

2006년 7월 12일

**Problem 1.** 삼각형  $ABC$ 의 내심을  $I$ 라 하자. 삼각형 내부의 한 점  $P$ 에 대하여,

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

이 성립한다. 이때,  $AP \geq AI$ 임을 보이고, 등호가 성립할 필요충분조건은  $P = I$ 임을 보여라.

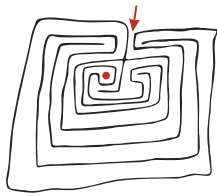
**Problem 2.** 정 2006각형  $P$ 에서, 어떤 대각선의 양쪽에 있는 변들의 개수가 각각 홀수일 때, 그 대각선을 ‘홀대각선’이라 부르자. 단,  $P$ 의 변들은 모두 홀대각선으로 간주한다.

정 2006각형  $P$ 가 2003개의 대각선에 의해 삼각형들로 분할되었다고 하자. 단, 어떤 두 대각선도  $P$ 의 내부에서 교차하지 않는다. 이러한 분할에 의해 생기는 삼각형들 중, 두 개의 홀대각선을 변으로 갖는 이등변삼각형의 최대 개수를 구하여라.

**Problem 3.** 모든 실수  $a, b, c$ 에 대하여 다음의 부등식을 만족하는 실수  $M$ 의 최소값을 구하여라.

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

제한시간: 4시간 30분  
문항당 7점



2006년 7월 13일

**Problem 4.** 다음의 방정식을 만족하는 정수쌍  $(x, y)$  를 모두 구하여라.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problem 5.** 정수 계수를 갖는  $n$  차 다항식  $P(x)$  와 임의의 양의 정수  $k$  에 대하여, 다항식  $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x)) \cdots))$  를 생각하자. 단,  $n > 1$  이고,  $P$  는  $k$  번 나타난다. 이때,  $Q(t) = t$  를 만족하는 정수  $t$  의 개수는  $n$  개 이하임을 보여라.

**Problem 6.** 블록다각형  $P$  의 각 변  $b$  에 대하여,  $b$  를 한 변으로 가지면서  $P$  에 포함되는 삼각형의 최대넓이를 대응시키자. 블록다각형  $P$  의 각 변에 대응되는 최대넓이들을 모두 더한 값은  $P$  의 넓이의 두 배 이상임을 보여라.

제한시간: 4시간 30분  
문항당 7점