სამშაბათი, 23 ივლისი, 2013

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი (k,n) წყვილისთვის, სადაც k და n მთელი დადებითი რიცხვებია, არსებობს k ცალი (არა აუცილებლად განსხვავებული) მთელი დადებითი რიცხვი $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ისეთი, რომ

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

ამოცანა 2. ვუწოდოთ *კოლუმბიური კონფიგურაცია* სიბრტყეზე მდებარე 4027 წერტილს, თუ არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და ამასთან, 2013 ცალი წერტილი არის წითელი ფერის, ხოლო დანარჩენი 2014 ცალი წერტილი არის ლურჯი ფერის. განვიხილოთ წრფეთა ოჯახი, რომელიც სიბრტყეს რამოდენიმე არედ ჰყოფს. მოცემული კოლუმბიური კონფიგურაციისთვის წრფეთა ამ ოჯახს ვუწოდოთ *კარგი*, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

- არცერთი წრფე არ გადის კონფიგურაციის არცერთ წერტილზე;
- სიბრტყის არცერთი არე არ შეიცავს ორივე ფერის წერტილს.

იპოვეთ უმცირესი k ისეთი, რომ 4027 წერტილის ნებისმიერი კოლუმბიური კონფიგურაციისთვის მოიძებნება k ცალი წრფისგან შედგენილი კარგი ოჯახი.

ამოცანა 3. ვთქვათ ABC სამკუთხედში A წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირი ეხება BC გვერდს A_1 წერტილში. ანალოგიურად განვსაზღვროთ B_1 წერტილი CA გვერდზე და C_1 წერტილი AB გვერდზე, შესაბამისად B და C წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირების საშუალებით. დავუშვათ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი დევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე.

დაამტკიცეთ, რომ ABC მართკუთხა სამკუთხედია.

ABC სამკუთხედში, A წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირი *ეწოდება ისეთ წრეწირს, რომელიც ეხება BC გვერდს და ასევე ეხება AB და AC გვერდების გაგრძელებებს. B და C წვეროს მოპირდაპირე გარეჩახაზული წრეწირები განისაზღვრება ანალოგიურად.*

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წუთი
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

ოთხშაბათი, 24 ივლისი, 2013

ამოცანა 4. მოცემულია მახვილკუთხა სამკუთხედი ABC, რომლის ორთოცენტრია H. ვთქვათ W არის BC გვერდის შიგა წერტილი, ხოლო M და N შესაბამისად B და C წვეროდან დაშვებული სიმაღლეების ფუძეებია. ვთქვათ ω_1 არის BWN სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი, ხოლო X ისეთი წერტილია ω_1–ზე, რომ WX არის ω_1–ის დიამეტრი. ანალოგიურად, ვთქვათ ω_2 არის CWM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი და Y ისეთი წერტილია ω_2–ზე, რომ WY არის ω_2–ის დიამეტრი.

დაამტკიცეთ, რომ X, Y და H ერთ წრფეზე მდებარეობს.

ამოცანა 5. ვთქვათ $\mathbb{Q}_{>0}$ არის ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ვთქვათ $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) ყოველი $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ სრულდება უტოლობა $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) ყოველი $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ სრულდება უტოლობა $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) არსებობს რაციონალური რიცხვი $a > 1$ ისეთი, რომ $f(a) = a$.

დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = x$ ყოველი $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

ამოცანა 6. ვთქვათ $n \geq 3$ არის მთელი რიცხვი. განვიხილოთ წრეწირი და მასზე განლაგებული $n+1$ ცალი წერტილი, რომელიც ამ წრეწირს ტოლი სიგრძის რკალებად ჰყოფს. განვიხილოთ ყველა ისეთი მარკირება ამ წერტილებისა $0, 1, \ldots, n$ რიცხვების საშუალებით, რომ ყოველ მარკირებაში, თითოეული რიცხვი გამოიყენება მხოლოდ ერთხელ როგორც მარკერი. ორი ასეთი მარკირება ითვლება ეკვივალენტურად, თუ ერთი მათგანის მიღება შეიძლება მეორესგან წრეწირის მოტრიალებით. მარკირებას ეწოდება *შესანიშნავი*, თუ ყოველი ოთხი $a < b < c < d$ მარკერისთვის, სადაც $a + d = b + c$, ქორდა რომლის ბოლოებია a და d, არ კვეთს ქორდას რომლის ბოლოებია b და c.

ვთქვათ M არის შესანიშნავი მარკირებების რაოდენობა, და ვთქვათ N არის ისეთი დალაგებული (x, y) წყვილების რაოდენობა, რომ x და y მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთან $x + y \leq n$ და $\gcd(x, y) = 1$. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$M = N + 1.$$

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით