Bulgarian Version, First Day

Задача 1. Дадени са реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. За всяко i $(1 \leq i \leq n)$ дефинираме

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

и нека

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

а) Да се докаже, че за произволни реални числа $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ е изпълнено

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

б) Да се докаже, че съществуват реални числа $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, за които в $(*)$ се достига равенство.

Задача 2. Дадени са пет точки A, B, C, D и E, такива, че $ABCD$ е успоредник и четириъгълникът $BCED$ е вписан. Нека ℓ е права през A, която пресича отсечката DC във вътрешна точка F и правата BC в точка G. Нека освен това $EF = EG = EC$. Да се докаже, че ℓ е ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$.

Задача 3. Някои от участниците в математическо състезание са приятели. Считаме, че ако A е приятел на B, то и B е приятел на A. Група от участници се нарича *клика*, ако всеки двама от тях са приятели. (В частност, всяка група от по-малко от двама участници е клика.) Броят на участниците в една клика се нарича *размер* на кликата.

Известно е, че максималният размер на клика в състезанието е четно число. Да се докаже, че участниците могат да бъдат разделени в две стаи така, че максималният размер на клика в едната стая е равен на максималния размер на клика в другата стая.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Bulgarian Version, Second Day

Задача 4. В триъгълник ABC ъглополовящата на $\sphericalangle BCA$ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка R, симетралата на BC в точка P и симетралата на AC в точка Q. Точките K и L са среди съответно на страните BC и AC. Да се докаже, че триъгълниците RPK и RQL имат равни лица.

Задача 5. Нека a и b са естествени числа. Да се докаже, че ако $4ab-1$ дели $(4a^2-1)^2$, то $a=b$.

Задача 6. Нека n е естествено число. Да разгледаме множеството

$$S=\{(x,y,z):\ x,y,z\in\{0,1,\dots,n\},\ x+y+z>0\}$$

от $(n+1)^3-1$ точки в тримерното пространство. Да се намери най-малкият възможен брой равнини, чието обединение съдържа S, но не съдържа точката $(0,0,0)$.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки