sobota, 8. července 2023

Úloha 1. Určete všechna složená přirozená čísla $n > 1$, která splňují následující podmínku: pokud $d_1, d_2, \ldots, d_k$ jsou všechny kladné dělitele čísla n a $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, pak d_i je dělitelem $d_{i+1} + d_{i+2}$ pro každé $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Úloha 2. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| < |AC|$. Označme Ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC a S střed jejího oblouku CB obsahujícího bod A. Kolmice na přímku BC vedená bodem A protíná úsečku BS v bodě D a kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$. Rovnoběžka s BC vedená bodem D protíná přímku BE v bodě L. Označme ω kružnici opsanou trojúhelníku BDL. Nechť ω protíná Ω podruhé v bodě $P \neq B$.
Dokažte, že tečna ke kružnici ω v bodě P protíná přímku BS v bodě, který leží na ose vnitřního úhlu BAC.

Úloha 3. Pro každé přirozené číslo $k \geqslant 2$ určete všechny nekonečné posloupnosti kladných celých čísel $a_1, a_2, \ldots$, pro něž existuje polynom P tvaru $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, kde $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ jsou nezáporná celá čísla, takový, že

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

pro každé přirozené $n \geqslant 1$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

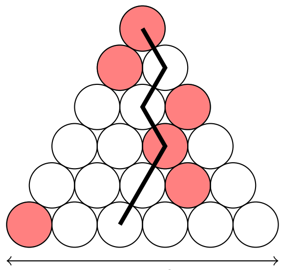
neděle, 9. července 2023

Úloha 4. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ jsou po dvou různá kladná reálná čísla taková, že

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

je celé číslo pro každé $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokažte, že $a_{2023} \geqslant 3034$.

Úloha 5. Buď n kladné celé číslo. *Japonský trojúhelník* sestává z $1 + 2 + \cdots + n$ kruhů uspořádaných do tvaru rovnostranného trojúhelníku tak, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ obsahuje i-tá řada právě i kruhů, z nichž právě jeden je obraven červeně. *Nindžova cesta* v japonském trojúhelníku je posloupnost n kruhů, která začíná kruhem v horní řadě, z každého kruhu pokračuje vždy do jednoho ze dvou kruhů ležících přímo pod ním a končí v dolní řadě. Zde je příklad japonského trojúhelníku pro $n = 6$ a v něm příklad nindžovy cesty obsahující dva červené kruhy:



V závislosti na n najděte největší k takové, že v každém japonském trojúhelníku existuje nindžova cesta obsahující aspoň k červených kruhů.

Úloha 6. Buď ABC rovnostranný trojúhelník. Nechť A_1, B_1, C_1 jsou vnitřní body trojúhelníku ABC takové, že $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ a

$$|\sphericalangle BA_1C| + |\sphericalangle CB_1A| + |\sphericalangle AC_1B| = 480^\circ.$$

Přímky BC_1 a CB_1 se protínají v bodě A_2, přímky CA_1 a AC_1 v bodě B_2 a přímky AB_1 a BA_1 v bodě C_2.
Dokažte, že pokud je trojúhelník $A_1B_1C_1$ různostranný, pak tři kružnice opsané trojúhelníkům AA_1A_2, BB_1B_2 a CC_1C_2 procházejí všechny dvěma společnými body.

(Poznámka: různostranný trojúhelník je takový, v němž žádné dvě strany nejsou shodné.)

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.