Luni, 11 iulie 2016

Problema 1. Triunghiul BCF este dreptunghic în B. Fie A punctul de pe dreapta CF pentru care $FA = FB$ şi F este între A şi C. Punctul D este ales astfel încât $DA = DC$ şi AC este bisectoarea unghiului $\angle DAB$. Punctul E este ales astfel încât $EA = ED$ şi AD este bisectoarea unghiului $\angle EAC$. Fie M mijlocul segmentului $[CF]$. Fie X punctul pentru care $AMXE$ este paralelogram (unde $AM \parallel EX$ şi $AE \parallel MX$). Demonstraţi că dreptele BD, FX şi ME sunt concurente.

Problema 2. Determinaţi toţi întregii strict pozitivi n pentru care în fiecare celulă a unui tabel $n \times n$ poate fi pusă una dintre literele I, M şi O astfel încât:

- în fiecare linie şi în fiecare coloană, o treime dintre elemente sunt I, o treime sunt M şi o treime sunt O; şi
- pe orice diagonală, dacă numărul elementelor diagonalei este multiplu de trei, atunci o treime dintre elemente sunt I, o treime sunt M şi o treime sunt O.

Notă: Liniile şi coloanele tabelului $n \times n$ sunt numerotate, fiecare, de la 1 la n în ordinea naturală. Astfel, fiecare celulă corespunde unei perechi de întregi (i, j), cu $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dacă $n > 1$, tabelul are $4n - 2$ *diagonale* de două tipuri. O diagonală de primul tip este formată din toate celulele (i, j) pentru care $i + j$ este o constantă, iar o diagonală de al doilea tip este formată din toate celulele (i, j) pentru care $i - j$ este o constantă.

Problema 3. Fie $P = A_1A_2 \ldots A_k$ un poligon convex în plan. Vârfurile A_1, A_2, $\ldots$, A_k au coordonate întregi şi se află pe un cerc. Fie S aria lui P. Numărul natural impar n are proprietatea că pătratele lungimilor laturilor lui P sunt întregi divizibili cu n. Demonstraţi că $2S$ este un număr întreg divizibil cu n.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Marţi, 12 iulie 2016

Problema 4. O mulţime de numere naturale nenule se numeşte *plăcută* dacă ea este alcătuită din cel puţin două elemente şi fiecare dintre elementele sale are cel puţin un factor prim comun cu un alt element al mulţimii. Fie $P(n) = n^2 + n + 1$. Care este cea mai mică valoare posibilă a întregului strict pozitiv b pentru care există un număr natural a astfel încât mulţimea

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

să fie plăcută?

Problema 5. Pe tablă este scrisă ecuaţia

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

cu 2016 factori liniari în fiecare membru. Care este cea mai mică valoare a lui k pentru care este posibil să ştergem exact k dintre aceşti 4032 de factori liniari, astfel încât să rămână cel puţin un factor în fiecare membru şi ecuaţia rezultată să nu aibă nicio soluţie reală?

Problema 6. În plan se dau $n \geqslant 2$ segmente, astfel încât orice două segmente au un punct interior comun şi orice trei segmente nu sunt concurente. Gigel trebuie să aleagă câte un capăt pentru fiecare segment şi să pună o broască acolo, cu faţa spre celălalt capăt. Apoi, va bate din palme de $n-1$ ori. De fiecare dată când bate din palme fiecare broască sare înainte, aterizând pe următorul punct de intersecţie al segmentului său. Broaştele nu-şi schimbă niciodată direcţia salturilor. Gigel doreşte să plaseze broaştele astfel încât să nu existe două care să ocupe aceeaşi intersecţie în acelaşi moment.

(a) Demonstraţi că Gigel poate să-şi atingă întotdeauna scopul dacă n este impar.

(b) Demonstraţi că Gigel nu-şi poate atinge niciodată scopul dacă n este par.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte