субота, 8. јули 2023

Задатак 1. Одредити све сложене природне бројеве $n > 1$ који имају сљедећу особину: ако су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви позитивни дјелиоци броја n, при чему вриједи $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, онда d_i дијели $d_{i+1} + d_{i+2}$ за свако $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Задатак 2. Нека је ABC оштроугли троугао у којем вриједи $|AB| < |AC|$. Нека је Ω описана кружница троугла ABC. Нека је S средина лука CB кружнице Ω који садржи тачку A. Окомица из A на BC сијече BS у D и кружницу Ω поново у $E \neq A$. Права кроз D паралелна са BC сијече праву BE у L. Означимо описану кружницу троугла BDL са ω. Нека се ω и Ω сијеку поново у $P \neq B$. Доказати да се тачка пресјека тангенте на ω у P и праве BS налази на унутрашњој симетрали угла $\angle BAC$.

Задатак 3. За сваки природни број $k \geqslant 2$, одредити све бесконачне низове природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ за које постоји полином P облика $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, при чему су $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ненегативни цијели бројеви, такав да вриједи

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

за сваки природан број $n \geqslant 1$.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

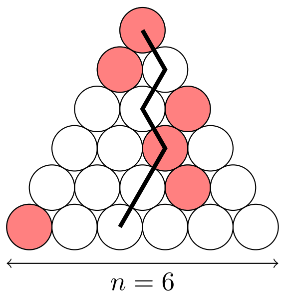
недјеља, 9. јули 2023

Задатак 4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ по паровима различити, позитивни реални бројеви такви да је

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

цијели број за свако $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Доказати да је $a_{2023} \geqslant 3034$.

Задатак 5. Нека је n природан број. *Јапански троугао* састоји се од $1 + 2 + \cdots + n$ кругова распоређених у облик једнакостраничног троугла тако да за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, i-ти ред садржи тачно i кругова, од којих је тачно један обојен у црвено. *Нинџа пут* у неком јапанском троуглу је низ од n кругова који се добија на сљедећи начин: почињемо у кругу у првом реду, а у сваком наредном кораку крећемо се из тренутног круга у неки од два круга који се налазе директно испод тренутног круга и завршавамо када дођемо у задњи ред. Испод је дат примјер једног јапанског троугла за $n = 6$, заједно са једним нинџа путем у том троуглу који садржи два црвена круга.



У зависности од n, одредити највеће k такво да у сваком јапанском троуглу постоји нинџа пут који садржи бар k црвених кругова.

Задатак 6. Нека је ABC једнакостраничан троугао. Нека су A_1, B_1, C_1 тачке у унутрашњости троугла ABC такве да вриједи $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Нека се праве BC_1 и CB_1 сијеку у A_2, праве CA_1 и AC_1 у B_2, а праве AB_1 и BA_1 у C_2.
Доказати да ако је троугао $A_1B_1C_1$ разностраничан, онда три описане кружнице троуглова AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пролазе кроз двије заједничке тачке.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.