جمعه، ۱۹ تیر ۱۳۹۴

مسأله ۱. یک مجموعه‌ی متناهی $\mathcal{S}$ از نقاط صفحه را متعادل گوییم، اگر برای هر دو نقطه‌ی متمایز A و B در $\mathcal{S}$، نقطه‌ی C در $\mathcal{S}$ وجود داشته باشد که $AC = BC$. همچنین، $\mathcal{S}$ را بی‌مرکز گوییم اگر برای هر سه نقطه‌ی متمایز A، B و C در $\mathcal{S}$، هیچ نقطه‌ی P در $\mathcal{S}$ وجود نداشته باشد که $PA = PB = PC$.

الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۳$، یک مجموعه‌ی متعادل متشکل از n نقطه وجود دارد.

ب) همه‌ی اعداد طبیعی $n \geqslant ۳$ را تعیین کنید که یک مجموعه‌ی متعادل و بی‌مرکز متشکل از n نقطه موجود باشد.

مسأله ۲. همه‌ی سه‌تایی‌های (a, b, c) از اعداد صحیح مثبت را بیابید به‌طوری که هر یک از اعداد

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

توانی از ۲ باشند. (یک توان از ۲، عددی صحیح به فرم ۲^n است که n یک عدد صحیح نامنفی باشد.)

مسأله ۳. فرض کنید ABC مثلثی حاده‌الزاویه باشد که $AB > AC$. فرض کنید Γ دایره‌ی محیطی آن، H مرکز ارتفاعی آن و F پای ارتفاع وارد از A باشد. فرض کنید M نقطه‌ی وسط BC باشد. Q را نقطه‌ای روی Γ بگیرید به طوری که $\angle HQA = ۹۰^\circ$ و K را نقطه‌ای روی Γ بگیرید که $\angle HKQ = ۹۰^\circ$. فرض کنید نقاط A، B، C، K و Q دوبه‌دو متمایز باشند و به همین ترتیب روی Γ قرار داشته باشند.

ثابت کنید دوایر محیطی مثلث‌های KQH و FKM بر یکدیگر مماس هستند.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر سؤال ۷ نمره دارد.

شنبه، ۲۰ تیر ۱۳۹۴

مسأله ۴. Ω دایره‌ی محیطی و O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است و دایره‌ی Γ به مرکز A، پاره‌خط BC را در نقاط D و E قطع می‌کند به‌طوری که B، D، E و C دوبه‌دو متمایز بوده و به همین ترتیب روی خط BC قرار دارند. فرض کنید F و G نقاط تقاطع Γ و Ω باشند به‌طوری که A، F، B، C و G به همین ترتیب روی Ω قرار داشته باشند. فرض کنید K نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌ی محیطی مثلث BDF و پاره‌خط AB باشد و L نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌ی محیطی مثلث CGE و پاره‌خط CA باشد.

فرض کنید خطوط FK و GL متمایز بوده و در نقطه‌ی X متقاطع باشند. ثابت کنید X روی خط OA قرار دارد.

مسأله ۵. $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. همه‌ی توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y،

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

مسأله ۶. دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \ldots$ از اعداد صحیح، در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) برای هر $j \geqslant ۱$، $۱ \leqslant a_j \leqslant ۲۰۱۵$،

(ii) برای هر $۱ \leqslant k < \ell$، $k + a_k \neq \ell + a_\ell$.

ثابت کنید اعداد صحیح مثبت b و N وجود دارند به طوری که برای هر دو عدد صحیح m و n که $n > m \geqslant N$، داشته باشیم

$$\left| \sum_{j=m+۱}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant ۱۰۰۷^۲$$

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر سؤال ۷ نمره دارد.