вторник, 16. јули 2024

Задача 1. Определи ги сите реални броеви α такви што, за секој позитивен цел број n, целиот број

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

е делив со n. (Со $\lfloor z \rfloor$ е обележан најголемиот цел број помал или еднаков на z. На пример $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, а $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Задача 2. Определи ги сите парови (a, b) од позитивни цели броеви за кои постојат позитивни цели броеви g и N такви што

$$\gcd(a^n + b, \, b^n + a) = g$$

важи за секој цел број $n \geqslant N$. (Со $\gcd(x, y)$ е означен најголемиот заеднички делител на целите броеви x и y.)

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е бесконечна низа од позитивни цели броеви и нека N е позитивен цел број. Знаеме дека, за секој $n > N$, a_n е еднаков на бројот на појавувања на a_{n-1} во низата $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Докажи дека барем една од низите $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и $a_2, a_4, a_6, \ldots$ е однекаде периодична. (Бесконечна низа $b_1, b_2, b_3, \ldots$ се нарекува *однекаде периодична* ако постојат позитивни цели броеви p и M такви што $b_{m+p} = b_m$ за секој $m \geqslant M$.)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

среда, 17. јули 2024

Задача 4. Нека ABC е триаголник во кој $AB < AC < BC$. Нека впишаната кружница на триаголникот ABC е ω, а нејзиниот центар е I. Нека X е точката на правата BC различна од C таква што правата низ X паралелна на AC е тангента на ω. Слично, нека Y е точката на правата BC различна од B таква што правата низ Y паралелна на AB е тангента на ω. Нека AI ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC по втор пат во $P \neq A$. Нека K и L се средините на отсечките AC и AB, соодветно.

Докажи дека $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задача 5. Полжавот Турбо ја игра следната игра на табла со 2024 редови и 2023 колони. На таблата има чудовишта скриени во 2022 од полињата. На почетокот Турбо не знае во кои полиња има чудовишта, но знае дека има по точно едно чудовиште во секој ред освен првиот и последниот, и дека секоја колона содржи најмногу едно чудовиште.

Турбо прави серија од обиди да стигне од првиот до последниот ред. Во секој обид, тој одбира да почне од произволно поле во првиот ред, па последователно се придвижува во соседно поле на моменталното, кое има заедничка страна. (Тој смее да се врати на поле кое веќе го посетил.) Ако стапне на поле со чудовиште, обидот завршува и тој е транспортиран во првиот ред, за следниот обид. Чудовиштата не се движат, а Турбо памти во кои од полињата што ги поминал има чудовиште и во кои нема. Ако стигне до поле во последниот ред обидот заврува, како и играта.

Определи го најмалиот број на обиди n за кој Турбо има стратегија која гарантира дека ќе стигне во последниот ред по $n-$ тиод обид или порано, независно од поставеноста на чудовиштата.

Задача 6. Нека $\mathbb{Q}$ е множеството од рационални броеви. За функцијата $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ велиме дека е *батска* ако го исполнува следното својствп: за секои $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Докажи дека постои цел број c таков што за секоја батска функција f постојат најмногу c различни рационални броеви меѓу броевите $f(r) + f(-r)$ добиени за секој рационален број r, а потоа најди ја најмалата можна вредност за c.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.