

Dushanba, 21 Sentyabr 2020

Masala 1. Qavariq to‘rtburchak $ABCD$ berilgan. P nuqta $ABCD$ ichida tanlangan. Quyidagi nisbatlar haqidagi tenglik o‘rinli :

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Isbot qiling, quyidagi uchta to‘g‘ri chiziqlar bir nuqtadan o‘tadi: $\angle ADP$ va $\angle PCB$ ichki burchaklari bissektrisalari va AB kesmaning o‘rta perpendikulyari.

Masala 2. Haqiqiy a, b, c, d sonlari shundayki, $a \geq b \geq c \geq d > 0$ va $a + b + c + d = 1$. Isbot qiling

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Masala 3. Vaznlari $1, 2, 3, \dots, 4n$ bo‘lgan $4n$ ta toshlar berilgan. Har bir tosh n ta ranglardan biriga shunday bo‘yalganki, har bir rangdan aynan to‘rtta tosh bor. Isbot qiling, toshlarni ikkita uyumga ajratish mumkinki, quyidagi ikkita shart qanoatlantiriladi:

- Ikkala uyumdagi toshlar umumiyl vaznlari o‘zaro teng.
- Har bir uyumda har bir rangdan aynan ikkita tosh bor.

Seshanba, 22 Sentyabr 2020

Masala 4. Butun $n > 1$ son berilgan. Bir tog‘ning qiyaligida n^2 ta bekatlar shu tog‘ning turli balandliklarda joylashgan. A va B kabel osma mashinalari kompaniyalarining har biri k ta osma mashinalarga ega bo‘lib, har bir osma mashina qandaydir bekatdan undan yuqorida joylashgan qandaydir boshqa bekatga olib boradi (oradagi bekatlarda to‘xtamasdan). A ning k dona osma mashinalarining boshlang‘ich bekatlari k ta turli bekatlar va tugash bekatlari ham k ta turli bekatlar bo‘lib, yuqoriqdan boshlagan osma mashina, quyiroqdan boshlagan osma mashinadan teparoqda xarakatlanishni yakunlaydi. Huddi shunday B uchun. Ikkita bekat *bog‘langan* deyiladi, agar quyirog‘idan yuqoridagisiga bitta kompaniyani bir yoki bir nechta osma mashinalari bilan yetib kelish mumkin bo‘lsa. (bekatlar orasida boshqa xarakatlar taqiqlanadi).

Shunday eng kichik musbat butun k toping, bunda doim ikkita bekat mavjudki, ular har ikkala kompaniya orqali bog‘langan.

Masala 5. Har birida musbat butun sonlar yozilgan $n > 1$ kartochkalar berilgan. Ulardan ixtiyoriy ikkitasinining o‘rta arifmetigini olsak, qandaydir bitta kartochka yoki ko‘proq miqdordagi kartochkalar topiladi, ularda yozilgan sonlarning o‘rta geometrigiga teng.

Qanday n uchun bundan kartochkalardagi sonlar o‘zaro teng bo‘lishi kelib chiqadi?

Masala 6. Quyidagi tasdiq o‘rinli bo‘ladigan musbat c konstanta mavjudligini isbotlang:

Aytaylik $n > 1$ butun son va tekislikda n ta nuqtadan iborat \mathcal{S} shunday berilganki, ixtiyoriy ikkita turli \mathcal{S} to‘plamidagi nuqtalar orasidagi masofa kamida 1. U holda, \mathcal{S} to‘plamni ajratuvchi shunday ℓ to‘g‘ri chiziq mavjudki, \mathcal{S} to‘plamining ixtiyoriy nuqtasidan ℓ to‘g‘ri chizig‘igacha bo‘lgan masofa kamida $cn^{-1/3}$.

(ℓ to‘g‘ri chiziq \mathcal{S} to‘plamni ajratadi agar uchlari \mathcal{S} to‘plamidan bo‘lgan biror kesma ℓ bilan kesishsa.)

Izoh. $cn^{-1/3}$ o‘rniga kuchsizroq boshqa $cn^{-\alpha}$ natijalar ham $\alpha > 1/3$ qiymatiga qarab ball berilishi mumkin.