

2013 年 7 月 23 日，星期二

**問題 1.** 證明對任一對的正整數  $k$  與  $n$ ，存在  $k$  個（不必然相異的）正整數  $m_1, m_2, \dots, m_k$  使得

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

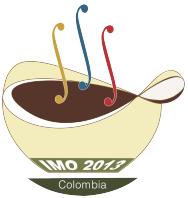
**問題 2.** 對於平面上的 4027 個點的配置方式，如果其中的 2013 點為紅色、剩下的 2014 個點為藍色、且任三點不共線，則稱此配置方式為哥倫比亞式配置。在平面上畫出若干條直線，可以將平面分割成若干個區域。如果這些直線的排法滿足下列兩個條件，我們就稱這是一個好直線組：

- 任一條線不通過哥倫比亞式配置中的任何一點。
- 任一區域中不會同時出現兩種顏色的點。

求具有下列性質的最小的  $k$ ：對任何 4027 個點的哥倫比亞式配置，存在由  $k$  條直線構成的好直線組。

**問題 3.** 設三角形  $ABC$  相對於頂點  $A$  的旁切圓與邊  $BC$  切於點  $A_1$ ，並用類似的方式利用相對於頂點  $B, C$  的旁切圓分別定義  $AC$  邊上的點  $B_1$  與  $AB$  邊上的點  $C_1$ 。已知三角形  $A_1B_1C_1$  的外心落在三角形  $ABC$  的外接圓上。證明三角形  $ABC$  為直角三角形。

（所謂三角形  $ABC$  相對於頂點  $A$  的旁切圓，指的是與  $BC$  邊相切、並且與邊  $AB, AC$  的延長線相切的圓。相對於頂點  $B, C$  的旁切圓可類似定義。）



2013 年 7 月 24 日，星期三

**問題 4.** 設  $ABC$  為銳角三角形， $H$  為其垂心，而  $W$  為  $BC$  邊上嚴格介於  $B, C$  之間的一點。令  $M, N$  分別為由  $B, C$  點所引的高的垂足。設  $\omega_1$  是三角形  $BWN$  的外接圓， $X$  為  $\omega_1$  上的一點，且  $WX$  是  $\omega_1$  的直徑。同理設  $\omega_2$  是三角形  $CWM$  的外接圓， $Y$  為  $\omega_2$  上的一點，且  $WY$  是  $\omega_2$  的直徑。證明  $X, Y, H$  三點共線。

**問題 5.** 將所有正有理數所成的集合記為  $\mathbb{Q}_{>0}$ 。設函數  $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足下列三個條件：

- (i) 對所有的  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ， $f(x)f(y) \geq f(xy)$  均成立；
- (ii) 對所有的  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ， $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  均立；
- (iii) 存在有理數  $a > 1$  滿足  $f(a) = a$ 。

證明  $f(x) = x$  對所有  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$  均成立。

**問題 6.** 設整數  $n \geq 3$ 。考慮一個圓上的  $n+1$  個間隔相等的點，及所有將這些點以整數  $0, 1, \dots, n$  作為標籤的標記法，其中每一個數字恰使用一次；兩個標記法中，如果其中一個標記法經過圓的旋轉後能夠得到另一個標記法，則這兩個標記法視為相同。若對滿足  $a+d = b+c$  的任意四個標籤  $a < b < c < d$ ，標籤  $a$  與標籤  $d$  兩點連成的弦及標籤  $b$  與標籤  $c$  兩點連成的弦均不相交時，稱此種標記法為優美的。

令  $M$  表示所有優美標記法的個數；又令  $N$  表示滿足  $x+y \leq n$ 、且  $\gcd(x, y) = 1$  的正整數的有序數對  $(x, y)$  的組數。證明

$$M = N + 1.$$