понеділок, 19. липня 2021

Задача 1. Дано деяке натуральне число $n \geqslant 100$. Іван записує числа $n, n+1, \ldots, 2n$ на $n+1$ картках, кожне по одному разу. Потім він перемішує ці $n+1$ картки певним чином і розділяє їх на дві купки. Доведіть, що принаймні в одній з купок знайдуться дві картки, сума чисел на яких є точним квадратом цілого числа.

Задача 2. Доведіть, що нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

справджується для всіх дійсних чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 3. Нехай D — внутрішня точка гострокутного трикутника ABC з $AB > AC$ така, що $\angle DAB = \angle CAD$. Точка E на відрізку AC вибрана таким чином, що $\angle ADE = \angle BCD$, точка F на відрізку AB вибрана таким чином, що $\angle FDA = \angle DBC$, і точка X на прямій AC вибрана таким чином,що $CX = BX$. Нехай O_1та O_2 — центри описаних кіл трикутників ADC та EXD, відповідно. Доведіть,що прямі BC, EF, та O_1O_2 перетинаються в одній точці.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

вівторок, 20. липня 2021

Задача 4. Нехай Γ — коло з центром в точці I, а $ABCD$ — випуклий чотирикутник такий, що кожен з відрізків AB, BC, CD та DA дотикається до кола Γ. Нехай Ω — описане коло трикутника AIC. Продовження відрізку BA за точку A перетинає Ω в точці X, а продовження відрізку BC за точку C перетинає Ω в точці Z. Продовження відрізків AD і CD за точку D перетинають Ω в точках Y та T відповідно. Доведіть, що

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Задача 5. Дві білки, Івасик та Телесик, зібрали на зиму 2021 горішок. Івасик пронумерував горішки числами від 1 до 2021, і вирив у землі 2021 маленьку ямку по колу навколо їх улюбленого дерева. Наступного ранку з'ясувалось, що Телесик поклав по одному горішку в кожну ямку, але зовсім не звернув уваги на нумерацію. Засмучений, Івасик вирішує переставити горішки, виконавши послідовність з 2021 кроків. На k-му кроці, Івасик міняє місцями два горішки, сусідні до горішка з номером k. Доведіть, що існує таке значення k, що на k-му кроці Івасик поміняє місцями два горішки з номерами a та b такими, що $a < k < b$.

Задача 6. Нехай $m \geqslant 2$ — деяке натуральне число, A — скінченна множина з (необов'язково додатніх) цілих чисел, а $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ — деякі підмножини A. Припустимо, що для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ сума елементів множини B_k становить рівно m^k. Доведіть, що A містить принаймні $m/2$ елементів.

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.