السبت, 8، جويلية 2023

مسألة 1. جد كل الأعداد الطبيعية غير الأولية $n > 1$ التي تحقق الخاصية التالية: إذا كانت d_1، d_2، ...، d_k هي كل القواسم الموجبة للعدد n حيث $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$، فإن d_i يقسم $d_{i+1} + d_{i+2}$ من أجل كل $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

مسألة 2. ليكن ABC مثلثا حاد الزوايا حيث $AB < AC$ و (Ω) الدائرة المحيطة به. لتكن S منتصف القوس CB التي تشمل A من الدائرة (Ω). المستقيم الذي يشمل A ويعامد (BC) يقطع القطعة $[BS]$ في D ويقطع (Ω) ثانية في E حيث $E \neq A$. المستقيم الذي يشمل D ويوازي (BC) يقطع المستقيم (BE) في L. الدائرة (ω) المحيطة بالمثلث BDL تقطع (Ω) ثانية في P حيث $P \neq B$.
أثبت أنّ المماس للدائرة (ω) في P والمستقيم (BS) يتقاطعان على المنصف الداخلي للزاوية $\angle BAC$.

مسألة 3. من أجل كل عدد طبيعي $k \geqslant 2$، جد كل المتتاليات غير المنتهية من الأعداد الطبيعية غير المعدومة a_1، a_2، ... التي من أجلها يوجد كثير حدود P من الشكل $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$ مع c_0، c_1، ...، c_{k-1} أعداد طبيعية بحيث

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$.

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
لكلّ مسألة 7 درجات

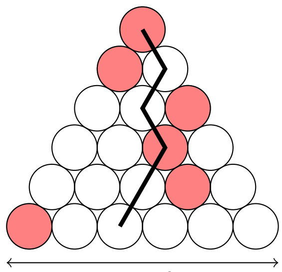
الأحد, 9. جويلية 2023

مسألة 4. لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ أعدادا حقيقية موجبة تماما مختلفة مثنى مثنى بحيث يكون

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

عددا صحيحا لكلّ $n = 1, 2, \ldots, 2023$. أثبت أنّ $a_{2023} \geqslant 3034$.

مسألة 5. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. يتألف مثلث ياباني من $1 + 2 + \cdots + n$ دائرة مرتبة في المستوي على شكل مثلث متقايس الأضلاع بحيث يحتوي السطر رقم i على i دائرة واحدة منها فقط حمراء اللون وذلك من أجل كل $i = 1, 2, \ldots, n$. مسار النينجا في مثلث ياباني هو متتالية مؤلفة من n دائرة يبدأ بالدائرة في السطر العلوي ثم ينتقل على التوالي من دائرة إلى إحدى الدائرتين الواقعتين تحتها مباشرة وصولاً إلى السطر الأخير. هنا مثال على مثلث ياباني في حالة $n = 6$ مع مسار نينجا يحوي دائرتين حمراوين فيه.



$n = 6$

جد بدلالة n أكبر عدد k بحيث يحتوي أي مثلث ياباني على مسار نينجا يحوي k كرة حمراء اللون على الأقل.

مسألة 6. ليكن ABC مثلثا متقايس الأضلاع و A_1، B_1، C_1 ثلاث نقاط داخله بحيث $BA_1 = A_1C$، $CB_1 = B_1A$، $AC_1 = C_1B$ و

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

يتقاطع (BC_1) و (CB_1) في A_2، ويتقاطع (CA_1) و (AC_1) في B_2 ويتقاطع (AB_1) و (BA_1) في C_2.

أثبت إنه إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $A_1B_1C_1$ مختلفة مثنى مثنى فإن الدوائر المحيطة بالمثلثات AA_1A_2 و BB_1B_2 و CC_1C_2 كلها تشترك في نقطتين.