Thứ Hai, 11 Tháng Bảy 2022

Bài 1. Ngân hàng Oslo phát hành hai loại đồng xu: đồng vàng (kí hiệu bởi A) và đồng bạc (kí hiệu bởi B). Mai có n đồng vàng và n đồng bạc, các đồng xu được xếp thành một hàng theo thứ tự bất kì. Một dãy con gồm các đồng xu liên tiếp thuộc cùng một loại được gọi là một *chuỗi*. Với số nguyên dương cố định $k \leqslant 2n$, Mai thực hiện liên tiếp các bước chuyển như sau: cô ta xác định chuỗi dài nhất có chứa đồng xu thứ k từ bên trái và chuyển tất cả các đồng xu của chuỗi này về phía trái của hàng. Ví dụ, nếu $n = 4$ và $k = 4$, bắt đầu với cách xếp $AABBBABA$, quá trình thực hiện các bước chuyển như sau:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Xác định tất cả các cặp (n, k) với $1 \leqslant k \leqslant 2n$ sao cho với mọi cách sắp xếp ban đầu, đến một lúc nào đó trong quá trình thực hiện các bước chuyển, n đồng xu ở bên trái của hàng sẽ thuộc cùng một loại.

Bài 2. Gọi $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ có đúng một giá trị $y \in \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Bài 3. Cho k là một số nguyên dương và S là một tập hữu hạn các số nguyên tố lẻ. Mi muốn xếp các phần tử của S quanh một vòng tròn sao cho tích của hai số cạnh nhau bất kì có thể biểu diễn được dưới dạng $x^2 + x + k$ với x nguyên dương nào đó. Biết rằng, hai cách xếp nhận được từ nhau qua phép quay và phép phản chiếu (đối xứng trục) được coi là như nhau. Chứng minh rằng Mi có nhiều nhất một cách xếp như vậy.

Language: Vietnamese

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.

Thứ Ba, 12 Tháng Bảy 2022

Bài 4. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TB = TD$, $TC = TE$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, p) với p nguyên tố và

$$a^p = b! + p.$$

Bài 6. Cho số nguyên dương n. Một *cao nguyên Nordic* là một bảng $n \times n$ chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến n^2 sao cho mỗi ô vuông chứa đúng một số. Hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có một cạnh chung. Ô vuông chỉ kề với các ô vuông chứa số lớn hơn số nằm trong nó được gọi là một *thung lũng*. Một *con đường dốc* là một dãy các ô vuông (có thể chỉ gồm một ô) thoả mãn đồng thời các điều kiện:

(i) Ô vuông đầu tiên trong dãy là một thung lũng,

(ii) mỗi ô vuông tiếp theo trong dãy kề với ô vuông đứng trước nó,

(iii) các số được viết trên các ô vuông trong dãy có giá trị tăng dần.

Như là một hàm số của n, xác định giá trị nhỏ nhất có thể của số con đường dốc trong một cao nguyên Nordic.

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.