Çərşəmbə axşamı, 23 iyul 2013

Məsələ 1. İsbat edin ki, ixtiyari k və n natural ədədlər cütü üçün

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

şərtini ödəyən k sayda natural $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (fərqli olmaları şərt deyil) ədədləri mövcüddur.

Məsələ 2. Müstəvidə ixtiyari üçü eyni düz xətt üzərində olmayan 4027 sayda nöqtənin yerləşməsini *kolumbiya yerləşməsi* adlandıraq. Belə ki, bu nöqtələrdən 2013-ü qırmızı, geri qalan 2014 nöqtə isə mavi rəng ilə rənglənmişdir. Müstəvini bir neçə bölgəyə bölən düz xətlər çoxluğuna baxaq. Verilmiş *kolumbiya yerləşməsinə* görə aşağıdakı şərtlər ödənərsə onda bu düz xəttlər çoxluğuna *yaxşı çoxluq* deyəcəyik:

- Heç bir düz xətt bu yerləşmənin heç bir nöqtəsindən keçmir
- Heç bir bölgədə eyni anda hər iki rəngdən nöqtə yoxdur.

Elə ən kiçik k ədədini tapın ki, 4027 nöqtədən ibarət ixtiyari *kolumbiya yerləşməsi* üçün k sayda düz xəttdən ibarət *yaxşı* düz xəttlər çoxluğu mövcüddur.

Məsələ 3. A nöqtəsinə əks tərəfdən ABC üçbucağına xaricdən toxunan çevrə BC tərəfinə A_1 nöqtəsində toxunur. Eyni qayda ilə B və C nöqtələrinə əks tərəfdən üçbucağa xaricdən toxunan çevrələr CA və AB tərəflərinə uyğun olaraq B_1 və C_1 nöqtələrində toxunur. Məlumdur ki, $A_1B_1C_1$ üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin üzərində yerləşir. İsbat edin ki, ABC düzbucaqlı üçbucaqdır.

A nöqtəsinə əks tərəfdən ABC *üçbucağına xaricdən toxunan çevrə bu üçbucağın BC tərəfinə, AB tərəfinin B nöqtəsindən sonrakı uzantısına və AC tərəfinin C nöqtəsindən sonrakı uzantısına toxunan çevrədir. B və C nöqtələrinə əks tərəfdən ABC üçbucağına xaricdən toxunan çevrələr* anoloji *olaraq başa düşülməlidir.*

Language: Azerbaujani

İmtahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir.

Çərşəmbə, 24 iyul 2013

Məsələ 4. İtibucaqlı ABC üçbucağının hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsi H olsun. BC tərəfi üzərində B və C nöqtələrindən fərqli ixtiyari W nöqtəsi verilmişdir. ABC üçbucağnın B və C təpə nöqtələrindən endirilmiş hündürlüklərinin oturacaqlarını uyğun olaraq M və N nöqtələri ilə işarə edək. BWN üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni w_1 ilə işarə edək və bu çevrə üzərnidə elə bir X nöqtəsi verilmişdir ki, WX bu çevrənin diametrdir. Eyni qayda ilə CWM üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni w_2 ilə işarə edək və bu çevrə üzrənidə elə bir Y nöqtəsi verilmişdir ki, WY bu çevrənin diametrdir. İsbat edin ki, X, Y və H nöqtələri eyni düz xətt üzərində yerləşirlər.

Məsələ 5. $\mathbb{Q}_{>0}$ ilə müsbət rasional ədədlər çoxluğunu işarə edək. Tutaq ki, $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkisyası aşağıdakı üç şərti ödəyir:

(i) bütün $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, üçün $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ödənilir
(ii) bütün $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, üçün $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ödənilir
(iii) $f(a) = a$ şərtini ödəyən a>1 ədədi mövcüddur.

İsbat edin ki, bütün $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ üçün f(x)=x.

Məsələ 6. Tutaq ki, $n \geq 3$ tam ədəddir. Üzərində n+1 sayda nöqtə olan çevrə bu nöqtələr ilə eyni uzunluqda qövslərə bölünmüşdür. 0,1,….,n ədədlərindən hər birini bir dəfə istifadə edərək hər bir nöqtə üzərinə bir ədəd yazma əməliyyatına nömrələndirmə deyəcəyik. Hər hansı bir nömrələndirmə çevrə döndürülərək digəri əldə edilirsə onda onları eyni qəbul edirik. Nömrələndirmə *gözəl* adlanır o vaxt ki, a+d=b+c şərtini ödəyən ixtiyari dörd a<b<c<d ədədləri üçün a və d ədədləri ilə işarələnmiş nöqtələri birləşdirən vətər ilə b və c ədədləri ilə işarələnmiş nöqtələri birləşdirən vətər kəsişmirlər.

Gözəl nömrələndirmələrin sayını M ilə işarə edək. $x + y \leq n$ və $ƏBOB(x, y) = 1$ şərtini ödəyən (x,y) natural sıralı cütlərinin sayını isə N ilə işarə edək. İsbat edin ki ,

$$M = N + 1$$

İmtahana ayrılan vaxt : 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir.