar{u} è un vettore unitario. Allora da (2.14), (2.7) e (2.9) segue

$$\left\| \left(e + \alpha(r) (Q_t(p)(x) - e) \right) \left[\partial_r \bar{h}(p)(1, x) - \partial_r \bar{h}(p)(r, x) \right] \right\| < \frac{2\epsilon}{10}.$$

Da (2.14) e (2.7)

$$\left\| \left(\alpha(r) (Q_t(p)(x) - e) \right) \left[\partial_r \bar{h}(p)(1, x) \right] \right\| < \frac{\epsilon}{10},$$

e da (2.14), (2.8) e (2.7)

$$\left\| \left(\alpha'(r) (Q_t(p)(x) - e) \right) \left[\bar{h}(p)(r, x) - \bar{h}(p)(1, x) \right] \right\| < \frac{4\epsilon}{10}.$$

Combinando (2.17) con le disuguaglianze di sopra si ottiene la tesi. ■

2.1.6 LEMMA

Siano $a, b, u, \bar{u}, a', b' \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta, \Delta' \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} \|b\|, \|b'\| &< \frac{1}{10} \bar{\rho}(a, sa') \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ \|b'\| &< \frac{1}{10} a', \\ \|u\| = \|\bar{u}\| &= 1, \\ \Delta &> 10\Delta', \end{aligned}$$

e tali che u sia ortogonale sia ad a sia ad a' . Allora $a + b + \Delta u + \Delta' \bar{u}$ e $a' + b'$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Se il lemma fosse falso esisterebbe allora uno scalare λ tale che

$$\lambda (a + b + \Delta u + \Delta' \bar{u}) = a' + b'.$$

Il caso $\Delta = 0$ non offre alcuna difficoltà, perciò la precedente uguaglianza può essere riscritta:

$$(2.29) \quad \lambda \Delta \left(u + \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{u} \right) = a' + b' - \lambda(a + b).$$

Poiché $\left\| \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{u} \right\| < \frac{1}{10} \|u\|$, $u + \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{u}$ forma un angolo minore di 25° con u e dunque, poiché u è ortogonale ad a e ad a' , il termine sinistro di (2.29) forma un angolo maggiore di 65° con il piano $a-a'$. D'altro canto $a + b$ forma un angolo minore di 25° con a e $a' + b'$ forma un angolo minore di 25° con a' . Si ha così che il termine destro di (2.29) forma un angolo con il piano $a-a'$ minore di 50° . Essendo ciò assurdo, l'uguaglianza (2.29) risulta dunque essere falsa, ottenendo così la tesi. ■

Questi ultimi tre lemmi bastano per mostrare che $\bar{h}_t(p)$ sia effettivamente un'immersione. Infatti, grazie a (2.28) è sufficiente verificare che $\partial_r \bar{h}_t(p)(r, x)$ e $\nabla_w \bar{h}_t(p)(r, x)$ siano linearmente indipendenti. Quest'ultimo fatto segue, usando le notazioni dei lemmi appena visti e ponendo $a = \partial_r \bar{h}(p)(1, x)$ e $a' = \nabla_w \bar{h}_t(p)(1, x)$, dal lemma 2.1.6.

La costruzione appena fatta può essere ripetuta, nel caso $\delta < 1$, usando \bar{h}_δ al posto di \bar{h} . Si ottiene così, induttivamente, un'omotopia \bar{h}_t , definita su ogni $t \in I$, che solleva h_t° .

Siamo così giunti a dimostrare il teorema 2.1.1. ■

2.2 Una Equivalenza Omotopica Debole

Siano k e n degli interi, con $1 \leq k < n$. Sia $f_o \in E_{k,n} = \text{Imm}(D^k, \mathbb{R}^n)$ una fissata immersione del disco e sia $\Gamma = \Gamma_{k,n}(f_o)$ il sottospazio di $E_{k,n}$ costituito dalle immersioni f coincidenti con f_o sul bordo di D^k e tali che anche df coincida con df_o su S^{k-1} , ovvero:

$$\Gamma_{k,n}(f_o) = \{f \in E_{k,n} \mid f|_{S^{k-1}} = f_o|_{S^{k-1}}, df|_{S^{k-1}} = df_o|_{S^{k-1}}\}.$$

Siano ora $(x_1, \dots, x_k) = x$ le coordinate standard di \mathbb{R}^k e sia $R(x)$ la distanza di x dall'origine: $R(x) = \|x\|$. Tramite la proiezione stereografica di S^k rispetto al polo sud x_∞ , possiamo identificare \mathbb{R}^k con lo spazio $S^k \setminus \{x_\infty\}$ e possiamo quindi introdurvi delle coordinate $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) = \bar{x}$, indotte da (x_1, \dots, x_k) . Possiamo inoltre trasportare la funzione R su $S^k \setminus \{x_\infty\}$, inducendo una \bar{R} . È naturale quindi

identificare D^k con l'insieme costituito dagli \bar{x} tali che $\bar{R}(\bar{x}) \leq 1$. Da qui fino alla fine della sezione identificheremo x con \bar{x} , R con \bar{R} e \mathbb{R}^k con $S^k \setminus \{x_\infty\}$. Si hanno, in particolare, le seguenti inclusioni:

$$S^{k-1} \subseteq D^k \subseteq \mathbb{R}^k \subseteq S^k \subseteq D^{k+1}.$$

Sia $\bar{f}_o : D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$ la mappa così definita:

$$\bar{f}_o(x) = (\partial_{x_1} f_o(x), \dots, \partial_{x_k} f_o(x)) \quad \forall x \in D^k.$$

Definiamo poi $\Gamma' = \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o)$ come l'insieme, dotato della topologia compatta-aperta, delle funzioni da D^k in $\mathcal{S}_{k,n}$ coincidenti con \bar{f}_o sul bordo del disco, ovvero:

$$\Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o) = \left\{ \bar{f} : D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} \mid \bar{f}|_{S^{k-1}} = \bar{f}_o|_{S^{k-1}} \right\}.$$

Sia poi $\Phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, la mappa che a ogni $f \in \Gamma$ associa l'applicazione $\Phi(f) \in \Gamma'$, così definita:

$$\Phi(f)(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_k} f(x)) \quad \forall x \in D^k.$$

La mappa Φ è ben definita e continua.

Sia $g_o : D^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione standard di D^k in \mathbb{R}^n e sia f_o la sua restrizione a D^k , visto come sottoinsieme di S^k . Scopo di questa sezione è dimostrare il seguente risultato.

2.2.1 TEOREMA

La mappa $\Phi : \Gamma_{k,n}(f_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o)$ è una equivalenza omotopica debole.

La dimostrazione del teorema 2.2.1 si compone di vari pezzi, occorre dunque procedere per piccoli passi.

Siano

$$A = \left\{ (r, x) \in D^{k+1} \mid r \geq \frac{1}{2}, R(x) \geq 1 \text{ o } x = x_\infty \right\}$$

e

$$A' = \left\{ (r, x) \in D^{k+1} \mid x \neq x_\infty \right\}.$$

Definiamo $\bar{B} = \bar{B}_{k+1,n}(g_o)$ come il sottospazio di $B_{k+1,n}$ ⁵ costituito dalle coppie (g, g') tali che g ristretta a $S^k \cap A$ coincida con g_o e g' ristretta a $S^k \cap A$ coincida con $\partial_r g_o$, ovvero:

$$\bar{B}_{k+1,n} = \left\{ (g, g') \in B_{k+1,n} \mid g|_{S^k \cap A} = g_o|_{S^k \cap A}, g'|_{S^k \cap A} = \partial_r g_o|_{S^k \cap A} \right\}.$$

Sia ora $\bar{g}_o : A' \rightarrow \mathcal{S}_{k+1,n}$ la mappa così definita:

$$\bar{g}_o(y) = (\partial_{x_1} g_o(y), \dots, \partial_{x_k} g_o(y), \partial_r g_o(y)) \quad \forall y \in A',$$

⁵Ricordiamo che $B_{k+1,n} = \{(g, g') \mid g \in \text{Imm}(S^k, \mathbb{R}^n), g' \in \mathcal{C}^\infty(S^k, \mathbb{R}^n), g'(x) \notin dg(x)[T_x S^k]\}$.

sia $B' = B'_{k+1,n}(\overline{g_0})$ l'insieme, dotato della topologia compatta-aperta, delle mappe da $S^k \cap A'$ in $\mathcal{S}_{k+1,n}$ coincidenti con $\overline{g_0}$ su $S^k \cap A' \cap A$, ovvero:

$$B'_{k+1,n}(\overline{g_0}) = \left\{ \overline{g} : S^k \cap A' \rightarrow \mathcal{S}_{k+1,n} \mid \overline{g}|_{S^k \cap A' \cap A} = \overline{g_0}|_{S^k \cap A' \cap A} \right\}.$$

Sia infine $\Psi : \overline{B} \rightarrow B'$ la mappa così definita:

$$\Psi(g, g')(x) = (\partial_{x_1} g(x), \dots, \partial_{x_k} g(x), g'(x)) \quad \forall x \in S^k \cap A',$$

la quale risulta essere ben definita e continua. Vogliamo ora mostrare il seguente teorema:

2.2.2 TEOREMA

Se $\Phi : \Gamma_{k,n}(f_0) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\overline{f_0})$ è una equivalenza omotopica debole allora anche $\Psi : \overline{B}_{k+1,n}(g_0) \rightarrow B'_{k+1,n}(\overline{g_0})$ è una equivalenza omotopica debole.

A prima vista l'enunciato del teorema 2.2.2 può apparire 'bizzarro'. In effetti non lo è: la dimostrazione che intendiamo dare del teorema 2.2.1 sfrutta il principio di induzione, il teorema 2.2.2 rappresenta un tassello del passo induttivo.

Dimostrazione (del Teorema 2.2.2)

Sia $\Gamma^* = \Gamma_{k,n}^*(f_0)$ il sottospazio di $\Gamma_{k,n}(f_0)$ così definito:

$$\Gamma_{k,n}^*(f_0) = \{ f \in \Gamma \mid \forall m \geq 0 \quad d^m f|_{S^{k-1}} = d^m f_0|_{S^{k-1}} \}.$$

Premettiamo un lemma.

