

Serbian version

Први дан
25. јул 2007.

1. задатак. Нека су a_1, a_2, \dots, a_n реални бројеви. За свако i ($1 \leq i \leq n$) нека је

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$$

и нека је

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(а) Доказати да за произвољне реалне бројеве $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(б) Доказати да постоје реални бројеви $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ такви да се у $(*)$ достиже једнакост.

2. задатак. Нека су тачке A, B, C, D и E такве да је $ABCD$ паралелограм, а $BCED$ тетиван четвороугао. Нека је ℓ права која садржи тачку A и сече дуж DC у њеној унутрашњој тачки F , а праву BC у тачки G . Нека је и $EF = EG = EC$. Доказати да је ℓ симетрала угла DAB .

3. задатак. На математичком такмичењу неки ученици су пријатељи; ако је A пријатељ са B , тада је и B пријатељ са A . Група ученика се назива *дружина* ако су свака два ученика у тој групи пријатељи. (Специјално, свака група са мање од два ученика је дружина.) Број ученика у дружини назива се њеном *величином*.

На овом такмичењу максимална величина дружине је паран број. Доказати да се ученици могу распоредити у две собе, тако да је максимална величина дружине у једној соби једнака максималној величини дружине у другој соби.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Serbian version

Други дан
26. јул 2007.

4. задатак. Симетрала угла BCA троугла ABC сече његову описану кружницу по други пут у R , а симетрале страница BC и AC у P и Q , редом. Нека су K и L средишта страница BC и AC , редом. Доказати да су површине троуглова RPK и RQL једнаке.

5. задатак. Нека су a и b природни бројеви. Ако $4ab - 1$ дели $(4a^2 - 1)^2$ доказати да је $a = b$.

6. задатак. Нека је n природан број. Нека је

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

скуп који се састоји од $(n+1)^3 - 1$ тачака тродимензионалног простора. Одредити најмањи могући број равни, чија унија садржи све тачке скупа S , а не садржи тачку $(0, 0, 0)$.

*Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена*