

วันจันทร์ที่ ๑๑ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

โจทย์ข้อ 1. รูปสามเหลี่ยม BCF มีมุมฉากที่ B ให้ A เป็นจุดบนเส้นตรง CF ที่ทำให้ $FA = FB$ และ F อยู่ระหว่าง A และ C เลือกจุด D ที่ทำให้ $DA = DC$ และ AC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle DAB$ เลือกจุด E ที่ทำให้ $EA = ED$ และ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle EAC$ ให้ M เป็นจุดกึ่งกลาง CF ให้ X เป็นจุดที่ทำให้ $AMXE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (โดยที่ $AM \parallel EX$ และ $AE \parallel MX$) จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง BD , FX และ ME ตัดกันที่จุดเดียว

โจทย์ข้อ 2. จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่ทำให้แต่ละช่องของตารางขนาด $n \times n$ สามารถใส่ตัวอักษร I , M หรือ O ตัวใดตัวหนึ่ง โดยที่

- ในแต่ละแถวและแต่ละหลัก หนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร I หนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร M และหนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร O
- ในแนวทแยงใด ๆ หากจำนวนช่องในแนวทแยงนั้นเป็นพหุคูณของสามแล้ว หนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร I หนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร M และ หนึ่งในสามของจำนวนช่องเป็นอักษร O

หมายเหตุ แทนแต่ละแถวและแต่ละหลักของตารางขนาด $n \times n$ ด้วยเลข 1 ถึง n ตามลำดับ ดังนั้น แต่ละช่องของตารางจะถูกแทนได้ด้วยคู่อันดับ (i, j) ของจำนวนเต็มบวกโดยที่ $1 \leq i, j \leq n$ สำหรับ $n > 1$ ตารางจะมี $4n - 2$ แนวทแยง ซึ่งแบ่งได้เป็นสองแบบ แนวทแยงแบบแรกประกอบด้วยช่อง (i, j) โดยที่ $i + j$ เป็นค่าคงที่ และแนวทแยงแบบที่สองประกอบด้วยช่อง (i, j) โดยที่ $i - j$ เป็นค่าคงที่

โจทย์ข้อ 3. ให้ $P = A_1 A_2 \dots A_k$ เป็นรูปหลายเหลี่ยมูนในระนาบ จุดยอด A_1, A_2, \dots, A_k มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม และอยู่บนวงกลมวงหนึ่ง ให้ S เป็นพื้นที่ของ P ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ซึ่งหารกำลังสองของความยาวด้านของ P ทุกด้านลงตัว จงพิสูจน์ว่า $2S$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย n ลงตัว

วันอังคารที่ ๑๒ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๙

โจทย์ข้อ 4. เซตของจำนวนเต็มบวกเรียกว่า *หอม* ถ้าเซตนี้มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัว และสมาชิกแต่ละตัวมีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะร่วมกับสมาชิกตัวอื่นในเซตนี้อีกอย่างน้อยหนึ่งสมาชิก ให้ $P(n) = n^2 + n + 1$ จงหาจำนวนเต็มบวก b ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่ทำให้มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a ซึ่ง

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

เป็นเซตหอม

โจทย์ข้อ 5. สมการ

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

ถูกเขียนอยู่บนกระดาน สมการนี้มีตัวประกอบเชิงเส้น 2016 ตัวอยู่แต่ละข้างของสมการ จงหาค่า k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สามารถลบตัวประกอบเชิงเส้น k ตัวจากทั้งหมด 4032 ตัว โดยที่แต่ละข้างของสมการที่เหลือต้องมีตัวประกอบเชิงเส้นเหลืออยู่อย่างน้อยหนึ่งตัวประกอบ และสมการนี้ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

โจทย์ข้อ 6. มีส่วนของเส้นตรง $n \geq 2$ เส้นในระนาบ โดยที่สองเส้นใด ๆ ตัดกันที่จุดภายใน และไม่มีสามเส้นใดตัดกันที่จุดเดียว เจฟฟ์เลือกจุดปลายข้างหนึ่งของส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้น และวางกบหนึ่งตัวบนจุดปลายนั้นโดยให้หันหน้าไปทางปลายอีกข้างหนึ่ง จากนั้น เขาจะตบมือ $n-1$ ครั้ง ทุกครั้งที่เขาตบมือ กบแต่ละตัวจะกระโดดไปยังจุดตัดข้างหน้าบนส่วนของเส้นตรงที่มันอยู่ทันที โดยกบจะยังหันหน้าไปในทิศเดิม เจฟฟ์ต้องการที่จะวางกบโดยที่ไม่มีกบสองตัวใด ๆ อยู่บนจุดตัดเดียวกันหลังการตบมือแต่ละครั้ง

(a) จงพิสูจน์ว่าเจฟฟ์สามารถบรรลุความต้องการของเขาได้เสมอหาก n เป็นคี่

(b) จงพิสูจน์ว่าเจฟฟ์ไม่สามารถบรรลุความต้องการของเขาได้หาก n เป็นคู่