Version: Czech

První den

25. července 2007

Úloha 1. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pro každé i $(1 \le i \le n)$ definujme

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}.$$

Nechť

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ platí nerovnost

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Ukažte, že existují reálná čísla $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ taková, že v $(*)$ nastane rovnost.

Úloha 2. Uvažujme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Přímka ℓ prochází bodem A, přičemž protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G. Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že přímka ℓ je osou úhlu DAB.

Úloha 3. Někteří účastníci matematické soutěže jsou přátelé. Přátelství je vzájemné. Skupinu soutěžících nazveme *klika*, jsou-li každí dva z nich přátelé. (Speciálně libovolná skupina složená z méně než dvou soutěžících je klika.) Počet členů kliky nazveme jejím *rozměrem*.

Víme, že největší rozměr kliky složené z účastníků soutěže je sudé číslo. Dokažte, že všechny soutěžící je možno rozesadit do dvou místností tak, aby největší rozměr kliky v jedné místnosti se rovnal největšímu rozměru kliky v druhé místnosti.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.

Version: Czech

Druhý den

26. července 2007

Úloha 4. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C, osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q. Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L. Dokažte, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají.

Úloha 5. Kladná celá čísla a, b jsou taková, že číslo $(4a^2-1)^2$ je dělitelné $4ab-1$. Dokažte, že $a=b$.

Úloha 6. Nechť n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$S = \Big\{(x,y,z) \ : \ x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\Big\}$$

složenou z $(n+1)^3-1$ bodů třírozměrného prostoru. Určete nejmenší možný počet rovin, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z S, neobsahuje však bod $(0,0,0)$.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.