

به نام او

Iranian Version

July 25, 2007

روز اول

۱) اعداد حقیقی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داده شده است. برای هر  $i$  صحیح که  $1 \leq i \leq n$  تعريف کنید:

$$d_i = \max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min \{a_j : i \leq j \leq n\}$$

و قرار دهید

$$d = \max \{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

الف) برای هر دنباله دیگر  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  از اعداد حقیقی ثابت کنید

$$\max \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}.$$

ب) نشان دهید اعداد حقیقی  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  یافت می شود که نامساوی \* به تساوی تبدیل شود.

۲) پنج نقطه  $A, B, C, D, E$  در صفحه به گونه ای قرار دارند که متوازی الاضلاع و چهار ضلعی  $BCED$  محاطی است. فرض کنید خط  $l$  گذرا از  $A$  درون پاره خط  $DC$  را در نقطه  $F$  و خط  $BC$  را در نقطه  $G$  قطع می کند. اگر  $EF = EG = EC$  نیم ساز زاویه  $DAB$  است.

۳) در یک مسابقه ریاضی بعضی شرکت کننده ها دوست هستند. دوستی همواره دو طرفه فرض می شود. یک گروه از شرکت کننده ها را کلیک گوییم هر گاه هر دو تا از آن ها دوست باشند. (به ویژه هر گروه با کمتر از دو عضو یک کلیک است). به تعداد افراد یک کلیک اندازه آن کلیک می گوییم.

فرض کنید شرکت کنندگان در این مسابقه به گونه ای هستند که حداقل اندازه کلیک ها زوج است. ثابت کنید شرکت کننده ها را می توان در دو اتاق جداگانه به گونه ای قرار داد که حداقل اندازه کلیک های اتاق اول برابر حداقل اندازه کلیک های اتاق دوم باشد.

مدت: چهار ساعت و نیم. هر سوال هفت نمره دارد

به نام او

Iranian Version

July 26, 2007

روز دوم

۴) در مثلث  $ABC$  نیم ساز زاویه  $BCA$  دایره محیطی را در  $R$ ، عمود منصف  $BC$  را در  $P$  و عمود منصف  $AC$  را در  $Q$  قطع می کند. اگر  $K$  وسط ضلع  $BC$  و  $L$  وسط ضلع  $AC$  باشد ثابت کنید مثلث های  $RPK$  و  $RQL$  مساحت برابر دارند.

۵) فرض کنید  $a$  و  $b$  اعداد صحیح مثبت باشند. نشان دهید اگر  $(4a^2 - 1)^3$  بر  $4ab - 1$  بخش پذیر باشد آن گاه  $a = b$ .

۶) فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح مثبت باشد. مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  نقطه ای زیر را از فضای سه بعدی در نظر بگیرید

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

کم ترین تعداد صفحاتی را بیابید که اجتماع آن ها اجبارا همه نقاط  $S$  را در بر دارد ولی مبددا را شامل نمی شود.

مدت: چهار ساعت و نیم. هر سوال هفت نمره دارد.