

utorak, 18. srpnja 2017.

**1. zadatak.** Za svaki cijeli broj  $a_0 > 1$ , definiran je niz  $a_0, a_1, a_2, \dots$  tako da je za svaki  $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ako je } \sqrt{a_n} \text{ cijeli broj,} \\ a_n + 3 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredi sve vrijednosti broja  $a_0$  za koje postoji broj  $A$  takav da je  $a_n = A$  za beskonačno mnogo vrijednosti  $n$ .

**2. zadatak.** Neka je  $\mathbb{R}$  skup svih realnih brojeva. Odredi sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za sve realne brojeve  $x$  i  $y$  vrijedi

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

**3. zadatak.** Lovac i nevidljivi zec igraju igru u euklidskoj ravnini. Početna točka zeca,  $A_0$ , i početna točka lovca,  $B_0$ , su iste. Nakon  $n - 1$  rundi igre, zec je u točki  $A_{n-1}$ , a lovac u točki  $B_{n-1}$ . U  $n$ -toj rundi, redom se odvija sljedeće:

- (i) Zec se neprimjetno premješta u točku  $A_n$  tako da je udaljenost između  $A_{n-1}$  i  $A_n$  točno 1.
- (ii) Uređaj za lociranje dojavljuje lovcu točku  $P_n$ , garantirajući samo da je udaljenost između  $P_n$  i  $A_n$  najviše 1.
- (iii) Lovac se vidljivo premješta u točku  $B_n$  tako da je udaljenost između  $B_{n-1}$  i  $B_n$  točno 1.

Može li lovac uvijek, za bilo koje pomake zeca i za bilo koje točke koje dojavljuje uređaj za lociranje, birati svoje poteze tako da udaljenost između njega i zeca nakon  $10^9$  rundi bude najviše 100 ?

srijeda, 19. srpnja 2017.

**4. zadatak.** Neka su  $R$  i  $S$  međusobno različite točke na kružnici  $\Omega$  takve da  $\overline{RS}$  nije promjer. Neka je  $\ell$  tangenta na kružnicu  $\Omega$  u točki  $R$ . Neka je  $T$  točka takva da je  $S$  polovište dužine  $\overline{RT}$ . Točka  $J$  nalazi se na kraćem luku  $RS$  kružnice  $\Omega$  tako da se opisana kružnica  $\Gamma$  trokuta  $JST$  i pravac  $\ell$  sijeku u dvije različite točke. Neka je  $A$  ono sjecište od  $\Gamma$  i  $\ell$  koje je bliže točki  $R$ . Pravac  $AJ$  siječe kružnicu  $\Omega$  još u točki  $K$ . Dokaži da pravac  $KT$  dodiruje kružnicu  $\Gamma$ .

**5. zadatak.** Dan je prirodni broj  $N \geq 2$ . U skupini od  $N(N+1)$  nogometaša nikoja dva nisu iste visine. Ti su nogometaši poredani u red. Trener želi iz reda izbaciti  $N(N-1)$  igrača tako da preostalih  $2N$  igrača tvori red za koji vrijedi sljedećih  $N$  uvjeta:

- (1) između dva najviša igrača nema nikoga,
- (2) između trećeg i četvrtog igrača po visini nema nikoga,
- ⋮
- ( $N$ ) između dva najniža igrača nema nikoga.

Dokaži da je to uvijek moguće napraviti.

**6. zadatak.** Uređeni par  $(x, y)$  cijelih brojeva je *primitivna točka* ako je najveći zajednički djelitelj brojeva  $x$  i  $y$  jednak 1. Neka je  $S$  konačan skup primitivnih točaka. Dokaži da postoje prirodni broj  $n$  i cijeli brojevi  $a_0, a_1, \dots, a_n$  takvi da za sve točke  $(x, y)$  iz skupa  $S$  vrijedi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$