الإثنين, 19، تموز 2021

مسألة 1. ليكن $100 \leqslant n$ عدداً صحيحاً. يكتب إيفان الأعداد $n, n+1, \ldots, 2n$ كلّ واحد على بطاقة مختلفة. وبعدها يخلط هذه البطاقات التي عددها $n+1$ ويقسمها إلى مجموعتين. أثبت أنّ إحدى المجموعتين على الأقل تحتوي على بطاقتين مجموع عدديهما مربعٌ كاملٌ.

مسألة 2. أثبت أنّ المتراجحة الآتية محقّقة مهما كانت الأعداد الحقيقية $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

مسألة 3. لتكن D نقطة واقعة داخل مثلث حاد الزوايا ABC حيث $AB > AC$ وتحقق $\angle DAB = \angle CAD$. E نقطة من القطعة المستقيمة AC تحقّق $\angle ADE = \angle BCD$. F نقطة من القطعة المستقيمة AB تحقّق $\angle FDA = \angle DBC$ والنقطة X على المستقيم AC تحقّق $CX = BX$. ليكن O_1 و O_2 مركزي الدائرتين المارّتين برؤوس المثلثين ADC و EXD، بالترتيب. أثبت أنّ المستقيمات BC و EF و O_1O_2 تتلاقى في نقطة واحدة.

Language: *Arabic (Syrian)*

المدّة: 4 ساعات و30 دقيقة

لكل مسألة 7 درجات

الثلاثاء، 20 تموز 2021

مسألة 4. لتكن Γ دائرة مركزها I، وليكن $ABCD$ مضلعاً محدباً بحيث تكون الأضلاع AB وBC وCD وDA مماسة للدائرة Γ. لتكن Ω الدائرة المارّة برؤوس المثلث AIC. يلتقي مُمدد BA بعد A مع Ω في X، ويلتقي ممدّد BC بعد C مع Ω في Z، ويلتقي ممدّدا المستقيمين AD وCD بعد D مع Ω في Y وT، بالترتيب. أثبت أنّ

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

مسألة 5. جمع السنجابان دغلي ونطّاط 2021 بندقة تحضيراً للشتاء. رقّم نطّاطُ البندقات من 1 إلى 2021، وحفر 2021 حفرة صغيرة في الأرض على مسار دائري حول شجرتهما المفضلة. لاحظ نطّاط في صباح اليوم التالي أنّ دغلي قد وضعت بندقة في كل حفرة، دون الانتباه إلى أرقامها. فقرر نطّاط منزعجاً إعادة ترتيب البندقات بإجراء 2021 نقلة، في النقلة رقم k، يُبادل بين البندقتين المجاورتين للبندقة رقم k. أثبت وجود قيمة لـ k، بحيث أنّه في النقلة رقم k يُبادل نطّاطٌ بين بندقتين a وb تحقّقان $a < k < b$.

مسألة 6. ليكن $m \geqslant 2$ عدداً صحيحاً. ولتكن A مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة (ليست موجبة تماماً بالضرورة)، ولتكن $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ مجموعات جزئية من A. نفترض أنّه أياً كان $k = 1, 2, \ldots, m$ كان مجموع عناصر B_k مساوياً m^k. أثبت أنّ A تحتوي على $m/2$ عنصراً على الأقل.

Language: Arabic (Syrian)

المدّة: 4 ساعات و30 دقيقة
لكل مسألة 7 درجات