вторник, 16. юли 2024

Задача 1. Да се намерят всички реални числа α такива, че за всяко цяло положително число n, числото

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

е цяло и се дели на n.

(Забележка: с долна цяла част $\lfloor z \rfloor$ е означено най-голямото цяло число, по-малко или равно на z. Например, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, а $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Задача 2. Да се намерят всички двойки цели положителни числа (a, b), за които съществуват цели положителни числа g и N такива, че равенството

$$\text{НОД}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

е изпълнено за всички цели числа $n \geqslant N$.

(Забележка: с $\text{НОД}(x, y)$ е означен най-големия общ делител на целите числа x и y.)

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е безкрайна редица от цели положителни числа и нека N е цяло положително число. Дадено е, че за всяко $n > N$, числото a_n е равно на броя срещания на числото a_{n-1} в редицата $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Да се докаже, че поне една от редиците $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и $a_2, a_4, a_6, \ldots$ е периодична от известно място нататък.

(Забележка: една безкрайна редица $b_1, b_2, b_3, \ldots$ е *периодична от известно място нататък*, ако съществуват цели положителни числа p и M такива, че $b_{m+p} = b_m$ за всяко $m \geqslant M$.)

сряда, 17. юли 2024

Задача 4. Нека ABC е триъгълник такъв, че $AB < AC < BC$. Да означим с ω вписаната в него окръжност, а с I - нейния център. Нека X е точката върху правата BC, различна от C и такава, че правата през X, успоредна на AC, се допира до ω. Аналогично, нека Y е точката върху правата BC, различна от B, и такава, че правата през Y, успоредна на AB, се допира до ω. Нека правата AI пресича за втори път описаната около триъгълник ABC окръжност в точка $P \neq A$. Нека K и L са среди съответно на отсечките AC и AB.

Да се докаже, че $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задача 5. Охлювът Турбо играе игра върху дъска с 2024 реда и 2023 стълба. В 2022 от клетките на дъската има скрити чудовища. Първоначално, Турбо не знае къде се намира нито едно от чудовищата, но той знае, че има точно едно чудовище във всеки ред с изключение на първия и последния, и че има най-много едно чудовище във всеки стълб.

Турбо прави поредица от опити да стигне от първия ред до последния ред. При всеки опит той избира клетка върху първия ред, от която да стартира и след това, на всеки ход, последователно се придвижва от текущата клетка към съседна на нея клетка с обща страна. (Позволено му е да се връща в клетка, в което вече е бил.) Ако стигне до клетка, в която има чудовище, неговият опит приключва и той се транспортира обратно до първия ред, където започва нов опит. Чудовищата не се движат и Турбо помни дали в клетките, които вече е посещавал, има или няма чудовища. Ако той достигне коя да е клетка от последния ред, опитът му приключва успешно и той печели играта.

Да се определи минималното n, такова че, охлювът Турбо има стратегия, гарантираща му достигане до последния ред за най-много n опита, независимо от разположението на чудовищата.

Задача 6. Нека $\mathbb{Q}$ е множеството от рационалните числа. Една функция $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ще наричаме *чиста* ако е изпълнено следното свойство: за всеки $x, y \in \mathbb{Q}$ е в сила поне едно от следните равенства

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Да се докаже, че съществува цяло число c такова, че за всяка чиста функция f, когато r пробягва рационалните числа, съществуват най-много c различни рационални числа от вида $f(r) + f(-r)$. Да се намери най-малката възможна стойност на c.

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.