Петък, 10 юли, 2015

Задача 1. Ще казваме, че едно крайно множество $\mathcal{S}$ от точки в равнината е *балансирано*, ако за всеки две различни точки A и B от $\mathcal{S}$ съществува точка C от $\mathcal{S}$, за която $AC = BC$. Ще казваме, че $\mathcal{S}$ е *свободно от центрове*, ако за никои три различни точки A, B и C от $\mathcal{S}$ не съществува точка P от $\mathcal{S}$, за която $PA = PB = PC$.

(a) Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 3$ съществува балансирано множество от n точки.

(b) Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществува балансирано свободно от центрове множество от n точки.

Задача 2. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от естествени числа, такива, че всяко от числата

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

е степен на 2.

(*Степен на* 2 *е цяло число от вида* 2^n, *където* n *е цяло неотрицателно число.*)

Задача 3. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с $AB > AC$. Нека Γ е описаната около $\triangle ABC$ окръжност, H е ортоцентърът му, а F е петата на височината от A. Нека M е средата на BC. Нека Q е точката върху Γ, за която $\sphericalangle HQA = 90^\circ$, и нека K е точката върху Γ, за която $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Точките A, B, C, K и Q са две по две различни и лежат върху Γ в този ред.

Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците KQH и FKM, се допират.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Събота, 11 юли, 2015

Задача 4. Триъгълник ABC е вписан в окръжност Ω с център O. Окръжност Γ с център A пресича отсечката BC в точки D и E, такива, че B, D, E и C са две по две различни и лежат на правата BC в този ред. Нека F и G са пресечните точки на Γ и Ω и са такива, че A, F, B, C и G лежат върху Ω в този ред. Нека K е втората пресечна точка на описаната около триъгълник BDF окръжност и отсечката AB. Нека L е втората пресечна точка на описаната около триъгълник CGE окръжност и отсечката CA.

Нека правите FK и GL са различни и се пресичат в точка X. Да се докаже, че X лежи на правата AO.

Задача 5. Нека $\mathbb{R}$ е множеството от реалните числа. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяващи

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

за всички реални числа x и y.

Задача 6. Редицата от цели числа $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява следните условия:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ за всички $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за всички $1 \leqslant k < \ell$.

Да се докаже, че съществуват естествени числа b и N, такива, че

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

за всички цели числа m и n, удовлетворяващи $n > m \geqslant N$.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки