



2011年7月18日，星期一

- 对任意由 4 个不同正整数组成的集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ，记  $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ，设  $n_A$  是满足  $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq 4)$  整除  $s_A$  的数对  $(i, j)$  的个数。求所有由 4 个不同正整数组成的集合  $A$ ，使得  $n_A$  达到最大值。

2. 设  $S$  是平面上包含至少两个点的一个有限点集，其中没有三点在同一条直线上。

所谓一个“风车”是指这样一个过程：从经过  $S$  中单独一点  $P$  的一条直线  $\ell$  开始，以  $P$  为旋转中心顺时针旋转，直至首次遇到  $S$  中的另一点，记为点  $Q$ 。接着这条直线以  $Q$  为新的旋转中心顺时针旋转，直到再次遇到  $S$  中的某一点，这样的过程无限持续下去。

证明：可以适当选取  $S$  中的一点  $P$ ，以及过  $P$  的一条直线  $\ell$ ，使得由此产生的“风车”将  $S$  中的每一点都无限多次用作旋转中心。

- 设  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个定义在实数集上的实值函数，满足对所有实数  $x, y$ ，都有

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x)),$$

证明：对所有实数  $x \leq 0$ ，有  $f(x) = 0$ 。



2011年7月19日，星期二

4. 给定整数  $n > 0$ . 有一个天平和  $n$  个重量分别为  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  的砝码.

现通过  $n$  步操作逐个将所有砝码都放上天平, 使得在操作过程中, 右边的重量总不超过左边的重量. 每一步操作是从尚未放上天平的砝码中选择一个砝码, 将其放到天平的左边或右边, 直至所有砝码都被放上天平.

求整个操作过程的不同方法个数.

5. 设  $f$  是一个定义在整数集上取值为正整数的函数, 已知对任意两个整数  $m, n$ , 差  $f(m) - f(n)$  能被  $f(m-n)$  整除. 证明: 对所有整数  $m, n$ , 若  $f(m) \leq f(n)$ , 则  $f(n)$  被  $f(m)$  整除.

6. 设锐角三角形  $ABC$  的外接圆为  $\Gamma$ ,  $\ell$  是圆  $\Gamma$  的一条切线. 记切线  $\ell$  关于直线  $BC$ ,  $CA$  和  $AB$  的对称直线分别为  $\ell_a$ ,  $\ell_b$  和  $\ell_c$ . 证明: 由直线  $\ell_a$ ,  $\ell_b$  和  $\ell_c$  构成的三角形的外接圆与圆  $\Gamma$  相切.