

Сейсенбі, 8 шілде, 2014 ж.

Есеп 1. $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ натурал сандарынан тұратын шексіз тізбегі берілген.

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

шартын қанағаттандыратын бір ғана бүтін $n \geq 1$ саны табылатынын дәлелдеңдер.

Есеп 2. $n \geq 2$ бүтін саны берілген. Өлшемі $n \times n$ болатын n^2 бірлік шаршыдан тұратын шахмат тақтасы берілген. Егер әрбір қатарда және әрбір бағанда тек бір ғана ладья тұрса, онда n ладьяның орналасуын *бейбітшіл* деп атаймыз. Әрбір n ладьяның бейбітшіл орналасу кезінде ешқандай k^2 бірлік шаршысында ладья болмайтындай өлшемі $k \times k$ болатын тақта табылатындай ең үлкен k санын табындар.

Есеп 3. $ABCD$ дөңес төртбұрышында $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ екені белгілі. H нүктесі A нүктесінен BD -ға түсірілген биіктіктің табаны. AB және AD қабырғаларынан келесі шарттарды қанағаттандыратын сәйкесінше S және T нүктелері алынған: H нүктесі SCT үшбұрышының ішінде жатады және

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

BD түзуі TSH үшбұрышының сырттай сызылған шеңберін жанайтынын дәлелдеңдер.

Сәрсенбі, 9 шілде, 2014 ж.

Есеп 4. ABC сүйірбұрышты үшбұрышының BC қабырғасында $\angle PAB = \angle BCA$ және $\angle CAQ = \angle ABC$ болатындай P мен Q нүктелері белгіленген. P нүктесі AM кесіндісінің ортасы және Q нүктесі AN кесіндісінің ортасы болатындай AP және AQ түзулерінде сәйкесінше M және N нүктелері алынған. BM және CN түзулері ABC үшбұрышының сырттай сызылған шеңберінде қиылысатынын дәлелдеңдер.

Есеп 5. Кейп Таунның Банкі кез келген натурал n саны үшін $\frac{1}{n}$ мәні бар тиындарды шығарады. Осындай тиындарының (мәндері бірдей болуы мүмкін) ең көп $99 + \frac{1}{2}$ сомасы болатын шекті жиынтығы бар. Осы жиынтығын әрқайсысының сомасы 1-ден аспайтындай 100 немесе одан аз топқа бөлуге болатынын дәлелдеңдер.

Есеп 6. Егер түзулер жиынында кез келген екеуі параллель емес және кез келген үшеуі бір нүктеде қиылыспаса, онда осы жиын *жалпы жағдайда* болады деп атаймыз. Жалпы жағдайда болатын түзулер жиыны жазықтықты бірнеше аймаққа кеседі, кейбір аймақтың ауданы шекті болады, осыларды біз *шекті аймақтар* деп атаймыз. Барлық жеткілікті үлкен n үшін, кез келген жалпы жағдайда болатын n түзуі үшін, әрбір шекті аймақтың шекарасы толығымен көк түстен тұрмайтындай кемінде \sqrt{n} түзуін көк түске бояуға болатынын дәлелдеңдер.

Ескерту: \sqrt{n} санын $c\sqrt{n}$ санына өзгертсек, c константасына байланысты жұмыстар бағаланады.