

2016 оны 7 сарын 11, Даваа гараг

Бодлого 1. B өнцөг нь тэгш байдаг BCF гурвалжин өгөв. A нь CF шулуун дээрх $FA = FB$ байх цэг бөгөөд F нь A ба C цэгүүдийн хооронд байрладаг болог. D цэгийг $DA = DC$ ба AC нь $\angle DAB$ өнцгийн биссектрис байхаар сонгов. E цэгийг $EA = ED$ ба AD нь $\angle EAC$ өнцгийн биссектрис байхаар сонгов. CF хэрчмийн дундаж цэгийг M гэе. X -ээр $AMXE$ нь параллелограмм ($AM \parallel EX$ ба $AE \parallel MX$) байх цэгийг тэмдэглэе. BD , FX ба ME шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Бодлого 2. Дараах нөхцөлүүдийг хангахаар $n \times n$ хүснэгтийн нүд бүрд I , M ба O үсгүүдийн аль нэгийг байрлуулж болдог байх бүх эерэг бүхэл n тоог ол:

- аль ч мөр, аль ч баганын нүднүүдийн гуравны нэгд нь I , гуравны нэгд нь M , гуравны нэгд нь O байх ба
- нүдний тоо нь 3-т хуваагдах диагональ бүрийн нүднүүдийн гуравны нэгд нь I , гуравны нэгд нь M , гуравны нэгд нь O байна.

Тэмдэглэл: $n \times n$ хүснэгтийн мөр ба багануудыг 1-ээс n хүртэлх тоогоор дугаарлая. Тэгвэл нүд бүрд (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$, хос тоо харгалзана. $n > 1$ үед, хүснэгт хоёр төрлийн, нийт $4n - 2$ диагональтай. Нэг дэх төрлийн диагональ нь $i + j$ нийлбэр тогтмол байх (i, j) нүднүүдээс, хоёр дахь төрлийн диагональ нь $i - j$ ялгавар тогтмол байх (i, j) нүднүүдээс тогтоно.

Бодлого 3. Хавтгайд $P = A_1 A_2 \dots A_k$ гүдгэр олон өнцөгт өгөв. A_1, A_2, \dots, A_k оройнууд бүхэл координаттай бөгөөд нэг тойрог дээр байрладаг. P -ийн талбайг S гэе. P -ийн тал бүрийн уртын квадрат нь n -д хуваагдах бүхэл тоо байдаг сондгой тоо n өгөгдөв. $2S$ нь n -д хуваагдах бүхэл тоо болохыг батал.

2016 оны 7 сарын 12, Мягмар гараг

Бодлого 4. Ядаж хоёр элементтэй, эерэг бүхэл тоонуудын олонлогийг хэрэв элемент бүр нь ямар нэг өөр элементтэй анхны тоон ерөнхий хуваагчтай бол *анхилуун* гээ. $P(n) = n^2 + n + 1$ гэж тэмдэглэе. Олонлог

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

нь анхилуун байдаг сөрөг-биш бүхэл a тоо олддог байх боломжит хамгийн бага эерэг бүхэл b тоог ол.

Бодлого 5. Самбарт

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016)$$

гэсэн аль ч тал нь 2016 шугаман үржигдэхүүнтэй тэгшитгэл өгөгдөв. Хоёр талд хоёуланд нь ядаж нэг нэг үржигдэхүүн үлддэг бөгөөд үлдсэн тэгшитгэл нь бодит шийдгүй байхаар эдгээр 4032 шугаман үржигдэхүүнээс яг k ширхгийг арчиж болдог байх боломжит хамгийн бага k тоог ол.

Бодлого 6. Хавтгайд аль ч хоёр нь дөрвөн өнцөг үүсгэж огтлолцдог, аль ч гурав нь ерөнхий цэггүй $n \geq 2$ ширхэг хэрчим өгөгдөв. Дорж хэрчим болгоноос нэг үзүүр сонгож, тэр үзүүр дээр хэрчмийн нөгөө үзүүррүү харуулан мэлхий тавина. Тэгээд $n-1$ удаа алгаа ташна. Алга таших бүрд бүх мэлхий урагшаа өөрийн хэрчим дээрх дараагийн огтлолцлын цэгрүү харайна. Мэлхийнүүд харайх чиглэлээ өөрчлөхгүй. Дорж мэлхийнүүдийг аль ч хоёр нь нэгэн зэрэг ижил огтлолцлын цэг дээр буухгүй байхаар байрлуулахыг хүсэж байгаа.

(a) Хэрэв n сондгой бол Дорж хүслээ биелүүлэх боломжтой гэж харуул.

(b) Хэрэв n тэгш бол Дорж хүслээ биелүүлэх боломжгүй гэж харуул.