12 июля 2006 года

**Задача 1.** Точка $I$ – центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Внутри треугольника выбрана точка $P$ такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $P$ совпадает с $I$.

**Задача 2.** Диагональ правильного 2006-угольника $P$ называется *хорошей*, если ее концы делят границу $P$ на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны $P$ также называются *хорошими*.

Пусть $P$ разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри $P$. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

**Задача 3.** Определите наименьшее действительное число $M$ такое, что неравенство

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

выполняется для любых действительных чисел $a, b, c$.

*Время работы: 4 часа 30 минут*
*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

13 июля 2006 года

**Задача 4.** Найдите все пары $(x, y)$ целых чисел такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Задача 5.** Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, $k$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

(здесь $P$ применен $k$ раз). Докажите, что существует не более $n$ целых чисел $t$ таких, что $Q(t) = t$.

**Задача 6.** Каждой стороне $b$ выпуклого многоугольника $P$ поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в $P$, одна из сторон которых совпадает с $b$. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам $P$, не меньше удвоенной площади многоугольника $P$.

*Время работы: 4 часа 30 минут*
*Каждая задача оценивается в 7 баллов*