Language: **Arabic (Moroccan)**

Day: **1**

IMO 2014
Cape Town - South Africa

الثلاثاء 8 يوليوز 2014

المسألة 1. لتكن $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ متتاليّة لا متهية مكونة من أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. بيّن أنّه يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد $n \geq 1$ بحيث

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

المسألة 2. ليكن $n \geq 2$ عددا صحيحا طبيعيا. نعتبر طاولة شطرنج من قياس $n \times n$ مشتملة على n^2 من الخانات. يُقَال عن تشكيلة مكوّنة من n قطعة، من قطع شطرنج، على خانات هذه الطّاولة إنّها مسالمة إذا كان كلّ سطر وكلّ عمود، من أسطر و أعمدة الطاولة، يحوي قطعة واحدة فقط.

أوجد أكبر عدد صحيح طبيعي k بحيث، لكلّ تشكيلة مسالمة مكوّنة من n قطعة، يوجد مربّع من قياس $k \times k$ لا يحوي على قطعة في أيّ من خاناته الّتي عددها k^2.

المسألة 3. ليكن $ABCD$ رباعيا محدّبا بحيث $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90^\circ$. النقطة H هي موقع الارتفاع النّازل من الرّأس A للمثلّث ABD. تقع النّقطتان S و T على الضّلعين AB و AD، على التّوالي، بحيث توجد النّقطة H داخل المثلّث SCT و

$$\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90^\circ, \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90^\circ.$$

بيّن أنّ المستقيم BD مماسّ للدّائرة المحيطة بالمثلّث TSH.

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 9 يوليوز 2014

المسألة 4. تقع النّقطتان P و Q على الضّلع BC للمثلّث الحادّ الزّوايا ABC بحيث $\widehat{PAB}=\widehat{BCA}$ و $\widehat{CAQ}=\widehat{ABC}$. النّقطتان M و N تقعان على المستقيمين AP و AQ، على التّوالي، بحيث تكون النّقطة P منتصف القطعة AM، والنّقطة Q منتصف القطعة AN. بيّن أنّ نقطة تقاطع المستقيمين BM و CN تنتمي إلى الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC.

المسألة 5. لكلّ عدد صحيح طبيعي مخالف للصفر n، يُصدر بنك كاب تاون قطعا نقديّة قيمتها $\frac{1}{n}$. إذا كان لدينا عدد منته من هذه القطع النّقديّة (ليست بالضّرورة مختلفة القيم) بحيث يكون مجموع قيمها هو $99+\frac{1}{2}$ على الأكثر، بيّن إمكانيّة توزيع هذه القطع النّقديّة إلى 100 حفنة أو أقل، بحيث لا تزيد قيمة كلّ حفنة على 1.

المسألة 6. يقال عن مجموعة مستقيمات في المستوى إنّها في وضع عام إذا لم يتواز أيّ مستقيمين فيها ولم يتقاطع أيّ ثلاث مستقيمات فيها في نقطة واحدة. تُجزِّئ أيّ مجموعة من المستقيمات، في وضع عام، المستوى إلى مناطق تكون مساحة بعضها منتهية. يُشَارُ إلى هذه المناطق على أنّها مناطق منتهية. بيّن أنّه لكلّ عدد n، كبير بما فيه الكفاية، يمكننا التّلوين بالأزرق على الأقل $\sqrt{n}$ من المستقيمات وذلك في أيّ مجموعة مكوّنة من n مستقيما في وضع عام، بحيث لاتوجد منطقة منتهية جميع حدودها مستقيمات زرقاء.

ملاحظة: تمنح نقاط لمن يحصل على $c\sqrt{n}$ بدلا من $\sqrt{n}$ وذلك اعتمادا على قيمة الثّابت c.

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة