

Thứ 4, 15 tháng 7, 2009

Bài 1. Giả sử n là một số nguyên dương và giả sử a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) là những số nguyên khác nhau từng cặp thuộc tập hợp $\{1, \dots, n\}$ sao cho $a_i(a_{i+1} - 1)$ chia hết cho n với mọi $i = 1, \dots, k - 1$. Chứng minh rằng $a_k(a_1 - 1)$ không chia hết cho n .

Bài 2. Giả sử ABC là tam giác với O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Các điểm P và Q là những điểm trong của các cạnh CA và AB , tương ứng. Giả sử K, L và M là các điểm giữa của BP, CQ và PQ , tương ứng, Γ là đường tròn đi qua K, L và M . Giả thiết rằng đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn Γ . Chứng minh rằng $OP = OQ$.

Bài 3. Giả sử s_1, s_2, s_3, \dots là dãy tăng thực sự các số nguyên dương sao cho các dãy con

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{và} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

đều là các cấp số cộng. Chứng minh rằng dãy s_1, s_2, s_3, \dots cũng là cấp số cộng.

Thứ 5, 16 tháng 7, 2009

Bài 4. Giả sử ABC là tam giác với $AB = AC$. Các đường phân giác của các góc CAB và ABC gặp các cạnh BC và CA tại D và E , tương ứng. Giả sử K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADC . Giả thiết rằng góc $BEK = 45^\circ$. Tìm mọi giá trị có thể của góc CAB .

Bài 5. Tìm tất cả các hàm f từ tập hợp các số nguyên dương đến tập hợp các số nguyên dương sao cho, với mọi số nguyên dương a và b , tồn tại tam giác không suy biến với độ dài các cạnh là các số

$$a, f(b) \text{ và } f(b + f(a) - 1).$$

(Tam giác gọi là *không suy biến* nếu ba đỉnh của nó không cùng nằm trên một đường thẳng.)

Bài 6. Giả sử a_1, a_2, \dots, a_n là các số nguyên dương khác nhau từng cặp và M là tập hợp gồm $n - 1$ số nguyên dương không chứa số $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Một con châu chấu nhảy dọc theo trục thực, xuất phát từ điểm 0 và tiến hành n bước nhảy về bên phải với độ dài các bước nhảy là a_1, a_2, \dots, a_n theo một thứ tự nào đó. Chứng minh rằng con châu chấu có thể chọn thứ tự các bước nhảy sao cho nó không bao giờ nhảy lên bất kỳ điểm nào thuộc M .