Σάββατο, 8 Ιουλίου 2023

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους σύνθετους ακέραιους $n > 1$, οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: αν $d_1, d_2, \ldots, d_k$ είναι όλοι οι θετικοί διαιρέτες του n με $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, τότε ο d_i διαιρεί τον αριθμό $d_{i+1} + d_{i+2}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Πρόβλημα 2. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB < AC$. Έστω Ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Έστω S το μέσο του τόξου CB του κύκλου Ω το οποίο περιέχει το σημείο A. Η κάθετη από το σημείο A προς την ευθεία BC τέμνει την ευθεία BS στο σημείο D και τον κύκλο Ω ξανά στο σημείο $E \neq A$. Η ευθεία που περνάει από το σημείο D και είναι παράλληλη προς την ευθεία BC τέμνει την ευθεία BE στο σημείο L. Συμβολίζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BDL με ω. Έστω ότι ο κύκλος ω τέμνει τον κύκλο Ω ξανά στο σημείο $P \neq B$.
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου ω στο σημείο P τέμνει την ευθεία BS σε σημείο της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\angle BAC$.

Πρόβλημα 3. Για κάθε $k \geqslant 2$, να προσδιορίσετε όλες τις ακολουθίες θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \ldots$ για τις οποίες υπάρχει πολυώνυμο P της μορφής $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, όπου οι $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$.

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

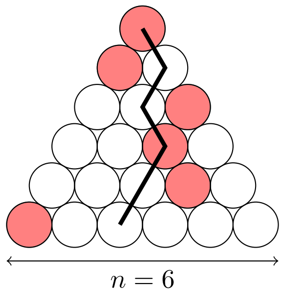
Κυριακή, 9 Ιουλίου 2023

Πρόβλημα 4. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ διαφορετικοί ανά δύο θετικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε ο αριθμός

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

να είναι ακέραιος για κάθε $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Να αποδείξετε ότι $a_{2023} \geqslant 3034$.

Πρόβλημα 5. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Ένα *Ιαπωνικό τρίγωνο* αποτελείται από $1 + 2 + \cdots + n$ κύκλους τοποθετημένους σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου έτσι ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η i-οστή γραμμή περιέχει ακριβώς i κύκλους, από τους οποίους μόνο ένας είναι χρωματισμένος κόκκινος. Ένα *μονοπάτι νίντζα* σε ένα Ιαπωνικό τρίγωνο είναι μία ακολουθία από n κύκλους η οποία προκύπτει ξεκινώντας από τον κύκλο της πρώτης πάνω γραμμής, συνεχίζει πηγαίνοντας επανειλημμένα από έναν κύκλο σε έναν από τους δύο κύκλους που βρίσκονται αμέσως κάτω από αυτόν και τερματίζει σε έναν κύκλο της τελευταίας γραμμής. Εδώ είναι ένα παράδειγμα Ιαπωνικού τριγώνου με $n = 6$, μαζί με ένα μονοπάτι νίντζα σε αυτό το τρίγωνο το οποίο περιέχει δύο κόκκινους κύκλους.



Να προσδιορίσετε, συναρτήσει του n, τον μέγιστο θετικό ακέραιο k που είναι τέτοιος, ώστε σε κάθε Ιαπωνικό τρίγωνο να υπάρχει μονοπάτι νίντζα το οποίο να περιέχει τουλάχιστον k κόκκινους κύκλους.

Πρόβλημα 6. Έστω ABC ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Έστω A_1, B_1, C_1 εσωτερικά σημεία του τριγώνου ABC τέτοια, ώστε $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ και

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Έστω ότι οι ευθείες BC_1 και CB_1 τέμνονται στο σημείο A_2, οι ευθείες CA_1 και AC_1 τέμνονται στο σημείο B_2 και οι ευθείες AB_1 και BA_1 τέμνονται στο σημείο C_2.
Αν το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ είναι σκαληνό, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AA_1A_2, BB_1B_2 και CC_1C_2 διέρχονται και οι τρεις από δύο κοινά σημεία.

(Σημείωση: σκαληνό τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο στο οποίο δεν υπάρχουν δύο πλευρές που να είναι ίσες.)

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες