Tisdag, den 8 juli, 2014

Uppgift 1. Låt $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ vara en oändlig följd av positiva heltal. Visa att det finns ett entydigt bestämt heltal $n \geq 1$, sådant att

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Uppgift 2. Låt $n \geq 2$ vara ett heltal. Betrakta ett $n \times n$ schackbräde indelat i n^2 enhetskvadrater. En utplacering av n torn på detta bräde är *fredlig* om varje rad och varje kolonn innehåller exakt ett torn.

Bestäm det största positiva heltal k sådant att det för varje fredlig utplacering av n torn finns en $k \times k$ kvadrat som inte innehåller torn i någon av sina k^2 enhetskvadrater.

Uppgift 3. I en konvex fyrhörning $ABCD$ är $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Låt punkten H på BD vara sådan att AH är vinkelrät mot BD. Vidare låt punkterna S och T ligga på sidorna AB och AD, respektive, så att H ligger inuti triangeln SCT och

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Visa att linjen BD tangerar den omskrivna cirkeln till triangeln TSH.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng

Onsdag, den 9 juli, 2014

Uppgift 4. Punkerna P och Q ligger på sidan BC av den spetsiga triangeln ABC så att $\angle PAB = \angle BCA$ och $\angle CAQ = \angle ABC$.

Punkterna M och N ligger på linjerna AP och AQ, respektive, så att P är mittpunkten på AM och Q är mittpunkten på AN. Visa att linjerna BM och CN skär varandra på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC.

Uppgift 5. För varje positivt heltal n, utfärdar Bank of Cape Town mynt i valören $\frac{1}{n}$. Givet en ändlig mängd av sådana mynt (ej nödvändigtvis i olika valörer) med totalvärde högst $99 + \frac{1}{2}$, visa att det är möjligt att dela in denna mängd i 100 eller färre grupper, så att varje grupp har totalvärde högst 1.

Uppgift 6. En mängd av linjer i planet sägs vara i *allmän position* om inga två är parallella och inga tre går genom en och samma punkt. En mängd av linjer i allmän position delar planet i ett antal områden, av vilka några har ändlig area; dessa kallas för *ändliga områden*.

Visa att för tillräckligt stora n gäller, att det i varje mängd av n linjer i allmän position är möjligt att färga minst $\sqrt{n}$ av linjerna i blått på ett sådant sätt att inget av de uppkomna ändliga områdena har hela randen blå.

Anmärkning: Resultatet med $\sqrt{n}$ ersatt med $c\sqrt{n}$ kommer att belönas med poäng beroende på värdet av konstanten c.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng