wtorek, 16 lipca 2019

Zadanie 1. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b zachodzi równość

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Zadanie 2. W trójkącie ABC punkt A_1 leży na boku BC oraz punkt B_1 leży na boku AC. Niech P i Q będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AA_1 i BB_1, że prosta PQ jest równoległa do prostej AB. Niech P_1 będzie takim punktem na prostej PB_1, że B_1 leży pomiędzy punktami P i P_1 oraz $\angle PP_1C = \angle BAC$. Podobnie, niech Q_1 będzie takim punktem na prostej QA_1, że A_1 leży pomiędzy punktami Q i Q_1 oraz $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dowieść, że punkty P, Q, P_1 i Q_1 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3. Pewna sieć społecznościowa ma 2019 użytkowników. Niektóre pary użytkowników są znajomymi. Jeśli użytkownik A jest znajomym użytkownika B, to B jest znajomym A. Mogą zajść zdarzenia następującej postaci, przy czym w każdym momencie może zajść tylko jedno takie zdarzenie:

> Jeśli A, B i C są takimi trzema użytkownikami, że A jest znajomym zarówno B jak i C, ale B nie jest znajomym C, to statusy znajomości zmieniają się w następujący sposób: B staje się znajomym C, a A przestaje być znajomym zarówno B jak i C. Wszystkie pozostałe statusy znajomości pozostają niezmienione.

Na początku 1010 użytkowników miało po 1009 znajomych oraz 1009 użytkowników miało po 1010 znajomych. Udowodnić, że istnieje ciąg takich zdarzeń, po których każdy użytkownik będzie miał co najwyżej jednego znajomego.

Language: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

środa, 17 lipca 2019

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie pary (k, n) dodatnich liczb całkowitych, takich że

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Zadanie 5. Bank of Bath wydaje monety z symbolem H po jednej stronie i symbolem T po drugiej stronie. Janusz ma n takich monet ustawionych w rzędzie od lewej do prawej. Janusz wielokrotnie wykonuje następujące ruchy: jeśli na dokładnie $k > 0$ monetach widnieje symbol H, to odwraca on k-tą monetę licząc od lewej; w przeciwnym razie na wszystkich monetach widnieje symbol T i Janusz przestaje wykonywać dalsze ruchy. Na przykład, jeśli $n = 3$ i początkowym ustawieniem monet jest THT, to otrzymamy proces $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, który kończy się po trzech ruchach.

(a) Udowodnić, że niezależnie od początkowego ustawienia monet Janusz przestanie odwracać monety po wykonaniu skończenie wielu ruchów.

(b) Dla każdego początkowego ustawienia monet C oznaczmy przez $L(C)$ liczbę ruchów, po których Janusz przestanie odwracać monety. Na przykład, $L(THT) = 3$ i $L(TTT) = 0$. Wyznaczyć średnią wartość $L(C)$, gdzie C przebiega wszystkie 2^n możliwych początkowych ustawień monet.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkt I jest środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ω jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Prosta przechodząca przez D i prostopadła do EF przecina ω ponownie w punkcie R. Prosta AR przecina ω ponownie w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach PCE i PBF przecinają się ponownie w punkcie Q.

Udowodnić, że proste DI i PQ przecinają się w punkcie leżącym na prostej prostopadłej do AI i przechodzącej przez A.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.