الثلاثاء 8 تموز 2014

المسألة 1 : لتكن $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ متتالية غير منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً. برهن أنه يوجد عدد صحيح وحيد $n \geq 1$ بحيث يكون :

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \ .$$

المسألة 2 : ليكن $n \geq 2$ عدداً صحيحاً . لنتأمل رقعة شطرنج مربعة من القياس $n \times n$ مقسمة إلى n^2 وحدة مربعة ، نقول عن تَوضع n قطعة شطرنج على هذه الرقعة إنه *مسالم* إذا كان في كل سطر وفي كل عمود من هذه الرقعة توجد قطعة شطرنج واحدة فقط . أوجد أكبر عدد صحيح موجب k بحيث من أجل أي تَوضع مسالم لـ n قطعة شطرنج يوجد مربع من القياس $k \times k$ من هذه الرقعة لا يحتوي على أية قطعة شطرنج في مربعاته التي عددها k^2 .

المسألة 3 : ليكن $ABCD$ رباعياً محدّباً فيه $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. النقطة H المرتسم القائم للنقطة A على BD . نأخذ نقطتين S و T على الضلعين AB و AD ، على الترتيب ، بحيث تكون النقطة H واقعة داخل المثلث SCT ويكون $\angle THC - DTC = 90^\circ$, $\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ$. برهن أن المستقيم BD يمس الدائرة المارة من رؤوس المثلث TSH .

الاربعاء 9 تموز 2014

المسألة 4 : لتكن P و Q نقطتين من الضلع BC من مثلثٍ حاد الزوايا ABC بحيث $\angle PAB = \angle BCA$ و $\angle CAQ = \angle ABC$. M و N نقطتان من المستقيمين AP و AQ على الترتيب ، بحيث تكون P منتصف AM و Q منتصف AN . برهن أن المستقيمين BM و CN يتقاطعان في نقطة تقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

المسألة 5 : من أجل أي عدد صحيح موجب n يُصدر بنك كيب تاون قطعاً نقدية قيمها $\frac{1}{n}$. نأخذ تشكيلة محدودة من هذه القطع (ليس بالضرورة مختلفة القيم) مجموع قيمها لا يتجاوز $99+\frac{1}{2}$. برهن أنه يمكن تجزئة هذه التشكيلة إلى 100جزء أو أقل ، بحيث يكون مجموع قيم قطع كل جزء يساوي 1 على الأكثر .

المسألة 6 : يُقال عن مجموعة مستقيمات إنها في الوضع العام إذا كان أي مستقيمين منها غير متوازيين وأي ثلاثة مستقيمات منها لا تتقاطع في نقطة مشتركة . مجموعة مستقيمات في الوضع العام تقسم المستوي إلى مناطق بعض منها مساحته محدودة ، نسميها *مناطق محدودة* . برهن أنه من أجل كل عدد n كبير بقدر كاف ، يمكن تلوين $\sqrt{n}$ مستقيماً على الأقل بلون أزرق من مجموعة مستقيمات في الوضع العام مؤلفة من n مستقيماً بحيث لا توجد منطقة محدودة جميع حدودها مستقيمات زرقاء .

ملاحظة : تخصص درجات لمن يحصل على $c\sqrt{n}$ بدلاً من $\sqrt{n}$ وذلك بحسب قيمة الثابت c .

المدة : 4 ساعات ونصف الساعة ***Language : Arabic Syrian***

لكل مسألة 7 درجات