

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

วันพุธที่ ๑๖ กรกฎาคม ๒๕๕๑

โจทย์ข้อที่ ๑ กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมซึ่งมี H เป็นจุดออร์โธเซนเตอร์ วงกลมซึ่งผ่านจุด H และมีจุดกึ่งกลางด้าน BC เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง BC ที่จุด A_1 และ A_2 ในทำนองเดียวกัน วงกลมซึ่งผ่านจุด H และมีจุดกึ่งกลางด้าน CA เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง CA ที่จุด B_1 และ B_2 วงกลมซึ่งผ่านจุด H และมีจุดกึ่งกลางด้าน AB เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง AB ที่จุด C_1 และ C_2 จงพิสูจน์ว่า $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ อยู่บนวงกลมเดียวกัน

โจทย์ข้อที่ ๒ (a) จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x, y, z ซึ่งแต่ละจำนวนมีค่าไม่เท่ากับ 1 และสอดคล้อง $xyz = 1$

(b) จงแสดงว่าสมการจะเป็นสมการสำหรับชุดจำนวนตรรกยะ x, y, z มากมายเป็นจำนวนอนันต์ชุด ซึ่งแต่ละจำนวนมีค่าไม่เท่ากับ 1 และสอดคล้อง $xyz = 1$

โจทย์ข้อที่ ๓ จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก n มากมายเป็นจำนวนอนันต์ตัว ซึ่ง $n^2 + 1$ มีตัวหารเฉพาะที่มีค่ามากกว่า $2n + \sqrt{2n}$

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

วันพุธทัศบดีที่ ๑๗ กรกฎาคม ๒๕๕๑

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาฟังก์ชัน $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงบวกไปยังเซตของจำนวนจริงบวก) ทั้งหมดที่ทำให้

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

สำหรับทุกจำนวนจริงบวก w, x, y, z ซึ่ง $wx = yz$

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $k \geq n$ และ $k - n$ เป็นจำนวนคู่ มีหลอดไฟจำนวน $2n$ ดวงซึ่งมีหมายเลข 1, 2, ..., $2n$ กำกับ หลอดไฟแต่ละดวงมีสถานะ ติด หรือ ดับ หลอดไฟทุกดวงเริ่มต้นด้วยสถานะดับ เราจะพิจารณาลำดับที่ประกอบด้วยการเปลี่ยนสถานะเป็นขั้น ๆ โดยในแต่ละขั้นต้องมีการเปลี่ยนสถานะหลอดไฟเพียงดวงเดียวเท่านั้น (จากติดเป็นดับ หรือ จากดับเป็นติด) ให้ N เป็นจำนวนลำดับทั้งหมด ซึ่งแต่ละลำดับประกอบด้วยการเปลี่ยนสถานะ k ขั้น และในสถานะสุดท้าย หลอดไฟดวงที่ 1 ถึงดวงที่ n ติดหมด และหลอดไฟดวงที่ $n+1$ ถึงดวงที่ $2n$ ดับหมด ให้ M เป็นจำนวนลำดับทั้งหมด ซึ่งแต่ละลำดับประกอบด้วยการเปลี่ยนสถานะ k ขั้น และในสถานะสุดท้าย หลอดไฟดวงที่ 1 ถึงดวงที่ n ติดหมด และหลอดไฟดวงที่ $n+1$ ถึงดวงที่ $2n$ ติดหมด โดยที่หลอดไฟดวงที่ $n+1$ ถึงดวงที่ $2n$ ไม่เคยมีดวงใดเปลี่ยนสถานะเลย

จงหาอัตราส่วน N/M

โจทย์ข้อที่ ๖ กำหนด $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมี $|BA| \neq |BC|$

ให้ ω_1 และ ω_2 เป็นวงกลมแบบในรูปสามเหลี่ยม ABC และ ADC ตามลำดับ สมมติว่ามีวงกลม ω ซึ่งสัมผัสรั้ง BA ส่วนที่ต่อจากจุด A และสัมผัสรั้ง BC ส่วนที่ต่อจากจุด C และยังสัมผัสกับเส้นตรง AD และ CD ด้วย จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสรั้งนอกของวงกลม ω_1 และ ω_2 ตัดกันบนวงกลม ω