

Language: Korean (North Korea)

Day: 1

금요일, 2015.7.10

**문제 1.** 평면의 유한점모임  $s$  는 만일  $s$  의 임의의 서로 다른 두 점  $A, B$ 에 대하여  $AC = BC$  인  $s$ 의 점  $C$ 가 항상 존재할 때 ‘평형적’이라고 부른다.

또한  $s$  는 만일  $s$  의 그 어떤 서로 다른 세 점  $A, B, C$ 에 대하여서도  $PA = PB = PC$  인  $s$ 의 점  $P$ 가 존재하지 않을 때 ‘비중심적’이라고 부른다.

(a) 임의의 옹근수  $n \geq 3$ 에 대하여  $n$  개의 점들로 이루어진 평형적인 모임이 존재한다는것을 증명하여라.

(b)  $n$  개의 점들로 이루어진 평형적이고 비중심적인 모임이 존재하게 되는 옹근수  $n \geq 3$ 을 모두 구하여라.

**문제 2.** 정의 옹근수들의 순서조  $(a, b, c)$ 로서 세개의 수

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

가 모두 2의 제곱수가 되는것을 모두 구하여라.

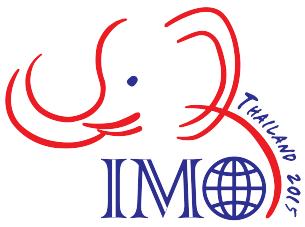
(2의 제곱수란  $n$ 이 부아닌 옹근수일 때  $2^n$  형태의 옹근수를 말한다.)

**문제 3.**  $ABC$  가  $AB > AC$  인 뾰족 3각형이다.  $\Gamma$  는 이것의 외접원이고  $H$  는 이것의 수심이며  $F$  는  $A$ 에서 밑변에 그은 수직선의 밑점이다.

$M$  가 변  $BC$ 의 가운데점이라고 하자.  $Q$  가  $\Gamma$  우의 점으로서  $\angle HQA = 90^\circ$  를 만족하고  $K$  가  $\Gamma$  우의 점으로서  $\angle HKQ = 90^\circ$  를 만족한다고 하자.

점  $A, B, C, K, Q$ 들이 모두 서로 다르고  $\Gamma$  우에서 이 순서대로 놓여있다고 하자.

이때 3각형  $KQH$ 의 외접원과 3각형  $FKM$ 의 외접원이 서로 접한다는것을 증명하여라.



Language: Korean (North Korea)

Day: 2

토요일, 2015.7.11

**문제 4.** 3각형  $ABC$ 의 외접원을  $\Omega$ , 외심을  $O$ 라고 하자.  $A$ 를 중심으로 하는 한 원  $\Gamma$ 가 선분  $BC$ 와 두 점  $D, E$ 에서 사귀는데  $B, D, E, C$ 가 모두 서로 다르고 선분  $BC$ 우에서 이 순서로 놓여있다고 한다.  $F, G$ 는 두 원  $\Gamma$ 와  $\Omega$ 의 사점들로서  $A, F, B, C, G$ 가  $\Omega$ 우에서 이 순서로 놓여있다.

$K$ 는 3각형  $BDF$ 의 외접원과 선분  $AB$ 의 두번째사점이고  $L$ 은 3각형  $CGE$ 의 외접원과 선분  $CA$ 의 두번째사점이라고 하자.

직선  $FK$ 와  $GL$ 이 서로 다르고 점  $X$ 에서 사귄다고 하자.  
이때  $X$ 가 직선  $AO$ 우에 놓인다는것을 증명하여라.

**문제 5.** 실수전체의 모임을  $R$ 로 표시하자. 이때 다음 조건을 만족하는 함수  $f: R \rightarrow R$ 를 모두 구하여라: 모든 실수  $x, y$ 에 대하여

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

가 선다.

**문제 6.** 옹근수들로 이루어진 수렬  $a_1, a_2, \dots$ 이 다음의 조건들을 만족한다:

- (i) 모든  $j \geq 1$ 에 대하여  $1 \leq a_j \leq 2015$  가 선다;
- (ii) 모든  $1 \leq k < \ell$ 에 대하여  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  이 선다.

이때 두개의 정의 옹근수  $b$ 와  $N$ 이 존재하여  $n > m \geq N$  을 만족하는 모든 옹근수  $m$ 와  $n$ 에 대하여

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

이 선다는것을 증명하여라.