Thứ Ba, ngày 15 tháng 7 năm 2025

Bài 1. Một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ được gọi là *đường ánh nắng* nếu nó **không** song song với trục x, trục y hay đường thẳng $x + y = 0$.

Cho số nguyên dương $n \geqslant 3$ cố định. Xác định tất cả các số nguyên không âm k sao cho tồn tại n đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Với mọi số nguyên dương a và b mà $a + b \leqslant n + 1$, điểm $(a; b)$ nằm trên ít nhất một trong n đường thẳng đó;
- Đúng k trong số n đường thẳng là đường ánh nắng.

Bài 2. Cho các đường tròn Ω và Γ có tâm tương ứng là M và N sao cho bán kính của Ω nhỏ hơn bán kính của Γ. Giả sử các đường tròn Ω và Γ cắt nhau tại các điểm phân biệt A và B. Đường thẳng MN cắt Ω tại điểm C và cắt Γ tại điểm D, sao cho thứ tự các điểm trên đường thẳng đó lần lượt là C, M, N và D. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Đường thẳng AP cắt lại Ω tại điểm $E \neq A$. Đường thẳng AP cắt lại Γ tại điểm $F \neq A$. Gọi H là trực tâm của tam giác PMN.

Chứng minh rằng đường thẳng đi qua H và song song với AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

(*Trực tâm* của một tam giác là giao điểm của các đường cao của nó.)

Bài 3. Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập hợp các số nguyên dương. Một hàm số $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ được gọi là *tốt* nếu

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ chia hết cho } f(a)$$

với mọi số nguyên dương a và b.

Xác định số thực c nhỏ nhất sao cho $f(n) \leqslant cn$ với mọi hàm số tốt f và mọi số nguyên dương n.

Thứ Tư, ngày 16 tháng 7 năm 2025

Bài 4. Một *ước số thực sự* của số nguyên dương N là một ước nguyên dương khác N của N.

Cho $a_1, a_2, \ldots$ là một dãy vô hạn số nguyên dương sao cho mỗi số hạng có ít nhất ba ước số thực sự. Biết rằng với mọi $n \geqslant 1$, số hạng a_{n+1} bằng tổng của ba ước số thực sự lớn nhất của a_n.

Xác định tất cả các giá trị có thể của a_1.

Bài 5. Alice và Bazza chơi *trò chơi Úc*, một trò chơi hai người mà luật chơi phụ thuộc vào một số thực dương λ mà cả hai người đều biết. Tại lượt thứ n của trò chơi (bắt đầu với $n = 1$), điều sau đây diễn ra:

- Nếu n là số lẻ, Alice chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Nếu n là số chẵn, Bazza chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Nếu một người không thể chọn được một số x_n hợp lệ thì trò chơi kết thúc và người kia thắng cuộc. Nếu trò chơi kéo dài vô hạn thì không người nào thắng cuộc. Cả hai người đều biết tất cả các số đã được chọn.

Xác định tất cả các giá trị của λ sao cho Alice có chiến lược thắng cuộc và tất cả các giá trị của λ sao cho Bazza có chiến lược thắng cuộc.

Bài 6. Cho một bảng ô vuông kích thước 2025×2025. Matilda muốn đặt lên bảng một số viên gạch hình chữ nhật, kích thước có thể khác nhau, sao cho mỗi viên phủ khít một số ô vuông đơn vị của bảng và mỗi ô vuông đơn vị được phủ bởi không quá một viên.

Xác định số nhỏ nhất các viên gạch mà Matilda cần đặt sao cho trên mỗi hàng cũng như trên mỗi cột của bảng có đúng một ô vuông đơn vị không được phủ bởi các viên gạch.

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.