lördag, 8. juli 2023

Problem 1. Bestäm alla sammansatta heltal $n > 1$ som uppfyller följande villkor: om $d_1, d_2, \ldots, d_k$ är de alla positiva delarna till n med $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ så är d_i en delare till $d_{i+1} + d_{i+2}$ för varje $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Problem 2. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med $AB < AC$. Låt Ω vara den omskrivna cirkeln till ABC. Låt S vara mittpunkten på bågen CB av Ω som innehåller A. Normalen till BC genom A skär BS i D och skär Ω igen i $E \neq A$. Linjen genom D som är parallell med BC skär linjen BE i L. Beteckna den omskrivna cirkeln till triangeln BDL med ω. Låt ω skära Ω igen i $P \neq B$. Visa att tangenten till ω i P skär linjen BS på den inre bisektrisen till $\angle BAC$.

Problem 3. Bestäm för varje heltal $k \geqslant 2$ alla oändliga följder av positiva heltal $a_1, a_2, \ldots$ för vilka det finns ett polynom P av formen $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, där $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ är icke-negativa heltal, sådant att

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

för varje heltal $n \geqslant 1$.

Language: Swedish

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

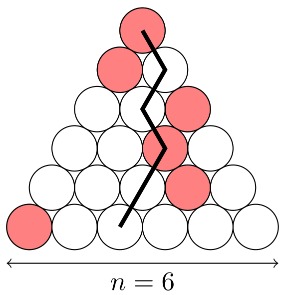
söndag, 9. juli 2023

Problem 4. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ vara parvis olika positiva reella tal sådana att

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

är ett heltal för varje $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Visa att $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problem 5. Låt n vara ett positivt heltal. En *japansk triangel* består av $1 + 2 + \cdots + n$ cirklar som är arrangerade i form av en liksidig triangel så att rad i består av exakt i cirklar, precis en av vilka är rödfärgad, för varje $i = 1, 2, \ldots, n$. En *ninjaväg* i en japansk triangel är en följd av n cirklar som börjar i den första raden, sedan alltid går från en cirkel till en av de två cirklarna direkt under den, och slutar i den sista raden. Här är ett exempel på en japansk triangel där $n = 6$ tillsammans med en ninjaväg i triangeln som innehåller två röda cirklar.



Bestäm, uttryckt i n, det största k sådant att varje japansk triangel har en ninjaväg som innehåller minst k röda cirklar.

Problem 6. Låt ABC vara en liksidig triangel. Låt A_1, B_1, C_1 vara inre punkter i ABC sådana att $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, och

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Låt BC_1 och CB_1 skära varandra i A_2, låt CA_1 och AC_1 skära varandra i B_2, och låt AB_1 och BA_1 skära varandra i C_2.
Visa: om triangeln $A_1B_1C_1$ är icke-likbent så går de tre omskrivna cirklarna till trianglarna AA_1A_2, BB_1B_2 och CC_1C_2 alla genom två gemensamma punkter.

(Obs: En triangel kallas icke-likbent om den inte har två sidor som är lika långa.)