Вторник, 23-ти јули, 2013

Задача 1. Докажи дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не е задолжително да бидат различни) такви да важи

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2. Конфигурација од 4027 точки во рамнината ја нарекуваме *колумбиска* ако се состои од 2013 црвени и 2014 плави точки, при што никои три точки од конфигурацијата не се колинеарни. Со повлекување на прави, рамнината се дели на области. Велиме дека распоредот од правите е *добар* за колумбиската конфигурација ако се задоволени следните два услови:

- ниту една од правите не минува низ некоја точка од конфигурацијата;
- ниту една област не содржи точки со различна боја.

Најди го најмалиот број k таков да за секоја колумбиска конфигурација од 4027 точки постои добар распоред од k прави.

Задача 3. Нека надворешната допирна кружница на триаголникот ABC наспроти темето A ја допира страната BC во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 на CA и C_1 на AB, како допирни точки на надворешните допирни кружници наспроти темињата B и C, соодветно. Да претпоставиме дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

Надворешна допирна кружница на триаголникот ABC наспроти темето A е кружницата која ги допира страната BC, продолжението на страната AB преку точката B и продолжението на страната AC преку точката C. Слично се дефинираат надворешните допирни кружници наспроти темињата B и C.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Среда, 24-ти јули, 2013

Задача 4. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC, а W е точка на страната BC, различна од темињата B и C. Точките M и N се подножјата на висините спуштени од темињата B и C, соодветно. Нека ω_1 е опишаната кружница околу триаголникот BWN, а X е точка на ω_1 таква да WX е дијаметар на кружницата ω_1. Аналогно, нека ω_2 е опишаната кружница околу триаголникот CWM, а Y е точка на ω_2 таква да WY е дијаметар на кружницата ω_2. Докажи дека точките X, Y и H се колинеарни.

Задача 5. Нека $\mathbb{Q}_{>0}$ е множеството на сите позитивни рационални броеви. Нека функцијата $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ ги задоволува следните три услови:

(i) за сите $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) за сите $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) постои рационален број $a > 1$ таков да важи $f(a) = a$.

Докажи дека $f(x) = x$ за сите $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Даден е природен број $n \geq 3$, и $n+1$ точки на кружница кои ја делат кружницата на лакови со еднаква должина. Да ги разгледаме сите можни означувања на овие точки со броевите $0, 1, \ldots, n$, каде секоја ознака се користи точно еднаш; две такви означувања се сметаат за исти ако едното означување може да се добие од другото со ротирање на кружницата. Означувањето се нарекува *убаво* ако, за секои четири ознаки $a < b < c < d$ за кои $a + d = b + c$, тетивата која ги спојува точките означени со a и d не ја сече тетивата која ги спојува точките означени со b и c.

Нека M е бројот на убави означувања, а N е бројот на подредени парови (x, y) од природни броеви такви да $x + y \leq n$ и НЗД$(x, y) = 1$. Докажи дека

$$M = N + 1.$$

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода