Çərşəmbə axşamı, 16 iyul 2019

Məsələ 1. $\mathbb{Z}$ - ilə tam ədədlər çoxluğunu işarə edək. Elə bütün $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ funksiyalarını müəyyən edin ki, istənilən a və b tam ədədləri üçün aşağıdakı şərt ödənilsin

$$f(2a) + 2f(b) = f\big(f(a+b)\big).$$

Məsələ 2. ABC üçbucağının BC tərəfi üzərində A_1 nöqtəsi, AC tərəfi üzərində isə B_1 nöqtəsi verilmişdir. AA_1 və BB_1 parçaları üzərində uyğun olaraq P və Q nöqtələri elə verilmişdir ki, PQ düz xətti AB düz xəttinə paraleldir. PB_1 düz xətti üzərində P_1 nöqtəsi elə götürülmüşdür ki, B_1 nöqtəsi P və P_1 nöqtələri arasında yerləşir və $\angle PP_1C = \angle BAC$ şərti ödənilir. Anoloji olaraq QA_1 düz xətti üzərində Q_1 nöqtəsi elə götürülmüşdür ki, A_1 nöqtəsi Q və Q_1 nöqtələri arasında yerləşir və $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ şərti ödənilir.
İsbat edin ki, P, Q, P_1 və Q_1 nöqtələri eyni çevrə üzərində yerləşirlər.

Məsələ 3. Sosial şəbəkənin 2019 sayda istifadəçisi vardır. Belə ki, istifadəçilərdən bəziləri biri-birilə dostluq edirlər və bu dostluqlar qarşılıqlıdır. Yəni A istifadəçisi B istifadəçisi ilə dostluq edirsə, onda B istifadəçisi də A istifadəçisi ilə dostluq edir. Bu sosial şəbəkədəki dostluqlar vəziyyətini dəyişən aşağıda göstərilən həmlələr hər dəfəsində bir həmlə edilmək şərti ilə çox sayda həyata keçirilə bilər:

Elə hər hansı üç A, B və C istifadəçisi seçilir ki, A istifadəçisi həm B həm də C ilə dostluq edir ancaq B və C istifadəçiləri öz aralarında dostluq etmirlər; həmin sözügedən həmlədən sonra B və C istifadəçiləri biri-birilə dostluq etməyə başlayır, lakin eyni zamanda A istifadəçisi B və C istifadəçilərin hər biri ilə dostluğu kəsir. Digər istifadəçilərin dostluq vəziyyəti isə dəyişmir.

Əvvəlcədən sosial şəbəkədə olan 1010 sayda istifadəçinin hər birinin 1009 sayda dostu, 1009 sayda istifadəçinin hər birinin isə 1010 sayda dostu vardır.

Hər istifadəçinin ən çoxu bir dostunun olması ilə nəticələnəcək həmlələr ardıcıllığının olduğunu göstərin.

Language: Azerbaijan

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir

Çərşəmbə, 17 iyul 2019

Məsələ 4.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

tənliyini ödəyən bütün (k, n) – müsbət tam ədədlər cütlərini tapın.

Məsələ 5. Bat şəhərinin bankı bir tərəfində H hərfi, digər tərəfində isə T hərfi olan qəpiklər buraxır. Bu qəpiklərdən n dənəsi soldan sağa olmaqla düzülmüşdür. Cəfər aşağıdakı əməliyyatı yerinə yetirir:
Əgər cərgədə üst tərəfi H olan $k > 0$ sayda qəpik varsa onda o soldan k –cı qəpiyi tərsinə çevirir, bütün qəpiklərin üst tərəfi T olduqda o, əməliyyatı dayandırır. Məsələn $n = 3$ olduqda düzülüş THT şəklindədirsə, onda əməliyyatlar ardıcıllığı $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ kimi olacaq, yəni üç ardıcıl əməliyyatdan sonra proses tamamlanacaqdır.

(a) İsbat edin ki, istənilən öncəki düzülüş üçün proses sonlu sayda əməliyyatdan sonra yekunlaşacaqdır.

(b) İstənilən öncəki C düzülüşü üçün $L(C)$ ilə prosesin tamamlandığı əməliyyatların sayını işarə edək. Məsələn $L(THT) = 3,\ L(TTT) = 0$.
Hər bir mümkün öncəki C düzülüşləri üçün $L(C)$ qiymətlərinin ayrı-ayrı müəyyən edilməsi ilə əldə edilən 2^n sayda ədədin ədədi ortasını tapın.

Məsələ 6. İtibucaqlı ABC üçbucağının $(AB \neq AC)$ daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini I ilə işarə edək. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş ω çevrəsi, BC, CA və AB tərtəflərinə uyğun olaraq D, E və F nöqtələrində toxunur. EF düz xəttinə perpendikulyar olan və D nöqtəsindən keçən düz xətt ikinci dəfə ω çevrəsini R nöqtəsində kəsir. AR düz xətti ω çevrəsini ikinci dəfə P nöqtəsində kəsir. PCE və PBF üçbucaqlarının xaricinə çəkilmiş çevrələr ikinci dəfə Q nöqtəsində kəsişirlər.

İsbat edin ki, DI və PQ düz xətləri, A nöqtəsindən keçən və AI düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətt üzərində kəsişirlər.

Language: Azerbaijan

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir