Dinsdag 23 juli 2013

Opgave 1. Bewijs voor elk paar (strikt) positieve gehele getallen k en n dat er k (niet noodzakelijk verschillende) positieve gehele getallen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ bestaan zodanig dat

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Opgave 2. Een configuratie van 4027 punten in het vlak noemen we *Colombiaans* als deze uit 2013 rode en 2014 blauwe punten bestaat, waarbij geen drie van de punten uit de configuratie collineair zijn. Door het tekenen van een aantal lijnen (rechten) wordt het vlak in verschillende gebieden verdeeld. Voor een gegeven Colombiaanse configuratie noemen we een verzameling lijnen *goed* als aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

- geen enkele lijn gaat door een punt van de configuratie;
- geen enkel gebied bevat punten van beide kleuren.

Bepaal de kleinste waarde van k zodanig dat voor elke Colombiaanse configuratie van 4027 punten er een goede verzameling van k lijnen bestaat.

Opgave 3. Laat de aangeschreven cirkel van $\triangle ABC$ tegenover het hoekpunt A raken aan lijnstuk BC in het punt A_1. Definieer de punten B_1 op lijnstuk CA en C_1 op lijnstuk AB analoog, gebruik makend van de aangeschreven cirkels tegenover respectievelijk B en C. Veronderstel dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle A_1B_1C_1$ op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ ligt.

Bewijs dat $\triangle ABC$ rechthoekig is.

(De *aangeschreven cirkel* van $\triangle ABC$ tegenover het hoekpunt A is de cirkel die raakt aan het lijnstuk BC, aan de halfrechte AB voorbij B, en aan de halfrechte AC voorbij C. De aangeschreven cirkels tegenover B en C worden analoog gedefinieerd.)

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

Woensdag 24 juli 2013

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek met hoogtepunt H. Zij W een punt verschillend van B en C op het lijnstuk BC. Laat M en N de voetpunten zijn van de hoogtelijnen vanuit respectievelijk B en C. Zij ω_1 de omgeschreven cirkel van $\triangle BWN$ en zij X het punt op ω_1 zodanig dat WX een middellijn van ω_1 is. Analoog, zij ω_2 de omgeschreven cirkel van $\triangle CWM$ en zij Y het punt op ω_2 zodanig dat WY een middellijn van ω_2 is.

Bewijs dat X, Y en H collineair zijn.

Opgave 5. Zij $\mathbb{Q}_{>0}$ de verzameling van (strikt) positieve rationale getallen. Zij $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ een functie die aan de volgende drie voorwaarden voldoet:

(i) voor alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ geldt $f(x)f(y) \geqslant f(xy)$;

(ii) voor alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ geldt $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$;

(iii) er bestaat een rationaal getal $a > 1$ zodat $f(a) = a$.

Bewijs dat $f(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Opgave 6. Zij $n \geqslant 3$ een geheel getal. Beschouw een cirkel met daarop $n+1$ punten die op onderling gelijke afstand liggen. Beschouw alle manieren om deze punten met de getallen $0, 1, \ldots, n$ te labelen zodanig dat elk getal precies één keer wordt gebruikt; twee zulke manieren worden als gelijk beschouwd als je de ene uit de andere kan verkrijgen door draaiing van de cirkel. We noemen een manier om de punten te labelen *mooi* als voor elk viertal labels $a < b < c < d$ met $a + d = b + c$, de koorde tussen a en d geen snijpunt heeft met de koorde tussen b en c.

Zij M het aantal mooie manieren om de punten te labelen, en zij N het aantal geordende paren (x, y) van (strikt) positieve gehele getallen zodanig dat $x + y \leqslant n$ en $\operatorname{ggd}(x, y) = 1$.

Bewijs dat $M = N + 1$.

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard