torek, 15. julij 2025

Naloga 1. Premica v ravnini se imenuje *sončna*, če **ni** vzporedna ne z x-osjo, ne z y-osjo in tudi ne s premico $x + y = 0$.

Naj bo $n \geqslant 3$ dano celo število. Določi vsa nenegativna cela števila k, za katera obstaja n različnih premic v ravnini, ki zadoščajo obema naslednjima pogojema:

- za vsa naravna števila a in b, za katera velja $a + b \leqslant n + 1$, leži točka (a, b) vsaj na eni premici;
- natanko k od teh n premic je sončnih.

Naloga 2. Naj bosta krožnica Ω s središčem M in krožnica Γ s središčem N taki, da je polmer krožnice Ω krajši od polmera krožnice Γ. Privzemimo, da se krožnici Ω in Γ sekata v dveh različnih točkah A in B. Premica MN seka krožnico Ω v točki C in krožnico Γ v točki D, tako da točke C, M, N in D ležijo na premici v tem vrstnem redu. Naj bo P središče trikotniku ACD očrtane krožnice. Premica AP ponovno seka krožnico Ω v točki $E \neq A$. Premica AP ponovno seka krožnico Γ v točki $F \neq A$. Naj bo H višinska točka trikotnika PMN.

Dokaži, da je premica, ki gre skozi točko H in je vzporedna premici AP, tangenta na krožnico, ki je očrtana trikotniku BEF.

(*Višinska točka* trikotnika je presečišče višin tega trikotnika.)

Naloga 3. Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *fantastična*, če

$$f(a) \ \text{ deli } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

za vsa naravna števila a in b.

Določi najmanjšo realno konstanto c, za katero je $f(n) \leqslant cn$ za vse fantastične funkcije f in vsa naravna števila n.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

sreda, 16. julij 2025

Naloga 4. *Pravi delitelj* naravnega števila N je pozitivni delitelj naravnega števila N, ki je različen od N.
Neskončno zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ sestavljajo naravna števila, od katerih ima vsako vsaj tri prave delitelje. Za vsak $n \geqslant 1$ je naravno število a_{n+1} vsota treh največjih pravih deliteljev naravnega števila a_n.

Določi vse možne vrednosti a_1.

Naloga 5. Ana in Meta igrata igro *neenakoalasti*, ki je igra za dve igralki in katere pravila so odvisna od pozitivnega realnega števila λ, ki ga obe igralki poznata. V n-ti potezi igre (ki se začne z $n = 1$) se zgodi naslednje:

- Če je n liho število, Ana izbere nenegativno realno število x_n, tako da je
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Če je n sodo število, Meta izbere nenegativno realno število x_n, tako da je
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Če ena od igralk ne more izbrati ustreznega števila x_n, se igra konča in druga igralka zmaga. Če se igra nadaljuje in se nikoli ne konča, potem nobena od igralk ne zmaga. Vsa izbrana števila so poznana obema igralkama.

Določi vse vrednosti λ, za katere ima Ana zmagovalno strategijo, in vse vrednosti λ, za katere ima Meta zmagovalno strategijo.

Naloga 6. Velikost igralne plošče je 2025×2025 enotskih kvadratov. Lenart želi položiti na igralno ploščo nekaj pravokotnih ploščic, lahko tudi različnih velikosti, tako da bo vsaka stranica vsake od ploščic v celoti ležala na stranicah enotskih kvadratov in bo vsak enotski kvadrat prekrit z največ eno ploščico.

Določi najmanjše število ploščic, ki jih mora Lenart položiti na igralno ploščo, tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu igralne plošče natanko en enotski kvadrat, ki ne bo prekrit z nobeno ploščico.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.