Środa, 7 lipca 2010r.

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mające tę własność, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

(Symbol $\lfloor z \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od z.)

Zadanie 2. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś Γ okręgiem opisanym na tym trójkącie. Prosta AI przecina okrąg Γ w punktach A oraz D. Niech E będzie takim punktem na łuku BDC, zaś F takim punktem na odcinku BC, że

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Niech ponadto G będzie środkiem odcinka IF. Udowodnić, że proste DG oraz EI przecinają się na okręgu Γ.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ liczba

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Punktacja: 7 punktów za zadanie

Czwartek, 8 lipca 2010r.

Zadanie 4. Punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP oraz CP przecinają ponownie okrąg Γ opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach K, L oraz M. Prosta styczna do okręgu Γ w punkcie C przecina prostą AB w punkcie S. Załóżmy ponadto, że $SC = SP$. Udowodnić, że $MK = ML$.

Zadanie 5. W każdym z sześciu pudełek: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 znajduje się początkowo jedna moneta. Rozważmy dwa rodzaje operacji:

Rodzaj 1: Wybieramy pudełko B_j, które nie jest puste, przy czym $1 \leqslant j \leqslant 5$. Wyjmujemy jedną monetę z pudełka B_j i dokładamy dwie monety do pudełka B_{j+1}.

Rodzaj 2: Wybieramy pudełko B_k, które nie jest puste, przy czym $1 \leqslant k \leqslant 4$. Wyjmujemy jedną monetę z pudełka B_k i zamieniamy zawartość pudełka B_{k+1} (które może być puste) z zawartością pudełka B_{k+2} (które również może być puste).

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony ciąg powyższych operacji, którego wykonanie prowadzi do sytuacji, w której pudełka B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 są puste, zaś pudełko B_6 zawiera dokładnie $2010^{2010^{2010}}$ monet. (Przypomnijmy, że $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Zadanie 6. Wyrazy ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Przypuśćmy, że istnieje dodatnia liczba całkowita s taka, że

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \ :\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

dla wszystkich $n > s$. Udowodnić, że istnieją dodatnie liczby całkowite ℓ oraz N takie, że $\ell \leqslant s$ oraz $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ dla wszystkich $n \geqslant N$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Punktacja: 7 punktów za zadanie