الإثنين 09 يوليوز 2018

المسألة 1.

لتكن Γ الدائرة المحيطة بمثلّث ABC جميع زواياه حادة. النقطتان D و E توجدان على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي، حيث $AD = AE$. الواسطان لـ $[BD]$ و $[CE]$ يقطعان القوسين الأصغرين AB و AC في النقطتين F و G على التوالي.

بين أنّ المستقيمين (DE) و (FG) متوازيان (أو منطبقان).

المسألة 2.

حدِّد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 3$ حيث توجد أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ تحقِّق $a_{n+1} = a_1$ و $a_{n+2} = a_2$ و

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

لكلّ $i = 1, 2, \ldots, n$.

المسألة 3.

مثلّث باسكال عكسي هو جدول على شكل مثلّث متساوي الأضلاع مكون من أعداد حيث كلّ عدد، باستثناء الأعداد التي توجد في السطر الأخير، يساوي القيمة المطلقة لفرق العددين المتواجدين مباشرة تحته.

مثلا، الجدول أسفله هو مثلّث باسكال عكسي يتكوّن من أربعة أسطر تحتوي على كلّ عدد صحيح من 1 إلى 10 .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

هل يوجد مثلّث باسكال عكسي من 2018 سطر، يحتوي على كلّ الأعداد الصحيحة من 1 إلى $1 + 2 + \cdots + 2018$ ؟

Language: Arabic (Moroccan)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الثلاثاء 10 يوليوز 2018

المسألة 4.

نسمي **موقعا** كلّ نقطة (x,y) من المستوي بحيث x و y عددين صحيحين موجبين قطعا أصغر من أو يساويان 20 .

في البداية جميع المواقع، والتي عددها 400 فارغة. ألاء و باسم يتبادلان الأدوار في اللعب حيث البداية لألاء. عند حلول دور ألاء، فإنها تضع حَجَرَةً جديدة لونها أحمر في موقع فارغ بحيث تكون المسافة بين أيِّ موقعين يحويان حجرا أحمرا، تخالف $\sqrt{5}$. عند حلول دور باسم ، فإنه يضع حَجَرَةً جديدة لونها أزرق في موقع فارغ. (يمكن لأيّ موقع يحتوي على حجرة لونها أزرق أن يتواجد على أيّ مسافة من أيّ موقع آخر يحتوي على حجرة.) تنتهي اللعبة عندما لا يستطيع أحد اللاعبين أن يضع حجرة.

حدّد أكبر عدد K حيث تستطيع ألاء أن تضمن لنفسها وضع K حجرة حمراء على الأقل كيفما كانت الطريقة التي يضع بها باسم حجراته الزرقاء.

المسألة 5.

لتكن $a_1, a_2, \ldots$ متتالية غير متهية من أعداد صحيحة موجبة قطعا. لنفترض أنّه يوجد عدد صحيح $N > 1$ حيث، لكلّ $n \geq N$ ، يكون العدد

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

صحيحا. بين أنّه يوجد عدد صحيح موجب قطعا M حيث $a_m = a_{m+1}$ لكلّ $m \geq M$.

المسألة 6.

رباعي محدب $ABCD$ يحقّق $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. نقطة X توجد بداخل $ABCD$ بحيث

$$\widehat{XAB} = \widehat{XCD} \quad \text{و} \quad \widehat{XBC} = \widehat{XDA}.$$

بيّن أنّ $\widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180°$.

Language: Arabic (Moroccan)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة