2014 년 7 월 8 일, 화요일

문제 1. 양의 정수로 이루어진 무한수열 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 에 대하여, 다음의 부등식을 만족하는 유일한 정수 n 이 존재함을 증명하여라:

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

문제 2. 정수 $n \ge 2$ 에 대하여, n^2 개의 단위정사각형으로 이루어진 $n \times n$ 체스판 위에 n 개의 체스말이 놓여 있고 각각의 체스말은 단위정사각형 안에 놓여 있다. 체스판의 각 행과 각 열에 체스말이 정확히 하나씩 포함되어 있을 때, n 개의 체스말이 놓인 형태를 '좋은' 형태라고 부르자. 다음의 조건을 만족하는 양의 정수 k 의 최댓값을 구하여라:

(조건) 모든 좋은 형태에 대하여, 어떠한 체스말도 포함하지 않는 (k^2의 단위정사각형으로 이루어진) $k \times k$ 정사각형 블록이 존재한다.

문제 3. 볼록사각형 $ABCD$ 에 대하여, $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ 이다. 점 H 를 꼭지점 A 에서 대각선 BD 에 내린 수선의 발이라 하자. 변 AB 위의 점 S 와 변 AD 위의 점 T 에 대하여, 점 H 는 삼각형 SCT 의 내부에 있고,

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \ \angle THC - \angle DTC = 90°$$

이다. 이때, 직선 BD 가 삼각형 TSH 의 외접원에 접함을 증명하여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점

2014 년 7 월 9 일, 수요일

문제 4. 예각삼각형 ABC 의 변 BC 위의 두 점 P, Q 가 각각 $\angle PAB = \angle BCA$, $\angle CAQ = \angle ABC$ 를 만족한다. 직선 AP 위의 점 M, 직선 AQ 위의 점 N 에 대하여, 점 P 는 선분 AM 의 중점이고, 점 Q 는 선분 AN 의 중점이다. 두 직선 BM 과 CN 의 교점이 삼각형 ABC 의 외접원 위에 있음을 보여라.

문제 5. 임의의 양의 정수 n 에 대하여 케이프타운은행은 가치가 $\frac{1}{n}$ 인 동전들을 발행한다. 그러한 동전들 유한개(가치가 다 다를 필요는 없는)의 모임에 대하여, 그 가치의 총합이 $99 + \frac{1}{2}$ 이하일 때, 이 모임을 가치의 총합이 1 이하인 100 개 이하의 소모임으로 쪼갤 수 있음을 보여라.

문제 6. 평면 위의 직선들이 어느 두 직선도 서로 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 그 직선들이 '보편적으로 배치되어 있다'고 하자. 보편적으로 배치되어 있는 직선들은 평면을 여러개의 영역으로 쪼개고, 그 영역들 중 일부는 유한의 넓이를 갖는다. 이처럼 유한의 넓이를 갖는 영역을 그 배치의 '유한영역'이라고 할 때, 다음을 증명하여라: 충분히 큰 모든 n 에 대하여, n 개의 직선들로 이루어진 어떠한 보편적 배치에 대하여도, 최소한 $\sqrt{n}$ 개의 직선을 파란색으로 칠하되 그 배치의 어떠한 유한영역도 그 경계를 이루는 변들이 모두 파랗지는 않도록 칠할 수 있는 방법이 있다.

Note: 만일 $\sqrt{n}$에 대해서는 결과를 구하지는 못 하였으나 대신 $c\sqrt{n}$ 에 대한 결과를 구한 경우에는, 상수 c 의 값에 따라 부분 점수를 준다.

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점