

**IMO 2024**

65th International  
Mathematical Olympiad

Czech (cze), day 1

úterý, 16. července 2024

**Úloha 1.** Určete všechna reálná čísla  $\alpha$  taková, že pro každé kladné celé  $n$  je číslo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

násobkem  $n$ . (Zápisem  $\lfloor z \rfloor$  rozumíme největší celé číslo které nepřevyšuje  $z$ . Platí například  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  a  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**Úloha 2.** Určete všechny dvojice kladných celých čísel  $(a, b)$ , pro něž existují kladná celá  $g$  a  $N$  taková, že rovnost

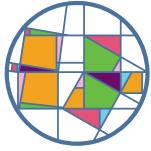
$$\text{NSD}(a^n + b, b^n + a) = g$$

platí pro všechna celá čísla  $n \geq N$ . (Zápisem  $\text{NSD}(x, y)$  rozumíme největšího společného dělitele celých čísel  $x, y$ .)

**Úloha 3.** Mějme nekonečnou posloupnost kladných celých čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  a kladné celé číslo  $N$ . Předpokládejme, že pro všechna  $n > N$  je  $a_n$  rovno počtu výskytů čísla  $a_{n-1}$  mezi čísly  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .

Dokažte, že alespoň jedna z posloupností  $a_1, a_3, a_5, \dots$  nebo  $a_2, a_4, a_6, \dots$  je eventuálně periodická.

(O posloupnosti  $b_1, b_2, b_3, \dots$  řekneme, že je *eventuálně periodická*, pokud existují kladná celá  $p$  a  $M$  taková, že rovnost  $b_{m+p} = b_m$  platí pro všechna  $m \geq M$ .)



**IMO 2024**

65th International  
Mathematical Olympiad

Czech (cze), day 2

středa, 17. července 2024

**Úloha 4.** Je dán trojúhelník  $ABC$ , ve kterém platí  $|AB| < |AC| < |BC|$ . Buď  $\omega$  kružnice vepsaná  $ABC$  se středem  $I$ . Nechť  $X$  je bod na přímce  $BC$  různý od  $C$  takový, že rovnoběžka s  $AC$  skrz  $X$  je tečnou  $\omega$ . Analogicky, nechť  $Y$  je bod na přímce  $BC$  různý od  $B$  takový, že rovnoběžka s  $BC$  skrz  $Y$  je tečnou  $\omega$ . Přímka  $AI$  protíná kružnici opsanou  $ABC$  podruhé v bodě  $P \neq A$ . Označme  $K$  a  $L$  středy úseček  $AC$  a  $AB$ .

Dokažte, že platí  $|\angle KIL| + |\angle YPX| = 180^\circ$ .

**Úloha 5.** Šnek Turbo hraje hru v tabulce s 2024 řádky a 2023 sloupci. Ve 2022 políčkách tabulky jsou schované příšerky. Na začátku, Turbo neví jak přesně jsou příšerky rozmištěny, ví ovšem, že každý řádek kromě prvního a posledního obsahuje právě jednu příšerku a každý sloupec obsahuje nejvýše jednu příšerku.

Turbo se snaží v několika pokusech dostat z prvního řádku do posledního. V každém pokusu si Turbo může zvolit libovolné počáteční políčko v prvním řádku, načež se může opakovaně posunout z políčka, kde se nachází, na políčko sousedící s ním stranou. (Každé políčko tak může navštívit i vícekrát). Vstoupí-li Turbo na políčko s příšerkou, jeho pokus tím končí a teleportuje se zpátky do prvního řádku. Příšerky se nehýbou a Turbo si pamatuje, zda se na políčku, které navštívil, nachází příšerka. Pokud dosáhne libovolného políčka z posledního řádku, jeho pokus skončí, stejně jako celá hra.

Určete nejmenší hodnotu  $n$  pro níž má Turbo strategii, která zaručí, že se dostane do posledního řádku po nejvýše  $n$  pokusech, nehledě na to, jak jsou příšerky rozmištěny.

**Úloha 6.** Nechť  $\mathbb{Q}$  značí množinu racionálních čísel. O funkci  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  řekneme, že je *lázeňská*, pokud splňuje následující podmínu: Pro všechna  $x, y \in \mathbb{Q}$  platí alespoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{nebo} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokažte, že existuje celé číslo  $c$  takové, že pro každou lázeňskou funkci  $f$  existuje nejvýše  $c$  různých racionálních hodnot vyjadřitelných ve tvaru  $f(r) + f(-r)$  pro nějaké racionální číslo  $r$  a nalezněte nejmenší možnou hodnotu  $c$ .