tisdag, 15. juli 2025

Problem 1. En linje i planet kallas *solig* om den **inte** är parallell med varken x-axeln, y-axeln eller linjen $x + y = 0$.

Låt $n \geqslant 3$ vara ett givet heltal. Bestäm alla icke-negativa heltal k sådana att det finns n olika linjer i planet som uppfyller både av följande villkor:

- för alla positiva heltal a och b med $a+b \leqslant n+1$, punkten (a, b) tillhör minst en av dessa linjer;
- precis k av n linjerna är soliga.

Problem 2. Låt Ω och Γ vara cirklar med medelpunkter M respektive N, sådana att radien av Ω är mindre än radien av Γ. Anta att cirklar Ω och Γ skär varandra i två olika punkter A och B. Linje MN skär Ω i C och Γ i D, sådana att punkterna C, M, N och D ligger på linjen i denna ordning. Låt P vara medelpunkten till den omskrivna cirkeln för triangel ACD. Linje AP skär Ω igen i $E \neq A$. Linje AP skär Γ igen i $F \neq A$. Låt H vara ortocentrum av triangel PMN.

Visa att linje genom H som är parallell med AP tangerar den omskrivna cirkeln för triangel BEF.

(*Orthocentrum* är höjdernas gemensam skärningspunkt.)

Problem 3. Låt $\mathbb{N}$ betekna mängden av positiva heltal. En funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kallas för *bonza* funktion om

$$f(a) \text{ delar } b^a - f(b)^{f(a)}$$

för alla positiva heltal a och b.

Bestäm den minsta reella konstanten c sådan att $f(n) \leqslant cn$ för alla bonza funktioner f och alla positiva heltal n.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

onsdag, 16. juli 2025

Problem 4. En *äkta delare* av ett positivt heltal N är en positiv delare av N skild från N.

En oändlig talföljd $a_1, a_2, \ldots$ består av positiva heltal varje av vilka har minst tre äkta delare. För varje $n \geqslant 1$, talet a_{n+1} är summan av tre största äkta delare av a_n.

Bestäm alla möjliga värde för a_1.

Problem 5. Alice och Bazza spelar *Australian spel*, ett spel för två spelare med reglar som beror på ett positivt reell tal λ känd för både spelare. I n:e drag av spelet (som börjar vid $n = 1$) följande gäller:

- Om n är ett udda tal väljer Alice ett icke-negativt reell tal x_n sådant att
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Om n är ett jämnt tal, väljer Bazza ett icke-negativt reellt tal x_n sådant att
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Om en spelare inte kan välja ett lämplig tal x_n, slutar spelet och den andra spelare vinner. Om spelet försätter till oändlighet finns det inte en vinnare. Alla valda tal är kända för både spelare.

Bestäm alla värde för λ för vilka Alice har en vinnande strategi och alla värde för vilka Bazza har en vinnande strategi.

Problem 6. Betrakta ett rutnät som består av 2025×2025 enhetskvadrater. Matilda vill placera på rutnät några rektangulära plattor, möjligtvis av olika storlekar, sådana att varje sida av varje platta ligger på en rutnätslinje och att varje enhetskvadrat ar täckt av högst en platta.

Bestäm det minsta antalet av plattor Matilda behöver att placera för att ha att i varje rad och varje kolumn av rutnätet finns precis ett enhetskvadrat som inte är täckt av någon platta.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.