вторник, 15. юли 2025

Задача 1. Права в равнината се нарича *слънчева*, ако правата **не е** успоредна на оста x, на оста y и на правата $x + y = 0$.

Дадено е цяло число $n \geqslant 3$. Да се намерят всички неотрицателни цели числа k, за които съществуват n различни прави в равнината изпълняващи следните две условия:

- за всички положителни цели числа a и b, за които $a + b \leqslant n + 1$, точката (a, b) лежи на поне една от дадените прави;
- точно k от дадените прави са слънчеви.

Задача 2. Нека Ω и Γ са окръжности с центрове съответно M и N, като радиусът на Ω е по-малък от радиуса на Γ. Окръжностите Ω и Γ се пресичат в две различни точки A и B. Правата MN пресича Ω в C и Γ в D, така че точките C, M, N и D лежат на правата в този ред. Нека P е центъра на описаната окръжност на триъгълник ACD. Правата AP пресича Ω за втори път в точка $E \neq A$. Правата AP пресича Γ за втори път в $F \neq A$. Нека H е ортоцентър на триъгълник PMN.

Да се докаже, че правата през H, успоредна на AP се допира до описаната окръжност на триъгълник BEF.

(*Ортоцентър* на триъгълник е пресечната точка на височините на триъгълника.)

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на положителните цели числа. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ се нарича *степенна* функция, ако

$$f(a) \text{ дели } b^a - f(b)^{f(a)}$$

за всеки две положителни цели числа a и b.

Да се намери най-малката реална константа c, за която $f(n) \leqslant cn$ за всяка степенна функция f и всяко положително цяло число n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

сряда, 16. юли 2025

Задача 4. *Същински делител* на положително цяло число N е положителен делител на N, различен от N.

Безкрайна редица $a_1, a_2, \ldots$ се състои от положителни цели числа, всяко от които има поне три същински делители. За всяко $n \geqslant 1$, числото a_{n+1} е равно на сбора на трите най-големи делители на a_n.

Да се намерят всички възможни стойности на a_1.

Задача 5. Алис и Базза играят игра на име *коалова*, чийто правила зависят от положително реално число λ, известно и на двамата играчи. На ход n от играта (започвайки от $n = 1$) се извършва следното:

- Ако n е нечетно, Алис избира неотрицателно реално число x_n, за което

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ако n е четно, Базза избира неотрицателно реално число x_n, за което

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ако играч не може да избере число x_n с исканото свойство, играта завършва и другия играч печели. Ако играта продължава безкрай, никой от двамата не печели. Всички избрани числа са известни и на двамата играчи.

Да се намерят всички стойности на λ, за които Алис има печеливша стратегия и онези, за които Базза има печеливша стратегия.

Задача 6. Дадена е таблица 2025×2025 от единични квадратчета. Матилда поставя върху таблицата правоъгълни плочки, възможно с различни размери, така че всяка плочка покрива изцяло няколко единични квадратчета и всяко квадратче е покрито най-много един път.

Да се намери най-малкия брой плочки, които трябва да постави Матилда така, че във всеки ред и във всяка колона на таблицата има точно едно единично квадартче, непокрито от плочка.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.