

Уторак, 18. јул 2017.

**1. задатак.** За дати природан број  $a_0 > 1$ , дефинишимо низ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  тако да је за свако  $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако је } \sqrt{a_n} \text{ цео број,} \\ a_n + 3, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Одредити све вредности  $a_0$  за које постоји број  $A$  такав да је  $a_n = A$  за бесконачно много вредности  $n$ .

**2. задатак.** Са  $\mathbb{R}$  је означен скуп реалних бројева. Одредити све функције  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такве да за све реалне бројеве  $x$  и  $y$  важи

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

**3. задатак.** Ловац и невидљиви зец играју игру у равни. Полазне тачке зеца и ловца, редом означене са  $A_0$  и  $B_0$ , су исте. Након  $n - 1$  кругова игре, зец је у тачки  $A_{n-1}$ , а ловац у тачки  $B_{n-1}$ . У  $n$ -том кругу се догађа следеће, овим редом:

- (i) Зец се неприметно помера у тачку  $A_n$  на растојању тачно 1 од тачке  $A_{n-1}$ .
- (ii) Ловац на радару очитава тачку  $P_n$ . Једино што радар гарантује је да је растојање између тачака  $P_n$  и  $A_n$  највише 1.
- (iii) Ловац се помера у тачку  $B_n$  на растојању тачно 1 од тачке  $B_{n-1}$ , што зец види.

Да ли ловац увек, ма какви били кретање зеца и извештаји са радара, може да се креће тако да осигура да после  $10^9$  кругова растојање између њега и зеца буде највише 100?

Среда, 19. јул 2017.

**4. задатак.** Дате су различите тачке  $R$  и  $S$  на кружници  $\Omega$  тако да  $RS$  није њен пречник. Нека је  $\ell$  тангента на кружницу  $\Omega$  у тачки  $R$ . Тачка  $T$  је таква да је  $S$  средиште дужи  $RT$ . Тачка  $J$  на краћем луку  $RS$  кружнице  $\Omega$  је таква да описана кружница  $\Gamma$  троугла  $JST$  сече праву  $\ell$  у две различите тачке. Нека је  $A$  она од те две тачке која је ближа тачки  $R$ . Права  $AJ$  поново сече кружницу  $\Omega$  у тачки  $K$ . Доказати да права  $KT$  додирује кружницу  $\Gamma$ .

**5. задатак.** Дат је природан број  $N \geq 2$ . У реду се налази  $N(N+1)$  фудбалера међусобно различитих висина. Шеф Вучко жели да уклони  $N(N-1)$  играча, остављајући ред са  $2N$  играча у коме је задовољено следећих  $N$  услова:

- (1) између двојице највиших играча не стоји нико;
- (2) између трећег и четвртог играча по висини не стоји нико;
- ⋮
- ( $N$ ) између двојице најнижих играча не стоји нико.

Доказати да се ово увек може извести.

**6. задатак.** Уређени пар целих бројева  $(x, y)$  зовемо *примитивном тачком* ако је највећи заједнички делилац бројева  $x$  и  $y$  једнак 1. Нека је  $S$  коначан скуп примитивних тачака. Доказати да постоје природан број  $n$  и цели бројеви  $a_0, a_1, \dots, a_n$  такви да за све тачке  $(x, y)$  из скupa  $S$  важи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$