

الإثنين, 21 سبتمبر 2020

مسألة 1. نعتبر الرباعي المحدب $ABCD$. النقطة P داخل الرباعي $ABCD$ بحيث تتحقق النسب الآتية:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

أثبت أن المستقيمتان AD و BC متوازيتان. المنصفان الداخليان للزاويتين $\angle ADP$ و $\angle PCB$ ومحور القطعة المستقيمة AB يتلاقى في نقطة واحدة.

مسألة 2. الأعداد الحقيقية a, b, c, d تحقق $a \geq b \geq c \geq d > 0$ و $a + b + c + d = 1$. أثبت أن

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

مسألة 3. لدينا $4n$ قطعة من الخصى أوزانها $1, 2, 3, \dots, 4n$. كل قطعة من الخصى ملونة بلون من بين n لون، ومن كل لون أربع قطع. بين أنه يمكننا ترتيب هذه القطع في كومتين بحيث يكون الشرطان الآتيان محققان معاً:

• مجموع أوزان القطع في الكومتين متساو. كل كومة تحتوي على قطعتين من نفس اللون.

الثلاثاء، 22 سبتمبر 2020

مسألة 4. يوجد عدد صحيح $n > 1$. هناك n^2 محطة على جبل تقع جميعها على ارتفاعات مختلفة. هناك شركتان A و B للنقل بين المحطات كل منها يدير عمل k حافلة. كل حافلة تُتيح إمكانية النقل من محطة إلى محطة أكثر ارتفاعاً (دون توقف على الطريق). لحافلات الشركة A عددٌ يساوي k من محطات الانطلاق المختلفة، وعددٌ يساوي k من محطات الوصول المختلفة، وكل حافلة تبدأ من موقع أعلى تصل أيضاً إلى موقع أعلى. تحقق حافلات الشركة B شروط الشركة A نفسها. نقول إن محطتين متصلتان من قبل شركة إذا كان بإمكان أحدهم البدء من المحطة الأخفض والوصول إلى المحطة الأعلى باستعمال واحدة أو أكثر من حافلات تلك الشركة (ولا يسمح بأي تنقلات أخرى بين المحطات).

عند أصغر عدد صحيح موجب تماماً k يمكن في حالته ضمان وجود محطتين متصلتين من قبل الشركتين معاً.

مسألة 5. نُعطى عدداً $n > 1$ من البطاقات. على كل بطاقة كتب عليها عدد صحيح موجب تماماً. تمتلك مجموعة البطاقات الخاصة الآتية: المتوسط الحسابي للعددين المكتوبين على أي زوج من البطاقات يساوي أيضاً المتوسط الهندسي للأعداد المكتوبة على واحدة أو أكثر من البطاقات.

عند أي قيم n نستنتج من ذلك أن جميع الأعداد المكتوبة على هذه البطاقات متساوية؟

مسألة 6. أثبت أنه يوجد عدد موجب تماماً c يحقق الخاصية الآتية: ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً، ولتكن S مجموعة مكونة من n نقطة في المستوي بحيث تكون المسافة بين أي نقطتين مختلفتين في S أكبر أو تساوي 1. عندئذ يوجد مستقيم ℓ يفصل S وبحيث تكون المسافة بين أي نقطة من S إلى ℓ أكبر أو تساوي $cn^{-1/3}$.

(نقول إن مستقيماً ℓ يفصل مجموعة نقاط S إذا تقاطع مع قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من S)

ملاحظة. نتأج أضعف يستبدل فيها بـ $cn^{-1/3}$ المقدار $cn^{-\alpha}$ يمكن أن تمنح نقاطاً وذلك تبعاً لقيمة الثابت $\alpha > 1/3$.