Saterdag, 8. Julie 2023

Probleem 1. Bepaal alle positiewe nie-prime heelgetalle n wat die volgende eienskap bevredig: as $d_1, d_2, \ldots, d_k$ die positiewe delers van n is met $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, dan is d_i 'n deler van $d_{i+1} + d_{i+2}$ vir elke $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Probleem 2. Laat ABC 'n skerphoekige driehoek wees sodanig dat $AB < AC$. Laat Ω sy omsirkel wees, en laat S die middelpunt van die boog CB wat A bevat wees. Laat die loodreg vanaf A tot BC die lyn BS sny by D en die sirkel Ω weer sny by $E \neq A$. Laat die lyn deur D parallel met BC en die lyn BE mekaar sny by L, en laat ω die omsirkel van driehoek BDL wees. Laat ω en Ω mekaar weer sny by $P \neq B$.

Bewys dat die lyn BS, die lyn raaklyn aan ω by P, en die interne middellyn van $\angle BAC$ gelyklopend is.

Probleem 3. Laat $k \geqslant 2$ 'n positiewe heelgetal wees. Bepaal alle oneindige rye van positiewe heelgetalle $a_1, a_2, \ldots$ waarvoor daar 'n polinoom P van die vorm $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ bestaan, waar $c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ nie-negatiewe heelgetalle is, sodanig dat

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

vir elke heelgetal $n \geqslant 1$.

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.

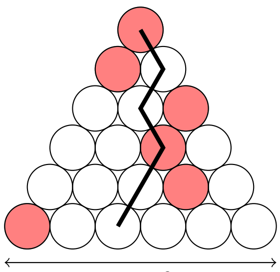
Sondag, 9. Julie 2023

Probleem 4. Laat $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ paarsgewys verskillend positiewe reële getalle wees sodanig dat

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

'n heelgetal is vir elke $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Bewys dat $a_{2023} \geqslant 3034$.

Probleem 5. Laat n 'n positiewe heelgetal wees. 'n *Japannese driehoek* bestaan uit $1 + 2 + \cdots + n$ sirkels wat in 'n gelyksydige driehoek vorm gerangskik is sodanig dat vir elke $i = 1, 2, \ldots, n$, die $i$de ry bevat presies i sirkels waarvan presies een rooi gekleur is. 'n *Ninja-pad* in 'n Japannese driehoek is 'n reeks van n sirkels wat by die boonste sirkel begin, dan herhaaldelik van 'n sirkel na een van die twee sirkels direk daaronder beweeg, en in die onderste ry eindig. Hieronder is 'n voorbeeld van 'n Japannese driehoek vir $n = 6$, saam met 'n ninja-pad in daardie driehoek wat twee rooi sirkels bevat.



In terme van n, vind die grootste waarde van k sodanig dat vir elke Japannese driehoek daar 'n ninja-pad bestaan wat ten minste k rooi sirkels bevat.

Probleem 6. Laat ABC 'n gelyksydige driehoek wees. Punte A_1, B_1, en C_1 lê binne driehoek ABC sodanig dat driehoek $A_1B_1C_1$ ongelykbenig is, $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, en

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Lyne BC_1 en CB_1 sny mekaar by A_2, lyne CA_1 en AC_1 sny mekaar by B_2, en lyne AB_1 en BA_1 sny mekaar by C_2.

Bewys dat die omsirkels van AA_1A_2, BB_1B_2, en CC_1C_2 twee punte in gemeen het.

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.