Bazar ertəsi, 19. iyul 2021

Məsələ 1. Tutaq ki, $n \geqslant 100$ tam ədəddir. Anar $n, n+1, \ldots, 2n$ ədədlərinin hər birini fərqli bir kartın üzərinə yazır. Sonra, o, həmin $n+1$ sayda kartı qarışdırır və onları iki qrupa bölür. İsbat edin ki, qruplardan ən azı birində elə iki kart var ki, üzərində yazılmış ədədlərin cəmi tam kvadratdır.

Məsələ 2. İsbat edin ki,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

bərabərsizliyi bütün $x_1, \ldots, x_n$ həqiqi ədədləri üçün ödənir.

Məsələ 3. $AB > AC$ şərtini ödəyən itibucaqlı ABC üçbucağının daxilində elə D nöqtəsi götürülüb ki, $\angle DAB = \angle CAD$. AC parçası üzərində verilmiş E nöqtəsi $\angle ADE = \angle BCD$, AB parçası üzərində verilmiş F nöqtəsi $\angle FDA = \angle DBC$ və AC düz xətti üzərində verilmiş X nöqtəsi $CX = BX$ şərtlərini ödəyir. O_1 və O_2, uyğun olaraq, ADC və EXD üçbucaqlarının xaricinə çəkilmiş çevrələrinin mərkəzləridir. İsbat edin ki, BC, EF, və O_1O_2 düz xətləri bir nöqtədə kəsişir.

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.

çərşənbə axşamı, 20. iyul 2021

Məsələ 4. Γ mərkəzi I olan çevrədir və $ABCD$ qabarıq dördbucaqlısının AB, BC, CD və DA tərəflərinin hər biri Γ çevrəsinə toxunur. AIC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə Ω olsun. BA-nın A istiqamətindəki uzantısı Ω ilə X-də və BC-nin C istiqamətindəki uzantısı isə Ω ilə Z-də kəsişir. AD və CD-nin D istiqamətindəki uzantıları Ω ilə uyğun olaraq, Y və T-də kəsişir . İsbat edin ki,

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Məsələ 5. İki dələ - Yumaq və Hophop qış üçün 2021 ədəd fındıq topladılar. Hophop fındıqları 1-dən 2021-ə qədər ədədlərlə nömrələyir və sevimli ağacının ətrafında torpaqda çevrə boyunca 2021 sayda kiçik quyular qazır. Növbəti səhər Hophop gördü ki, Yumaq hər bir quyuya bir ədəd fındıq yerləşdirib, amma nömrələməyə fikir verməyib. Məyus Hophop qərara gəlir ki, 2021 sayda addımda fındıqları yenidən sıralasın. k-cı addımda, Hophop nömrəsi k olan fındığın qonşularının yerlərini dəyişdirir. İsbat edin ki, k-nın elə dəyəri var ki, k-cı addımda Hophop $a < k < b$ şərtini ödəyən a və b nömrəli fındıqların yerini dəyişdirir.

Məsələ 6. $m \geqslant 2$ tam ədəddir, A sonlu sayda tam ədəddən (müsbət olmaya bilərlər) ibarət çoxluqdur və $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ isə A-nın alt çoxluqlarıdır. Fərz edək ki, hər bir $k = 1, 2, \ldots, m$ üçün B_k-nın elementlərinin cəmi m^k-dır. İsbat edin ki, A çoxluğunun ən azı $m/2$ sayda elementi var.

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.