Hebrew Version (Israel)

25 ביולי 2007

שאלה מספר 1.

נתונים n מספרים ממשיים $a_1,a_2,\ldots,a_n$. לכל i $(1\le i\le n)$ מגדירים

$$d_i=\max\left\{a_j:1\le j\le i\right\}-\min\left\{a_j:i\le j\le n\right\}$$

וכמו כן מגדירים

$$d=\max\left\{d_i:1\le i\le n\right\}$$

(a) הוכח כי לכל n מספרים ממשיים $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ מתקיים

$$\max\{|x_i-a_i|\ :\ 1\le i\le n\}\ge\frac{d}{2}\qquad(*)$$

(b) הראה כי קיימים n מספרים ממשיים $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ כך שמתקיים שוויון ב $(*)$.

שאלה מספר 2.

נתונות חמש נקודות A,B,C,D,E, כך ש $ABCD$ היא מקבילית ו $BCED$ הוא מרובע חסום במעגל. יהי l ישר העובר דרך A. נניח כי הישר l חותך את הפנים של הקטע DC בנקודה F וחותך את הישר BC בנקודה G. כמו כן, נניח כי $EF=EG=EC$.
הוכח כי l הוא חוצה הזווית של הזווית DAB.

שאלה מספר 3.

בתחרות מתמטית חלק מהמתחרים הם חברים. חברות היא תמיד הדדית. קבוצה של מתחרים נקראת ***קליק*** אם כל זוג מתחרים מתוכה הם חברים. (בפרט, כל קבוצת מתחרים בעלת פחות משני מתחרים נקראת קליק). מספר המתחרים בתוך קליק נקרא ***הגודל*** של הקליק.
בתחרות זאת, נתון כי הגודל הגדול ביותר של קליק הוא זוגי. הוכח כי ניתן לסדר את המתחרים בשני חדרים כך שהגודל הגדול ביותר של קליק בחדר אחד, יהיה שווה לגודל הגדול ביותר של קליק בחדר השני.

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

Hebrew Version (Israel)

26 ביולי 2007

שאלה מספר 4.

במשולש ABC חוצה הזווית של הזווית BCA חותך שנית את המעגל החוסם של המשולש בנקודה R, חותך את האנך האמצעי של BC בנקודה P, וחותך את האנך האמצעי של AC בנקודה Q. האמצע של BC הוא K ו האמצע של AC הוא L. הוכח כי המשולשים RPK ו RQL הם בעלי שטחים שווים.

שאלה מספר 5.

יהיו a ו b מספרים שלמים חיוביים.

הוכח כי אם $4ab-1$ מחלק את $(4a^2-1)^2$, אזי $a=b$.

שאלה מספר 6.

יהי n מספר שלם חיובי. נגדיר את

$$S=\{(x,y,z):x,y,z\in\{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\}$$

כקבוצה של $(n+1)^3-1$ נקודות במרחב התלת ממדי. מצא את המספר הקטן ביותר האפשרי של מישורים, כך שהאיחוד שלהם מכיל את S אבל אינו מכיל את (0,0,0).

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות

כל שאלה שווה 7 נקודות