شنبه، ۸ـ ژوئیه ۲۰۲۳

مسئله‌ی ۱. همه ی عددهای صحیح و مرکب $n > 1$ را طوری پیدا کنید که در این شرط صدق کنند: اگر $d_1, d_2, \ldots, d_k$ همه ی شمارنده های مثبت n باشند، به طوری که $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$، آن گاه برای هر $1 \leqslant i \leqslant k-2$، d_i شمارنده ی $d_{i+1} + d_{i+2}$ باشد.

مسئله‌ی ۲. فرض کنید مثلث ABC با شرط $AB < AC$ حاده الزاویه باشد. Ω دایره ی محیطی مثلث ABC است. فرض کنید نقطه ی S وسط کمان CB از دایره ی Ω باشد که شامل A است. عمود ترسیم شده از A بر BC، BS را در D و Ω را برای دومین بار در $E \neq A$ قطع می کند. خط گذرنده از D که موازی BC است، خط BE را در L قطع می کند. دایره ی محیطی مثلث BDL را با ω نمایش می دهیم. فرض کنید ω، Ω را برای دومین بار در $P \neq B$ قطع کند.

نشان دهید خطی که در نقطه ی P بر ω مماس است خط BS را روی نیمساز داخلی $\angle BAC$ قطع می کند.

مسئله‌ی ۳. برای هر عدد طبیعی $k \geqslant 2$، همه ی دنباله های نامتناهی $a_1, a_2, \ldots$ را از عددهای صحیح و مثبت طوری پیدا کنید که برای آن ها چندجمله ای P به صورت $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ که $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ عددهایی صحیح و نامنفی هستند وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد صحیح $n \geqslant 1$ داشته باشیم:

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}.$$

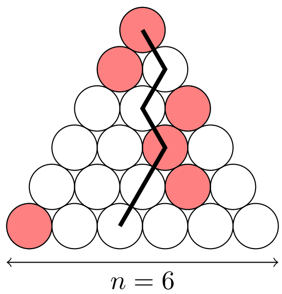
یکشنبه، ۹. ژوئیه ۲۰۲۳

مسئله‌ی ۴. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ عددهایی حقیقی، مثبت و دو بدو متمایز باشند؛ به طوری که برای هر $n = 1, 2, \ldots, 2023$،

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

عددی صحیح باشد. نشان دهید $a_{2023} \geqslant 3034$.

مسئله‌ی ۵. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. یک مثلث ژاپنی دارای $1 + 2 + \cdots + n$ دایره است، که در شکلی به صورت مثلث متساوی الاضلاع چیده شده اند که برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، ردیف iـام دقیقا دارای i دایره است و دقیقا یکی از آن ها به رنگ قرمز رنگ آمیزی شده است. در یک مثلث ژاپنی یک مسیر نینجا، دنباله ای از n دایره است که از بالاترین ردیف شروع شده و با حرکت مکرر از یک دایره به یکی از دو دایره ای که دقیقا زیر آن قرار دارند ادامه یافته و در پایین ترین ردیف به پایان می رسد. درشکل زیر مثالی را از یک مثلث ژاپنی به هم راه یک مسیر نینجا که حاوی دو دایره ی قرمز است، برای $n = 6$ مشاهده می کنید.



حداکثر مقدار k را برحسب n طوری پیدا کنید که در هر مثلث ژاپنی، یک مسیر نینجا حاوی دست کم k دایره ی قرمز وجود داشته باشد.

مسئله‌ی ۶. فرض کنید ABC مثلثی متساوی الاضلاع است. نقطه های A_1, B_1, C_1 داخل مثلث ABC طوری قرار گرفته اند که $BA_1 = A_1C$، $CB_1 = B_1A$، $AC_1 = C_1B$ و

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

فرض کنید BC_1 و CB_1 در A_2، CA_1 و AC_1 در B_2، و AB_1 و BA_1 در C_2 هم دیگر را قطع کنند. نشان دهید اگر $A_1B_1C_1$ مثلثی مختلف الاضلاع باشد، در این صورت دایره های محیطی سه مثلث AA_1A_2، BB_1B_2 و CC_1C_2 از دو نقطه ی مشترک گذر خواهند کرد.

(تذکر: یک مثلث مختلف الاضلاع مثلثی است که طول هیچ یک از اضلاعش برابر نباشند.)

Language: Persian (Farsi)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

هر مسئله ۷ امتیاز دارد.