

Language: Persian (Farsi)

Day: 1

جمعه، ۱۹ تیر ۱۳۹۴

مسأله ۱. یک مجموعه‌ی متناهی S از نقاط صفحه را متعادل گوییم، اگر برای هر دو نقطه‌ی متمایز A و B در S ، نقطه‌ی C در S وجود داشته باشد که $AC = BC$. همچنین، S را بی‌مرکز گوییم اگر برای هر سه نقطه‌ی متمایز A ، B و C در S ، هیچ نقطه‌ی P در S وجود نداشته باشد که $PA = PB = PC$.

الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی $3 \geq n$ ، یک مجموعه‌ی متعادل متشکل از n نقطه وجود دارد.

ب) همه‌ی اعداد طبیعی $3 \geq n$ را تعیین کنید که یک مجموعه‌ی متعادل و بی‌مرکز متشکل از n نقطه موجود باشد.

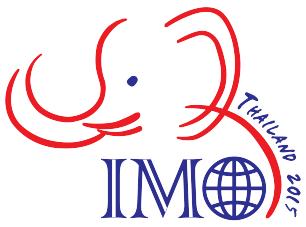
مسأله ۲. همه‌ی سه‌تایی‌های (a, b, c) از اعداد صحیح مثبت را بیابید به‌طوری که هر یک از اعداد

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

توانی از ۲ باشند. (یک توان از ۲، عددی صحیح به فرم 2^n است که n یک عدد صحیح نامنفی باشد.)

مسأله ۳. فرض کنید ABC مثلثی حاده‌الزاویه باشد که $AB > AC$. فرض کنید Γ دایره‌ی محیطی آن، H مرکز ارتفاعی آن و F پای ارتفاع وارد از A باشد. فرض کنید M نقطه‌ی وسط BC باشد. Q را نقطه‌ای روی Γ بگیرید به‌طوری که $\angle HQA = 90^\circ$ و K را نقطه‌ای روی Γ بگیرید که $\angle HKQ = 90^\circ$. فرض کنید نقاط A ، C ، B و Q دو به دو متمایز باشند و به همین ترتیب روی Γ قرار داشته باشند.

ثابت کنید دوایر محیطی مثلث‌های KQH و FKM بر یکدیگر مماس هستند.



Language: Persian (Farsi)

Day: 2

شنبه، ۲۰ تیر ۱۳۹۴

مسأله ۴. Ω دایره‌ی محیطی و O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است و دایره‌ی Γ به مرکز A , پاره‌خط BC را در نقاط D و E قطع می‌کند بهطوری که C, D, E, B و G دویه‌دو متمایز بوده و به همین ترتیب روی خط BC قرار دارند. فرض کنید F و G نقاط تقاطع Γ و Ω باشند بهطوری که A, F, C, B, G به همین ترتیب روی Ω قرار داشته باشند. فرض کنید K نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌ی محیطی مثلث BDF و پاره‌خط AB باشد و L نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌ی محیطی مثلث CGE و پاره‌خط CA باشد. فرض کنید خطوط FK و GL متمایز بوده و در نقطه‌ی X متقطع باشند. ثابت کنید X روی خط OA قرار دارد.

مسأله ۵. \mathbb{R} مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. همه‌ی توابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f را باید که برای هر دو عدد حقیقی x و y ,

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

مسأله ۶. دنباله‌ی a_1, a_2, \dots از اعداد صحیح، در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq a_j \leq 2015, j \geq 1 \quad (i)$$

$$k + a_k \neq \ell + a_\ell, 1 \leq k < \ell \quad (ii)$$

ثبت کنید اعداد صحیح مثبت b و N وجود دارند به طوری که برای هر دو عدد صحیح m و n که $n > m \geq N$ ، داشته باشیم

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 100\gamma$$