poniedziałek, 11 lipca 2022 r.

Zadanie 1. Bank miasta Oslo emituje dwa rodzaje monet: aluminiowe (oznaczane symbolem A) oraz brązowe (oznaczane symbolem B). Dominika ma n aluminiowych oraz n brązowych monet, początkowo ułożonych w rzędzie w dowolnej kolejności. *Łańcuchem* nazywamy każdy ciąg kolejnych monet tego samego rodzaju. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej $k \leqslant 2n$, Dominika wielokrotnie wykonuje następującą operację: znajduje najdłuższy łańcuch zawierający k-tą monetę od lewej i przemieszcza wszystkie monety tego łańcucha na lewy koniec rzędu. Przykładowo $n = 4$, $k = 4$ oraz początkowe ułożenie monet $AABBBABA$ prowadzą do następującego ciągu operacji:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, k) spełniające $1 \leqslant k \leqslant 2n$, że dla każdego początkowego ułożenia monet w pewnym momencie n monet położonych najbardziej na lewo będzie tego samego typu.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}^+$ istnieje dokładnie jedna liczba $y \in \mathbb{R}^+$ spełniająca nierówność

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Zadanie 3. Dane są dodatnia liczba całkowita k oraz skończony zbiór nieparzystych liczb pierwszych S. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jeden sposób (z dokładnością do obrotu oraz symetrii) rozmieszczenia elementów zbioru S na okręgu o tej własności, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich elementów jest postaci $x^2 + x + k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej x.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

wtorek, 12 lipca 2022 r.

Zadanie 4. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = DE$. Przypuśćmy, że wewnątrz $ABCDE$ istnieje taki punkt T, że $TB = TD$, $TC = TE$ oraz $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$. Załóżmy, że prosta AB przecina proste CD oraz CT odpowiednio w punktach P oraz Q w taki sposób, że punkty P, B, A, Q leżą w tej kolejności na prostej AB. Załóżmy, że prosta AE przecina proste CD oraz DT odpowiednio w punktach R oraz S w taki sposób, że punkty R, E, A, S leżą w tej kolejności na prostej AE. Wykazać, że punkty P, S, Q, R leżą na jednym okręgu.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie takie trójki (a, b, p) dodatnich liczb całkowitych, że p jest liczbą pierwszą oraz

$$a^p = b! + p.$$

Zadanie 6. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. *Kwadratem nordyckim* nazywamy tablicę $n \times n$ wypełnioną wszystkimi liczbami całkowitymi od 1 do n^2 w taki sposób, że w każde pole wpisana jest dokładnie jedna liczba. Dwa różne pola *sąsiadują*, jeśli mają wspólny bok. Każde pole sąsiadujące wyłącznie z polami zawierającymi większe liczby nazywamy *doliną*. Ciąg jednego lub więcej pól tablicy nazywamy *ścieżką pod górkę*, jeśli spełnia następujące warunki:

(i) pierwsze pole w tym ciągu jest doliną;

(ii) każde kolejne pole w tym ciągu sąsiaduje z poprzednim;

(iii) liczby wpisane w pola tego ciągu są uporządkowane rosnąco.

Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą możliwą łączną liczbę ścieżek pod górkę w kwadracie nordyckim.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.