



Dushanba, 19-iyul 2021

Masala 1. Aytaylik $n \geq 100$ butun son bo'lsin. Abdulla $n, n+1, \dots, 2n$ sonlarni har birini turli kartochkalarga yozdi. So'ng ushbu $n+1$ ta kartochkalarni aralashtirib, ularni ikkita to'plamga ajratdi. Hosil bo'lgan ikkita to'plamdan kamida bittasida yig'indisi to'la kvadrat bo'ladigan ikkita kartochka topilishini isbotlang.

Masala 2. Barcha haqiqiy x_1, \dots, x_n sonlar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Masala 3. O'tkir burchakli ABC uchburchakda $AB > AC$. Uchburchakni ichki D nuqtasi uchun $\angle DAB = \angle CAD$. AC kesmadagi E nuqta uchun $\angle ADE = \angle BCD$, AB kesmadagi F nuqta uchun $\angle FDA = \angle DBC$, AC to'g'ri chiziqdagi X nuqta uchun $CX = BX$ bo'lsin. O_1 va O_2 , mos ravishda ADC va EXD uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar markazi bo'lsin. U holda, BC , EF , va O_1O_2 to'g'ri chiziqlar bir nuqtadan o'tishini isbotlang.



Seshanba, 20-iyul 2021

Masala 4. Markazi I bo'lgan Γ aylana berilgan va $ABCD$ qavariq to'rtburchak uchun AB , BC , CD va DA kesmalarni har biri Γ aylanaga urinadi. AIC uchburchakka tashqi chizilgan aylana Ω bo'lsin. A nuqta tomoniga BA kesmani davomi Ω ni X nuqtada, C nuqta tomoniga BC kesmani davomi Ω ni Z nuqtada kesib o'tadi. D nuqta tomoniga AD va CD kesmalarni davomi Ω aylanani mos ravishda Y va T nuqtalarda kesib o'tadi. U holda,

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

tenglikni isbotlang.

Masala 5. Olmaxonlar Egrivoy va To'g'rivoy qishga 2021 dona yong'oq g'amlashdi. To'g'rivoy yong'oqlarni 1 dan 2021 gacha bo'lgan sonlar bilan belgiladi va yoqtirgan daraxti atrofida aylana bo'ylab 2021 ta o'rachalar qazidi. Ertasiga u qarasa, Egrivoy har bir o'rachaga nomeriga e'tibor bermasdan bittadan yong'oq joylabdi. Bunga xafa bo'lgan To'g'rivoy 2021 ta amal ketma-ketligi bilan yong'oqlarni qayta tartiblamochi bo'ldi. To'g'rivoy k -chi amalda nomeri k bo'lgan yong'oqning qo'shnilarini bir-biri bilan almashtiradi. Biror k -chi amalda $a < k < b$ shartni qanoatlantiruvchi a va b nomerlik yong'oqlar almashtiriladigan k soni topilishini isbotlang.

Masala 6. Aytaylik $m \geq 2$ butun son, A butun sonlardan (musbat bo'lishi shart emas) tuzilgan chekli to'plam va uning qism to'plamlari $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ berilgan bo'lsin. Agar har bir $k = 1, 2, \dots, m$ uchun B_k to'plamning elementlari yig'indisi m^k ga teng bo'lsa, u holda A to'plam kamida $m/2$ ta elementlardan iborat ekanligini isbotlang.