47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Arabic**

12 July 2006

السؤال الاول :

ليكن ABC مثلثا , و النقطه I مركز الدائره الداخليه (تقاطع منصفات الزوايا) في المثلث . اذا كانت P نقطه داخل المثلث بحيث تحقق المساواة

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

برهن أن $AP \geq AI$, و المساواة ($AP = AI$) تتحقق اذا و اذا فقط $P = I$.

السؤال الثاني :

ليكن P مضلع منتظم ذو 2006 ضلع . يسمى قطر المضلع P جيد اذا جزأت نقطتا نهايتيه المضلع P الى جزئين يحتوي كل جزء عدد فردي من اضلاع P . أعتبر اضلاع المضلع P جيده .
نفرض أن المضلع P قسم الى مثلثات بواسطة 2003 قطرا , لا يتقاطع أي قطرين منهما داخل المضلع P . أوجد اكبرعدد ممكن من المثلثات المتطابقة الضلعين التي تملك ضلعين جيده من اضلاع المضلع الناتجه بواسطة هذا النظام.

السؤال الثالث :

أوجد اصغر عدد حقيقي M يحقق المتباينه

$$|\, ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\,| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

لكل الاعداد الحقيقية a , b وc .

الوقت المتاح للأجابة : أربع ساعات و نصف الساعة
لكل مسأله 7 درجات فقط.

13 July 2006

السؤال الرابع :

حدد جميع الأزواج المرتبه (x,y) حيث x , y أعداد صحيحه , تحقق المعادله

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}$$

السؤال الخامس :

لتكن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجه n حيث $n>1$ ومعاملاتها أعداد صحيحه , وليكن k عدد صحيح موجب . أعتبر كثيرة الحدود

$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, حيث P تكررت k مره .

برهن أنه يوجد على الاكثر n من الأعداد الصحيحه t التي تثبتها كثيرة الحدود $Q(x)$, اي أن $Q(t)=t$.

السؤال السادس :

عين لكل ضلع b في المضلع المحدب P المساحة القصوى لمثلث في المضلع P يكون الضلع b احد اضلاعه .
برهن أن مجموع المساحات المعينه لجميع اضلاع المضلع تساوي على الأقل (لا تقل عن) ضعف مساحة المضلع P .

الوقت المتاح للأجابة : أربع ساعات و نصف الساعة .
لكل مسأله 7 درجات فقط .