화요일, 2019년 7월 16일

문제 1. $\mathbb{Z}$는 모든 옹근수들로 이루어진 모임이다. 임의의 옹근수 a, b에 대하여

$$f(2a) + 2f(b) = f\big(f(a+b)\big)$$

를 만족시키는 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$를 모두 구하시오.

문제 2. 3각형 ABC에서 점 A_1은 변 BC에 놓이고 점 B_1은 변 AC에 놓인다. P와 Q는 각각 선분 AA_1과 선분 BB_1에 놓이는 점들로서 PQ와 AB가 평행되게 놓여있다. 직선 PB_1에 점 P_1를 찍되 B_1이 선분 PP_1(끝점은 제외)에 놓이고 $\angle PP_1C = \angle BAC$되게 하였다. 마찬가지로 점 Q_1을 직선 QA_1에 찍되 A_1이 선분 QQ_1(끝점은 제외)에 놓이고 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$되게 하였다. 이때 네 점 P, Q, P_1, Q_1이 한원둘레에 놓인다는것을 증명하시오.

문제 3. 어떤 단체에 2019명의 사람들이 있는데 일부 사람들은 친구지간이다. A가 B의 친구이면 B도 A의 친구이다. 다음과 같이 친구관계를 바꾸는것을 한번의 조작으로 본다:

> A가 B, C를 둘다 친구로 가지고 B와 C는 서로 친구지간이 아닌 세명의 사람 A, B, C를 선택하고 이들사이의 친구관계를 B와 C는 서로 친구지간이고 A는 B와도 친구가 아니고 C와도 친구가 아닌것으로 바꾼다. 그밖의 친구관계들은 달라지지 않는다.

처음에 1010명의 사람들은 매 사람이 각각 1009명의 친구를 가지고 나머지 1009명의 사람들은 매 사람이 각각 1010명의 친구를 가진다. 이때 적당한 조작렬이 있어서 이 조작들을 진행한 후 매 사람이 다 한명이하의 친구를 가지게 된다는것을 증명하시오.

Language: Korean (North Korea)

시간: 4 시간 30 분

문제당 7 점

수요일, 2019년 7월 17일

문제 4. 다음의 식을 만족시키는 자연수쌍 $(k,\ n)$을 모두 구하시오.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

문제 5. 은행에서 한면에는 H가 새겨져있고 다른 한면에는 T가 새겨져있는 쇠돈을 발행하였다. 이러한 쇠돈 n개를 왼쪽으로부터 오른쪽으로 가면서 한줄로 놓고 다음의 조작을 반복하여 진행한다: 만일 H가 우로 향한 쇠돈이 꼭 $k > 0$개 있으면 왼쪽으로부터 k번째 쇠돈을 뒤집고; 그렇지 않으면, 즉 모든 쇠돈들이 다 T가 우로 향하도록 놓여있으면 조작을 끝낸다. 실례로 $n = 3$일 때 초기상태 THT에 대하여 조작은 $THT \to HHT \to HTT \to TTT$로 세번 진행된 다음 끝나게 된다.

(a) 매 초기상태에 대하여 유한번만에 조작이 끝난다는것을 증명하시오.

(b) 매 초기상태 C에 대하여 조작이 끝날 때까지 진행한 조작회수를 $L(C)$로 표시하자. 실례로 $L(THT) = 3$이고 $L(TTT) = 0$이다. C가 가능한 2^n개의 초기상태들을 다 취할 때 $L(C)$의 평균값을 구하시오.

문제 6. 뾰족3각형 ABC에서 $AB \neq AC$ 이고 그 내심은 I이다. 3각형 ABC의 내접원 ω는 변 $BC,\ CA,\ AB$와 각각 점 $D,\ E,\ F$에서 접한다. D를 지나며 EF에 수직인 직선이 ω와 다시 사귀는 점을 R라고 한다. 직선 AR가 ω와 다시 사귀는 점을 P라고 한다. 3각형 PCE와 PBF의 외접원들은 점 Q에서 다시 사귄다. 이때 직선 DI와 PQ는 A를 지나면서 AI에 수직인 직선에서 사귄다는것을 증명하시오.

시간: 4시간 30분

문제당 7점