الإثنين, 11. تموز 2022

مسألة 1. يُصدر بنك أوسلو نوعين من قطع النقود المعدنية: الألمنيوم التي نرمز إليها A والبرونز التي نرمز إليها B. ماريان لديها n قطعة ألمنيوم وn قطعة برونز مصفوفة في سطر بترتيب كيفي في البدء. نسمّي "سلسلة" أي متتالية جزئية مؤلفة من قطع متماثلة متتالية. نُعطى عددا صحيحاً موجباً تماماً $k \leqslant 2n$. وتُجري ماريان بشكل متكرر العملية الآتية: تعيّن أطول سلسلة تحتوي على القطعة المعدنية رقم k بدءاً من اليسار، تنقل جميع القطع المعدنية في تلك السلسلة لتضعها على الطرف الأيسر من السطر. مثلاً، في حالة $n = 4$ و $k = 4$، الإجرائية التي تبدأ بالسلسلة $AABBBABA$ ستكون كما يأتي:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

أوجد جميع الأزواج (n, k) حيث $1 \leqslant k \leqslant 2n$ و التي تحقق أنّه مهما كان الترتيب الأولي، فإنّه في لحظة معيّة أثناء هذه الإجرائية، ستكون القطع المعدنية التي عددها n والموجودة على يسار السطر من النوع نفسه.

مسألة 2. لتكن $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماماً. جِدْ جميع التوابع $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ التي تحقّق أنّه مهما كان $x \in \mathbb{R}^+$ فيوجد عدد وحيد $y \in \mathbb{R}^+$ واحد فقط يحقّق

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

مسألة 3. ليكن k عدداً صحيحاً موجباً تماماً، ولتكن S مجموعة منتهية من الأعداد الأولية الفردية. أثبت أنّه يوجد على الأكثر طريقة وحيدة لترتيب عناصر S على محيط دائرة بحيث يكون ناتج ضرب أي عددين متجاورين من الشكل $x^2 + x + k$ حيث x عدد صحيح موجب تماماً. نعتبر ترتيبين للعناصر على محيط الدائرة متماثلين إذا كأن أحدهما ينتج عن الآخر بدوران أو بانعكاس حول أحد الأقطار.

الثلاثاء, 12، تموز 2022

مسألة 4. ليكن $ABCDE$ شكلاً خماسياً محدّباً يحقّق $BC = DE$. نفترض أنّه توجد نقطة T داخل $ABCDE$ تحقّق $TB = TD$، $TC = TE$ و$\angle ABT = \angle TEA$. نفترض أنّ المستقيم AB يقطع CD وCT في النقطتين P و Q، بالترتيب، ونفترض أنّ النقاط P, B, A, Q تظهر بهذا الترتيب على المستقيم الذي تنتمي إليه. ونفترض أيضاً أنّ المستقيم AE يقطع المستقيمين CD وDT في النقطتين R و S، بالترتيب، ونفترض أنّ النقاط R, E, A, S تظهر بهذا الترتيب على المستقيم الذي تنتمي إليه.

أثبت أنّ النقاط P, S, Q, R تقع على دائرة.

مسألة 5. جِدْ جميع الثلاثيات (a, b, p) من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً حيث p عددٌ أولي وتحقق

$$a^p = b! + p.$$

مسألة 6. ليكن n عدد صحيح موجب تماماً. نسمي "مربعاً قطبياً" رقعة أبعادها $n \times n$ تحتوي على الأعداد من 1 إلى n^2 بحيث تحتوي كل خلية على عدد واحد فقط. نقول إن خليتين متجاورتان إذا اشتركا بضلع. كل تجاور خلايا تحتوي على أعداد أكبر تماماً من عددها تسمى " وادياً". نسمي "مساراً صاعداً" متتالية من خلية أو أكثر تحقق ما يلي:

(i) أول خلية في المتتالية هي واد،

(ii) كل خلية لاحقة هي مجاورة لسابقتها و

(iii) الأعداد المكتوبة في خلايا المتتالية مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

جد أصغر عدد ممكن للمسارات الصاعدة في "مربع قطبي" بصيغة تابع للعدد n.