سه شنبه، ۱۵. ژوئیه ۲۰۲۵

مسئله‌ی ۱. در صفحه مختصات یک خط را آفتابی نامیم اگر موازی هیچ یک از محورهای x، y، و یا خط $x+y=0$ نباشد. عددی طبیعی $n \geqslant 3$ داده شده است. همه اعداد صحیح و نامنفی k را طوری پیدا کنید که n خط متمایز در صفحه وجود داشته باشند که در هر دو شرط زیر صدق کنند:

- برای همه اعداد صحیح و مثبت a و b به طوری که $a+b \leqslant n+1$؛ نقطه (a,b) دست کم روی یکی از این خطوط باشد؛
- دقیقا k تا از این n خط آفتابی باشند.

مسئله‌ی ۲. فرض کنید Ω و Γ به ترتیب دایره‌هایی به مراکز M و N هستند. به طوری که شعاع دایره Ω کوچک تر از شعاع دایره Γ است. فرض کنید دایره‌های Ω و Γ در نقاط متمایز A و B یک دیگر را قطع کنند. خط MN دایره Ω را در C و دایره Γ را در D قطع می کند به طوری که نقاط C، M، Nو D به همین ترتیب روی یک خط قرار گرفته اند. فرض کنید P مرکز دایره محیطی مثلث ACD است. فرض کنید خط AP دایره Ω را برای دومین بار در $E \neq A$ قطع کند. خط AP دایره Γ را برای دومین بار در $F \neq A$ قطع می‌کند. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث PMN است.

نشان دهید خط گذرنده از H و موازی با AP، بر دایره محیطی مثلث BEF مماس است.

(مرکز ارتفاعی یک مثلث محل تقاطع ارتفاعات آن است.)

مسئله‌ی ۳. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح و مثبت است. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را خوب می‌نامیم اگر برای تمام اعداد صحیح و مثبت a و b،

$$f(a) \quad \text{شمارنده ی} \quad b^a - f(b)^{f(a)}$$

باشد.

کوچک ترین عدد حقیقی c را طوری بیابید که برای همه توابع خوب f و همه اعداد صحیح و مثبت n داشته باشیم $f(n) \leqslant cn$.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.

چهارشنبه، ۱۶ ژوئیه ۲۰۲۵

مسئله‌ی ۴. دنباله‌ی نامتناهی $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد صحیح و مثبت تشکیل شده است که هریک از آن‌ها دارای دست‌کم سه شمارنده‌ی سره است. برای هر $n \geqslant 1$، a_{n+1} برابر با مجموع بزرگ ترین سه شمارنده‌ی سره a_n است.

همه مقادیر ممکن را برای a_1 پیدا کنید.

(یک شمارنده‌ی سره از عدد صحیح و مثبت N شمارنده‌ای از N است که برابر با آن نیست.)

مسئله‌ی ۵. امین و علی درحال بازی نابرابری هستند، این بازی یک بازی دونفره است که قواعد آن وابسته به عدد حقیقی و مثبت λ است که هردو بازیکن مقدار آن را می‌دانند. n–امین گام از این بازی (با شروع از $n = 1$) چنین خواهد بود:

- اگر n فرد باشد، امین عدد حقیقی و نامنفی x_n را طوری انتخاب خواهد کرد که

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- اگر n زوج باشد، علی عدد حقیقی و نامنفی x_n را طوری انتخاب خواهد کرد که

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

اگر یک بازیکن نتواند x_n مناسبی را انتخاب کند، بازی به اتمام خواهد رسید و بازیکن دیگر برنده بازی خواهد بود. اگر بازی تا ابد ادامه پیدا کند، هیچ بازیکنی برنده نخواهد بود. فرض کنید که هر دو بازیکن تمامی اعداد منتخب را می‌دانند.

همه مقادیر λ را پیدا کنید که برای آن‌ها امین راه برد پیروزی داشته باشد و نیز همه آن مقادیر را طوری پیدا کنید که برای آن‌ها علی راه برد پیروزی داشته باشد.

مسئله‌ی ۶. جدولی 2025×2025 را از خانه‌های واحد درنظر بگیرید. سحرمی‌خواهد تعدادی کاشی مستطیلی را، که ممکن است اندازه‌های متفاوتی داشته باشند، روی جدول طوری قرار دهد که هر ضلع از هر کاشی روی خطوط جدول قرار بگیرد و هرخانه واحد با حداکثر یک کاشی پوشیده شود.

سحر به حداقل چند کاشی نیازخواهد داشت تا بتواند با آن‌ها جدول را طوری بپوشاند که هرستون و سطر جدول دارای دقیقا یک خانه واحد باشد که با هیچ کاشی‌ای پوشانده نشده است.