



pirmadienis, 19. liepos 2021

1 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius $n \geq 100$. Ivanas užrašo skaičius $n, n+1, \dots, 2n$ ant $n+1$ skirtinges kortelės. Po to jis sumaišo visas šias korteles ir padalija jas į dvi krūveles. Irodykite, kad bent vienoje krūvelėje atsiras tokios dvi kortelės, kad ant jų užrašytų skaičių suma yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

2 uždavinys. Irodykite, kad nelygybė

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

galioja su visais realiaisiais skaičiais x_1, \dots, x_n .

3 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC , kuriame $AB > AC$, ir jo viduje esantis taškas D , tenkinantis sąlygą $\angle DAB = \angle CAD$. Taškai E ir F priklauso atitinkamai kraštiniems AC ir AB ir tenkina sąlygas $\angle ADE = \angle BCD$ ir $\angle FDA = \angle DBC$. Taškas X priklauso tiesei AC ir tenkina sąlygą $CX = BX$. Taškai O_1 ir O_2 yra atitinkamai apie trikampius ADC ir EXD apibrėžtų apskritimų centrai. Irodykite, kad tiesės BC , EF ir O_1O_2 kertasi viename taške.



antradienis, 20. liepos 2021

4 uždavinys. Į iškiląjį keturkampį $ABCD$ įbrėžtas apskritimas Γ , kurio centras I . (Keturkampio kraštinės AB , BC , CD ir DA liečia apskritimą Γ .) Tegul Ω yra apskritimas, apibrėžtas apie trikampį AIC . Atkarpos BA tėsinys už taško A kerta Ω taške X , o atkarpos BC tėsinys už taško C kerta Ω taške Z . Atkarpu AD ir CD tėsiniai už taško D kerta Ω atitinkamai taškuose Y ir T . Irodykite, kad

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

5 uždavinys. Dvi voverės, Barbora ir Janina, turi 2021 riešutą žiemai. Janina sužymėjo riešutus skaičiais nuo 1 iki 2021 ir iškasė 2021 skylutę ratu apie medį. Kitą rytą Janina pastebėjo, kad Barbora jidėjo po vieną riešutą į kiekvieną skylutę, bet į sunumeravimą neatsižvelgė. Nepatenkinta Janina nusprendė perdėlioti riešutus atlikdama tokią 2021 éjimo seką. Savo k -tuoju éjimu Janina sukeičia vietomis du riešutus, esančius šalia k -tojo riešuto. Irodykite, kad egzistuoja tokis k , kad k -tuoju éjimu Janina sukeis riešutus, pažymėtus skaičiais a ir b , tenkinančiais sąlygą $a < k < b$.

6 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius $m \geq 2$, baigtinė sveikujų skaičių aibė A ir jos poaibiai $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$. Žinoma, kad su kiekvienu $k = 1, 2, \dots, m$ aibės B_k elementų suma yra lygi m^k . Irodykite, kad aibėje A yra ne mažiau kaip $m/2$ elementų.