12 Temmuz 2006

Problem 1. İçteğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninin içinde,

$$m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})$$

olacak şekilde bir P noktası seçiliyor. $|AP| \geq |AI|$ olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $P = I$ olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

Problem 2. Bir P düzgün 2006-geni veriliyor. P nin bir köşegenine, uçları P nin çevresini, her birisi P nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor. P nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.

P, herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

Problem 3. Tüm a, b, c reel sayıları için

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük M reel sayısını bulunuz.

Süre 4,5 saattir.
Her problem 7 puandır.

13 Temmuz 2006

Problem 4. $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x,y) tam sayı ikililerini belirleyiniz.

Problem 5. Katsayıları tam sayı ve derecesi $n>1$ olan bir $P(x)$ polinomu ile bir $k>0$ tam sayısı veriliyor. $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, P nin k kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere, $Q(t)=t$ eşitliğini sağlayan t tam sayılarının sayısının en fazla n olacağını ispatlayınız.

Problem 6. Dışbükey bir P çokgeninin her b kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi b olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor. P nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının, P nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

Süre 4,5 saattir.
Her problem 7 puandır.