уторак, 15. јул 2025

Задатак 1. За праву у равни кажемо да је *сани* ако **није** паралелна ни са једном од правих: x-оса, y-оса и $x + y = 0$.

Нека је $n \geqslant 3$ дати пропродан број. Одредити све ненегативне целе бројеве k такве да постоји n различитих правих у равни које задовољавају следећа два услова:

- за све природне бројеве a и b, за које важи $a + b \leqslant n + 1$, тачка (a, b) се налази на барем једној од тих правих; и
- тачно k од тих n правих су сани.

Задатак 2. Нека су Ω и Γ кружнице са центрима M и N, редом, такве да је полупречник кружнице Ω мањи од полупречника кружнице Γ. Претпоставимо да се кружнице Ω и Γ секу у две различите тачке A и B. Права MN сече Ω у тачки C и Γ у тачки D, тако да тачке C, M, N и D леже на једној правој, тим редом. Нека је P центар описане кружнице троугла ACD. Права AP сече Ω поново у $E \neq A$. Права AP сече Γ поново у $F \neq A$. Нека је H ортоцентар троугла PMN.

Доказати да је права кроз H, која је паралелна са AP, тангента на описану кружницу троугла BEF.

(*Ортоцентар* троугла је тачка пресека његових висина.)

Задатак 3. Нека $\mathbb{N}$ означава скуп природних бројева. За функцију $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ћемо рећи да је *бесна* ако

$$f(a) \text{ дели } b^a - f(b)^{f(a)},$$

за све природне бројеве a и b.

Одредити најмању реалну константу c такву да је $f(n) \leqslant cn$, за све бесне функције f и све природне бројеве n.

среда, 16. јул 2025

Задатак 4. *Прави делилац* природног броја N је позитиван делилац броја N који је различит од N.

Бесконачни низ $a_1, a_2, \ldots$ састоји се од природних бројева, од којих сваки има најмање три права делиоца. За сваки $n \geqslant 1$, број a_{n+1} је збир три највећа права делиоца броја a_n.

Одредити све могуће вредности броја a_1.

Задатак 5. Даница и Вукашин играју игру *ламбдилица*, за два играча, чија правила зависе од позитивног реалног броја λ, који је познат за оба играча. У n-том потезу игре (почевши од $n = 1$) дешава се следеће:

- Ако је n непаран, Даница бира ненегативан реални број x_n такав да је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ако је n паран, Вукашин бира ненегативан реални број x_n такав да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ако играч не може да изабере одговарајући број x_n, игра се завршава и други играч побеђује. Ако игра траје у недоглед, ниједан играч не побеђује. Сви изабрани бројеви су познати за оба играча.

Одредити све вредности λ за које Даница има добитну стратегију и све оне за које Вукашин има добитну стратегију.

Задатак 6. Размотримо решетку од 2025×2025 јединичних квадрата. Магда жели да постави на решетку неколико правоугаоних плочица, могуће различитих величина, тако да свака страна сваке плочице лежи на линији решетке и тако да сваки јединични квадрат је покривен са највише једном плочицом.

Одредити минималан број плочица које Магда треба да постави, тако да сваки ред и свака колона решетке имају тачно један јединични квадрат који није покривен ниједном плочицом.

Време за израду задатака: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.