სამშაბათი, 15. ივლისი 2025

ამოცანა 1. სიბრტყეზე მოცემულ წრფეს ეწოდება *განსაკუთრებული* თუ ის **არ არის** პარალელური არც x-ღერძის, არც y-ღერძის და არც $x+y=0$ წრფის.

ვთქვათ $n \geqslant 3$ ფიქსირებული მთელი რიცხვია. იპოვეთ ყველა მთელი არაუარყოფითი რიცხვი k ისეთი, რომ სიბრტყეზე არსებობს n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული წრფე, რომ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

- ყოველი მთელი დადებითი a და b რიცხვებისთვის, სადაც $a+b \leqslant n+1$, წერტილი (a,b) ძევს ერთ წრფეზე მაინც ამ n ცალი წრფიდან; და
- ზუსტად k ცალი წრფე ამ n ცალი წრფიდან არის განსაკუთრებული წრფე.

ამოცანა 2. ვთქვათ Ω და Γ ისეთი წრეწირებია, რომელთა ცენტრები შესაბამისად არის M და N, და ამასთან, Ω-ს რადიუსის სიგრძე ნაკლებია Γ-ს რადიუსის სიგრძეზე. ვთქვათ Ω და Γ წრეწირები იკვეთება ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ A და B წერტილში. MN წრფე Ω-ს კვეთს C წერტილში და Γ-ს კვეთს D წერტილში ისე, რომ C, M, N და D წერტილები ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით მდებარეობენ წრფეზე. ვთქვათ P არის ACD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. AP წრფე Ω-ს მეორედ კვეთს $E \neq A$ წერტილში. AP წრფე Γ-ს მეორედ კვეთს $F \neq A$ წერტილში. ვთქვათ H არის PMN სამკუთხედის ორთოცენტრი.

დაამტკიცეთ, რომ H წერტილზე გამავალი AP-ს პარალელური წრფე არის BEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

(სამკუთხედის *ორთოცენტრი* არის მისი სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი.)

ამოცანა 3. ვთქვათ $\mathbb{N}$ არის ყველა მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ფუნქციას ვუწოდოთ *კარგი* თუ

$$f(a) \text{ ყოფს } b^a - f(b)^{f(a)}$$

ყოველი მთელი დადებითი a და b რიცხვებისთვის.

განსაზღვრეთ უმცირესი ნამდვილი კონსტანტა c ისეთი, რომ $f(n) \leqslant cn$ ყოველი კარგი f ფუნქციისთვის და ყოველი მთელი დადებითი n-თვის.

ოთხშაბათი, 16. ივლისი 2025

ამოცანა 4. ვთქვათ N მთელი დადებითი რიცხვია. მისი *საკუთრივი გამყოფი* არის N-ის ისეთი დადებითი გამყოფი, რომელიც N-სგან განსხვავებულია.

უსასრულო მიმდევრობა $a_1, a_2, \ldots$ შედგება მთელი დადებითი რიცხვებისგან, რომელთაგან თითოეულს აქვს სულ მცირე სამი საკუთრივი გამყოფი. თითოეული $n \geqslant 1$-სთვის, a_{n+1} არის a_n-ის სამი უდიდესი საკუთრივი გამყოფის ჯამი.

განსაზღვრეთ a_1-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოცანა 5. ანო და ვანო თამაშობენ *ავსტრალიურ თამაშს* -ორი მოთამაშის თამაშს, რომლის წესები დამოკიდებულია დადებით ნამდვილ რიცხვ λ-ზე, რომელიც ორივე მოთამაშისთვის ცნობილია. თამაშის მე-n-ე სვლაზე (დაწყებული $n = 1$-დან) ხდება შემდეგი:

- თუ n კენტია, ანო ირჩევს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვს x_n-ს ისე, რომ
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- თუ n ლუწია, ვანო ირჩევს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვს x_n-ს ისე, რომ
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

თუ მოთამაშეს არ შეუძლია შესაბამისი x_n რიცხვის არჩევა, თამაში სრულდება და მისი მოწინააღმდეგე იგებს. თუ თამაში გრძელდება უსასრულოდ, არც ერთი მოთამაშე არაა გამარჯვებული. ყველა არჩეული რიცხვი ცნობილია ორივე მოთამაშისთვის.

განსაზღვრეთ λ-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ანოს აქვს მოგების სტრატეგია. ასევე, განსაზღვრეთ λ-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ვანოს აქვს მოგების სტრატეგია.

ამოცანა 6. მოცემულია 2025×2025 ზომის ცხრილი, რომელიც შედგება ერთეულოვანი კვადრატებისგან. თედოს სურს განათავსოს ცხრილზე მართკუთხედის ფორმის ფილები, შესაძლოა სხვადასხვა ზომის ისე, რომ თითოეული ფილის ყველა გვერდი ემთხვეოდეს ცხრილის ხაზებს და ყოველი ერთეულოვანი კვადრატი დაფარული იყოს არაუმეტეს ერთი ფილით.

განსაზღვრეთ ფილების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც თედომ უნდა განათავსოს ისე, რომ ცხრილის თითოეულ სტრიქონში და თითოეულ სვეტში ზუსტად ერთი ერთეულოვანი კვადრატი იყოს დაუფარავი, ანუ არ იყოს დაფარული არცერთი ფილით.