

12 Korrik 2006

**Problem 1.** Le të jetë  $ABC$  një trekëndësh dhe  $I$  qendra e rrëthit brendashkruar tij. Një pikë  $P$  e cila ndodhet brenda trekëndëshit plotëson kushtin

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Tregoni që  $AP \geq AI$  dhe që barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur  $P = I$ .

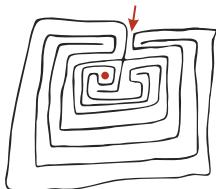
**Problem 2.** Le të jetë  $P$  një 2006-këndësh i rregullt. Një diagonale e  $P$  quhet *e mirë* në qoftë se skajet e saj ndajnë konturin e  $P$  në dy pjesë, secila prej të cilave përbëhet nga një numër tek brinjësh të  $P$ . Brinjët e  $P$  quhen gjithashtu *të mira*. E zëmë se  $P$  është ndarë në trekëndësha me anë të 2003 diagonaleve, çdo dy prej të cilave nuk kanë pikë të përbashkët brenda  $P$ . Gjeni numrin më të madh të trekëndëshave dybrinjënëshëm me dy brinjë *të mira* të cilët mund të shfaqen në një konfiguracion të tillë.

**Problem 3.** Gjeni numrin real më të vogël  $M$  të tillë që mosbarazimi

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

të plotësohet për të gjithë numrat realë  $a, b$  dhe  $c$ .

*Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta  
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë*



13 Korrik 2006

**Problem 4.** Gjeni të gjitha çiftet e numrave të plotë  $(x, y)$  të tillë që

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problem 5.** Le të jetë  $P(x)$  një polinom i fuqisë  $n > 1$  me koeficientë numra të plotë dhe le të jetë  $k$  një numër i plotë pozitiv. Marrim polinomin  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , ku  $P$  shfaqet  $k$  herë. Provoni që ka të shumtën  $n$  numra të plotë  $t$  të tillë që  $Q(t) = t$ .

**Problem 6.** Çdo brinje  $b$  të një shumëkëndëshi konveks  $P$  i shoqërojmë sipërfaqen më të madhe të një trekëndëshi i cili përbahet në  $P$  dhe ka  $b$  si brinjë. Tregoni që shuma e sipërfaqeve që i shoqërohen brinjëve të  $P$  është të paktët sa dyfishi i sipërfaqes së  $P$ .

*Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta  
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë*