

12 . јули 2006.

Задатак 1. Нека је I средиште уписане кружнице троугла ABC . У унутрашњости троугла изабрана је тачка P таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему се једнакост достиже ако и само ако се P поклапа са I .

Задатак 2. За дијагоналу правилног 2006-тоугла P кажемо да је *добра*, ако њени крајеви деле руб од P на два дела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од P . За странице полигона P такође кажемо да су *добре*.

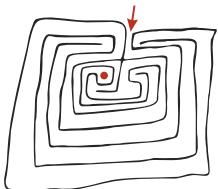
Посматрајмо разбијања полигона P на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје две међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона P . Одредите максималан број једнакокраких троуглова са две добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

Задатак 3. Одредите најмањи реалан број M такав да неједнакост

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c .

*Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 7 поена*



13. јули 2006.

Задатак 4. Одредите све парове (x, y) целих бројева такве да је

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задатак 5. Нека је $P(x)$ полином степена n ($n > 1$) са целим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрамо полином

$$Q(x) = P\left(P\left(\dots P\left(P(x)\right)\dots\right)\right),$$

где се P појављује k пута. Докажите да постоји највише n целих бројева t таквих да је $Q(t) = t$.

Задатак 6. Свакој страници b конвексног полигона P придружимо највећу површину троугла који је садржан у P и чија је једна странница b . Докажите да збир свих површина придужених страницама полигона P није мањи од двоструке површине полигона P .

*Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 7 поена*