IMO 2014
Cape Town - South Africa

Language: **Turkish**

Day: **1**

Salı, 8 Temmuz, 2014

Soru 1. $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ sonsuz pozitif tam sayılar dizisi olsun. Tam olarak bir tane $n \geq 1$ tam sayısı için

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 2. $n \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere, n^2 birim kareden oluşan $n \times n$ satranç tahtası verilmiştir. n kalenin; her satırda ve her sütunda tam olarak bir kale olmak üzere, bu satranç tahtasına yerleşimine *barışçıl* konfigürasyon diyelim. k nın en büyük hangi pozitif tam sayı değeri için; n kalenin her barışçıl konfigürasyonunda, üzerinde kale olmayan bir $k \times k$ karesi bulunur (yani bu $k \times k$ karesinin toplam sayısı k^2 olan birim karelerinin hiçbirinde kale yoktur)?

Soru 3. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninde $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ dir. A dan BD ye çizilen dikmenin ayağı H olsun. S ve T noktaları sırasıyla $[AB]$ ve $[AD]$ kenarları üzerinde olmak üzere, H noktası SCT üçgeninin içinde ve

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ$$

ise, BD doğrusunun TSH üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

Süre: 4 saat 30 dakikadır
Her soru 7 puan değerindedir

Çarşamba, 9 Temmuz, 2014

Soru 4. Dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerindeki P ve Q noktaları için $\angle PAB = \angle BCA$ ve $\angle CAQ = \angle ABC$ dir. M ve N noktaları sırasıyla AP ve AQ doğruları üstünde olmak üzere, P noktası $[AM]$ nin ve Q noktası $[AN]$ nin orta noktasıdır. BM ve CN doğrularının ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde kesiştiklerini gösteriniz.

Soru 5. Cape Town bankası her n pozitif tam sayısı için değeri $\frac{1}{n}$ olan madeni paralar basmaktadır. Sonlu sayıda madeni paradan oluşan ve toplam değeri en fazla $99 + \frac{1}{2}$ olan her madeni para koleksiyonunu (koleksiyonda değerleri aynı olan madeni paralar da bulunabilir) her birinin toplam değeri en fazla 1 olan 100 veya daha az sayıda gruba ayırabileceğimizi kanıtlayınız.

Soru 6. Düzlemde herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü noktadaş olmayan doğrulara *genel durum* özelliği olan doğrular diyelim. Genel durum özelliği olan doğrular, düzlemi bazılarının alanları sonlu olan bölgelere ayırıyor; alanı sonlu olan her bölgeye *sonlu bölge* diyelim. n nin yeterince büyük tüm değerleri için, genel durum özelliği olan herhangi n doğrunun en az $\sqrt{n}$ tanesinin mavi renge; hiçbir sonlu bölgenin tüm sınırları mavi olmayacak biçimde boyanabileceğini gösteriniz.

Not: Soruyu $\sqrt{n}$ yerine $c\sqrt{n}$ için çözenlere c sabitinin değerine göre puan verilecektir.

Süre: 4 saat 30 dakikadır
Her soru 7 puan değerindedir