Montag, 19. Juli 2021

Aufgabe 1. Es sei $n \geqslant 100$ eine ganze Zahl. Wanja schreibt die Zahlen $n, n+1, \ldots, 2n$ auf Karten, jede auf eine eigene Karte. Er mischt diese $n+1$ Karten und verteilt sie auf zwei Stapel. Man zeige, dass mindestens einer der Stapel zwei Karten enthält, deren Zahlen in Summe eine Quadratzahl ergeben.

Aufgabe 2. Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei D ein innerer Punkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB > AC$, für den $\angle DAB = \angle CAD$ gilt. Für den Punkt E auf der Strecke AC gilt $\angle ADE = \angle BCD$, für den Punkt F auf der Strecke AB gilt $\angle FDA = \angle DBC$, und für den Punkt X auf der Geraden AC gilt $CX = BX$. Es seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ADC beziehungsweise EXD. Man beweise, dass die Geraden BC, EF und O_1O_2 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 20. Juli 2021

Aufgabe 4. Es sei Γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt I und $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD und DA den Kreis Γ berühren. Es sei Ω der Umkreis des Dreiecks AIC. Die Verlängerung von BA über A hinaus schneidet Ω in X, und die Verlängerung von BC über C hinaus schneidet Ω in Z. Die Verlängerungen von AD und CD über D hinaus schneiden Ω in Y beziehungsweise T. Man beweise

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Aufgabe 5. Die beiden Eichhörnchen Buschi und Hoppi haben 2021 Walnüsse für den Winter gesammelt. Hoppi nummeriert die Walnüsse von 1 bis 2021 und gräbt 2021 kleine Löcher in den Boden entlang eines Kreises um ihren Lieblingsbaum. Am nächsten Morgen bemerkt Hoppi, dass Buschi in jedes Loch eine Walnuss gelegt hat, aber ohne die Nummerierung zu beachten. Verstimmt beschließt Hoppi, die Walnüsse umzuordnen, und führt dazu eine Folge von 2021 Zügen aus. Im k-ten Zug vertauscht Hoppi die Positionen der beiden Walnüsse, die direkt neben Walnuss k liegen. Man beweise, dass es eine ganze Zahl k derart gibt, dass Hoppi im k-ten Zug zwei Walnüsse a und b mit $a < k < b$ vertauscht.

Aufgabe 6. Es seien $m \geqslant 2$ eine ganze Zahl, A eine endliche Menge von (nicht notwendigerweise positiven) ganzen Zahlen und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ Teilmengen von A. Es werde vorausgesetzt, dass für jedes $1 \leqslant k \leqslant m$ die Summe der Elemente von B_k genau m^k beträgt. Man beweise, dass A mindestens $m/2$ Elemente enthält.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.