

2006 m. liepos 12 d.

1 uždavinys. Trikampio ABC įbrėtinio apskritimo centras yra I . Trikampio viduje paimtas toks taškas P , kad $\angle PAB + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Įrodykite, kad $AP \geq AI$, ir lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $P = I$.

2 uždavinys. Įaisyklingoje 2006-kampio P įstrižainė vadinama gera, jeigu jos galiniai taškai dalija daugiakampio kontūrą į dvi dalis, kurias kiekvieną sudaro nelyginis kraštinių skaičius. Dugiakampio P kraštinės taip pat vadinama geromis. Tarkime, kad P suskaidytas į trikampius 2003 įstrižainėmis, kurių jokios dvi neturi bendrų taškų P viduje. Raskite, kiek daugiausia tame skaidinyje gali būti lygiašonių trikampių, turinčių dvi geras kraštines.

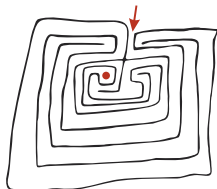
3 uždavinys. Raskite mažiausią realųjį skaičių M taip, kad nelygybė

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

būtų teisinga su visais realiaisiais skaičiais a, b ir c .

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais



2006 m. liepos 13 d.

4 uždavinys. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras (x, y) , kad

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5 uždavinys. Tarkime, kad $P(x)$ yra laipsnis $n > 1$ daugianaris su sveikaisiais koeficientais, o k – bet kuris natūralusis skaičius. Nuginėkime daugianarį $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, kur P parašyta k kartų. Įrodykite, kad yra daugiausiai n tokių sveikųjų skaičių t , jog $Q(t) = t$.

6 uždavinys. Tarkime, daugiakampio P kiekvienai kraštinei b priskirkime didžiausią plotą iš trikampių, turinčių kraštinę b ir esančių daugiakampyje P . Įrodykite, kad visoms daugiakampio P kraštinėms priskirtų plotų suma ne mažesni už dvigubą P plotą.

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais