Úterý, 18. července 2017

Úloha 1. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{pokud } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \text{pro každé } n \geqslant 0.$$

Určete všechny hodnoty a_0, pro které existuje číslo A takové, že rovnost $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n.

Úloha 2. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Úloha 3. Lovec a neviditelný zajíc hrají hru v euklidovské rovině. Zajícova počáteční poloha A_0 a lovcova počáteční poloha B_0 jsou stejné. Po $n-1$ kolech hry se zajíc nachází v bodě A_{n-1} a lovec v bodě B_{n-1}. V n-tém kole postupně proběhnou tři věci:

(i) Zajíc se neviděn přesune do bodu A_n takového, že vzdálenost mezi A_{n-1} a A_n je přesně 1.

(ii) Sledovací zařízení nahlásí lovci bod P_n. Jediná záruka poskytnutá sledovacím zařízením je, že vzdálenost mezi P_n a A_n je nejvýše 1.

(iii) Lovec se viditelně přesune do bodu B_n takového, že vzdálenost mezi B_{n-1} a B_n je přesně 1.

Může lovec vždy (tj. bez ohledu na to, jak se hýbe zajíc, a na to, jaké body hlásí sledovací zařízení) volit své pohyby tak, aby měl jistotu, že po 10^9 kolech bude vzdálenost mezi ním a zajícem nejvýše 100?

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů

Středa, 19. července 2017

Úloha 4. Je dána kružnice Ω a na ní různé body R, S takové, že RS není průměr Ω. Označme ℓ tečnu kružnice Ω vedenou bodem R. Nechť T je takový bod, že S je střed úsečky RT. Bod J je zvolen na kratším oblouku RS kružnice Ω tak, že kružnice Γ opsaná trojúhelníku JST protíná přímku ℓ ve dvou různých bodech. Označme A ten průsečík kružnice Γ a přímky ℓ, který leží blíže bodu R. Přímka AJ protíná kružnici Ω podruhé v bodě K. Dokažte, že přímka KT je tečna kružnice Γ.

Úloha 5. Je dáno celé číslo $N \geqslant 2$. V řadě stojí $N(N+1)$ navzájem různě vysokých fotbalistů. Trenér Vrba chce vyřadit některých $N(N-1)$ z nich tak, aby nová řada sestávající ze zbylých $2N$ fotbalistů splňovala následujících N podmínek:

(1) nikdo nestojí mezi dvěma nejvyššími fotbalisty,

(2) nikdo nestojí mezi třetím a čtvrtým nejvyšším fotbalistou,

$\vdots$

(N) nikdo nestojí mezi dvěma nejnižšími fotbalisty.

Dokažte, že je to vždy možné.

Úloha 6. Uspořádaná dvojice (x, y) celých čísel je *primitivní mřížový bod*, jestliže největší společný dělitel čísel x a y je 1. Dokažte, že pro libovolnou konečnou množinu S primitivních mřížových bodů existuje kladné celé číslo n a celá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že pro každou dvojici (x, y) z S platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$