12 Korrik 2006

Problem 1. Le të jetë ABC një trekëndësh dhe I qendra e rrethit brendashkruar tij. Një pikë P e cila ndodhet brenda trekëndëshit plotëson kushtin

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Tregoni që $AP \geq AI$ dhe që barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur $P = I$.

Problem 2. Le të jetë P një 2006-këndësh i rregullt. Një diagonale e P quhet *e mirë* në qoftë se skajet e saj ndajnë konturin e P në dy pjesë, secila prej të cilave përbëhet nga një numër tek brinjësh të P. Brinjët e P quhen gjithashtu *të mira*. E zëmë se P është ndarë në trekëndësha me anë të 2003 diagonaleve, çdo dy prej të cilave nuk kanë pikë të përbashkët brenda P. Gjeni numrin më të madh të trekëndëshave dybrinjënjëshëm me dy brinjë *të mira* të cilët mund të shfaqen në një konfiguracion të tillë.

Problem 3. Gjeni numrin real më të vogël M të tillë që mosbarazimi

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

të plotësohet për të gjithë numrat realë a, b dhe c.

Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë

13 Korrik 2006

Problem 4. Gjeni të gjitha çiftet e numrave të plotë (x, y) të tillë që

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Le të jetë $P(x)$ një polinom i fuqisë $n > 1$ me koeficientë numra të plotë dhe le të jetë k një numër i plotë pozitiv . Marrim polinomin $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, ku P shfaqet k herë. Provoni që ka të shumtën n numra të plotë t të tillë që $Q(t) = t$.

Problem 6. Çdo brinje b të një shumëkëndëshi konveks P i shoqërojmë sipërfaqen më të madhe të një trekëndëshi i cili përmbahet në P dhe ka b si brinjë. Tregoni që shuma e sipërfaqeve që i shoqërohen brinjëve të P është të paktët sa dyfishi i sipërfaqes së P.

Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë