

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD  
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

Лхавра, 2008. 07.16

**Бодлого 1.** Хүрээ өнгөөс гурвалжин  $ABC$ -ийн өнд-  
мүдийн огтлолцооноос үзэв нь  $H$ .  $BC$  талын гүн-  
дэг үзэгдэлтэй төвөгтэй  $H$  үзлийн дайрсан тойрог  
нь  $BC$  шүлүүнээс  $A_1$  ба  $A_2$  үзүүдэд огтолсоо.  
Мөн адилаар  $CA$  талын гүн дэгдэлтэй төвөгтэй  
 $H$  үзлийн дайрсан тойрог нь  $CA$  шүлүүнээс  $B_1, B_2$   
үзүүдэд огтолсоо,  $AB$  талын гүн дэгдэлтэй төвөгтэй  
 $H$  үзлийн дайрсан тойрог нь  $AB$  шүлүүнээс  $C_1, C_2$   
үзүүдэд огтолсоо.  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  үзүүд  
нэг тойрог дээр оршихыг батал.

**Бодлого 2.** а)  $xyz=1$  байх амь нь  $z$  1-ээс  
эргэлтэй  $x, y, z$  бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

байхыг батал

б) Энд тэнцэл биелж байхаар  $xyz=1$  ба амь нь  
 $z$  1-ээс эргэлтэй байх рациональ тоонууд  $x, y, z$ -  
ийн төгсгөлгүй олон гурвал олдохыг батал

**Бодлого 3.**  $n^2+1$  тоо  $2n+\sqrt{2n}$ -ээс их анхны  
тоо хуваагддаг байх төгсгөлгүй олон натурал тоо  
 $n$  оршихыг батал.

Language: Mongolian

Хугацаа: 4цаг 30минут  
Бодлого бүр 7 оноотой

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD  
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

Нүрэл, 2008. 07. 17

Бодлого 4.  $w, x, y, z$  байх эхлэл эерэг бодит тоо  $w, x, y, z$  гэдэг

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(yz) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

байх бүх  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  функцийг (эерэг бодит тоо  $w, x, y, z$  эерэг бодит тоо  $y, z$  абагд) ол.

Бодлого 5. Натурал тоо  $n, k$  нь  $k \geq n$  ба  $k-n$ -тэй тоо байх.  $1, 2, \dots, 2n$  дугааруудтай  $2n$  шийдэмгийг аль нь ч асхан эсвэл унтарсан төлвийн аль нэгэнд оршиж чадна. Эхлээд бүх шийдэмгийг унтарсан байх. Дараахь анхны эрэмбэлэгдсэн дарааллуудыг авч үзье: анхны бүрдээр  $k$  нь шийдэмгийг төлвөө эсрэгээр өргөмжлөх (ассанаас унтарсан эсвэл унтарсанаас асхан) гэж.

1-ээс  $n$  дугаартай шийдэмгийг асхан,  $n+1$ -ээс  $2n$  дугаартай нь унтарсан гэсэн төлөвд хүргэдэг  $k$  анхнаас тогтох дарааллуудыг тоо  $N$ -ээр, харин  $n+1$ -ээс  $2n$  дугаартай шийдэмгийг нэг нь ч төлвөө өргөмжлүүлээр 1-ээс  $n$  дугаартай нь асхан,  $n+1$ -ээс  $2n$  дугаартай нь унтарсан гэсэн төлөвд хүргэдэг  $k$  анхны дарааллын тоо  $M$ -ээр тэмдэглэе.  $N/M$  харьцааг ол.

Бодлого 6.  $ABCD$ -үзүүр дорвоон өнцөгтөд  $|BA| \neq |BC|$  байх.  $ABC$  ба  $ADC$  гурвалжнуудад багтсан тойргуудыг  $w_1$  ба  $w_2$  гэе.  $BA$  заагагийг  $A$  үзүүр чухал,  $BC$  заагагийг  $C$ -ээс чухал хүргэдэг, мөн  $AD$  ба  $CD$  шугууныг хүргэдэг,  $w$  тойрог оршидог гэе.  $w_1$  ба  $w_2$  тойргуудын ерөнхий заагаг хүргэдэг нь  $w$  тойрог гэдэг ажиглохыг батал.

Language: Mongolian

Хугацаа: 4 цаг 30 минут  
Бодлого бүр 7 оноотой