Астана, 07.07.2010

**Бодлого 1.** Бүх $x, y \in \mathbb{R}$-ийн хувьд

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол ($[z]$-нь $z$-ээс үл хэтрэх хамгийн их бүхэл тоо).

**Бодлого 2.** $I$ нь $ABC$ гурвалжинд багтсан тойргийн төв ба $\Gamma$ нь энэ гурвалжныг багтаасан тойрог. $AI$ шулуун $\Gamma$ тойргийг $A$ ба $D$ цэгт огтолно. $BDC$ нуман дээр $E$ цэгийг, $BC$ тал дээр $F$ цэгийг

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

байхаар сонгов. $IF$ хэрчмийн дундаж цэг $G$ байг. $DG$ ба $EI$ шулуунууд $\Gamma$ тойрог дээр орших цэг дээр огтлолцохыг батал.

**Бодлого 3.** $\mathbb{N}$ натурал тоон олонлог. Аливаа $m, n \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

тоо бүтэн квадрат байх бүх $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ функцийг ол.

Language: Mongolian

Бодох хугацаа 4 цаг 30'
Бодлого бүр 7 оноотой.

Language: **Mongolian**

Day: **2**

Пүрэв, 08.07.2010

**Бодлого 4.** $P$ нь $ABC$ гурвалжны дотоод цэг. $AP$, $BP$ ба $CP$ шулуунууд $ABC$ гурвалжныг багтаасан $\Gamma$ тойргийг хоёр дахь удаагаа харгалзан $K$, $L$ ба $M$ цэгүүдэд огтолно. $C$ цэгийг дайрсан $\Gamma$ тойргийн шүргэгч $AB$ шулууныг $S$ цэгт огтолно. $SC = SP$ бол $MK = ML$ гэж батал.

**Бодлого 5.** Эхлээд $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ хайрцаг бүрт нэг, нэг мөнгө байв. Дараах хоёр төрлийн үйлдлийг хийнэ:

Төрөл 1: Дурын хоосон биш $B_j$, $1 \le j \le 5$ хайрцгийг сонгож түүнээс 1 мөнгө авах ба $B_{j+1}$ хайрцагт 2 мөнгө нэмж хийнэ.

Төрөл 2: Дурын хоосон биш $B_k$, $1 \le k \le 4$ хайрцгийг сонгож түүнээс 1 мөнгө авч $B_{k+1}$ ба $B_{k+2}$ хайрцагт буй зүйлсийн байрыг сольж хийнэ.

$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ хайрцгууд хоосон, харин $B_6$-д яг $2010^{2010^{2010}}$ мөнгө байх төлөвт хүргэх үйлдлүүдийн дараалал оршин уу? (тодорхойлолт ёсоор $a^{b^c} = a^{(b^c)}$).

**Бодлого 6.** Эерэг бодит тоонуудын дараалал $a_1, a_2, a_3, \dots$ өгчээ. Өгсөн $s$ тоо ба $n > s$ байх бүх $n$-ийн хувьд

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

бол $N \le n$ байх $n$ бүрийн хувьд $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$, $\ell \le s$ байх натурал тоо $\ell$ ба $N$ олдохыг үзүүл.

Language: Mongolian

Бодох хугацаа 4цаг 30'
Бодлого бүр 7 онотой.