



**IMO 2024**

65th International  
Mathematical Olympiad

Bosnian (bos), day 1

utorak, 16. juli 2024

**Zadatak 1** Odrediti sve realne brojeve  $\alpha$  takve da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi da je cijeli broj

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

djeljiv sa  $n$ . (Pri tome  $\lfloor z \rfloor$  označava najveći cijeli broj manji ili jednak  $z$ . Na primjer,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  i  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**Zadatak 2** Odrediti sve parove  $(a, b)$  prirodnih brojeva za koje postoe prirodni brojevi  $g$  i  $N$  takvi da vrijedi

$$NZD(a^n + b, b^n + a) = g$$

za sve cijele brojeve  $n \geq N$ . (Pri tome  $NZD(x, y)$  označava najveći zajednički djelioc brojeva  $x$  i  $y$ .)

**Zadatak 3** Neka je  $a_1, a_2, a_3, \dots$  beskonačan niz prirodnih brojeva i neka je  $N$  prirodan broj. Prepostavimo da za svako  $n > N$  vrijedi da je  $a_n$  jednak broju pojavljivanja broja  $a_{n-1}$  u nizu  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Dokazati da je bar jedan od nizova  $a_1, a_3, a_5, \dots$  i  $a_2, a_4, a_6, \dots$  eventualno periodičan.

(Beskonačan niz  $b_1, b_2, b_3, \dots$  je *eventualno periodičan* ako postoe prirodni brojevi  $p$  i  $M$  takvi da vrijedi  $b_{m+p} = b_m$  za sve  $m \geq M$ .)



**IMO 2024**

65th International  
Mathematical Olympiad

Bosnian (bos), day 2

srijeda, 17. juli 2024

**Zadatak 4** Neka je  $ABC$  trougao u kojem vrijedi  $AB < AC < BC$ . Označimo centar upisane kružnice i upisanu kružnicu trougla  $ABC$  sa  $I$  i  $\omega$ , redom. Neka je  $X$  tačka na pravoj  $BC$  različita od  $C$  takva da je prava kroz  $X$  paralelna sa  $AC$  tangenta na kružnicu  $\omega$ . Slično, neka je  $Y$  tačka na pravoj  $BC$  različita od  $B$  takva da je prava kroz  $Y$  paralelna sa  $AB$  tangenta na kružnicu  $\omega$ . Prava  $AI$  siječe opisanu kružnicu trougla  $ABC$  ponovo u  $P \neq A$ . Neka su  $K$  i  $L$  sredine stranica  $AC$  i  $AB$ , redom. Dokazati da vrijedi  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**Zadatak 5** Puž Turbo igra igru na ploči sa 2024 redova i 2023 kolona. U 2022 polja ploče nalaze se skrivena čudovišta. Na početku, Turbo ne zna gdje se čudovišta nalaze, ali zna da postoji tačno jedno čudovište u svakom redu ploče osim u prvom i zadnjem redu te da svaka kolona sadrži najviše jedno čudovište.

Turbo pravi niz pokušaja da dođe iz prvog u zadnji red. U svakom pokušaju, bira u kojem polju u prvom redu će početi, a onda se redom pomjera u bilo koje susjedno polje koje ima zajedničku stranicu s trenutnim poljem na kojem se nalazi. (Dozvoljeno mu je da se vrati u polje koje je nekada prije posjetio.) Ako dođe u polje u kojem se nalazi čudovište, njegov pokušaj se završava i on se vraća u prvi red ploče da započne novi pokušaj. Čudovišta se ne pomjeraju i Turbo pamti za svako polje koje je posjetio sadrži li čudovište ili ne. Ako Turbo dođe u bilo koje polje u zadnjem redu, njegov pokušaj se završava i to označava kraj igre.

Odrediti najmanju vrijednost broja  $n$  za koju Turbo ima strategiju koja mu garantuje da u  $n$  ili manje pokušaja dođe do zadnjeg reda ploče, neovisno od pozicija čudovišta.

**Zadatak 6** Neka je  $\mathbb{Q}$  skup racionalnih brojeva. Funkciju  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  nazivamo *lijepom* ako vrijedi sljedeće: za sve  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ili} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokazati da postoji cijeli broj  $c$  takav da za bilo koju lijepu funkciju  $f$  postoji najviše  $c$  različitih racionalnih brojeva koji se mogu zapisati kao  $f(r) + f(-r)$  za neki racionalan broj  $r$ , i odrediti najmanju moguću vrijednost broja  $c$ .