Föstudagur, 10. júlí, 2015

Dæmi 1. Við segjum að endanlegt mengi $\mathcal{S}$ af punktum í sléttunni sé í *jafnvægi* ef fyrir sérhverja tvo ólíka punkta A og B í $\mathcal{S}$ er til punktur C í $\mathcal{S}$ þannig að $|AC| = |BC|$. Við segjum að $\mathcal{S}$ sé *ómiðjað* ef fyrir sérhverja þrjá ólíka punkta A, B og C í $\mathcal{S}$ er enginn punktur P í $\mathcal{S}$ þannig að $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Sýnið að fyrir allar heiltölur $n \geqslant 3$ er til mengi í jafnvægi sem samanstendur af n punktum.

(b) Ákvarðið allar heiltölur $n \geqslant 3$ þannig að til er mengi sem er ómiðjað og í jafnvægi og samanstendur af n punktum.

Dæmi 2. Ákvarðið allar þrenndir (a, b, c) af jákvæðum heiltölum þannig að sérhver talnanna

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

sé veldi af 2.

(*Veldi af* 2 *er heiltala sem rita má* 2^n *þar sem* n *er ekki neikvæð heiltala.*)

Dæmi 3. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $|AB| > |AC|$. Látum Γ vera umritaða hringinn, H hæðamiðjuna og F vera fótpunkt hæðarinnar frá A. Látum M vera miðpunkt BC. Látum Q vera punktinn á Γ þannig að $\angle HQA = 90°$ og látum K vera punktinn á Γ þannig að $\angle HKQ = 90°$. Gerum ráð fyrir að punktarnir A, B, C, K og Q séu allir ólíkir og liggi á Γ í þessari röð.

Sannið að umhringir þríhyrninganna KQH og FKM snertist.

Laugardagur, 11. júlí, 2015

Dæmi 4. Þríhyrningurinn ABC hefur umhring Ω og ummiðju O. Hringur Γ með miðju A sker strikið BC í punktunum D og E þannig að B, D, E og C eru allir ólíkir og liggja á línunni BC í þessari röð. Látum F og G vera skurðpunkta Γ og Ω þannig að A, F, B, C og G liggi á Ω í þessari röð. Látum K vera hinn skurðpunkt umhrings þríhyrningsins BDF og striksins AB. Látum L vera hinn skurðpunkt umhrings þríhyrningsins CGE og striksins CA.

Gerum ráð fyrir að línurnar FK og GL séu ólíkar og skerist í punktinum X. Sannið að X liggi á línunni AO.

Dæmi 5. Látum $\mathbb{R}$ vera mengi rauntalnanna. Ákvarðið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem uppfylla jöfnuna

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

fyrir allar rauntölur x og y.

Dæmi 6. Runan $a_1, a_2, \ldots$ af heiltölum uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ fyrir öll $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ fyrir öll $1 \leqslant k < \ell$.

Sannið að til séu tvær jákvæðar heiltölur b og N þannig að

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

fyrir allar heiltölur m og n sem uppfylla $n > m \geqslant N$.