

12 ביולי 2006

שאלה מספר 1.

יהי ABC משולש שמרכז המעגל החסום שלו הוא I . נקודה P הנמצאת בתוך המשולש מקיימת את השוויון

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

הוכח כי $AP \geq AI$ וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

שאלה מספר 2.

יהי P מצולע משוכלל בעל 2006 צלעות. אלכסון של P נקרא טוב אם שני קצותיו מחלקים את ההיקף של P לשני חלקים, שכל אחד מהם מורכב ממספר איזוגי של צלעות של P . הצלעות של המצולע P נקראות גם הן טובות.

נניח כי המצולע P חולק למשולשים על ידי העברת 2003 אלכסונים, כך שאין בהם שני אלכסונים בעלי נקודה משותפת הנמצאת בתוך המצולע P . מצא את המספר הגדול ביותר של משולשים שווים שוקיים, שיש להם שתי צלעות טובות, אשר יכולים להתקבל בתצורה כזאת.

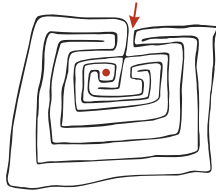
שאלה מספר 3.

מצא את המספר הממשי M הקטן ביותר, כך שאי השוויון

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

מתקיים עבור כל שלושה מספרים ממשיים a, b, c .

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות



13 ביולי 2006

שאלה מספר 4.

מצא את כל הזוגות (x, y) של מספרים שלמים כך ש

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

שאלה מספר 5.

יהי $P(x)$ פולינום בעל דרגה $n > 1$ ובעל מקדמים שלמים, ויהי k מספר שלם חיובי. נתבונן בפולינום $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, כאשר P מופיע k פעמים. הוכח כי קיימים לכל היותר n מספרים שלמים t כך ש $Q(t) = t$.

שאלה מספר 6.

לכל צלע b של פוליגון קמור P נשייך את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחת שלו היא b וכולו מוכל ב- P . הוכח כי הסכום של השטחים המשוייכים לצלעות של P שווה לפחות פעמיים השטח של P .

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות