IMO 2014
Cape Town - South Africa

Language: **Lithuanian**

Day: **1**

Antradienis, 2014 m. liepos 8 d.

1 uždavinys. Tegul $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ yra begalinė natūraliųjų skaičių seka. Įrodykite, kad egzistuoja vienintelis sveikasis skaičius $n \geq 1$, su kuriuo galioja nelygybės

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

2 uždavinys. Duotas sveikasis skaičius $n \geq 2$ ir šachmatų lenta $n \times n$, sudaryta iš n^2 vienetinių kvadratėlių. Ant tų vienetinių kvadratėlių išdėliotą n bokštų rinkinį vadinsime *taikiu*, jei kiekviename lentos stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje stovės lygiai vienas bokštas. Raskite didžiausią natūralųjį skaičių k, su kuriuo lentoje, kad ir kaip joje beišdėliotume taikų n bokštų rinkinį, visada bus galima atrasti tokį kvadratą $k \times k$, kad jokiame iš k^2 jo vienetinių kvadratėlių nebus to rinkinio bokštų.

3 uždavinys. Tegul $ABCD$ yra iškilasis keturkampis, kuriame $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Tegul H yra statmens, nuleisto iš viršūnės A į įstrižainę BD, pagrindas. Taškai S ir T priklauso kraštinėms atitinkamai AB ir AD, be to, H yra trikampio SCT viduje ir

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Įrodykite, kad tiesė BD liečia apskritimą, apibrėžtą apie trikampį TSH.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Trečiadienis, 2014 m. liepos 9 d.

4 uždavinys. Taškai P ir Q priklauso smailiojo trikampio ABC kraštinei BC ir tenkina sąlygas $\angle PAB = \angle BCA$ ir $\angle CAQ = \angle ABC$. Taškai M ir N priklauso tiesėms atitinkamai AP ir AQ. Taškas P yra atkarpos AM vidurio taškas, o taškas Q yra atkarpos AN vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesių BM ir CN susikirtimo taškas priklauso apskritimui, apibrėžtam apie trikampį ABC.

5 uždavinys. Su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n, Keiptauno bankas išleidžia monetas, kurių vertė $\frac{1}{n}$. Duotas baigtinis tokių monetų (kurių vertės nebūtinai skirtingos) rinkinys, kurio visų monetų bendra vertė neviršija $99 + \frac{1}{2}$. Įrodykite, kad šį rinkinį visada įmanoma taip išskaidyti į 100 arba mažiau rinkinėlių, kad kiekviename rinkinėlyje esančių monetų bendra vertė neviršytų 1.

6 uždavinys. Sakome, kad aibė plokštumoje nubrėžtų tiesių yra *bendroje pozicijoje*, jei jokios dvi tos aibės tiesės nėra lygiagrečios ir jokios trys tos aibės tiesės nesikerta viename taške. Bendroje pozicijoje esanti tiesių aibė padalija plokštumą į nesikertančias sritis. Tas sritis, kurių plotai baigtiniai, vadinsime *baigtinėmis sritimis*.

Įrodykite, kad su kiekvienu pakankamai dideliu n, bet kurioje iš n tiesių sudarytoje bendroje pozicijoje esančių tiesių aibėje, visada įmanoma taip išrinkti ne mažiau kaip $\sqrt{n}$ tiesių, kad jas nuspalvinus mėlynai nebus nei vienos baigtinės srities su vien tik mėlynomis kraštinėmis.

Pastaba: Rezultatai, kuriuose vietoj reikalaujamo įverčio $\sqrt{n}$ bus gautas koks nors įvertis $c\sqrt{n}$, taip pat bus vertinami taškais, priklausomai nuo konstantos c dydžio.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais