الثلاثاء 18 يوليوز 2017

**المسألة** 1.

لكل عدد صحيح $a_0 > 1$ نعرّف المتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$ بما يلي :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{إذا كان } \sqrt{a_n} \text{ عددا صحيحا} \\ a_n + 3 & \text{إذا لم يكن كذلك} \end{cases} \qquad \text{لكل } n \geqslant 0.$$

أَوجد جميع قيم $a_0$ التي من أَجلهَا يوجد عَدَد $A$ يحقِق $a_n = A$ لِعَدَد غير منته من قيم $n$ .

**المسألة** 2.

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث لكل عددين حقيقيين $x$ و $y$ :

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

**المسألة** 3.

أرنب غير مرئي وصياد يلعبان لعبة في المستوى الإقليدي. ينطلق الأرنب من نقطة $A_0$ وينطلق الصياد من النقطة نفسها $B_0$ . بعد $n-1$ جولة من اللعبة، يتواجد الأرنب في النقطة $A_{n-1}$ والصياد في النقطة $B_{n-1}$ .
خلال الجولة $n$ من اللعبة تحدث بشكل متتابع ثلاثة أمور:

(i) يتنقل الأرنب دون أن يُرَى إلى نقطة $A_n$ بحيث المسافة بين $A_{n-1}$ و $A_n$ تساوي 1 ؛

(ii) جهاز للملاحقة يدل الصياد على نقطة $P_n$ . المعلومة الوحيدة التي يضمنها هذا الجهاز للصياد هي أنّ المسافة بين $P_n$ و $A_n$ لا تزيد عن 1 ؛

(iii) يتنقل الصياد علنا إلى نقطة $B_n$ بحث المسافة بين $B_{n-1}$ و $B_n$ تساوي 1.

هل يمكن دائما للصياد، بغض النظر عن تنقلات الأرنب وأيّاً كانت النقط التي يرصدها الجهاز، أن يختارتنقلاته بحيث، بعد مرور $10^9$ جولة من اللعبة، يصبح متيقنا أنّ المسافة بينه وبين الأرنب لا تتعدى 100؟

*Language: Arabic (Moroccan)*

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 19 يوليوز 2017

**المسألة** 4.

لتكن $R$ و $S$ نقطتين مختلفتين على دائرة $\Omega$ حيث لا تكون القطعة $[RS]$ قطرا لها. ليكن $\ell$ المستقيم المماس للدائرة $\Omega$ في $R$ . نعتبر النقطة $T$ حيث تكون $S$ منتصف القطعة $[RT]$ . نختار النقطة $J$ على القوس الأصغر $\widehat{RS}$ للدائرة $\Omega$ بحيث تتقاطع الدائرة $\Gamma$ ، المحيطة بالمثلث $JST$ ، مع المستقيم $\ell$ في نقطتين مختلفتين. لتكن $A$ النقطة المشتركة للدائرة $\Gamma$ والمستقيم $\ell$، الأقرب من $R$ . المستقيم $(AJ)$ يقطع الدائرة $\Omega$ في نقطة أخرى $K$ .

بين أنّ المستقيم $(KT)$ مماس للدائرة $\Gamma$ .

**المسألة** 5.

ليكن $N \geq 2$ عددا صحيحا . وقف $N(N+1)$ لاعبا من فريق لكرة القدم، أطوال قاماتهم مختلفة مثنى مثنى، في صَفٍّ واحد. يريد المدرب أن يستبعد $N(N-1)$ لاعبا من هذا الصف لتتحقق في الصفّ الجديد، المكون من $2N$ لاعبا المتبقين، الشروط التالية:

(1) لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الأطول قامة،

(2) لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الثالث والرابع من حيث طول القامة،

$\vdots$

$(N)$ لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الأصغر قامة.

بين أنّه يمكن دائما للمدرب أن يحقّق رغبته.

**المسألة** 6.

يُقَال عن زوج $(x, y)$ من عددين صحيحين إنّه **نقطة أصلية** إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين $x$ و $y$ يساوي $1$ .

لتكن $S$ مجموعة منتهية من نقط أصلية؛ بين أنّه يوجد عدد صحيح موجب قطعا $n$ ، وأعداد صحيحة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بحيث لكل $(x, y)$ من المجموعة $S$ يكون لدينا:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

*Language: Arabic (Moroccan)*

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة