Понедельник, 9 июля 2018 года

Задача 1. Пусть Γ — окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, причем $AD = AE$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BD и CE пересекают меньшие дуги AB и AC окружности Γ в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.

Задача 2. Найдите все целые числа $n \geq 3$, для которых существуют вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ такие, что $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 3. *Антипаскалевым треугольником* назовём таблицу в виде равностороннего треугольника, заполненную числами так, что каждое число, кроме чисел, стоящих в нижней строке, равно модулю разности двух чисел, стоящих непосредственно под ним. Ниже приведён пример антипаскалева треугольника с четырьмя строками, в котором встречаются все целые числа от 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Существует ли антипаскалев треугольник с 2018 строками, в котором встречаются все целые числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + 2018$?

Вторник, 10 июля 2018 года

Задача 4. На координатной плоскости *отмечены* точки (x, y) с целыми положительными координатами x и y, не превосходящими 20.

Вначале все 400 отмеченных точек не заняты. Аня и Ваня делают ходы по очереди, Аня ходит первой. Своим ходом Аня кладёт в ещё не занятую отмеченную точку новый красный камень, причём расстояние между любыми двумя точками с красными камнями не должно равняться $\sqrt{5}$. Ваня своим ходом кладёт в ещё не занятую отмеченную точку новый синий камень. (Точка с синим камнем может находиться на произвольном расстоянии от других занятых точек.) Игра останавливается, когда кто-то из игроков не может сделать ход.

Найдите наибольшее K, при котором Аня сможет разместить не менее чем K красных камней независимо от действий Вани.

Задача 5. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — бесконечная последовательность целых положительных чисел. Предположим, что существует целое число $N > 1$ такое, что при всех $n \geqslant N$ число

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

является целым. Докажите, что найдётся такое целое положительное M, что $a_m = a_{m+1}$ при всех $m \geqslant M$.

Задача 6. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ удовлетворяет условию $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X внутри четырёхугольника $ABCD$ такова, что

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{и} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Докажите, что $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов