Dienstag, den 8. Juli 2014

Aufgabe 1. Es sei $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen.
Man beweise, dass es genau eine ganze Zahl $n \geq 1$ gibt, für die

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

gilt.

Aufgabe 2. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Gegeben sei ein $n \times n$ Schachbrett bestehend aus n^2 Einheitsquadraten. Eine Konfiguration von n Türmen auf diesem Brett heiße *friedlich*, falls jede Zeile und jede Spalte genau einen Turm enthält.
Man bestimme die größte positive ganze Zahl k, sodass man für jede friedliche Konfiguration von n Türmen ein $k \times k$ Quadrat ohne einen Turm auf einem seiner k^2 Einheitsquadrate finden kann.

Aufgabe 3. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90°$. Der Punkt H sei der Lotfußpunkt von A auf BD. Die Punkte S und T befinden sich so auf den Seiten AB bzw. AD, dass H im Inneren des Dreiecks SCT liegt und

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90°, \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90°$$

gilt.
Man beweise, dass die Gerade BD eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks TSH ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, den 9. Juli 2014

Aufgabe 4. Die Punkte P und Q liegen so auf der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dass $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ und $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$ gilt. Die Punkte M und N auf den Geraden AP bzw. AQ seien so gewählt, dass P der Mittelpunkt von AM ist und Q der Mittelpunkt von AN ist. Man beweise, dass sich die Geraden BM und CN auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

Aufgabe 5. Für jede positive ganze Zahl n gibt die Bank von Kapstadt Münzen mit dem Wert $\frac{1}{n}$ heraus. Eine gewisse endliche Anzahl von Münzen (mit nicht notwendigerweise verschiedenen Werten) habe einen Gesamtwert von höchstens $99 + \frac{1}{2}$.
Man beweise, dass man diese Münzen in höchstens 100 Gruppen aufteilen kann, jede mit einem Gesamtwert von höchstens 1.

Aufgabe 6. Eine Menge von Geraden in der Ebene ist in *allgemeiner Lage*, falls keine zwei Geraden parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Punkt haben. Eine Menge von Geraden in allgemeiner Lage teilt die Ebene in Bereiche auf. Diejenigen dieser Bereiche, die eine endliche Fläche besitzen, nennen wir *endliche Bereiche*.
Man beweise für alle hinreichend große n, dass es für jede Menge von n Geraden in allgemeiner Lage möglich ist, mindestens $\sqrt{n}$ der Geraden blau zu färben, sodass keiner ihrer endlichen Bereiche komplett blau umrandet ist.

Hinweis: Falls die Behauptung für $c\sqrt{n}$ statt $\sqrt{n}$ bewiesen wird, werden, abhängig von der Konstanten c, Punkte vergeben.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.