Macedonian version

Прв ден
25-ти јули, 2007

Задача 1. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се дадени реални броеви. За секој i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ дефинираме

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}.$$

Нека

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ такви да во $(*)$ важи еднаквост.

Задача 2. Дадени се пет точки A, B, C, D и E такви да $ABCD$ е паралелограм, а $BCED$ е тетивен четириаголник. Нека ℓ е права што минува низ точката A. Да претпоставиме дека ℓ ја сече отсечката DC во нејзина внатрешна точка F и ја сече правата BC во точка G. Да претпоставиме и дека $EF = EG = EC$. Докажи дека ℓ е симетрала на аголот DAB.

Задача 3. Некои од натпреварувачите на математички натпревар се пријатели. Се претпоставува дека ако A е пријател на B тогаш и B е пријател на A. Група натпреварувачи се нарекува *дружина* ако секои два натпреварувачи во таа група се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два натпреварувачи е дружина.) Бројот на членовите во дружина се нарекува нејзина *величина*.

Познато е дека најголемата величина на дружина на тој натпревар е парен број. Докажи дека натпреварувачите може да се распоредат во две простории така да најголемата величина на дружина во едната просторија е еднаква на најголемата величина на дружина во другата просторија.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Macedonian version

Втор ден
26-ти јули, 2007

Задача 4. Симетралата на аголот BCA во триаголникот ABC ја сече неговата опишана кружница повторно во точката R, ја сече симетралата на страната BC во точката P и симетралата на страната AC во точката Q. Нека точката K е средина на страната BC, а точката L е средина на страната AC. Докажи дека триаголниците RPK и RQL имаат еднакви плоштини.

Задача 5. Нека a и b се природни броеви такви да бројот $(4a^2-1)^2$ е делив со бројот $4ab-1$. Докажи дека $a=b$.

Задача 6. Нека n е природен број. Нека

$$S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\}$$

е множество кое се состои од $(n+1)^3-1$ точки во тридимензионалниот простор. Одреди го најмалиот можен број на рамнини, чија унија ги содржи сите точки од множеството S, а не ја содржи точката $(0,0,0)$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода