Երեքշաբթի, հուլիսի *23, 2013* թ

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական ամբողջ k և n թվերի զույգի համար գոյություն ունեն k հատ (ոչ պարտադիր տարբեր) դրական ամբողջ թվեր $m_1, m_2, \ldots, m_k$ այնպես, որ

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Խնդիր 2. Հարթության մեջ 4027 կետեր կանվանենք կետերի կոլումբիական կոնֆիգուրացիա, եթե դրանցից ոչ մի երեքը ընկած չեն մեկ ուղղու վրա և դրանցից 2013 ներկված են կարմիր, իսկ մնացած 2014 կապույտ։ Դիտարկենք ուղիղների հավաքածու, որը հարթությունը բաժանում է տիրույթների։ Տրված կետերի կոլումբիական կոնֆիգուրացիայի համար ուղիղների հավաքածուն կանվանենք լավը, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները

- ոչ մի ուղիղ չի անցնում կոնֆիգուրացիայի ոչ մի կետով
- տրոհման ոչ մի տիրույթ չի պարունակում երկու գույնի կետեր

Գտեք k ամենափոքր արժեքը, այնպիսին որ 4027 կետերից կազմված ցանկացած կոլումբիական կոնֆիգուրացիայի համար կգտնվի k ուղիղների լավ հավաքածու։

Խնդիր 3. Ենթադրենք ABC եռանկյան A գագաթի դիմաց ընկած արտներգծված շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է A_1 կետում։ Նույն ձևով սահմանվում են B_1 -ը CA -ի և C_1 -ը AB -ի վրա օգտագործելով արտներգծված շրջանագծերը համապատասխան B և C գագաթներին դիմաց։ Հայտնի է, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը ընկած է ABC եռանկյանը արտագծած շրջանագծի վրա։ Ապացուցել, որ ABC եռանկյունին ուղղանկյուն է։

ABC եռանկյան A գագաթի դիմաց ընկած արտներգված շրջանագիծ կոչվում է շրջանագիծը, որը շոշափում է BC հատվածը, AB -ի B գագաթով շարունակված ճարագայթ AC -ի C գագաթով շարունակված ճառագայթը համապատասխանաբար։ B և C գագաթների դիմաց ընկած արտներգծված շրջանագծերը սահմանվում են նման ձևով։

Language: Armenian

Աշխատաժամանակը՝ *4* ժամ *30* րոպե

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է *7* միավոր

Զորեքշաբթի, հուլիսի 24, 2013թ.

Խնդիր 4. Դիցուք H -ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: Դիցուք W -ն BC հատվածի կամայական կետ է, որը չի համընկնում B և C կետերի հետ: Նշանակենք M և N համապատասխանաբար B և C գագաթներից իջեցրած բարձրությունների հիմքերը: Դիցուք, ω_1 -ը BWN եռանկյանը արտագծաց շրջանագիծն է, իսկ X -ը ω_1 -ի վրա գտնվող կետն է, այնպիսին, որ WX -ը ω_1 -ի տրամագիծ է: Նույն ձևով, դիցուք ω_2 -ը CWM եռանկյանը արտագծաց շրջանագիծ է, Y -ը ω_2 -ի վրա գտնվող կետն է, այնպիսին, որ WY -ը ω_2 -ի տրամագիծն է: Ապացուցել, որ X , Y և H կետերը գտնվում են մի ուղիղի վրա:

Խնդիր 5. Դիծուք $Q_{>0}$ -ն դրական ռացիոնալ թվերի բազմություն է: Ենթադրենք $f:Q_{>0}\to R$ ֆունկցիա է, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին
(i) բոլոր $x, y\in Q_{>0}$, համար տեղի ունի անհավասարությունը $f(x)f(y)\ge f(xy)$;
(ii) բոլոր $x, y\in Q_{>0}$ համար տեղի ունի անհավասարութձունը $f(x+y)\ge f(x)+f(y)$;
(iii) գոյություն ունի ռացիոնալ $a>1$ թիվ, այնպիսին, որ $f(a)=a$:

Ապացուծիր, որ $f(x)=x$ բոլոր $x\in Q_{>0}$ համար:

Խնդիր 6. Դիցուք $n\ge 3$ ամբողջ թիվ է: Դիտարկենք շրջանագիծ և $n+1$ հատ կետ նրա վրա, որոնք շրջանագիծը բաժանում են հավասար մասերի: Դիտարկենք բոլոր ձևերը, որոնցով կարելի է նշել այդ կետերը $0, 1, \dots, n$ թվերով այնպես, որ յուրաքանչյուր թիվ ոգտագործվի ճիշտ մեկ անգամ: Երկու ձև, որոնք տարբերվում են պտույտով, համարվում են նույնը: Նշման ձևը կոչվում է գեղեցիկ, եթե ցանկացած չորս կետի համար $a<b<c<d$ որոնց համար տեղի ունի $a+d=b+c$, լարը, որը միացնում է a և d -ով նշված կետերը չի հատում լարը, որը միածնում է b և c -ով նշված կետերը.

Դիցուք M -ը գեղեծիկ նշումների քանակն է, իսկ N -ը (x, y) կարգավորված բնական թվերի զույգերի քանակն է, որոնց համար $x+y\le n$ և $gcd(x, y)=1$ ($gcd(x, y)$ -ը x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է): Ապացուցեք, որ

$$M=N+1 \quad :$$

Աշխատաժամանակը՝ *4* ժամ *30* րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է *7* միավոր