2.2.3 LEMMA

La mappa $i_* : \Gamma^* \rightarrow \Gamma$, indotta dall'inclusione di Γ^* in Γ , è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione

Per definizione ogni elemento $f \in \Gamma$ è tale che $f(x) = f_0(x)$ e $df(x) = df_0(x)$, per ogni $x \in S^{k-1}$. Esistono allora, per ogni $x \in S^{k-1}$, un intorno U_x di x tale che la combinazione convessa $tf_0 + (1-t)f$ abbia differenziale iniettivo su U_x . Per compattezza di S^{k-1} esiste allora un $\epsilon > 0$ tale che $tf_0 + (1-t)f$ abbia differenziale iniettivo su S_ϵ , dove

$$S_\epsilon = \{ x \in D^k \mid 1 - \epsilon < \|x\| \leq 1 \}.$$

Sia ora $K \subseteq \Gamma$ un sottoinsieme compatto di Γ . Per ogni $f \in K$ si ha un ϵ_f del tipo descritto sopra. Grazie però alla compattezza di K troviamo un ϵ che soddisfi le richieste volute per ogni $f \in K$. A questo punto, tramite una combinazione convessa e usando una funzione \mathcal{C}^∞ di raccordo, possiamo deformare contemporaneamente ogni $f \in K$ in modo da farle coincidere con f_0 su un intero intorno di S^{k-1} . Grazie al lemma 1.1.4 si ha dunque la tesi. ■

Definiamo due mappe. La prima, $p : \overline{B} \rightarrow \Gamma^*$, associa a una coppia $(g, g') \in \overline{B}$ la restrizione di g al disco D^k :

$$p(g, g')(x) = g(x) \quad \forall x \in D^k,$$

la seconda, $p' : B' \rightarrow \Gamma'$, associa a un elemento di B' $f(x) = (f_1(x), \dots, f_{k+1}(x))$ la restrizione delle prime k componenti al disco D^k :

$$p'(f)(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad \forall x \in D^k.$$

È semplice verificare che p e p' sono ben definite e continue e che il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} & \xrightarrow{\Psi} & B' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ \Gamma^* & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma' \end{array}$$

Vogliamo intanto mostrare che:

- (1) La terna (\bar{B}, p, Γ^*) è una fibrazione di Serre,
- (2) La terna (B', p', Γ') è una fibrazione di Serre,
- (3) La mappa Ψ induce un omeomorfismo tra fibre corrispondenti.

Dimostrazione (di (1) e (2))

Siano P un cubo e $h_t : P \rightarrow \Gamma^*$ un'omotopia e sia $\bar{h}^o : P \rightarrow \bar{B}$, con $\bar{h}^o = (\bar{h}, \bar{h}')$, un sollevamento di h_o . Osserviamo intanto che $\mathcal{S}_{k+1,n} \xrightarrow{q} \mathcal{S}_{k,n}$, dove q è la mappa che a ogni $(k+1)$ -frame x_o associa il k -frame costituito dalle prime k componenti di x_o , è un fibrato. Sia inoltre $\pi : \mathcal{S}_{k+1,n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la mappa che ad ogni $(k+1)$ -frame associa la sua ultima componente.

Sia $h_t^* : P \times D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$ la mappa così definita:

$$h_t^*(p, x) = (\partial_{x_1} h_t(p)(x), \dots, \partial_{x_k} h_t(p)(x)),$$

sia poi $\bar{h}^* : P \times D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k+1,n}$ definita come:

$$\bar{h}^*(p, x) = (\partial_{x_1} \bar{h}(p)(x), \dots, \partial_{x_k} \bar{h}(p)(x), \bar{h}'(p)(x)).$$

Poiché $(\mathcal{S}_{k+1,n}, q, \mathcal{S}_{k,n})$ è una fibrazione di Serre e poiché $q\bar{h}^* = h_o^*$ otteniamo l'esistenza di una \bar{h}_t^* , sollevamento dell'intera omotopia h_t^* .

Definiamo dunque l'omotopia $\bar{h}_t = (\bar{h}_t, \bar{h}_t')$, che solleva h_t , come segue:

$$\begin{aligned} \bar{h}_t(p)(x) &= \bar{h}(p)(x) & \forall x \in D^k, \\ \bar{h}_t(p)(x) &= g_o(1, x) & \forall x \in S^k \cap A, \\ \bar{h}_t'(p)(x) &= \pi \bar{h}_t^*(p, x) & \forall x \in D^k, \\ \bar{h}_t'(p)(x) &= \partial_r g_o(1, x) & \forall x \in S^k \cap A. \end{aligned}$$

La dimostrazione di (2) è analoga. ■

Dimostrazione (di (3))

Direttamente dalle definizioni è possibile dedurre che Ψ induce un omeomorfismo tra fibre corrispondenti. ■

Usiamo ora (1)–(3) per completare la dimostrazione del teorema 2.2.2. Consideriamo le successioni esatte lunghe di omotopia delle fibrazioni di Serre appena viste, osserviamo in particolare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_{j+1}(\Gamma^*, f_o) & \rightarrow & \pi_j(F, g^o) & \rightarrow & \pi_j(\bar{B}, g^o) & \rightarrow & \pi_j(\Gamma^*, f_o) & \rightarrow & \pi_{j-1}(F, g^o) \\
 \downarrow \bar{\Phi}_* & & \downarrow \bar{\Psi}_* & & \downarrow \Psi_* & & \downarrow \bar{\Phi}_* & & \downarrow \bar{\Psi}_* \\
 \pi_{j+1}(\Gamma', \bar{f}_o) & \rightarrow & \pi_j(F', \bar{g}_o) & \rightarrow & \pi_j(B', \bar{g}_o) & \rightarrow & \pi_j(\Gamma', \bar{f}_o) & \rightarrow & \pi_{j-1}(F', \bar{g}_o)
 \end{array}$$

Dove $F = p^{-1}(f_o)$, $F' = (p')^{-1}(\Phi(f_o))$, $\bar{\Psi} = \Psi|_F$, $\bar{\Phi} = \Phi|_{\Gamma^*}$ e $g^o \in \bar{B}$ è la mappa così definita:⁶

$$g^o(x) = (g_o(x), \partial_r g_o(x)) \quad \forall x \in S^k.$$

Usando le ipotesi e il lemma 2.2.3 si ha che $\bar{\Phi}_*$ è un isomorfismo, per (3) si ha che $\bar{\Psi}_*$ è un isomorfismo e dunque, per il lemma dei cinque si ha la tesi. ■

