tirsdag, 15. juli 2025

Oppgave 1. En linje i planet sies å være *solfylt* dersom den **ikke** er parallell med hverken x-aksen, y-aksen eller linjen $x + y = 0$.

La $n \geqslant 3$ være et gitt heltall. Bestem alle ikkenegative heltall k slik at det finnes n parvis forskjellige linjer i planet som tilfredsstiller begge av de følgende kravene:

- for alle positive heltall a og b med $a + b \leqslant n + 1$ ligger punktet (a, b) på minst én av linjene,
- nøyaktig k av de n linjene er solfylte.

Oppgave 2. La Ω og Γ være sirkler med sentre i henholdsvis M og N slik at radien til Ω er mindre enn radien til Γ. Anta at sirklene Ω og Γ skjærer hverandre i to forskjellige punkter A og B. Linjen MN skjærer Ω i C og Γ i D slik at punktene C, M, N og D ligger på linjen i denne rekkefølgen. La P være omsenteret til trekanten ACD. Linjen AP skjærer Ω igjen i $E \neq A$. Linjen AP skjærer Γ igjen i $F \neq A$. La H være ortosenteret til trekanten PMN.

Vis at linjen gjennom H parallell med AP tangerer omsirkelen til trekanten BEF.

(*Ortosenteret* til en trekant er skjæringspunktet til dens høyder.)

Oppgave 3. La $\mathbb{N}$ betegne mengden av positive heltall. En funksjon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kalles *bonza* dersom

$$f(a) \quad \text{deler} \quad b^a - f(b)^{f(a)}$$

for alle positive heltall a og b.

Bestem den minste reelle konstanten c slik at $f(n) \leqslant cn$ for alle bonza funksjoner f og alle positive heltall n.

onsdag, 16. juli 2025

Oppgave 4. Den uendelige følgen $a_1, a_2, \ldots$ består av positive heltall som alle har minst tre ekte divisorer hver. For enhver $n \geqslant 1$ er heltallet a_{n+1} lik summen av de tre største ekte divisorene av a_n.

Bestem alle mulige verdier av a_1.

(En *ekte divisor* av et positivt heltall N er en positiv divisor av N forskjellig fra selve N.)

Oppgave 5. Alice og Bazza spiller *inekoalaty*-spillet for to spillere, et spill der reglene er avhengige av et positivt reelt tall λ som begge spillere kjenner til. I det n^{te} trekket i spillet (som starter med $n = 1$) skjer følgende:

- Dersom n er odde, velger Alice et ikkennegativt reelt tall x_n slik at

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Dersom n er et partall, velger Bazza et ikkenegativt reelt tall x_n slik at

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Dersom en spiller ikke kan velge et passende tall x_n, ender spillet og den andre spilleren vinner. Dersom spillet fortsetter i det uendelige, kåres det ingen vinner. Alle valgte tall er kjente for begge spillere.

Bestem alle verdier av λ for hvilke Alice har en vinnende strategi, samt alle verdier for hvilke Bazza har en vinnende strategi.

Oppgave 6. Betrakt et rutenett bestående av 2025×2025 enhetsruter. Matilda ønsker å legge rektangulære brikker på rutenettet, muligens av forskjellige dimensjoner, slik at enhver brikke har sider som ligger langs rutelinjer og hver enhetsrute dekkes av høyst én brikke.

Bestem det minste antall brikker Matilda må plassere på brettet slik at enhver rad og enhver kolonne har nøyaktig én enhetsrute som ikke dekkes av noen brikke.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.