



Dushanba, 2011 yil 18 iyul

1-masala. To'rtta turli natural sonlardan tashkil topgan $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ to'plam uchun s_A orqali $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ yig'indini belgilaymiz. n_A orqali quyidagi shartni qanoatlantiradigan (i, j) juftliklarning (bu yerda $1 \leq i < j \leq 4$) sonini belgilaymiz: s_A son $a_i + a_j$ songa qoldiqsiz bo'linadi. To'rtta turli natural sonlardan tashkil topgan barcha A to'plamlar topilsin-ki, bu to'plamlar uchun n_A eng katta qiymatni qabul qilsin.

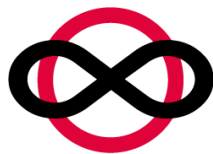
2-masala. Tekislikda kamida ikkita nuqtadan tashkil topgan S chekli to'plam berilgan. Ma'lumki, S to'plamdan olingan ixtiyoriy uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Quyidagi jarayonni *charxpalak* deb nomlaymiz. Eng boshida aynan bitta $P \in S$ nuqtani o'z ichiga olgan l to'g'ri chiziqli olinadi. So'ng l to'g'ri chiziqli P markaz atrofida soat mili harakati bo'ylab S to'plamga tegishli bo'lgan boshqa Q nuqta bilan uchrashguncha buriladi. Keyin Q nuqta yangi markaz sifatida olinadi va l to'g'ri chiziqli Q markaz atrofida soat mili harakati bo'ylab S to'plamdagi qandaydir boshqa nuqta bilan uchrashguncha buriladi. Bunday jarayon cheksiz davom ettiriladi.

S to'plamda shunday P nuqta va undan o'tadigan shunday l to'g'ri chiziqli mavjudligini isbotlang-ki, bunda l to'g'ri chiziqli boshlangan charxpalakda S to'plamning har bir nuqtasi markaz sifatida cheksiz ko'p marta ishtirok etadi.

3-masala. Haqiqiy sonlar \mathbb{R} to'plamida aniqlangan va haqiqiy qiymatlarni qabul qiladigan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya barcha haqiqiy x va y lar uchun

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Barcha $x \leq 0$ uchun $f(x) = 0$ bo'lishini isbotlang.



Seshanba, 2011 yil 19 iyul

4-masala. Butun $n > 0$ son berilgan. Bizda ikki pallali tarozi va og'irliklari $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ bo'lgan n ta tosh bor. Biz barcha n ta toshlarni bittadan olib ketma-ket tarozi pallalariga joylashtiramiz, yani n ta qadamning har birida biz taroziga quyilmagan toshlardan bittasini olib, uni tarozining chap yoki o'ng pallasiga qo'yamiz. Toshlar shunday qo'yilishi kerakki, bunda doimo tarozining o'ng pallasida chap pallasidan og'ir bo'lmasligi shart. Bunday qadamlar ketma-ketligini bajarishga qaratilgan usullar sonini toping.

5-masala. Butun sonlar to'plamida aniqlangan va musbat butun qiymatlarni qabul qiladigan f funksiya berilgan bo'lsin. Ma'lumki, barcha butun m va n lar uchun $f(m) - f(n)$ ayirma $f(m - n)$ soniga qoldiqsiz bo'linadi.

$f(m) \leq f(n)$ shartni qanoatlantiradigan barcha butun m va n lar uchun $f(n)$ soni $f(m)$ soniga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

6-masala. ABC - o'tkir burchakli uchburchak, Γ - unga tashqi chizilgan aylana berilgan bo'lsin. l to'g'ri chiziq Γ aylanaga urinsin. l_a, l_b , va l_c to'g'ri chiziqlar l to'g'ri chiziqqa mos ravishda BC, CA va AB to'g'ri chiziqlarga nisbatan simmetrik to'g'ri chiziqlar bo'lsin. l_a, l_b , va l_c to'g'ri chiziqlar yordamida hosil bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana Γ aylanaga urinishini isbotlang.

Language: Uzbek

*Ishga ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut.
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi.*