Scendiamo ora di una dimensione. Sia $g_o : D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione standard di D^k in \mathbb{R}^n e sia invece f_o definita come prima. Vale allora:

2.2.4 LEMMA

Se $\Phi : \Gamma_{k,n}(g_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{g}_o)$ è una equivalenza omotopica debole allora anche $\Phi : \Gamma_{k,n}(f_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o)$ è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione

Indichiamo con D^k il disco e con \tilde{D}^k l'emisfero superiore di S^k . Sia $\varphi : \tilde{D}^k \rightarrow D^k$ la restrizione della proiezione stereografica. Consideriamo le mappe $p : \Gamma(g_o) \rightarrow \Gamma(f_o)$ e $p' : \Gamma(\bar{g}_o) \rightarrow \Gamma(\bar{f}_o)$ così definite: $p(f) = f \circ \varphi$ e $p(\bar{f}) = \bar{f} \circ \varphi$. Per ogni $j \geq 0$ si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_j(\Gamma(g_o), g_o) & \xrightarrow{\Phi_*} & \pi_j(\Gamma'(\bar{g}_o), \bar{g}_o) \\
 \downarrow p_* & & \downarrow p'_* \\
 \pi_j(\Gamma(f_o), f_o) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_*} & \pi_j(\Gamma(\bar{f}_o), \bar{f}_o)
 \end{array}$$

dove Φ_* è un isomorfismo per ipotesi ed è facile controllare che anche p_* e p'_* lo sono. ■

⁶Con un piccolo abuso di notazioni abbiamo indicato con \bar{g}_o la sua restrizione a $S^k \cap A'$ e con g_o la sua restrizione a S^k .

L'ultimo ingrediente che serve per completare il passo induttivo è il seguente.

2.2.5 TEOREMA

Se $\Psi : \bar{B}_{k,n}(g_o) \rightarrow B'_{k,n}(\bar{g}_o)$ è una equivalenza omotopica debole allora anche $\Phi : \Gamma_{k,n}(g_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{g}_o)$ è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione

Prima di procedere con la dimostrazione introduciamo una notazione.

2.2.6 DEFINIZIONE

Data una varietà differenziabile M indichiamo con $F_p(M)$ il fibrato dei suoi p -frames e denotiamo con q la proiezione del fibrato $F_p(M) \xrightarrow{q} M$. Sia N una seconda varietà e sia $f : M \rightarrow N$ una immersione della prima varietà nella seconda. L'immersione f induce allora una mappa $f_{\#} : F_p(M) \rightarrow F_p(N)$, che manda i p -frames di M nei p -frames di N tramite il differenziale di f , df .

Sia x_o un $(k-1)$ -frame di S^{k-1} con $q(x_o) = x_{\infty}$, allora $y_o = g_o_{\#}(x_o)$ è un $(k-1)$ -frame⁷ di \mathbb{R}^n con $q(y_o) = g_o(x_{\infty})$ e $\bar{y}_o = \partial_r g_o(x_{\infty})$ è un vettore a esso trasversale. Sia dunque $B_o = (B_o)_{k,n}$ il sottospazio di $B = B_{k,n}$ siffatto:

$$B_o = \{(f, f') \in B \mid f_{\#}(x_o) = y_o, f'(x_{\infty}) = \bar{y}_o\}.$$

Notiamo che $\bar{B} \subseteq B_o$. Sia poi $E_o = (E_o)_{k,n} = \pi^{-1}(B_o) \subseteq E = E_{k,n}$ (dove (E, π, B) è la fibrazione di Serre studiata nella sezione precedente), dotato della topologia di sottospazio di E . Allora per 2.1.1 e 1.2.6 si ha che:

- (1) La terna (E_o, π, B_o) è una fibrazione di Serre.

Sia poi $\bar{E} = \bar{E}_{k,n}$ il sottospazio di E_o così definito:

$$\bar{E} = \{f \in E_o \mid f|_A = g_o|_A\}$$

e sia $\bar{\pi} : \bar{E} \rightarrow \bar{B}$ la restrizione di π a \bar{E} . Sia $F = \bar{\pi}^{-1}\bar{\pi}(g_o)$. Vogliamo dimostrare che

- (2) Per ogni j , $\bar{\pi}_* : \pi_j(\bar{E}, F, g_o) \rightarrow \pi_j(\bar{B}, g^o)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione (di (2))

Consideriamo innanzitutto il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \xrightarrow{i} & E_o \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi \\ \bar{B} & \xrightarrow{i'} & B_o \end{array}$$

⁷Nel caso specifico di \mathbb{R}^n adottiamo una terminologia lievemente ambigua: per p -frame di \mathbb{R}^n intenderemo sia un elemento di $F_p(\mathbb{R}^n)$ sia un punto di $\mathcal{S}_{p,n}$. Di volta in volta risulterà chiaro dal contesto cosa intenderemo.

dove i e i' sono inclusioni. Per mostrare (2) basta provare che:

- (3) La mappa $i_* : \pi_j(\bar{E}, F, g_o) \rightarrow \pi_j(E_o, F, g_o)$ è un isomorfismo,
- (4) La mappa $\pi_* : \pi_j(E_o, F, g_o) \rightarrow \pi_j(B_o, g^o)$ è un isomorfismo,
- (5) La mappa $i'_* : \pi_j(\bar{B}, g^o) \rightarrow \pi_j(B_o, g^o)$ è un isomorfismo.

