Maandag 18 juli 2011

Opgave 1. Voor een verzameling $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ van vier verschillende positieve gehele getallen (verschillend van nul) noteren we de som $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ als s_A. We schrijven n_A voor het aantal paren (i, j) met $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ waarvoor $a_i + a_j$ een deler is van s_A.
Bepaal alle verzamelingen A van vier verschillende positieve gehele getallen (verschillend van nul) met de grootst mogelijke waarde van n_A.

Opgave 2. Zij $\mathcal{S}$ een eindige verzameling van ten minste twee punten in het vlak, waarvan er geen drie op één lijn (rechte) liggen. Een *windmolen* is een proces dat begint met een lijn (rechte) ℓ die door één punt P van $\mathcal{S}$ gaat. De lijn draait met de klok mee om het *draaipunt* P tot er voor het eerst een ander punt van $\mathcal{S}$ op deze lijn komt te liggen; we noemen dit punt Q en dit wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dan dat Q *een klap van de molen krijgt*. De lijn draait nu met de klok mee om Q, totdat opnieuw een punt van $\mathcal{S}$ een klap van de molen krijgt. De windmolen deelt zo oneindig veel klappen uit.
Laat zien dat we een punt P van $\mathcal{S}$ en een lijn ℓ door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van $\mathcal{S}$ oneindig veel klappen van de molen krijgt.

Opgave 3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f(f(x))$$

voor alle reële getallen x en y. Bewijs dat $f(x) = 0$ voor alle $x \leqslant 0$.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.

Dinsdag 19 juli 2011

Opgave 4. Zij $n > 0$ een geheel getal. We hebben een balans en n gewichten met massa 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. We moeten de n gewichten, één voor één, op één van de twee schalen van de balans plaatsen zo dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. In elke stap kiezen we een gewicht dat nog niet op de balans staat en plaatsen het op de linker- of op de rechterschaal, totdat alle gewichten op de balans geplaatst zijn.
Bepaal het aantal manieren waarop we dit kunnen doen.

Opgave 5. Zij f een functie van de gehele getallen naar de positieve gehele getallen (verschillend van nul). Stel dat voor alle gehele getallen m en n het verschil $f(m)-f(n)$ deelbaar is door $f(m-n)$. Bewijs dat voor alle gehele getallen m en n met $f(m) \leqslant f(n)$ geldt dat $f(n)$ deelbaar is door $f(m)$.

Opgave 6. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met omgeschreven cirkel Γ. Zij ℓ een raaklijn aan Γ en definieer ℓ_a, ℓ_b en ℓ_c als de lijnen verkregen door ℓ respectievelijk ten opzichte van de lijnen BC, CA en AB te spiegelen.
Toon aan dat de omgeschreven cirkel van de driehoek bepaald door de lijnen ℓ_a, ℓ_b en ℓ_c raakt aan de cirkel Γ.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.