제 48회 국제수학올림피아드 (IMO)

2007년 7월 25일 (제 1 일)

Hanoi, VIETNAM KOREAN Ver.

---

1. 주어진 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 을 생각하자. 각각의 i $(1 \leq i \leq n)$에 대하여,

$$d_i := \max\{\, a_j : 1 \leq j \leq i \,\} - \min\{\, a_j : i \leq j \leq n \,\}$$

으로 정의하고, $d := \max\{\, d_i : 1 \leq i \leq n \,\}$ 이라 하자.

(a) 임의의 실수 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\max\{\, |x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n \,\} \geq \frac{d}{2}. \tag{$*$}$$

(b) $(*)$에서 등호를 만족시키는 실수 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 이 존재함을 보여라.

2. 다섯 개의 점 A, B, C, D, E 를 생각하자. 사각형 $ABCD$ 는 평행사변형이고, 볼록사각형 $BCED$ 는 원에 내접한다고 하자. 점 A 를 지나는 직선 ℓ 이, 선분 DC 의 내부와 점 F 에서 만나고, 직선 BC 와 점 G 에서 만난다고 하자. $EF = EG = EC$ 일 때, 직선 ℓ 이 각 DAB 의 이등분선임을 증명하여라.

3. 수학 경시대회에서, 어떤 참가자들은 서로 친구다. 친구란 항상 상호 대칭적 관계이다. 어떤 두 명을 택해도 서로 친구인 참가자들의 모임을 '조직'이라 부르자. (단, 두 명 미만의 참가자로 이루어진 모임도 조직으로 간주한다.) 같은 조직에 속하는 참가자들의 수를 그 조직의 '크기'라 부르자.

이 경시대회에서 가장 큰 조직의 크기가 짝수라고 한다. 전체 참가자들을 두 개의 고사실에 나누어 배치하되, 한 고사실의 가장 큰 조직의 크기가 다른 고사실의 가장 큰 조직의 크기와 같도록 배치할 수 있음을 증명하여라.

$*$ 제한시간: 4시간 30분 $*$

$*$ 문항당 7점 $*$

제 48 회 국제수학올림피아드 (IMO)

2007년 7월 26일 (제 2 일)

Hanoi, VIETNAM KOREAN Ver.

---

4. 삼각형 ABC 에서, 각 BCA 의 이등분선이, 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 또 다른 점을 R, 변 BC 의 수직이등분선과 만나는 점을 P, 변 AC 의 수직이등분선과 만나는 점을 Q 라 하자. 변 BC 의 중점을 K, 변 AC 의 중점을 L 이라 할 때, 삼각형 RPK 와 삼각형 RQL 의 넓이가 같음을 증명하여라.

5. 양의 정수 a, b 에 대하여, $(4a^2 - 1)^2$ 이 $4ab - 1$ 로 나누어 떨어지면, $a = b$ 임을 보여라.

6. 양의 정수 n 에 대하여, 3 차원 공간에 있는 $(n+1)^3 - 1$ 개의 점들의 집합

$$S = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0 \}$$

을 생각하자. 원점 $(0, 0, 0)$ 을 포함하지 않는 유한 개의 평면들의 합집합이 집합 S 를 포함하도록 하려고 한다. 이를 위해 필요한 평면들의 최소 개수를 구하여라.

$*$ 제한시간: 4시간 30분 $*$
$*$ 문항당 7점 $*$