Montag, 18. Juli 2011

Aufgabe 1. Für jede Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ von vier paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, deren Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ mit s_A bezeichnet werde, sei n_A die Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 4$, für die $a_i + a_j$ die Zahl s_A teilt. Bestimme unter all diesen Mengen A diejenigen, für die n_A maximal ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von $\mathcal{S}$ kollinear sind. Als *Windmühle* bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden ℓ, die genau einen Punkt $P \in \mathcal{S}$ enthält. Die Gerade ℓ wird im Uhrzeigersinn um den *Drehpunkt* P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus $\mathcal{S}$, der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt.
Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes $P \in \mathcal{S}$ und einer Ausgangsgeraden ℓ, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{S}$ unendlich oft als Drehpunkt hat.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingung

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllt.
Man beweise, dass $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$ gilt.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 19. Juli 2011

Aufgabe 4. Sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Gegeben seien eine Balkenwaage und n Gewichtsstücke mit den Gewichten $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Wir sollen jedes der n Gewichtsstücke, eines nach dem anderen, so auf die Waage legen, dass die rechte Schale zu keinem Zeitpunkt schwerer als die linke ist. In jedem Zug wählen wir ein Gewichtsstück aus, das zu diesem Zeitpunkt noch nicht auf die Waage gelegt wurde und legen es entweder auf die linke oder die rechte Schale bis alle Gewichtsstücke verwendet worden sind.
Man bestimme die Anzahl derartiger Folgen mit n Zügen.

Aufgabe 5. Sei f eine Funktion, die die Menge der ganzen Zahlen in die Menge der positiven ganzen Zahlen abbildet. Für je zwei ganze Zahlen m und n sei die Differenz $f(m) - f(n)$ durch $f(m-n)$ teilbar.
Man beweise für alle ganzen Zahlen m, n mit $f(m) \leq f(n)$, dass $f(n)$ durch $f(m)$ teilbar ist.

Aufgabe 6. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis Γ und ℓ eine Tangente an Γ. Ferner seien ℓ_a, ℓ_b und ℓ_c die Geraden, die durch Spiegelungen von ℓ an den Geraden BC, CA bzw. AB entstehen.
Man beweise, dass der Umkreis des Dreiecks, das von den Geraden ℓ_a, ℓ_b und ℓ_c gebildet wird, den Kreis Γ berührt.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.