

星期一, 21. 九月 2020

問題 1. 考慮凸四邊形 $ABCD$ 。點 P 位於 $ABCD$ 的內部。下列比例等式成立：

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

證明下列三線交於一點： $\angle ADP$ 與 $\angle PCB$ 的內角平分線，以及線段 AB 的中垂線。

問題 2. 實數 a, b, c, d 滿足 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 且 $a + b + c + d = 1$ 。證明

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

問題 3. 有 $4n$ 顆鵝卵石，重量分別為 $1, 2, 3, \dots, 4n$ 。每顆鵝卵石被塗成 n 種顏色中的一種，使得每個顏色各有四顆鵝卵石。證明我們可以將鵝卵石分成兩堆，使得以下兩個條件都被滿足：

- 兩堆鵝卵石的總重量相同。
- 每堆鵝卵石都包含每種顏色的鵝卵石各兩顆。

星期二, 22. 九月 2020

問題 4. 令 $n > 1$ 為一正整數。有 n^2 個車站坐落於一座山坡上，每個車站的高度皆不同。兩個纜車公司， A 與 B ，各營運 k 台纜車；每台纜車從其中一站開向另一個高度更高的站（中途各站皆不停）。 A 公司的 k 台纜車共有 k 個不同起始點與 k 個不同終點，且起點較高的纜車終點亦較高。 B 公司符合相同條件。我們說兩個站被一個公司連接若且唯若其中較低的車站可以透過一台或多台該公司的纜車抵達較高的車站（不允許其他在車站間的移動方式。）

試求最小的正整數 k 使得保證有兩個車站同時被兩個公司連接。

問題 5. 紿定一疊 $n > 1$ 張的卡片。每一張卡片都寫上一個正整數。這疊卡片有個性質是，每一對卡片上數字的算術平均，都是若干張卡片上數字的幾何平均。

試問哪些 n 會保證這些卡片的數字全部相等？

問題 6. 證明存在一個正數 c 使得以下敘述成立：

考慮正整數 $n > 1$ ，以及一個由在平面上 n 個點所形成的集合 \mathcal{S} ，滿足 \mathcal{S} 中任意兩點的距離至少是 1。則存在一條隔離 \mathcal{S} 的直線 ℓ 使得每一個 \mathcal{S} 中的點與 ℓ 的距離至少是 $cn^{-1/3}$ 。

（稱 ℓ 為一條隔離 \mathcal{S} 的直線若某些由 \mathcal{S} 中兩個點連成的線段穿過 ℓ 。）

註：如果 $cn^{-1/3}$ 換成了較弱的結果 $cn^{-\alpha}$ ，會根據常數 $\alpha > 1/3$ 之值給予分數。