



Language: Chinese (Simplified)

Day: 1

2015年7月10日, 星期五

**第1题.** 我们称平面上一个有限点集 $\mathcal{S}$ 是平衡的, 如果对 $\mathcal{S}$ 中任意两个不同的点 $A, B$ , 都存在 $\mathcal{S}$ 中一点 $C$ , 满足 $AC = BC$ . 我们称 $\mathcal{S}$ 是无中心的, 如果对 $\mathcal{S}$ 中任意三个不同的点 $A, B, C$ , 都不存在 $\mathcal{S}$ 中一点 $P$ , 满足 $PA = PB = PC$ .

(a) 证明: 对每个整数 $n \geq 3$ , 均存在一个由 $n$ 个点构成的平衡点集.

(b) 确定所有的整数 $n \geq 3$ , 使得存在一个由 $n$ 个点构成的平衡且无中心的点集.

**第2题.** 确定所有三元正数组 $(a, b, c)$ , 使得

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

中的每个数都是2的方幂.

(2的方幂是指形如 $2^n$ 的整数, 其中 $n$ 是一个非负整数.)

**第3题.** 在锐角三角形 $ABC$ 中,  $AB > AC$ . 设 $\Gamma$ 是它的外接圆,  $H$ 是它的垂心,  $F$ 是由顶点 $A$ 处所引高的垂足.  $M$ 是边 $BC$ 的中点.  $Q$ 是 $\Gamma$ 上一点, 使得 $\angle HQA = 90^\circ$ ,  $K$ 是 $\Gamma$ 上一点, 使得 $\angle HKQ = 90^\circ$ . 已知点 $A, B, C, K, Q$ 互不相同, 且按此顺序排列在 $\Gamma$ 上.

证明: 三角形 $KQH$ 的外接圆和三角形 $FKM$ 的外接圆相切.



Language: Chinese (Simplified)

Day: 2

2015年7月11日，星期六

**第4题.** 在三角形 $ABC$ 中,  $\Omega$ 是其外接圆,  $O$ 是其外心. 以 $A$ 为圆心的一个圆 $\Gamma$ 与线段 $BC$ 交于两点 $D$ 和 $E$ , 使得点 $B, D, E, C$ 互不相同, 并且按此顺序排列在直线 $BC$ 上. 设 $F$ 和 $G$ 是 $\Gamma$ 和 $\Omega$ 的两个交点, 并且使得点 $A, F, B, C, G$ 按此顺序排列在 $\Omega$ 上. 设 $K$ 是三角形 $BDF$ 的外接圆和线段 $AB$ 的另一个交点. 设 $L$ 是三角形 $CGE$ 的外接圆和线段 $CA$ 的另一个交点.

假设直线 $FK$ 和 $GL$ 不相同, 且相交于点 $X$ . 证明:  $X$ 在直线 $AO$ 上.

**第5题.** 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合. 求所有的函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足对任意实数 $x, y$ , 都有

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x).$$

**第6题.** 整数序列 $a_1, a_2, \dots$ 满足下列条件:

- (i) 对每个整数 $j \geq 1$ , 有 $1 \leq a_j \leq 2015$ ;
- (ii) 对任意整数 $1 \leq k < \ell$ , 有 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ .

证明: 存在两个正整数 $b$ 和 $N$ , 使得

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

对所有满足 $n > m \geq N$ 的整数 $m$ 和 $n$ 均成立.