15 Temmuz 2009 Çarşamba

Soru 1. n pozitif bir tam sayı; $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ de, $\{1, \ldots, n\}$ kümesine ait olan ve, her $i = 1, \ldots, k-1$ için, n sayısının $a_i(a_{i+1} - 1)$ sayısını bölmesini sağlayan birbirinden farklı tam sayılar olsun. n sayısının $a_k(a_1 - 1)$ sayısını bölmediğini kanıtlayınız.

Soru 2. O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi; P ve Q da, sırasıyla, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarları üstünde, köşelerden farklı iki nokta olsun. K, L ve M sırasıyla, $[BP]$, $[CQ]$ ve $[PQ]$ doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere; K, L ve M den geçen çembere Γ diyelim. PQ doğrusu Γ çemberine teğet ise, $|OP| = |OQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

Soru 3. Pozitif tam sayılardan oluşan ve kesin artan bir $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{ve} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

altdizilerinin her ikisi de birer aritmetik dizi ise, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin kendisinin de bir aritmetik dizi olduğunu kanıtlayınız.

Süre 4 1/2 saattir.
Her problem 7 puan değerindedir.

16 Temmuz 2009 Perşembe

Soru 4. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde, $\widehat{CAB}$ ve $\widehat{ABC}$ açılarının açıortayları $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarını sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. K, ADC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olmak üzere; $m(\widehat{BEK}) = 45^\circ$ ise, $m(\widehat{CAB})$ nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Soru 5. Pozitif tam sayılar kümesinden pozitif tam sayılar kümesine tanımlı olan ve tüm a ve b pozitif tam sayıları için, yoz olmayan ve kenar uzunlukları

$$a,\ f(b)\ \text{ ve }\ f(b + f(a) - 1)$$

olan bir üçgenin bulunmasını sağlayan bütün f fonksiyonlarını belirleyiniz.

(*Yoz* üçgen, köşeleri doğrudaş olan üçgendir.)

Soru 6. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirinden farklı pozitif tam sayılar; M de, $n-1$ tane pozitif tam sayıdan oluşan ve $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sayısını içermeyen bir küme olsun. Bir çekirge, gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak sağa doğru, uzunlukları kendi seçtiği bir sırada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n sıçrayış yapacaktır. Çekirgenin sıçrayışlarının uzunluklarının sırasını, hiçbir sıçrayışta M ye ait bir noktaya düşmeyecek biçimde seçebileceğini kanıtlayınız.

Süre 4 1/2 saattir.
Her problem 7 puan değerindedir.