

الثلاثاء, 15 جويلية 2025

مسألة 1. نقول عن مستقيم من المستوي أنه شمسي إذا كان لا يوازي أيًا من محور الفواصل، محور الترتيب، والمستقيم ذي المعادلة $x + y = 0$.

- ليكن $n \geq 3$ عددا طبيعيا معطى. حدد كل الأعداد الطبيعية k بحيث يوجد n مستقيما مختلفا من المستوي تحقق الشرطين التاليين :
 - من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين a و b حيث $a + b \leq n + 1$ ، النقطة التي احداثياها (a, b) تقع على أحد المستقيمات على الأقل، و
 - يوجد من بينها بالضبط k مستقيما شمسيا.

مسألة 2. لتكن Ω و Γ دائرتين مركزاهما M و N ، على الترتيب، بحيث نصف قطر الدائرة Ω أصغر تماما من نصف قطر الدائرة Γ . نفرض أن Ω و Γ يتقاطعان في نقطتين متميزتين A و B . المستقيم (MN) يقطع Ω في C و Γ في D ، بحيث النقط M, C, D و N, A, B موجودة عليه بهذا الترتيب. لتكن النقطة P مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD . المستقيم (AP) يقطع Ω ثانية في $E \neq A$. المستقيم (AP) يقطع Γ ثانية في $F \neq A$. لتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث PMN . أثبت أن المستقيم الذي يشمل H و يوازي (AP) يمس الدائرة المحيطة بالمثلث BEF .

مسألة 3. لتكن \mathbb{N}^* مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة. نقول عن دالة $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ أنها ممتازة إذا كانت العلاقة

$$b^a - f(b)^{f(a)}$$

- من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين a و b .
- أوجد أصغر ثابت حقيقي c بحيث $f(n) \leq cn$ من أجل كل دالة ممتازة f وكل عدد طبيعي غير معدوم n .

الأربعاء، 16. جويلية 2025

مسألة 4. قاسم تام لعدد طبيعي m هو قاسم موجب لـ m يختلف عن m نفسه.

لتكن a_1, a_2, \dots متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية غير المعدومة، لكل حد منها على الأقل ثلاثة قواسم تامة. من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، العدد الطبيعي a_{n+1} هو مجموع الثلاثة قواسم التامة الكبرى لـ a_n .
أوجد كل القيم الممكنة لـ a_1 .

مسألة 5. إلياس وياسين يلعبان لعبة المتكولة، وهي لعبة ثنائية تعتمد على عدد حقيقي موجب تماماً λ معروف عند اللاعبين. في الدور رقم n للعبة (بدءاً بـ $n = 1$)، يكون ما يلي:

• إذا كان n عدداً فردياً، يختار إلياس عدداً حقيقياً موجباً x_n حيث

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

• إذا كان n زوجياً، يختار ياسين عدداً حقيقياً موجباً x_n حيث

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

إذا كان أحد اللاعبين لا يستطيع اللعب في دوره، تنتهي اللعبة ويفوز اللاعب الآخر. إذا استمرت اللعبة إلى الأبد، لا يفوز أي من اللاعبين. كل الأعداد المختارة x_n معروفة لدى اللاعبين.

حدد كل قيم λ التي من أجلها يكون لإلياس استراتيجية للفوز لكل قيمة التي من أجلها يكون لياسين استراتيجية للفوز.

مسألة 6. نعتبر شبكة 2025×2025 من مربعات وحدة. تريد ليان وضع بلاطات مستطيلة على الشبكة، يمكن أن تكون أبعادها مختلفة، حيث كل ضلع لكل بلاطة يقع على خط من خطوط الشبكة و كل مربع مغطى على الأكثر ببلاطة واحدة.

أوجد أصغر عدد ممكن من البلاطات التي تحتاج ليان وضعها على الشبكة حتى يبقى بالضبط في كل صف وفي كل عمود من الشبكة مربع واحد غير مغطى بأي بلاطة.