Bazar ertəsi, 11 iyul 2022

Məsələ 1. Oslo Bankı iki növ qəpik buraxır: alüminium (A ilə işarələnir) və bürünc (B ilə işarələnir). Məryəmin n ədəd alüminium və n ədəd bürünc qəpiyi var, onlar bir sıra boyunca ixtiyari ilkin qaydada düzülmüşdür. *Zəncir* eyni növ ardıcıl qəpiklərdən ibarət hər hansı bir ardıcıllıqdır. Verilmiş müsbət tam $k \leqslant 2n$ ədədi üçün, Məryəm bu əməliyyatı təkrar-təkrar yerinə yetirir: o soldan k-cı qəpiyi əhatə edən ən uzun zənciri müəyyən edir və həmin zəncirdəki bütün qəpikləri sıranın sol ucuna köçürür. Məsələn, $n = 4$ və $k = 4$ olarsa, $AABBBABA$ düzülüşü üçün proses belə olacaqdır:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

$1 \leqslant k \leqslant 2n$ olan bütün elə (n, k) cütlərini tapın ki, hər bir ilkin düzülüş üçün bu proses zamanı müəyyən anda ən soldakı n qəpiyin hər biri eyni növdə olsun.

Məsələ 2. $\mathbb{R}^+$ mübət həqiqi ədədlər çoxluğu olsun. Bütün elə $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funksiyalarını tapın ki, hər bir $x \in \mathbb{R}^+$ üçün, tam olaraq bir sayda $y \in \mathbb{R}^+$ var ki,

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

bərabərsizliyini ödəyir.

Məsələ 3. k müsbət tam ədəd və S tək sadə ədədlərdən ibarət sonlu çoxluq olsun. İsbat edin ki, S-in elementlərini çevrə ətrafında yerləşdirməyin ən çoxu bir yolu (fırlanma və əksetmə ilə bir-birindən əldə edilən düzülüşlər eyni sayılır) var, belə ki, istənilən iki qonşu ədədin hasili hansısa x müsbət tam ədədi üçün $x^2 + x + k$ formasındadır.

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir məsələ 7 bal ilə qiymətləndirilir.

Çərşənbə axşamı, 12 iyul 2022

Məsələ 4. $ABCDE$ qabarıq beşbucaqlısında $BC = DE$. Fərz edin ki, $ABCDE$ daxilində elə T nöqtəsi var ki, $TB = TD$, $TC = TE$ və $\angle ABT = \angle TEA$. AB düz xəttinin CD və CT düz xətləri ilə kəsişmə nöqtələri uyğun olaraq P və Q olsun. Fərz edin ki, P, B, A, Q nöqtələri düz xətt üzərində elə bu ardıcıllıqla yerləşir. AE düz xəttinin CD və DT düz xətləri ilə kəsişmə nöqtələri uyğun olaraq R və S olsun. Fərz edin ki, R, E, A, S nöqtələri düz xətt üzərində elə bu ardıcıllıqla yerləşir. İsbat edin ki, P, S, Q, R nöqtələri eyni bir çevrə üzərində yerləşir.

Məsələ 5. Bütün müsbət tam ədəd (a, b, p) üçlülərini tapın ki, p sadə ədəddir və

$$a^p = b! + p.$$

Məsələ 6. n müsbət tam ədəd olsun. *Skandinaviya kvadratı* 1-dən n^2-a qədər bütün tam ədədləri əhatə edən $n \times n$ ölçülü elə lövhədir ki, hər xanasında tam olaraq bir tam ədəd var. İki fərqli xana ortaq bir tərəfi paylaşırsa, bitişik sayılır. Yalnız özündən böyük ədədlər olan xanalara bitişik olan xana *dərə* sayılır. *Yoxuş yolu* bir və ya bir neçə xananın elə ardıcıllığıdır ki,

(i) ardıcıllığın birinci xanası dərədir,

(ii) ardıcıllığın hər bir sonrakı xanası əvvəlki xanaya bitişikdir,

(iii) ardıcıllığın xanalarına yazılan ədədlər artan sıradadır.

Skandinaviya kvadratında bütün yoxuş yollarının ümumi sayının mümkün ən kiçik qiymətini n-dən asılı olaraq tapın.

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir məsələ 7 bal ilə qiymətləndirilir.