



چهارشنبه ۷ جولای ۱۴۰۲

سوال ۱. تمام توابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که تساوی

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. (در اینجا منظور از $\lfloor z \rfloor$ بزرگترین عدد کوچکتر یا مساوی با z است.)

سوال ۲. فرض کنید I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و Γ دایره محیطی آن باشد. خط AI دایره Γ را بار دیگر در D قطع می‌کند. فرض کنید E نقطه‌ای روی کمان \widehat{BDC} و F نقطه‌ای روی ضلع BC باشند به طوری که

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC$$

همچنین G را نقطه وسط پاره خط IF بگیرید. ثابت کنید خطوط IF و DG و EI روی دایره Γ یکدیگر را قطع می‌کنند.

سوال ۳. \mathbb{N} مجموعه اعداد صحیح مثبت است. تمام توابع $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ یک مربع کامل باشد.



پنج شنبه ۱ جولای ۲۰۱۰

سوال ۴. فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد. خطوط AP , BP و CP به ترتیب دایره محیطی Γ از مثلث ABC را بار دیگر در نقاط K , L و M قطع می‌کنند. خط مماس بر دایره Γ در نقطه C خط AB را در S قطع می‌کند. فرض کنید $SC = SP$. ثابت کنید $MK = ML$.

سوال ۵. در هر یک از شش صندوق، $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ در ابتدا یک سکه قرار دارد. دو نوع حرکت زیر مجاز است:

حرکت نوع ۱: یک صندوق B_j را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1 \leq j \leq 5$. یک سکه از B_j بردارید و دو سکه به B_{j+1} اضافه کنید.

حرکت نوع ۲: یک صندوق B_k را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1 \leq k \leq 4$. یک سکه از B_k بردارید و محتوای صندوق‌های B_{k+1} و B_{k+2} (که می‌توانند خالی هم باشند) را با هم عوض کنید.

آیا می‌توان با دنباله‌ای متناهی از حرکات بالا به وضعیتی رسید که صندوق‌های $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ خالی باشند و در صندوق B_6 دقیقاً $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ سکه باشد؟ (توجه کنید که $a^{b^c} = a^{b+c}$ باشد)

سوال ۶. فرض کنید a_1, a_2, a_3, \dots دنباله‌ای داده شده از اعداد حقیقی مثبت باشد. فرض کنید به ازای یک عدد طبیعی s , تساوی

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

برای هر $n > s$ برقرار باشد. ثابت کنید اعداد طبیعی l و N وجود دارند که $s \leq l \leq N$ و برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $a_n = a_l + a_{n-l}$.