화요일, 2013 년 7 월 23 일

1. 임의의 정의 옹근수 k 와 n 에 대하여 k 개의 (서로 같을수도 있는) 정의 옹근수 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 가 존재하여

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

이 선다는것을 증명하여라.

2. 평면우의 4027 개점들의 한 모임은 만일 이것이 2013 개의 붉은점과 2014 개의 푸른점으로 이루어지고 이 점모임의 그 어느 세점도 한 직선우에 놓이지 않는다면 ñ꼴롬비아식ò 점모임이라고 한다.

평면에 몇개의 직선들을 그을 때 전체평면은 이 직선들에 의해 여러개의 구역들로 분할된다.

평면우의 직선들의 한 모임은 만일 다음의 두가지 조건들이 만족될 때 주어진 꼴롬비아식 점모임에 ñ꼭 맞는다ò고 부른다 :

- 그 어느 직선도 이 점모임의 점을 지나지 않는다;
- 그 어느 구역도 붉은점과 푸른점을 동시에 함께 포함하지 않는다.

이때 4027 개점들로 이루어진 임의의 꼴롬비아식 점모임에 대하여 그에 꼭 맞는 k 개직선들의 모임이 존재하게 되는 k 의 최소값을 구하여라.

3. 삼각형 ABC 의 정점 A 에 관한 방접원이 변 BC 와 접하는 점을 A_1 라고 하고 변 CA 우의 점 B_1 와 변 AB 우의 점 C_1 도 B 와 C 에 관한 방접원을 각각 리용하여 마찬가지로 정의하자.

이때 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외심이 삼각형 ABC 의 외접원둘레우에 놓인다면 삼각형 ABC 가 직삼각형이라는것을 증명하여라.

여기서 삼각형 ABC 의 정점 A 에 관한 방접원은 선분 BC 와 반직선 AB 의 B 를 지난 부분, 그리고 반직선 AC 의 C 를 지난 부분에 접하는 원이다. B 와 C 에 관한 방접원도 마찬가지로 정의된다.

제한시간 : 4 시간 30 분

문제당 : 7 점

수요일, 2013 년 7 월 24 일

4. ABC 는 수심이 H 인 뾰족삼각형이고 W 는 변 BC 우의 한 내부점이다. B 와 C 에서 맞은변들에 그은 수직선의 밑점들을 각각 M, N 이라고 하자. 삼각형 BWN 의 외접원을 ω_1 로 표시하고 X 를 WX 가 ω_1 의 직경으로 되는 ω_1 우의 점이라고 하자. 마찬가지로 삼각형 CWM 의 외접원을 ω_2 로 표시하고 Y 를 WY 가 ω_2 의 직경으로 되는 ω_2 우의 점이라고 하자. 이때 세 점 X, Y, H 가 한 직선우에 놓인다는것을 증명하여라.

5. $Q_{>0}$ 을 정의 유리수들의 모임이라고 하고 함수 $f: Q_{>0} \to R$ 가 다음의 세가지 조건들을 만족한다고 하자.
   1) 모든 $x, y \in Q_{>0}$ 에 대하여 $f(x)f(y) \ge f(xy)$;
   2) 모든 $x, y \in Q_{>0}$ 에 대하여 $f(x+y) \ge f(x) + f(y)$;
   3) 어떤 유리수 $a > 1$ 이 있어서 $f(a) = a$ 가 선다.

   이때 모든 $x \in Q_{>0}$ 에 대하여 $f(x) = x$ 가 선다는것을 증명하여라.

6. $n \ge 3$ 이 옹근수일 때 $n+1$ 등분된 한 원둘레를 생각하자. 번호 $0, 1, \cdots, n$ 를 가지고 이 $n+1$ 개 등분점들에 번호붙이기를 하되 매 번호가 꼭 한번씩 나타나도록 하자; 두개의 이러한 번호붙이기는 만일 하나가 다른것으로 부터 이 원둘레의 적당한 회전에 의하여 얻어진다면 같은것으로 간주한다.

   한 번호붙이기는 만일 $a+d = b+c$ 인 임의의 네 번호 $a < b < c < d$ 에 대하여 번호 a 와 d 가 붙여진 점들을 맺는 활줄과 번호 b 와 c 가 붙여진 점들을 맺는 활줄이 서로 사귀지 않으면 ñ좋은ò 번호붙이기라고 부른다.

   M 를 좋은 번호붙이기의 개수라고 하고 N 를 $x+y \le n$ 와 $gcd(x, y) = 1$ (x 와 y 의 최대공통약수가 1 이다)을 만족하는 정의 옹근수들의 순서쌍 (x, y) 의 개수라고 하자.

   이때 $M = N+1$ 이 선다는것을 증명하여라.