tirsdag, 15. juli 2025

Opgave 1. En linje i planen kaldes *solrig* hvis den **ikke** er parallel med hverken x-aksen, y-aksen eller linjen $x + y = 0$.

Lad et helt tal $n \geqslant 3$ være givet. Bestem alle ikke-negative hele tal k så der findes n parvist forskellige linjer i planen, der opfylder begge af de følgende betingelser:

- For alle positive hele tal a og b hvor $a+b \leqslant n+1$ ligger punktet (a, b) på mindst én af linjerne.
- Nøjagtig k af de n linjer er solrige.

Opgave 2. Lad Ω og Γ være cirkler med centre henholdsvis M og N, så radius i Ω er mindre end radius i Γ. Antag at cirklerne Ω og Γ skærer hinanden i to forskellige punkter A og B. Linjen MN skærer Ω i C og Γ i D, så punkterne C, M, N og D ligger på linjen i den rækkefølge. Lad P være centrum for den omskrevne cirkel til trekant ACD. Linjen AP skærer Ω igen i $E \neq A$. Linjen AP skærer Γ igen i $F \neq A$. Lad H være højdernes skæringspunkt i trekant PMN.

Vis at linjen gennem H parallel med AP tangerer den omskrevne cirkel til trekant BEF.

Opgave 3. Lad $\mathbb{N}$ betegne mængden af positive hele tal. En funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kaldes *bonza* hvis

$$f(a) \quad \text{deler} \quad b^a - f(b)^{f(a)}$$

for alle positive hele tal a og b.

Bestem det mindste reelle tal c så $f(n) \leqslant cn$ for alle bonza funktioner f og alle positive hele tal n.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

onsdag, 16. juli 2025

Opgave 4. En *streng divisor* i et positiv helt tal N er en positiv divisor i N forskellig fra N.

Den uendelige følge $a_1, a_2, \ldots$ består af positive hele tal, hvor hvert tal har mindst tre strenge divisorer. For hvert $n \geqslant 1$ er det hele tal a_{n+1} summen af de tre største strenge divisorer i a_n.

Bestem alle mulige værdier af a_1.

Opgave 5. Alma og Bazza spiller *inekoalaty-spillet*, som er et to-personers spil hvor reglerne afhænger af et positivt reelt tal λ som er kendt af begge spillere. På tur n af spillet (som begynder med $n = 1$) sker følgende:

- Hvis n er ulige vælger Alma et ikke-negativt reelt tal x_n så

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Hvis n er lige vælger Bazza et ikke-negativt reelt tal x_n så

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Hvis en spiller ikke kan vælge et gyldigt tal x_n slutter spillet, og den anden spiller vinder. Hvis spillet fortsætter for evigt, vinder ingen af spillerne. Alle valgte tal er kendt af begge spillere.

Bestem alle værdier af λ for hvilke Alma har en vindende strategi og alle værdier for hvilke Bazza har en vindende strategi.

Opgave 6. Betragt et 2025×2025-bræt af enhedskvadrater. På brættet vil Matilda gerne placere rektangulære brikker, muligvis af forskellige størrelser, så kanterne af hver brik ligger på kanterne af nogle af enhedskvadraterne, og hvert enhedskvadrat er dækket af højst én brik.

Bestem det mindste antal brikker som Matilda bliver nødt til at placere, så hver række og hver søjle på brættet indeholder præcis ét enhedskvadrat, der ikke er dækket af nogen brikker.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.