dinsdag 15 juli 2025

Opgave 1. Een lijn (rechte) in het vlak is *zonnig* als die **niet** evenwijdig is met de x-as, de y-as of de lijn $x + y = 0$.

Laat een geheel getal $n \geqslant 3$ gegeven zijn. Bepaal alle gehele getallen $k \geqslant 0$ zodanig dat er n verschillende lijnen in het vlak bestaan die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

- voor alle gehele getallen $a > 0$ en $b > 0$ met $a + b \leqslant n + 1$, ligt het punt (a, b) op ten minste één van die lijnen; en
- precies k van die n lijnen zijn zonnig.

Opgave 2. Laat Ω en Γ cirkels zijn met middelpunten respectievelijk M en N, zodanig dat de straal van Ω (strikt) kleiner is dan de straal van Γ. Veronderstel dat cirkels Ω en Γ elkaar snijden in twee verschillende punten A en B. Lijn (rechte) MN snijdt Ω in C en Γ in D, zodanig dat de punten C, M, N en D in die volgorde op de lijn liggen. Zij P het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ACD$. Lijn AP snijdt Ω nogmaals in $E \neq A$. Lijn AP snijdt Γ nogmaals in $F \neq A$. Zij H het hoogtepunt van $\triangle PMN$.

Bewijs dat de lijn door H evenwijdig met AP raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle BEF$.

(Het *hoogtepunt* van een driehoek is het snijpunt van zijn hoogtelijnen.)

Opgave 3. Zij $\mathbb{Z}_{>0}$ de verzameling van (strikt) positieve gehele getallen. Een functie $f \colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ noemen we *geweldig* als voor alle gehele getallen $a > 0$ en $b > 0$ geldt:

$$f(a) \text{ is een deler van } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Bepaal de kleinste reële constante c zodanig dat het volgende geldt: $f(n) \leqslant cn$ voor alle geweldige functies f en voor alle gehele getallen $n > 0$.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

woensdag 16 juli 2025

Opgave 4. Een *strikte deler* van een positief geheel getal N is een van N verschillende positieve deler van N.

De oneindige rij $a_1, a_2, \ldots$ bestaat uit (strikt) positieve gehele getallen die elk ten minste drie strikte delers hebben. Voor elke $n \geqslant 1$ is a_{n+1} de som van de drie grootste strikte delers van a_n.

Bepaal alle mogelijke waarden van a_1.

Opgave 5. Amalia en Boris spelen een spel voor twee personen waarvan de regels afhangen van een reëel getal $\lambda > 0$ dat beide spelers kennen. In de n^{de} beurt van het spel (beginnend bij $n = 1$) gebeurt het volgende:

- als n oneven is, kiest Amalia een reëel getal $x_n \geqslant 0$ zodanig dat
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n;$$
- als n even is, kiest Boris een reëel getal $x_n \geqslant 0$ zodanig dat
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Als een speler geen getal x_n kan kiezen dat voldoet, dan eindigt het spel en wint de andere speler. Als het spel eindeloos doorgaat, wint geen van beide spelers. Beide spelers kennen alle gekozen getallen.

Bepaal alle waarden van λ waarvoor Amalia een winnende strategie heeft, en alle waarden van λ waarvoor Boris een winnende strategie heeft.

Opgave 6. Beschouw een 2025×2025 rooster van eenheidsvierkantjes. Matilde wil op het rooster enkele rechthoekige tegels plaatsen, mogelijk van verschillende afmetingen, zodanig dat de zijden van elke tegel op roosterlijnen liggen en elk eenheidsvierkantje bedekt wordt door ten hoogste één tegel.

Bepaal het minimale aantal tegels dat Matilde moet plaatsen zodanig dat elke rij en elke kolom van het rooster precies één eenheidsvierkantje bevat dat door geen enkele tegel bedekt is.