Tirsdag d. 18. juli 2017

Opgave 1. For alle heltal $a_0 > 1$ definér følgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ved:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{hvis } \sqrt{a_n} \text{ er et heltal,} \\ a_n + 3 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{for ethvert } n \geqslant 0.$$

Bestem alle værdier af a_0 for hvilke der eksisterer et heltal A så $a_n = A$ for uendeligt mange værdier af n.

Opgave 2. Lad $\mathbb{R}$ være mængden af reelle tal. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 3. En jæger og en usynlig kanin spiller et spil i den euklidiske plan. Kaninens udgangspunkt, A_0, og jægerens udgangspunkt, B_0, er sammenfaldende. Efter $n-1$ runder af spillet er kaninen ved punkt A_{n-1} og jægeren ved punkt B_{n-1}. I den n-te runde af spillet sker følgende tre ting i rækkefølge.

(i) Kaninen bevæger sig uden at blive set til et punkt A_n så afstanden mellem A_{n-1} og A_n er præcis 1.

(ii) Et sporingsapparat reporterer et punkt P_n til jægeren. Det eneste jægeren kan være sikker på er at afstanden mellem P_n og A_n er højst 1.

(iii) Jægeren bevæger sig synligt til et punkt B_n så afstanden mellem B_{n-1} og B_n er præcis 1.

Er det altid muligt for jægeren, ligegyldigt hvordan kaninen bevæger sig, og ligegyldigt hvilke punkter sporingsapparatet reporterer, at vælge hendes træk så hun efter 10^9 runder kan sikre sig at afstanden mellem hende og kaninen er højst 100?

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give op til 7 point

Onsdag d. 19. juli 2017

Opgave 4. Lad R og S være to forskellige punkter på en cirkel Ω så RS ikke er en diameter i Ω. Lad ℓ være tangenten til Ω i R. Punktet T er således at S er midtpunktet af linjestykket RT. Punktet J er valgt på den kortere cirkelbue RS af Ω så den omskrevne cirkel Γ til trekant JST skærer ℓ i to forskellige punkter. Lad A være skæringspunktet imellem Γ og ℓ som er tættest på R. Linjen AJ skærer Ω igen i K. Vis at linjen KT er tangent til Γ.

Opgave 5. Et heltal $N \geqslant 2$ er givet. En samling af $N(N+1)$ fodboldspillere, alle af forskellig højde, står i en række. Ricardo vil fjerne $N(N-1)$ spillere fra denne række så der er en række med $2N$ spillere tilbage i hvilken følgende N betingelser er opfyldt:

(1) ingen står imellem de to højeste spillere,

(2) ingen står imellem den tredje og den fjerde højeste spiller,

$\vdots$

(N) ingen står imellem de to laveste spillere.

Vis at dette altid er muligt.

Opgave 6. Et ordnet par (x, y) af heltal er et *primitivt punkt* hvis den største fælles divisor mellem x og y er 1. Givet en endelig mængde S af primitive punkter, vis at der eksisterer et positivt heltal n og heltal $a_0, a_1, \ldots, a_n$ så der for alle (x, y) i S gælder:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$