

อังคาร, 15. กรกฎาคม 2025

**โจทย์ข้อ 1.** เส้นตรงในระนาบจะถูกเรียกว่า *เส้นแสงอรุณ* ถ้าเส้นตรงนั้นไม่ขนานกับแกน  $x$  หรือแกน  $y$  หรือเส้นตรง  $x + y = 0$

กำหนดให้  $n \geq 3$  เป็นจำนวนเต็ม จงหาจำนวนเต็มไม่ลบ  $k$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้มีเส้นตรง  $n$  เส้นที่ไม่ซ้ำกันในระนาบซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขทั้งสองข้อดังต่อไปนี้:

- สำหรับจำนวนเต็มบวก  $a$  และ  $b$  ใดๆ ที่  $a + b \leq n + 1$  จุด  $(a, b)$  จะต้องอยู่บนเส้นตรงเหล่านี้นอย่างน้อยหนึ่งเส้น
- ในบรรดาเส้นตรง  $n$  เส้นนั้น จะมีเส้นตรงจำนวน  $k$  เส้นพอดีที่เป็นเส้นแสงอรุณ

**โจทย์ข้อ 2.** ให้  $\Omega$  และ  $\Gamma$  เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $M$  และจุด  $N$  ตามลำดับ โดยที่รัศมีของวงกลม  $\Omega$  สั้นกว่ารัศมีของวงกลม  $\Gamma$  กำหนดให้วงกลม  $\Omega$  และ  $\Gamma$  ตัดกันที่จุดสองจุดที่แตกต่างกันคือจุด  $A$  และจุด  $B$  เส้นตรง  $MN$  ตัดกับวงกลม  $\Omega$  ที่จุด  $C$  และวงกลม  $\Gamma$  ที่จุด  $D$  โดยที่  $C, M, N$  และ  $D$  เรียงอยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับดังกล่าว ให้  $P$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม  $ACD$  เส้นตรง  $AP$  ตัดกับวงกลม  $\Omega$  อีกครั้งที่จุด  $E \neq A$  เส้นตรง  $AP$  ตัดกับวงกลม  $\Gamma$  อีกครั้งที่จุด  $F \neq A$  ให้  $H$  เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม  $PMN$

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด  $H$  และขนานกับ  $AP$  เป็นเส้นสัมผัสกับวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม  $BEF$  (จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมคือจุดตัดของส่วนสูงทั้งสามเส้นของรูปสามเหลี่ยม)

**โจทย์ข้อ 3.** ให้  $\mathbb{N}$  แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันเจ๋งมาก ถ้า

$$f(a) \text{ หาร } b^a - f(b)^{f(a)} \text{ ลงตัว}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $a$  และ  $b$

จงหาค่าคงที่  $c$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $f(n) \leq cn$  เป็นจริง สำหรับทุกฟังก์ชันเจ๋งมาก  $f$  และทุกจำนวนเต็มบวก  $n$

พุธ, 16. กรกฎาคม 2025

**โจทย์ข้อ 4.** ตัวหารแท้ของจำนวนเต็มบวก  $N$  คือตัวหารบวกของ  $N$  ที่ไม่เท่ากับ  $N$

ลำดับอนันต์  $a_1, a_2, \dots$  ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกที่มีตัวหารแท้อย่างน้อยสามตัว และสำหรับทุก  $n \geq 1$  จำนวนเต็ม  $a_{n+1}$  เป็นผลรวมของตัวหารแท้ที่มากที่สุดสามตัวของ  $a_n$

จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ  $a_1$

**โจทย์ข้อ 5.** อลิซและบาสเล่นเกมที่เรียกว่า *อสมการโคอาลา* ซึ่งเป็นเกมที่มีผู้เล่นสองคน โดยที่กติกาของเกมขึ้นอยู่กับจำนวนจริงบวก  $\lambda$  ซึ่งเป็นค่าที่ผู้เล่นทั้งสองคนทราบอยู่แล้ว การเล่นครั้งที่  $n$  ของเกม (เริ่มจาก  $n = 1$ ) มีกติกาดังนี้:

- ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคี่ อลิซจะเลือกจำนวนจริงไม่ลบ  $x_n$  โดยที่

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n$$

- ถ้า  $n$  เป็นจำนวนคู่ บาสจะเลือกจำนวนจริงไม่ลบ  $x_n$  โดยที่

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$$

หากผู้เล่นไม่สามารถเลือก  $x_n$  ตามเงื่อนไขได้ เกมจะจบลงและผู้เล่นอีกฝ่ายจะเป็นผู้ชนะ ถ้าเกมดำเนินไปได้เรื่อยๆ จะถือว่าเกมไม่มีผู้ชนะ ผู้เล่นทั้งสองคนทราบทุกจำนวนที่ถูกเลือก

จงหาค่า  $\lambda$  ทั้งหมดที่ทำให้อลิซมีแผนการเล่นที่ชนะได้เสมอ และค่า  $\lambda$  ทั้งหมดที่ทำให้บาสมีแผนการเล่นที่ชนะได้เสมอ

**โจทย์ข้อ 6.** พิจารณาตารางขนาด  $2025 \times 2025$  เมลต้องการวางแผ่นกระเบื้องสี่เหลี่ยมผืนผ้าลงบนตาราง ซึ่งแผ่นกระเบื้องแต่ละแผ่นอาจมีขนาดแตกต่างกันได้ โดยที่แต่ละด้านของแผ่นกระเบื้องต้องอยู่บนเส้นตาราง และแต่ละช่องของตารางถูกคลุมได้โดยกระเบื้องไม่เกินหนึ่งแผ่น

จงหาจำนวนแผ่นกระเบื้องที่น้อยที่สุดที่เมลต้องวางลงบนตาราง เพื่อให้ในแต่ละแถวและในแต่ละคอลัมน์มีเพียงหนึ่งช่องเท่านั้นที่ไม่ถูกคลุมด้วยแผ่นกระเบื้อง