



Language: **Czech**

Day: **1**

Úterý, 8. července 2014

Úloha 1. Nechť $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Dokažte, že existuje právě jedno celé číslo $n \geq 1$ takové, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Úloha 2. Nechť $n \geq 2$ je celé číslo. Uvažujme šachovnici o rozměrech $n \times n$ složenou z n^2 jednotkových čtvercových políček. Konfiguraci n vězí na této šachovnici nazýváme *šťastnou*, pokud každý řádek a každý sloupec obsahuje právě jednu věz. Najděte největší kladné celé číslo k takové, že pro každou šťastnou konfiguraci n vězí existuje čtverec o rozměrech $k \times k$, který neobsahuje věz na žádném ze svých k^2 políček.

Úloha 3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\angle ABC| = |\angle CDA| = 90^\circ$. Bod H je patou kolmice z bodu A na přímku BD . Body S, T leží po řadě na stranách AB, AD tak, že bod H je vnitřním bodem trojúholníku SCT a platí

$$|\angle CHS| - |\angle CSB| = 90^\circ, \quad |\angle THC| - |\angle DTC| = 90^\circ.$$

Dokažte, že přímka BD se dotýká kružnice opsané trojúhelníku TSR .



Language: **Czech**

Day: **2**

Středa, 9. července 2014

Úloha 4. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\angle PAB| = |\angle BCA|$ a $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ , přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN . Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

Úloha 5. Banka v Kapském Městě razí mince s hodnotou $\frac{1}{n}$ pro každé kladné celé číslo n . Mějme konečnou kolekci takových mincí (ne nutně různých hodnot), která má celkovou hodnotu nejvýše $99 + \frac{1}{2}$. Dokažte, že tuto kolekci je možné rozdělit na 100 nebo méně částí tak, aby každá část měla celkovou hodnotu nejvýše 1.

Úloha 6. Říkáme, že přímky v rovině jsou v *obecné poloze*, pokud žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Množina přímek v obecné poloze rozděluje rovinu na oblasti, z nichž některé mají konečný obsah; nazýváme je *konečné oblasti* příslušné dané množině přímek. Pro každé dostatečně velké n dokažte, že v libovolné množině n přímek v obecné poloze je možné obarvit modře aspoň \sqrt{n} přímek tak, že žádná z příslušných konečných oblastí nebude mít celou hranici modrou.

Poznámka. Řešení, ve kterých bude tvrzení dokázáno s výrazem $c \cdot \sqrt{n}$ namísto \sqrt{n} , budou ohodnocena body v závislosti na hodnotě konstanty c .