torek, 16. julij 2019

Naloga 1. Naj bo $\mathbb{Z}$ množica celih števil. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tako da za vsaki celi števili a in b velja

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Naloga 2. V trikotniku ABC točka A_1 leži na stranici BC in točka B_1 na stranici AC. Naj bo P točka na daljici AA_1 in Q točka na daljici BB_1, tako da je PQ vzporedna AB. Naj bo P_1 taka točka na premici PB_1, da leži točka B_1 strogo med točkama P in P_1 ter je $\angle PP_1C = \angle BAC$. Podobno, naj bo Q_1 taka točka na premici QA_1, da leži točka A_1 strogo med točkama Q in Q_1 ter je $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dokaži, da so točke P, Q, P_1 in Q_1 konciklične.

Naloga 3. Socialno omrežje ima 2019 uporabnikov, nekateri pari uporabnikov so prijatelji. Če je uporabnik A prijatelj uporabnika B, potem je tudi uporabnik B prijatelj uporabnika A. Dogodki, definirani na naslednji način, se lahko zgodijo večkrat, hkrati se lahko zgodi samo en dogodek:

> Trem uporabnikom A, B in C, pri katerih je A prijatelj z obema uporabnikoma B in C, hkrati pa B in C nista prijatelja, se spremeni status prijateljstva, tako da sta sedaj B in C prijatelja, A pa ni več prijatelj z B in ni več prijatelj s C. Vsi ostali statusi prijateljstva se ne spremenijo.

Na začetku ima 1010 uporabnikov vsak po 1009 prijateljev, 1009 uporabnikov pa vsak po 1010 prijateljev. Dokaži, da obstaja tako zaporedje zgoraj definiranih dogodkov, da ima na koncu vsak uporabnik največ enega prijatelja.

Language: Slovenian

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

sreda, 17. julij 2019

Naloga 4. Poišči vse pare (k, n) naravnih števil, tako da je

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Naloga 5. Banka iz Batha je skovala kovance, ki imajo na eni strani H in na drugi strani T. Tea ima n takih kovancev razporejene v ravno vrsto od leve proti desni. Zaporedoma dela naslednjo potezo: če je na natanko $k > 0$ kovancih viden H, potem obrne k-ti kovanec z leve; če je na vseh kovancih viden T, konča. Na primer, če je $n = 3$ in bi bila začetna postavitev kovancev THT, potem bi bile njene poteze $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ in bi končala po treh potezah.

(a) Pokaži, da za vsako začetno postavitev kovancev Tea konča po končno mnogo potezah.

(b) Za vsako začetno postavitev C naj bo $L(C)$ število potez, ki jih naredi Tea, dokler ne konča. Na primer, $L(THT) = 3$ in $L(TTT) = 0$. Določi povprečno vrednost števil $L(C)$ za vseh 2^n možnih začetnih postavitev C.

Naloga 6. Naj bo I središče včrtane krožnice ostrokotnega trikotnika ABC, za katerega velja, da je $|AB| \neq |AC|$. Trikotniku ABC včrtana krožnica ω se dotika stranic BC, CA in AB po vrsti v točkah D, E in F. Premica skozi točko D, ki je pravokotna na EF, ponovno seka krožnico ω v točki R. Premica AR ponovno seka krožnico ω v točki P. Trikotnikoma PCE in PBF očrtani krožnici se ponovno sekata v točki Q.

Dokaži, da se premici DI in PQ sekata na premici, ki gre skozi točko A in je pravokotna na AI.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.