La (4) segue immediatamente da (1). Mostriamo ora le altre due.

Dimostrazione (di (3))

Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \pi_j(F, g_o) & \longrightarrow & \pi_j(\bar{E}, g_o) & \longrightarrow & \pi_j(\bar{E}, F, g_o) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(F, g_o) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(\bar{E}, g_o) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_* & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_j(F, g_o) & \longrightarrow & \pi_j(E_o, g_o) & \longrightarrow & \pi_j(E_o, F, g_o) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(F, g_o) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(E_o, g_o)
 \end{array}$$

le cui righe sono esatte. Grazie al lemma dei cinque, ci basta mostrare che per ogni j valga: $\pi_j(\bar{E}, g_o) = \pi_j(E_o, g_o) = \{o\}$.

Sia dunque $\gamma : S^j \rightarrow \bar{E}$ una data applicazione: mostriamo che essa è omotopicamente nulla. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un retratto differenziabile forte di deformazione N_ϵ del disco D^k , tramite una retrazione H_t , tale che N_ϵ sia diffeomorfo a D^k , N_ϵ contenga A e tale che la distanza di ogni punto $y \in N_\epsilon$ da A sia minore di ϵ : $d(y, A) < \epsilon$. Per un tale ϵ troviamo dunque un'omotopia γ_t di γ definita come:

$$\gamma_t(p)(y) = \gamma(p)(H_t(y)) \quad \forall t \in I, p \in S^j, y \in D^k.$$

Si ha poi una seconda omotopia h_t definita tramite combinazione convessa di γ_1 e g_o :

$$h_t(p)(y) = (1-t)\gamma_1(y) + tg_o(y) \quad \epsilon t \in I, p \in S^j, y \in D^k.$$

Per verificare la buona definizione di una tale omotopia basta osservare che, grazie alla compattezza di A e di S^j , può effettivamente essere scelto un ϵ in modo tale che la mappa $h_t(p)$ sia regolare per ogni $p \in S^j$. Componendo le due omotopie si ottiene che $\pi_j(\bar{E}, g_o) = \{o\}$ per ogni j .

Procedendo in maniera simile si mostra che anche $\pi_j(E_o, g_o) = \{o\}$ per ogni j . ■

Dimostrazione (di (5))

Mostriamo intanto che ogni compatto K di B_o si retrae per deformazione su $K \cap \bar{B}$. Sia K un sottoinsieme compatto di B_o . Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nella dimostrazione del lemma 2.2.3 si mostra che K può essere deformato in modo tale che i suoi elementi coincidano con g^o in un intorno di x_∞ . Tramite un diffeomorfismo dello spazio \mathbb{R}^n e una riparametrizzazione del disco D^k si può deformare nuovamente K , ottenendo così la retrazione cercata. Grazie al lemma 1.1.4 si ha la tesi. ■

Abbiamo così dimostrato (2). ■

Ricordiamo preliminarmente che, nel contesto in cui ci siamo posti a partire dal lemma 2.2.4, la mappa $\overline{g}_0 : A' \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$ è così definita:

$$\overline{g}_0(r, x) = (\partial_{x_1} g_0(r, x), \dots, \partial_{x_{k-1}} g_0(r, x), \partial_r g_0(r, x)) \quad \forall (r, x) \in A'.$$

Sia $E'_{k,n}(\overline{g}_0) = E'$ lo spazio, dotato della topologia compatta-aperta, delle funzioni di A' in $\mathcal{S}_{k,n}$ che coincidano con \overline{g}_0 su $A' \cap A$:

$$E'_{k,n} = \left\{ \overline{g} : A' \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} \mid \overline{g}|_{A' \cap A} = \overline{g}_0|_{A' \cap A} \right\}.$$

Sia $B'_{k,n}(\overline{g}_0) = B'$ lo spazio, munito della topologia compatta-aperta, delle applicazioni di $S^{k-1} \cap A'$ in $\mathcal{S}_{k,n}$ coincidenti con \overline{g}_0 su $S^{k-1} \cap A' \cap A$:

$$B'_{k,n}(\overline{g}_0) = \left\{ \overline{g} : S^{k-1} \cap A' \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} \mid \overline{g}|_{S^{k-1} \cap A' \cap A} = \overline{g}_0|_{S^{k-1} \cap A' \cap A} \right\}.$$

Sia poi $\pi' : E' \rightarrow B'$ la mappa definita per restrizione a $S^k \cap A'$:

$$\pi'(\overline{g})(x) = \overline{g}(1, x) \quad \forall \overline{g} \in E', x \in S^k \cap A'.$$

Sia infine $F'_{k,n}(\overline{g}_0) = F' = (\pi')^{-1}\pi'(\overline{g}_0)$.

Vogliamo mostrare che:

(3) La terna (E', π', B') è una fibrazione di Serre.

Dimostrazione (di (3))

Sia P un cubo e sia $h_t : P \in B'$ un'omotopia e sia $\overline{h} : P \in E'$ un sollevamento di h_0 .

Un sollevamento \overline{h}_t dell'intera omotopia è definito come segue:

$$\begin{aligned} \overline{h}_t(p)(r, x) &= \overline{h}(p)(r, x) & 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ \overline{h}_t(p)(r, x) &= \overline{h}(p)\left(\frac{r + \tau - 1}{2\tau - 1}, x\right) & \frac{1}{2} \leq r \leq \tau \\ \overline{h}_t(p)(r, x) &= h_\lambda(p)(x) & \tau \leq r \leq 1, \tau \neq 1 \\ \text{dove} \quad \tau &= \tau(t, x) = \frac{2 + t(1 + \|x\|)}{2(1 + t)} \\ \text{e} \quad \lambda &= \lambda(t, x, r) = \frac{t(\tau - 1)}{\tau - 1} & \tau \neq 1. \end{aligned}$$

Controllando che \overline{h}_t sia un sollevamento di h_t si ottiene la tesi. ■

Mostriamo ora che:

(4) Lo spazio E' è contrattile.

Dimostrazione (di (4))

Lo spazio A è un retratto forte di deformazione del disco D^k , tramite una retrazione $H_t : D^k \rightarrow D^k$. Per provare la contraibilità di E' consideriamo la retrazione $\eta_t : E' \rightarrow E'$ così definita:

$$\eta_t(\bar{g}) = \bar{g} \circ H_t \quad \forall \bar{g} \in E'.$$

È immediato verificare che η_t fornisce una retrazione di E' su un suo punto, più precisamente su $g_0 \circ H_1$. ■

Definiamo la mappa $\varphi : \bar{E} \rightarrow E'$ come segue:

$$\varphi(g)(r, x) = (\partial_{x_1} g(r, x), \dots, \partial_{x_{k-1}} g(r, x), \partial_r g(r, x)) \quad \forall g \in \bar{E}, (r, x) \in A'.$$

Allora il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\Psi} & B' \end{array}$$

Sia $\bar{\varphi} : F \rightarrow F'$ la restrizione di φ .

Dimostriamo ora che:

- (5) La mappa $\bar{\varphi}_* : \pi_{j-1}(F, g_0) \rightarrow \pi_{j-1}(F', \bar{g}_0)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione (di (5))

Osservando che (per quanto già visto) $\pi_j(\bar{E}) = \pi_j(E') = \{o\}$, consideriamo il seguente diagramma commutativo.⁸

$$\begin{array}{ccccc} & & & o & \\ & & & \nearrow & \\ & & \pi_{j-1}(F) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_*} & \pi_{j-1}(F') & \nearrow o \\ & \nearrow \partial & & & \nearrow \partial' & \\ \pi_j(\bar{E}, F) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_{j-1}(E', F') & & \\ \nearrow o & & \nearrow o & & \\ \downarrow \bar{\pi}_* & & \downarrow \pi'_* & & \\ \pi_j(\bar{B}) & \xrightarrow{\Psi_*} & \pi_j(B') & & \end{array}$$

⁸Per snellire il diagramma abbiamo ommesso i punti base.

In obliquo sono state scritte le successioni esatte delle triple (\bar{E}, F, g_o) e (E', F', \bar{g}_o) . Poiché Ψ_* è un isomorfismo per ipotesi, poiché sappiamo che $\bar{\pi}_*$ e π'_* sono isomorfismi per quanto mostrato sopra e notando che sia ∂ sia ∂' sono isomorfismi si ha la tesi. ■

Per concludere dimostriamo che:

- (6) Esistono due mappe $\alpha_1 : F \rightarrow \Gamma$ e $\alpha_2 : F' \rightarrow \Gamma'$ che siano delle equivalenze omotopiche deboli e tali che il diagramma che segue commuti.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha_1} & \Gamma \\ \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \Phi \\ F' & \xrightarrow{\alpha_2} & \Gamma' \end{array}$$

Dimostrazione

Sia $\alpha : N \rightarrow D^k$ un diffeomorfismo di un intorno chiuso piccolo di $D^k \setminus \overset{\circ}{A}$ in D^k che mandi le coordinate (r, x_1, \dots, x_{k-1}) introdotte all'inizio di questa sezione (adesso in una dimensione meno) nelle coordinate standard di D^k . Per N e α opportuni vengono indotte le equivalenze omotopiche deboli α_1 e α_2 cercate. ■

La tesi discende infine percorrendo il diagramma commutativo che segue, tenendo presente i fatti (1)–(6).

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_j(\bar{B}, g^o) & \xleftarrow{\bar{\pi}_*} & \pi_j(\bar{E}, F, g_o) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{j-1}(F, g_o) & \xrightarrow{\alpha_{1*}} & \pi_{j-1}(\Gamma, g_o) \\ \downarrow \Psi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \bar{\varphi}_* & & \downarrow \Phi_* \\ \pi_j(B', \bar{g}_o) & \xleftarrow{\pi'_*} & \pi_j(E', F', \bar{g}_o) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_{j-1}(F', \bar{g}_o) & \xrightarrow{\alpha_{2*}} & \pi_{j-1}(\Gamma', \bar{g}_o) \end{array}$$

Possediamo ora tutti gli strumenti per concludere.

Dimostrazione (del teorema 2.2.1)

La tesi consiste nel mostrare che l'applicazione $\Phi : \Gamma_{k,n}(f_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o)$ è una equivalenza omotopica debole. Procediamo per induzione su k .

Sia $k = 1$. È immediato verificare che $\Psi : \bar{B}_{1,n}(g_o) \rightarrow B'_{1,n}(\bar{g}_o)$ è una equivalenza omotopica debole. Dal teorema 2.2.5 segue che anche $\Phi : \Gamma_{1,n}(f_o) \rightarrow \Gamma'_{1,n}(\bar{f}_o)$ è una equivalenza omotopica debole e concludiamo sfruttando il lemma 2.2.4.

Mostriamo il passo induttivo. Per ipotesi $\Phi : \Gamma_{k,n}(f_o) \rightarrow \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_o)$ è una equivalenza omotopica debole. Usando in successione il teorema 2.2.2, il teorema 2.2.5 e il lemma 2.2.4 si ha la tesi. ■

Costruzione di un Invariante

He wants us to move the Island.

