Srijeda, 15. Juli, 2009.

Problem 1. Neka je n prirodan broj i neka su $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, \ldots, n\}$, takvi da n dijeli $a_i(a_{i+1} - 1)$ za $i = 1, \ldots, k-1$. Dokaži da n ne dijeli $a_k(a_1 - 1)$.

Problem 2. Neka je ABC trougao sa centrom opisane kružnice u tački O. Tačke P i Q su unutrašnje tačke stranica CA i AB, redom. Neka su K, L i M središnje tačke segmenata BP, CQ i PQ, redom i neka je Γ kružnica koja prolazi kroz K, L i M. Pretpostavimo da je prava PQ tangenta na kružnicu Γ. Dokaži da je $OP = OQ$.

Problem 3. Pretpostavimo da je $s_1, s_2, s_3, \ldots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, takav da su oba podniza

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{i} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

aritmetička. Dokaži da je niz $s_1, s_2, s_3, \ldots$ aritmetički.

Vrijeme: 4 sata and 30 minuta
Svaki problem vrijedi 7 bodova

Četvrtak, 16. Juli, 2009.

Problem 4. Neka je ABC trougao sa $AB = AC$. Simetrale uglova $\angle CAB$ i $\angle ABC$ sijeku stranice BC i CA u D i E, redom. Neka je K centar upisane kružnice trougla ADC. Pretpostavimo da je $\angle BEK = 45°$. Naći sve moguće vrijednosti ugla $\angle CAB$.

Problem 5. Odredi sve funkcije f, sa skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva, takve da, za sve prirodne brojeve a i b, postoji nedegenerisani trougao sa stranama dužina

$$a, \ f(b) \ \text{ i } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Trougao je *nedegenerisani* ako mu vrhovi nisu kolinearni.)

Problem 6. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti prirodni brojevi i neka je M skup od $n-1$ prirodnih brojeva, koji ne sadrži $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Skakavac skače duž realne ose, počinjući u tački 0, praveći n skokova udesno sa dužinama $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u nekom poretku. Dokaži da je poredak moguće odabrati tako da skakavac nikad ne skoči ni na jednu tačku iz M.

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem vrijedi 7 bodova.