

יום שני, 11 ביולי, 2016

שאלה 1. במשולש BCF , הזווית $\angle B$ ישרה. נסמן ב- A את הנקודה על הישר CF עבורה $FA = FB$ ו- F נמצאת בין A ו- C . הנקודה D נבחרת כך שיתקיים $DA = DC$ ו- AC יחצה את הזווית $\angle DAB$. הנקודה E נבחרת כך שיתקיים $EA = ED$ ו- AD יחצה את הזווית $\angle EAC$. נסמן ב- M את אמצע הקטע CF . נסמן ב- X את הנקודה עבורה $AMXE$ היא מקבילית (באשר $AM \parallel EX$ ו- $AE \parallel MX$). הוכיחו כי הישרים BD , FX ו- ME נפגשים בנקודה אחת.

שאלה 2. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם ניתן למלא כל תא של טבלה $n \times n$ באחת מהאותיות I, M, O כך ש:

- בכל שורה ובכל עמודה, בדיוק בשליש מהתאים מופיע I , בשליש מופיע M ובשליש O ;
- בכל אלכסון שמספר התאים שלו מתחלק ב-3, בשליש מהתאים מופיע I , בשליש מופיע M ובשליש O .

הערה: השורות והעמודות של טבלה $n \times n$ ממוספרות מ-1 עד n בסדר טבעי. בהתאם למספור, לכל תא בטבלה מתאים זוג שלמים (i, j) עם $1 \leq i, j \leq n$. עבור $n > 1$, בטבלה יש $4n - 2$ אלכסונים משני סוגים. אלכסון מהסוג הראשון מורכב מכל התאים (i, j) עבורם $i + j$ שווה לקבוע, ואלכסון מהסוג השני מורכב מכל התאים (i, j) עבורם $i - j$ שווה לקבוע.

שאלה 3. יהא $P = A_1 A_2 \dots A_k$ מצולע מישורי קמור. הקדקודים A_1, A_2, \dots, A_k הם בעלי קואורדינטות שלמות ונמצאים על מעגל אחד. נסמן ב- S את שטח המצולע P . נתון שלם חיובי אי-זוגי n עבורו ריבועי אורכי הצלעות של P הם שלמים המתחלקים ב- n . הוכיחו כי $2S$ הוא שלם המתחלק ב- n .

יום שלישי, 12 ביולי, 2016

שאלה 4. קבוצת שלמים חיוביים נקראת **ריחנית** אם היא בעלת שני איברים לפחות, ולכל איבר יש מחלק ראשוני משותף עם לפחות אחד האיברים האחרים. יהא $P(n) = n^2 + n + 1$. מהו הערך המינימלי האפשרי של השלם החיובי b עבורו קיים שלם אי-שלילי a כך שהקבוצה

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

היא ריחנית?

שאלה 5. על הלוח כתובה המשוואה

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

בה 2016 גורמים לינאריים בכל אגף. מהו הערך המינימלי האפשרי של k עבורו ניתן למחוק k מתוך 4032 הגורמים הלינאריים הללו, כך שבכל אגף יישאר לפחות גורם אחד, ולמשוואה המתקבלת לא יהיו פתרונות ממשיים?

שאלה 6. נתונים $n \geq 2$ קטעים במישור, שכל שניים מהם נחתכים בנקודה אשר פנימית לשניהם, ואף שלושה לא נפגשים בנקודה אחת. לב צריך לבחור נקודת קצה בכל אחד מהקטעים, ולמקם עליה צפרדע המופנית כלפי נקודת הקצה השנייה. לאחר מכן הוא ימחא כפיים $n-1$ פעמים. עם כל מחיאה, כל צפרדע תקפוץ קדימה לנקודת החיתוך הבאה על קטעה. צפרדע לא יכולה לשנות את כיוון קפיצתה. משאלת לב היא למקם את הצפרדעים כך שאף שתיים לעולם לא תמצאנה באותה נקודת חיתוך באותו הזמן.

(א) עבור n אי-זוגי, הוכיחו כי לב תמיד יכול להגשים את משאלתו.

(ב) עבור n זוגי, הוכיחו כי לב לעולם לא יכול להגשים את משאלתו.