Locke, 4-11

Forti del lavoro svolto nei precedenti due capitoli, siamo ora in grado di classificare le immersioni delle sfere negli spazi euclidei, modulo un particolare tipo di omotopia che ci apprestiamo a definire.

3.1 L'Invariante Ω

Premettiamo alcune definizioni. Sia $f : M \rightarrow N$ una immersione di una varietà differenziabile in un'altra. Usando le notazioni introdotte nel capitolo precedente, sia $f_{\sharp} : F_k(M) \rightarrow F_k(N)$ la mappa tra i fibrati dei k -frames di M e N indotta da f . Siano ora $x_o \in F_k(M)$ e $y_o \in F_k(N)$ due k -frames rispettivamente di M e N . Definiamo una *immersione puntata* (rispetto a x_o e y_o) di M in N come una immersione $f : M \rightarrow N$ di M in N tale che $f_{\sharp}(x_o) = y_o$. Diciamo inoltre che una data omotopia $f_t : M \rightarrow N$ tra due immersioni f_o e f_1 è una *omotopia regolare* se ad ogni istante la mappa f_t risulta essere un'immersione e se la mappa indotta sui fibrati tangenti a M e N da f_t risulta essere continua. Infine chiamiamo *omotopia regolare puntata* un'omotopia regolare tra due immersioni puntate che a ogni istante sia un'immersione puntata.

Siano ora k e n due interi fissati, con $1 \leq k < n$. Fissiamo inoltre un k -frame x_o di S^k con $q(x_o) = x_{\infty}$, dove q è la proiezione del fibrato $F_k(S^k) \xrightarrow{q} S^k$ e x_{∞} è il polo sud di S^k . Sia $g_o : S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione standard di S^k in \mathbb{R}^n e sia $y_o = g_{o\sharp}(x_o)$. Denotiamo con Λ lo spazio delle immersioni di S^k in \mathbb{R}^n puntate rispetto a x_o e y_o dotato della topologia \mathcal{C}^1 :

$$\Lambda = \{f \in \text{Imm}(S^k, \mathbb{R}^n) \mid f_{\sharp}(x_o) = y_o\}.$$

Sia poi Γ_o il sottospazio di Λ così definito:

$$\Gamma_o = \{f \in \text{Imm}(S^k, \mathbb{R}^n) \mid f|_J = g_o|_J\},$$

dove J è l'emisfero sud di S^k . Vale allora:

3.1.1 TEOREMA

L'inclusione $\iota : \Gamma_0 \rightarrow \Lambda$ è una equivalenza omotopica debole.

La cui dimostrazione ricalca quanto fatto per mostrare (5) a pagina 26.

Tenendo presente l'identificazione tra D^k e l'emisfero nord di S^k , ricordiamo la definizione degli spazi Γ^* e Γ' descritti nel capitolo precedente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,n}^*(f_0) &= \{f \in \text{Imm}(D^k, \mathbb{R}^n) \mid f|_{S^{k-1}} = f_0|_{S^{k-1}}\}, \\ \Gamma'_{k,n}(\bar{f}_0) &= \{\bar{f} : D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} \mid \bar{f}|_{S^{k-1}} = \bar{f}_0|_{S^{k-1}}\},\end{aligned}$$

dove f_0 è la restrizione di g_0 a D^k e $\bar{f}_0(x) = (\partial_{x_1} f_0(x), \dots, \partial_{x_k} f_0(x))$, per ogni $x \in D^k$. È immediato verificare che gli spazi Γ_0 e Γ^* siano omeomorfi. Grazie a quanto visto finora, in particolare grazie al lemma 2.2.3, al teorema 2.2.1 e al teorema 3.1.1, sia ha che esiste una corrispondenza biunivoca tra $\pi_0(\Gamma', \bar{f}_0)$ (le componenti connesse per archi di Γ') e $\pi_0(\Lambda, g_0)$ (le classi di omotopia regolare puntata delle immersioni di S^k in \mathbb{R}^n). Vogliamo ora mostrare il seguente teorema.

3.1.2 TEOREMA

Esiste una bigezione Ξ tra $\pi_0(\Gamma', \bar{f}_0)$ e $\pi_k(\mathcal{S}_{k,n}, \star)$.

Dimostrazione

Data una mappa $\bar{g} : D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$ costruiamo una mappa $\bar{g}^* : J \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$, tale che $\bar{g}^*|_{S^{k-1}} = \bar{f}|_{S^{k-1}}$, riflettendo \bar{g} :

$$\bar{g}^*(y_1, \dots, y_{k+1}) = \bar{g}(y_1, \dots, y_k, -y_{k+1}),$$

dove (y_1, \dots, y_{k+1}) sono le coordinate su S^k indotte da \mathbb{R}^{k+1} . Data $\bar{f} \in \Gamma'$, definiamo $\Xi(\bar{f})$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Xi(\bar{f})(x) &= \bar{f}(x) & \forall x \in D^k, \\ \Xi(\bar{f})(x) &= \bar{f}_0^*(x) & \forall x \in J.\end{aligned}$$

Tale Ξ induce una mappa (che indichiamo con lo stesso simbolo) $\Xi : \pi_0(\Gamma', \bar{f}_0) \rightarrow \pi_k(\mathcal{S}_{k,n}, \star)$. È facile verificare che quest'ultima mappa sia ben definita. Per verificarne la biunivocità usiamo il seguente fatto: lo spazio delle funzioni da S^k in $\mathcal{S}_{k,n}$ coincidenti con \bar{f}_0 in x_∞ si retrae per deformazione sul sottospazio delle funzioni coincidenti con \bar{f}_0 su l'intero emisfero J . ■

