*სამშაბათი, 18 ივლისი, 2017*

**ამოცანა 1.** ყოველი მთელი $a_0 > 1$ რიცხვისთვის, განსაზღვრულია $a_0, a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობა შემდეგნაირად:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{თუ } \sqrt{a_n} \text{ არის მთელი რიცხვი,} \\ a_n + 3 & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში,} \end{cases} \qquad \text{ყოველი } n \geqslant 0.$$

განსაზღვრეთ $a_0$-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს რიცხვი $A$ ისეთი, რომ $a_n = A$ ტოლობა სრულდება $n$-ის უსასრულო რაოდენობა მნიშვნელობისთვის.

**ამოცანა 2.** ვთქვათ $\mathbb{R}$ არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი ნამდვილი $x$ და $y$ რიცხვებისთვის,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

**ამოცანა 3.** მონადირე და უჩინარი კურდღელი თამაშობენ თამაშს სიბრტყეზე. კურდღლის საწყისი წერტილი $A_0$ და მონადირის საწყისი წერტილი $B_0$, ერთიდაიგივეა. თამაშის $n-1$ რაუნდის შემდეგ კურდღელი იმყოფება $A_{n-1}$ წერტილში და მონადირე იმყოფება $B_{n-1}$ წერტილში. თამაშის მე-$n$ რაუნდში შემდეგი სამი რამ ხდება მოცემული თანმიმდევრობით:

(i) კურდღელი გადაადგილდება უჩინრად $A_n$ წერტილში ისე, რომ მანძილი $A_{n-1}$ და $A_n$ წერტილებს შორის ზუსტად 1-ის ტოლია.

(ii) კურდღლის საძებნი მოწყობილობა უჩვენებს მონადირეს $P_n$ წერტილს. ცნობილია, რომ საძებნი მოწყობილობა იძლევა მხოლოდ იმის გარანტიას, რომ მანძილი $P_n$ და $A_n$ წერტილებს შორის არ აღემატება 1-ს.

(iii) მონადირე გადაადგილდება, კურდღლისთვის ხილულად, ისეთ $B_n$ წერტილში, რომ მანძილი $B_{n-1}$ და $B_n$ წერტილებს შორის არის ზუსტად 1.

ყოველთვის შეუძლია თუ არა მონადირეს, როგორც არ უნდა იმოძრაოს კურდღელმა და როგორი წერტილებიც არ უნდა უჩვენოს საძებნმა მოწყობილობამ, შეარჩიოს თავისი გადაადგილებები ისე, რომ $10^9$ რაუნდის შემდეგ ჰქონდეს გარანტია, რომ მას და კურდღელს შორის მანძილი არ აღემატება 100-ს?

*Language: Georgian*

*სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*

*ოთხშაბათი, 19 ივლისი, 2017*

**ამოცანა 4.** ვთქვათ $R$ და $S$ არის $\Omega$ წრეწირის ისეთი ორი განსხვავებული წერტილი, რომ $RS$ არაა დიამეტრი. ვთქვათ $\ell$ არის $\Omega$ წრეწირისადმი $R$ წერტილში გავლებული მხები. $T$ წერტილი არის ისეთი, რომ $S$ არის $RT$ მონაკვეთის შუაწერტილი. $J$ წერტილი არჩეულია $\Omega$ წრეწირის მცირე $RS$ რკალზე ისე, რომ $JST$ სამკუთხედზე შემოხაზული $\Gamma$ წრეწირი კვეთს $\ell$-ს ორ განსხვავებულ წერტილში. ვთქვათ $A$ არის $\Gamma$ წრეწირისა და $\ell$-ის ის საერთო წერტილი, რომელიც უფრო ახლოსაა $R$-თან. $AJ$ წრფე კვეთს $\Omega$-ს კიდევ $K$ წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $KT$ წრფე არის $\Gamma$ წრეწირის მხები.

**ამოცანა 5.** მოცემულია მთელი რიცხვი $N \geqslant 2$. ერთ რიგში დგას $N(N+1)$ ფეხბურთელი, რომელთაგან ყოველ ორს ერთმანეთისაგან განსხვავებული სიმაღლე აქვს. მწვრთნელს სურს გაიყვანოს რიგიდან $N(N-1)$ მოთამაშე ისე, რომ $2N$ ფეხბურთელისგან დარჩენილ ახალ რიგში შესრულდეს შემდეგი $N$ პირობა:

(1) არავინ დგას ორ ყველაზე მაღალ ფეხბურთელს შორის,

(2) არავინ დგას სიმაღლით მესამე და სიმაღლით მეოთხე ფეხბურთელს შორის,

$\vdots$

($N$) არავინ დგას ორ ყველაზე დაბალ ფეხბურთელს შორის.

დაამტკიცეთ, რომ მწვრთნელს ყოველთვის შეუძლია ამის გაკეთება.

**ამოცანა 6.** მთელ რიცხვთა დალაგებულ $(x, y)$ წყვილს ვუწოდოთ *პრიმიტიული წერტილი* თუ $x$-ის და $y$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია. მოცემულია პრიმიტიულ წერტილთა რაღაც სასრული $S$ სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი $n$ და მთელი რიცხვები $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ისეთი, რომ ყოველი $(x, y)$-თვის $S$-დან, სრულდება ტოლობა:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

*Language: Georgian*

*სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*