الثلاثاء 18 جويلية 2017

المسألة 1.

لكل عدد صحيح $a_0 > 1$ نعرّف المتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$ بما يلي :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{إذا كان } \sqrt{a_n} \text{ عددا صحيحا} \\ a_n + 3 & \text{إذا لم يكن كذلك} \end{cases} \qquad \text{لكل } n \geqslant 0.$$

أوجد جميع قيم a_0 التي من أجلها يوجد عَدَد A يحقق $a_n = A$ لِعَدَد غير منته من قيم n .

المسألة 2.

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث لكل عددين حقيقيين x و y :

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

المسألة 3.

أرنب غير مرئي وصياد يلعبان لعبة في المستوي الإقليدي. ينطلق الأرنب من نقطة A_0 وينطلق الصياد من النقطة نفسها B_0 . بعد $n-1$ جولة من اللعبة، يتواجد الأرنب في النقطة A_{n-1} والصياد في النقطة B_{n-1} .
خلال الجولة n من اللعبة تحدث بشكل متتابع ثلاثة أمور:

(i) يتنقل الأرنب دون أن يُرَى إلى نقطة A_n بحيث المسافة بين A_{n-1} و A_n تساوي 1 ؛

(ii) جهاز للملاحقة يدل الصياد على نقطة P_n . المعلومة الوحيدة التي يضمنها هذا الجهاز للصياد هي أنّ المسافة بين P_n و A_n لا تزيد عن 1 ؛

(iii) يتنقل الصياد علنا إلى نقطة B_n بحث المسافة بين B_{n-1} و B_n تساوي 1.

هل يمكن دائما للصياد، بغض النظر عن تنقلات الأرنب وأيّاً كانت النقط التي يرصدها الجهاز، أن يختارتنقلاته بحيث، بعد مرور 10^9 جولة من اللعبة، يصبح متيقنا أنّ المسافة بينه وبين الأرنب لا تتعدى 100؟

Language: Arabic (Tunisian)

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة
تمنح 7 نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 19 جويلية 2017

المسألة 4.

لتكن R و S نقطتين مختلفتين على دائرة Ω حيث لا تكون القطعة $[RS]$ قطرا لها. ليكن ℓ المستقيم المماس للدائرة Ω في R . نعتبر النقطة T حيث تكون S منتصف القطعة $[RT]$. نختار النقطة J على القوس الأصغر $\widehat{RS}$ للدائرة Ω بحيث تتقاطع الدائرة Γ ، المحيطة بالمثلث JST ، مع المستقيم ℓ في نقطتين مختلفتين. لتكن A النقطة المشتركة للدائرة Γ والمستقيم ℓ ، الأقرب من R . المستقيم (AJ) يقطع الدائرة Ω في نقطة أخرى K .

بين أنّ المستقيم (KT) مماس للدائرة Γ .

المسألة 5.

ليكن $N \geq 2$ عددا صحيحا . وقف $N(N+1)$ لاعبا من فريق لكرة القدم، أطوال قاماتهم مختلفة مثنى مثنى، في صَفٍّ واحد. يريد المدرب أن يستبعد $N(N-1)$ لاعبا من هذا الصف لتتحقق في الصفّ الجديد، المكون من $2N$ لاعبا المتبقين، الشروط التالية:

(1) لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الأطول قامة،

(2) لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الثالث والرابع من حيث طول القامة،

$\vdots$

(N) لا يوجد أي لاعب بين اللّاعبَينِ الأصغر قامة.

بين أنّه يمكن دائما للمدرب أن يحقّق رغبته.

المسألة 6.

يُقَال عن زوج (x, y) من عددين صحيحين إنّه **نقطة أصلية** إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y يساوي 1 .

لتكن S مجموعة منتهية من نقط أصلية؛ بين أنّه يوجد عدد صحيح موجب تماما n ، وأعداد صحيحة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بحيث لكل (x, y) من المجموعة S يكون لدينا:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Arabic (Tunisian)

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

تمنح 7 نقاط لكلّ مسألة