уторак, 16. јул 2024.

Задатак 1. Одредити све реалне бројеве α такве да је за сваки природан број n број

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

дељив са n. (Напоменимо да за реалан број z, број $\lfloor z \rfloor$ означава највећи цео број не већи од z. На пример, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ и $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Задатак 2. Одредити све парове (a, b) природних бројева за које постоје природни бројеви g и N такви да је

$$\text{НЗД}(a^n + b,\, b^n + a) = g,$$

за свако $n \geqslant N$. (Напоменимо да је НЗД(k, i) највећи заједнички делилац целих бројева k и i.)

Задатак 3. Нека је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ бесконачан низ природних бројева и нека је N дати природан број. Претпоставимо да је за свако $n > N$ члан низа a_n једнак оном броју који представља укупан број појављивања броја a_{n-1} међу бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Доказати да је барем један од низова

$$a_1, a_3, a_5, \ldots \quad \text{и} \quad a_2, a_4, a_6, \ldots$$

евентуално периодичан. (Бесконачан низ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ је евентуално периодичан ако постоје природни бројеви p и M такви да је $b_{m+p} = b_m$, за свако $m \geqslant M$.)

Language: Serbian

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

среда, 17. јул 2024.

Задатак 4. Нека је ABC дати троугао у којем важи $AB < AC < BC$. Означимо центар уписане кружнице и саму уписану кружницу троугла ABC са I и ω, редом. Нека је X тачка на правој BC, различита од тачке C, таква да је права која садржи тачку X и која је паралелна правој AC тангента на кружницу ω. Слично, нека је Y тачка на правој BC, различита од тачке B, таква да је права која садржи тачку Y и која је паралелна правој AB тангента на кружницу ω. Права AI сече описану кружницу троугла ABC поново у тачки P, $P \neq A$. Нека су K и L средишта страница AC и AB, редом. Доказати да је $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задатак 5. Пуж Турбо игра игру на табли која има 2024 врсте и 2023 колоне. У 2022 поља те табле налазе се скривена чудовишта. На почетку, Турбо не зна где се чудовишта налазе, али зна да постоји тачно једно чудовиште у свакој врсти табле, осим у првој и задњој врсти, те да свака колона садржи највише једно чудовиште.

Турбо прави низ покушаја да дође из прве у задњу врсту. У сваком покушају бира у којем пољу у првој врсти ће почети, а онда се редом помера у било које суседно поље које има заједничку страницу с тренутним пољем на којем се налази (дозвољено му је да се врати у поље које је некада раније посетио). Ако дође у поље у којем се налази чудовиште, његов покушај се завршава и он се враћа у прву врсту табле да би започео нови покушај. Чудовишта се не померају и Турбо памти, за свако поље које је посетио, садржи ли то поље чудовиште или не. Ако Турбо дође у било које поље у задњој врсти, његов покушај се завршава и то означава крај игре.

Одредити најмању вредност броја n за коју Турбо има стратегију која му гарантује да у n или мање покушаја дође до задње врсте табле, независно од позиција чудовишта.

Задатак 6. Нека је $\mathbb{Q}$ скуп рационалних бројева. Функцију $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ називамо *лепом* ако важи: за свако $x,\ y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Доказати да постоји цео број c такав да за било коју лепу функцију f постоји највише c различитих рационалних бројева који се могу записати као $f(r) + f(-r)$, за неки рационалан број r и одредити најмању могућу вредност броја c.

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.