*sobota, 8. julij 2023*

**Naloga 1.** Določi vsa sestavljena naravna števila $n > 1$, ki imajo naslednjo lastnost: če so $d_1, d_2, \ldots, d_k$ vsi pozitivni delitelji števila $n$, pri čemer je $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, potem $d_i$ deli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za vsak $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

**Naloga 2.** Naj bo $ABC$ ostrokotni trikotnik, tako da je $|AB| < |AC|$. Naj bo $\Omega$ trikotniku $ABC$ očrtana krožnica. Naj bo $S$ razpolovišče loka $CB$ krožnice $\Omega$, ki vsebuje točko $A$. Pravokotnica skozi točko $A$ na $BC$ seka $BS$ v točki $D$ in seka $\Omega$ še v točki $E$, $E \neq A$. Premica skozi točko $D$, vzporedna $BC$, seka premico $BE$ v točki $L$. Trikotniku $BDL$ očrtano krožnico označimo z $\omega$. Krožnica $\omega$ seka $\Omega$ še v točki $P$, $P \neq B$.
Dokaži, da tangenta na $\omega$ v točki $P$ seka premico $BS$ na simetrali notranjega kota $\angle BAC$.

**Naloga 3.** Za vsako naravno število $k \geqslant 2$ določi vsa neskončna zaporedja naravnih števil $a_1, a_2, \ldots$, za katera obstaja polinom $P$ oblike $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, kjer so $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nenegativna cela števila, tako da je

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

za vsako naravno število $n$.



*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.*
*Vsaka naloga je vredna 7 točk.*

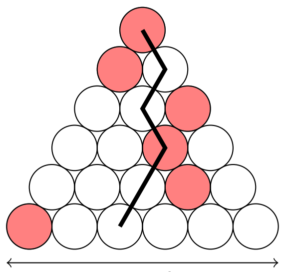
*nedelja, 9. julij 2023*

**Naloga 4.** Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ taka paroma različna pozitivna realna števila, da je

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

celo število za vsak $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokaži, da je $a_{2023} \geqslant 3034$.

**Naloga 5.** Naj bo $n$ naravno število. *Japonski trikotnik* je sestavljen iz $1 + 2 + \cdots + n$ krogov, ki so razporejeni v obliki enakostraničnega trikotnika, tako da je, za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$, v $i$-ti vrstici natanko $i$ krogov in v vsaki vrstici je natanko en krog pobarvan rdeče. *Nindžina pot* v japonskem trikotniku je zaporedje $n$ krogov, ki se začne v krogu v najvišji vrstici, nato pa se ponavljajoče nadaljuje iz trenutnega kroga v enega izmed krogov, ki sta neposredno pod njim, in se konča v najnižji vrstici. Na sliki je primer japonskega trikotnika za $n = 6$ z nindžino potjo, ki vsebuje dva rdeča kroga.



$n = 6$

V odvisnosti od $n$ poišči največji $k$, tako da za vsak japonski trikotnik obstaja nindžina pot, ki vsebuje vsaj $k$ rdečih krogov.

**Naloga 6.** Naj bo $ABC$ enakostranični trikotnik. Naj bodo $A_1, B_1, C_1$ notranje točke trikotnika $ABC$, tako da je $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ in

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°.$$

Presečišče $BC_1$ in $CB_1$ je točka $A_2$, presečišče $CA_1$ in $AC_1$ je točka $B_2$, presečišče $AB_1$ in $BA_1$ pa točka $C_2$.
Dokaži: če je trikotnik $A_1B_1C_1$ raznostranični, potem gredo vse tri trikotnikom $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ in $CC_1C_2$ očrtane krožnice skozi dve točki, ki sta skupni tem trem krožnicam.

(Opomba: v raznostraničnem trikotniku nobeni dve stranici nista enako dolgi.)