tirsdag, 16. juli 2024

Opgave 1. Bestem alle reelle tal α sådan at der for ethvert positivt helt tal n gælder at det hele tal

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

er et multiplum af n. (Bemærk at $\lfloor z \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end eller lig med z. For eksempel $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ og $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Opgave 2. Bestem alle par (a, b) af positive hele tal for hvilke der findes positive hele tal g og N så

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

for alle hele tal $n \geqslant N$. (Bemærk at $\gcd(x, y)$ betegner den største fælles divisor af de hele tal x og y.)

Opgave 3. Lad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en uendelig følge af positive hele tal, og lad N være et positivt helt tal. Antag at der for alle $n > N$ gælder at a_n er lig med antallet af gange tallet a_{n-1} optræder på listen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Vis at mindst en af følgerne $a_1, a_3, a_5, \ldots$ og $a_2, a_4, a_6, \ldots$ er periodisk fra et vist trin.

(En uendelig følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ er *periodisk fra et vist trin* hvis der findes positive hele tal p og M så $b_{m+p} = b_m$ for alle $m \geqslant M$.)

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

onsdag, 17. juli 2024

Opgave 4. Lad ABC være en trekant, hvor $|AB| < |AC| < |BC|$. Lad ω være den indskrevne cirkel for trekant ABC, og lad I være centrum for ω. Lad X være punktet på linjen BC, forskelligt fra C, så linjen gennem X parallel med AC er tangent til ω. Lad tilsvarende Y være punktet på linjen BC, forskelligt fra B, så linjen gennem Y parallel med AB er tangent til ω. Lad AI skære den omskrevne cirkel til trekant ABC igen i $P \neq A$. Lad K og L være midtpunkterne af henholdsvis AC og AB.

Vis at $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Opgave 5. Sneglen Turbo spiller et spil på et bræt med 2024 rækker og 2023 søjler. Der er gemt monstre på 2022 af felterne på brættet. Til at begynde med ved Turbo ikke hvor nogen af monstrene er, men han ved at der er præcis et monster på hver række pånær den første række og den sidste række, og at der i hver søjle er højst et monster.

Turbo prøver i flere forsøg at komme fra første række til sidste række. I hvert forsøg vælger han hvilket felt i første række han starter på, og derefter flytter han gentagne gange til et nabofelt som deler en side med det felt han kommer fra. (Han må gerne flytte tilbage til et felt han allerede har besøgt.) Hvis han kommer til et felt med et monster, slutter hans forsøg, og han bliver transporteret tilbage til første række for at gøre et nyt forsøg. Monstrene flytter sig ikke, og Turbo husker for hvert eneste felt han har besøgt, om der er et monster på feltet eller ej. Hvis han når til et vilkårligt felt i sidste række, er hans forsøg slut, og spillet ender.

Bestem den mindste værdi af n for hvilken Turbo har en strategi der sikrer at han kan nå sidste række senest i n'te forsøg ligegyldigt hvordan monstrene er placeret.

Opgave 6. Lad $\mathbb{Q}$ være mængden af rationale tal. En funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ kaldes *skøn* hvis følgende betingelse gælder: For alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gælder mindst en af lighederne

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{og} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Vis at der findes et helt tal c så der for enhver skøn funktion f højst er c forskellige rationale tal på formen $f(r) + f(-r)$ for et rationalt tal r, og bestem den mindste værdi af c.