



Torek, 10. julij, 2012

Naloga 1. Naj bo J središče pričrtane krožnice trikotnika ABC nasproti oglišča A . Pričrtana krožnica se dotika stranice BC v točki M , premice AB v točki K in premice AC v točki L . Premici LM in BJ se sekata v točki F , premici KM in CJ se sekata v točki G . Naj bo točka S presečišče premic AF in BC , točka T pa presečišče premic AG in BC .

Dokažite, da je točka M razpolovišče daljice ST .

(Pričrtana krožnica trikotnika ABC nasproti oglišča A je krožnica, ki se dotika daljice BC , poltraka AB izven daljice AB in poltraka AC izven daljice AC .)

Naloga 2. Naj bo $n \geq 3$ naravno število in naj bodo a_2, a_3, \dots, a_n pozitivna realna števila, za katera velja $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokažite, da je

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Naloga 3. *Ugibanje* je igra, ki jo igrata dva igralca A in B . Pravila igre so odvisna od dveh naravnih števil k in n , ki ju poznata oba igralca.

Na začetku igre igralec A izbere naravni števili x in N , tako da je $1 \leq x \leq N$. Igralec A ne razkrije števila x , po resnici pa pove število N igralcu B . Igralec B nato poskusi dobiti informacije o x , tako da zastavlja igralcu A vprašanja na naslednji način: pri vsakem vprašanju igralec B določi poljubno množico S naravnih števil (lahko isto, kot v kakšnem od predhodnih vprašanj) in nato vpraša igralca A , ali je x element množice S . Igralec B lahko zastavi taka vprašanja kolikorkrat želi. Igralec A mora nemudoma odgovoriti na vsako izmed vprašanj igralca B bodisi z *da* bodisi z *ne*, pri čemer se lahko zlaže kolikorkrat želi, edina omejitev za igralca A je, da mora biti izmed $k + 1$ zaporednih odgovorov vsaj en odgovor resničen.

Potem, ko je igralec B zastavil kolikor vprašanj je hotel, mora določiti množico X , sestavljeno iz največ n naravnih števil. Če je x element množice X , potem igralec B zmaga, v nasprotnem primeru igralec B izgubi. Dokažite, da velja:

1. Če je $n \geq 2^k$, potem za igralca B obstaja zmagovalna strategija.
2. Za vsa dovolj velika števila k obstaja naravno število $n \geq 1.99^k$, tako da za igralca B ne obstaja zmagovalna strategija.



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Slovenian

Day: 2

Sreda, 11. julij, 2012

Naloga 4. Poiščite vse take funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, za katere za vsa cela števila a, b in c z lastnostjo $a + b + c = 0$ velja naslednja enakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(\mathbb{Z} je oznaka za množico celih števil.)

Naloga 5. Naj v trikotniku ABC velja $\angle BCA = 90^\circ$ in naj bo D nožišče višine iz oglišča C . Naj bo X točka v notranjosti daljice CD . Naj bo K taka točka na daljici AX , da velja $|BK| = |BC|$. Naj bo L taka točka na daljici BX , da velja $|AL| = |AC|$. Naj bo M presečišče premic AL in BK .

Dokažite, da velja $|MK| = |ML|$.

Naloga 6. Poiščite vsa naravna števila n , za katera obstajajo taka nenegativna cela števila a_1, a_2, \dots, a_n , da velja

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Slovenian

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.