53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **German**

Day: **1**

Dienstag, 10. Juli 2012

Aufgabe 1. Zum Dreieck ABC sei J der Mittelpunkt des Ankreises, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt. Dieser Ankreis berührt BC in M und AB und AC in K bzw. L. Die Geraden LM und BJ schneiden sich in F und die Geraden KM und CJ schneiden sich in G. Es seien S der Schnittpunkt der Geraden AF und BC sowie T der Schnittpunkt der Geraden AG und BC.
Man beweise, dass M der Mittelpunkt von ST ist.

(Der *Ankreis* von ABC, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt, ist der Kreis, der die Strecke BC berührt sowie den Strahl AB jenseits von B und den Strahl AC jenseits von C.)

Aufgabe 2. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl und es seien $a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, so dass $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ gilt.
Man beweise:
$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Aufgabe 3. Das *Ratespiel des Lügners* ist ein Spiel, das von zwei Spielern A und B gespielt wird. Die Spielregeln hängen von zwei positiven ganzen Zahlen k und n ab, die beiden Spielern bekannt sind.
Zu Beginn des Spiels wählt A ganze Zahlen x und N mit $1 \leq x \leq N$. A hält x geheim und teilt N dem Spieler B wahrheitsgemäß mit. Nun versucht Spieler B Informationen über x herauszufinden, indem er Fragen von folgendem Typ an A richtet. Jede Frage besteht darin, eine beliebige Menge S positiver ganzer Zahlen (möglicherweise dieselbe Menge einer früheren Frage) zu nennen und A zu fragen, ob x in S enthalten ist. Der Spieler B darf beliebig viele derartige Fragen stellen. Der Spieler A muss jede Frage von B sofort mit *ja* oder *nein* beantworten, wobei er so oft lügen darf wie er möchte. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass es unter je $k+1$ aufeinander folgenden Antworten mindestens eine wahrheitsgemäße geben muss.
Nachdem B so viele Fragen gestellt hat, wie er wollte, muss er eine Menge X nennen, die aus höchstens n positiven ganzen Zahlen besteht. Wenn x in X liegt, gewinnt B. Andernfalls verliert B.
Man beweise:

1. Wenn $n \geq 2^k$, so kann B einen Sieg erzwingen.
2. Für alle genügend große k gibt es ein $n \geq 1{,}99^k$, so dass B den Sieg nicht erzwingen kann.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **German**

Day: 2

Mittwoch, 11. Juli 2012

Aufgabe 4. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass für alle ganzen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Hier bezeichne $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.)

Aufgabe 5. Es seien ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ und D der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Sei X ein innerer Punkt der Strecke CD. Es bezeichne K den Punkt auf der Strecke AX für den $|BK| = |BC|$ gilt. Entsprechend bezeichne L den Punkt auf der Strecke BX für den $|AL| = |AC|$ gilt. Schließlich bezeichne M den Schnittpunkt von AL und BK.
Man beweise: $|MK| = |ML|$.

Aufgabe 6. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n für die es nicht-negative ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, so dass gilt:

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.