

월요일, 11. 7 월 2022

**문제 1.** 오슬로 은행은 두 종류의 동전을 발행한다. 하나는 알루미늄동전 ( $A$ 로 나타낸다)이고, 다른 하나는 구리동전 ( $B$ 로 나타낸다)이다. 영준이는 알루미늄동전  $n$  개와 구리동전  $n$  개를 갖고 있고, 이것들을 적당한 순서로 한 줄로 배열하였다. 이 동전의 수열 내에서, 연속된 한 종류의 동전으로 이루어진 부분수열을 체인이라 하자. 주어진 고정된 양의 정수  $k \leq 2n$ 에 대하여, 영준이는 다음 작업을 반복적으로 수행한다.

그는 왼쪽에서  $k$ -번째 동전을 포함하는 가장 긴 체인에 대하여, 그 체인에 있는 모든 동전들을 그 줄의 가장 왼쪽으로 옮긴다. 예를 들어, 만일  $n = 4$ ,  $k = 4$ 이고, 처음의 배열  $AABBBA$ 에서 시작한다면 작업의 과정은 다음과 같다.

$$AABBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

처음의 초기배열이 어떤 것이더라도, 작업 과정의 어떤 순간에는 가장 왼쪽의  $n$  개의 동전이 모두 같은 종류가 되도록 하는 순서쌍  $(n, k)$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ , 을 모두 구하여라.

**문제 2.**  $\mathbb{R}^+$ 는 양의 실수 전체의 집합이다. 각각의  $x \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는  $y \in \mathbb{R}^+$ 가 유일하게 존재하는 함수  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 를 모두 구하여라.

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

**문제 3.**  $k$ 는 양의 정수이고,  $S$ 는 유한 개의 홀수 소수로 이루어진 집합이라 하자.  $S$ 의 원소들을 다음 조건을 만족하도록 한 원의 둘레에 배치하는 방법은 (회전과 대칭한 것을 같은 것으로 간주하면) 많아야 한 가지뿐임을 보여라. 조건: 이웃한 두 수의 곱은, 어떤 양의 정수  $x$ 에 대하여,  $x^2 + x + k$  꼴이다.

화요일, 12. 7 월 2022

문제 4. 볼록오각형  $ABCDE$  에 대하여  $BC = DE$  이다.  $ABCDE$  내부에 있는 점  $T$ 에 대하여  $TB = TD, TC = TE, \angle ABT = \angle TEA$  이다. 직선  $AB$ 가 직선  $CD, CT$ 와 만나는 점을 각각  $P, Q$  라 할 때, 네 점  $P, B, A, Q$  가 순서대로 한 직선 위에 있다고 하자. 직선  $AE$ 가 직선  $CD, DT$ 와 만나는 점을 각각  $R, S$  라 할 때, 네 점  $R, E, A, S$  가 순서대로 한 직선 위에 있다고 하자. 네 점  $P, Q, R$ 이 한 원 위에 있음을 보여라.

문제 5. 다음 등식을 만족하는 양의 정수들의 쌍  $(a, b, p)$ (단,  $p$ 는 소수)를 모두 구하여라.

$$a^p = b! + p.$$

문제 6. 양의 정수  $n$ 에 대하여, 북구형 스퀘어란  $n \times n$  칸으로 이루어진 정사각형 보드로서 1부터  $n^2$  까지의 각 정수가 각 칸에 정확히 하나씩 쓰여져 있다. 서로 다른 두 칸이 인접한다는 말은 이 칸들이 하나의 변을 공유한다는 말이다. 어느 한 칸의 숫자가 그 칸에 인접한 모든 칸들의 숫자보다 더 작을 때 그 칸을 계곡이라고 부르자. 오르막길이란 칸들로 이루어진 수열로서 다음 조건을 모두 만족한다.

- (i) 수열의 첫번째 칸은 계곡이다.
- (ii) 수열 안의 연속한 두 칸은 인접한다.
- (iii) 수열의 칸에 쓰여져 있는 숫자들은 증가한다.

한 북구형 스퀘어 안에 있는 오르막길의 총 개수의 가능한 가장 작은 값을  $n$ 의 식으로 나타내어라.