Costruiamo ora l'invariante Ω . A meno di omotopia regolare puntata possiamo supporre, per quanto visto, che tutte le immersioni di S^k in \mathbb{R}^n coincidano con g_0 sull'emisfero sud di S^k . Data un'immersione f di S^k in \mathbb{R}^n si costruisce una mappa $\bar{f} : D^k \rightarrow \mathcal{S}_{k,n}$ nel seguente modo:

$$\bar{f}(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_k} f(x)) \quad \forall x \in D^k.$$

Siano ora f e g due immersioni di S^k in \mathbb{R}^n : $\Omega(f, g) \in \pi_k(\mathcal{S}, \star)$ è definito come:

$$\begin{aligned}\Omega(f, g)(x) &= \bar{f}(x) & \forall x \in D^k, \\ \Omega(f, g)(x) &= \bar{g}^*(x) & \forall x \in J.\end{aligned}$$

In pratica Ω associa a una coppia di immersioni f e g la mappa $\Omega(f, g)$ che è \bar{f} sull'emisfero nord e la riflessione di \bar{g} sull'emisfero sud. Siamo ora pronti per mostrare il teorema citato nell'introduzione.

3.1.3 TEOREMA

Se f e g sono immersioni puntate di S^k in \mathbb{R}^n allora esse sono regolarmente omotope come immersioni puntate se e solo se $\Omega(f, g) = 0$. Inoltre, dato $\Omega_0 \in \pi_k(\mathcal{S}_{k,n})$ e data una immersione g di S^k in \mathbb{R}^n esiste una immersione f di S^k in \mathbb{R}^n tale che $\Omega(f, g) = \Omega_0$. Si ha dunque una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\pi_k(\mathcal{S}_{k,n})$ e le classi di omotopia regolare puntata delle immersioni di S^k in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione

Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\pi_0(\Lambda, g_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_0(\Gamma_0, g_0) = \pi_0(\Gamma^*, f_0) \\ & \searrow \Omega(-, g_0) & \downarrow \Phi_* \\ & & \pi_k(\mathcal{S}_{k,n}, \star) \longleftarrow \pi_0(\Gamma', \bar{f}_0)\end{array}$$

Dunque, grazie al teorema 3.1.2, si ha immediatamente che Ω induce una bigezione tra le classi di omotopia regolare puntata di immersioni di S^k in \mathbb{R}^n . Ciò basta anche per avere la prima parte della tesi, che corrisponde a un semplice cambiamento opportuno dei punti base degli spazi considerati. ■

Grazie a quest'ultimo risultato siamo ora in grado di classificare completamente le immersioni delle sfere negli spazi euclidei, almeno in termini di gruppi di omotopia di varietà di Stiefel.

3.2 L'Eversione della Sfera

Prima di giungere al nostro tema centrale, risulta utile osservare un fatto preliminare. Poniamoci nel caso che intendiamo studiare, ovvero il caso delle immersioni di S^2 in \mathbb{R}^3 . Dati un 2-frame x_0 di S^2 e un 2-frame y_0 di \mathbb{R}^3 e data una immersione g di S^2 in \mathbb{R}^3 esiste sempre un'omotopia regolare g_t , con $g_0 = g$, che porti g in una immersione g_1 puntata rispetto a x_0 e y_0 .

Siamo finalmente in grado di poter affrontare la domanda posta nell'introduzione:

È possibile rivoltare la sfera?

La risposta è adesso immediata, in quanto corrisponde allo studio di $\pi_2(\mathcal{S}_{2,3})$.

3.2.1 PROPOSIZIONE

Lo spazio $\mathcal{S}_{2,3}$ ha la stessa omotopia dello spazio proiettivo reale \mathbb{P}^3 .

Dimostrazione

Innanzitutto osserviamo che in generale, tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt, si ha che la varietà $\mathcal{S}_{k,n}^o$ costituita dai k -frames ortonormali di \mathbb{R}^n è un retratto di deformazione di $\mathcal{S}_{k,n}$. Studiamo ora $\mathcal{S}_{2,3}^o$. Tramite il prodotto esterno di \mathbb{R}^3 si costruisce un omeomorfismo di $\mathcal{S}_{2,3}^o$ in $SO(3)$: a ogni 2-frame ortonormale (v_1, v_2) associamo l'isometria di \mathbb{R}^3 che mandi la base canonica in $(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$. Infine, essendo noto che lo spazio $SO(3)$ è omeomorfo a \mathbb{P}^3 , si ha la tesi. ■

Ci siamo dunque ricondotti allo studio di $\pi_2(\mathbb{P}^3)$. Poiché lo spazio proiettivo \mathbb{P}^3 ha per rivestimento universale S^3 possiamo sfruttare il lemma 1.1.1 per ridurre il problema allo studio di $\pi_2(S^3)$. Essendo noto che $\pi_k(S^n) = \{o\}$ per $k < n$, otteniamo la risposta al nostro quesito:

Sì!

In realtà abbiamo ottenuto molto di più: tutte le immersioni della sfera bidimensionale nello spazio euclideo tridimensionale sono regolarmente omotope.

Bibliografía

- [AGPo2] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. Translated from the Spanish by Stephen Bruce Sontz.
- [Hato2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Sma58] Stephen Smale. A classification of immersions of the two-sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:281–290, 1958.
- [Sma59] Stephen Smale. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces. *Ann. of Math. (2)*, 69:327–344, 1959.