e hënë, 11. korrik 2022

Detyra 1. Banka e Oslos prodhon dy lloje të monedhave metalike: të aluminit (e shënojmë me A) dhe të bronzit (e shënojmë me B). Mariana ka n monedha të aluminit dhe n monedha të bronzit, të radhitura në një rresht në një renditje të çfarëdoshme fillestare. *Zinxhir* quhet çdo nënvarg i monedhave të njëpasnjëshme të llojit të njëjtë. Për numrin e dhënë natyror të fiksuar $k \leqslant 2n$, Mariana në mënyrë të përsëritur kryen këtë veprim: ajo identifikon zinxhirin më të gjatë që përmban monedhën e k-të nga e majta dhe zhvendos të gjitha monedhat e atij zinxhiri në fund të rreshtit në anën e majtë. Për shembull, nëse $n = 4$ dhe $k = 4$ procesi i cili fillon nga renditja $AABBBABA$ do të jetë:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Gjeni të gjitha dyshet (n, k) ku $1 \leqslant k \leqslant n$ të tilla që për çdo renditje fillestare, në një moment të procesit, n monedhat nga e majta do të jenë të gjitha të të njëjtit lloj.

Detyra 2. Le të jetë $\mathbb{R}^+$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjitha funksionet $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ të tilla që, për çdo $x \in \mathbb{R}^+$ ekziston saktësisht një $y \in \mathbb{R}^+$ në mënyrë që të vlejë

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Detyra 3. Le të jetë k numër natyror dhe le të jetë S një bashkësi e fundme e numrave të thjeshtë tek. Tregoni që është më së shumti një mënyrë (duke mos pas parasysh rotacionin dhe reflektimin) për t'i vendosur elementet e bashkësisë S në një rreth në mënyrë të tillë që prodhimi i çfarëdo dy numrave fqinjë të jetë i formës $x^2 + x + k$ për ndonjë numër natyror x.

Language: Albanian (Kosovo)

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.

e martë, 12. korrik 2022

Detyra 4. Le të jetë $ABCDE$ një pesëkëndësh konveks i tillë që $BC = DE$. Supozojmë se ekziston pika T brenda pesëkëndëshit $ABCDE$ e tillë që $TB = TD$, $TC = TE$ dhe $\angle ABT = \angle TEA$. Drejtëza AB pret drejtëzat CD dhe CT në pikat P dhe Q, përkatësisht. Supozojmë se pikat P, B, A, Q janë në atë drejtëz në atë renditje. Drejtëza AE pret drejtëzat CD dhe DT në pikat R dhe S, përkatësisht. Supozojmë se pikat R, E, A, S janë në atë drejtëz në atë renditje. Tregoni që pikat P, S, Q, R i takojnë një rrethi.

Detyra 5. Gjeni të gjitha treshet e numrave natyrorë (a, b, p) ku p numër i thjeshtë dhe

$$a^p = b! + p.$$

Detyra 6. Le të jetë n një numër natyror. *Katror nordik* quhet tabela $n \times n$ që përmban të gjithë numrat natyrorë nga 1 në n^2 në mënyrë të tillë që çdo fushë të përmbajë saktësisht një numër. Dy fusha të ndryshme konsiderohen fqinje nëse kanë të përbashkët një brinjë. Çdo fushë që është fqinje vetëm me fushat që përmbajnë numra më të mëdhenj quhet *Luginë*. *Një shteg i përpjetë* është vargu i një ose më shumë fushave të tilla që:

(i) fusha e parë në varg është një luginë,

(ii) secila fushë pasardhëse në varg është fqinj me fushën paraardhës, dhe

(iii) numrat e shkruar në fushat në varg formojnë varg rritës.

Gjeni, në varësi të n-it, numrin e përgjithshëm më të vogël të mundshëm të shtigjeve përpjetë në një katror Nordik.