



Сряда, 7 юли, 2010

Задача 1. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$. ($[z]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо z .)

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$, а Γ е неговата описана окръжност. Правата AI пресича Γ в точка D . Точка E от дъгата \widehat{BDC} и точка F от страната BC са такива, че

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Нека G е средата на отсечката IF . Да се докаже, че правите DG и EI се пресичат върху Γ .

Задача 3. Да се намерят всички функции $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такива, че

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

е точен квадрат за произволни $m, n \in \mathbb{N}$. (\mathbb{N} е множеството на естествените числа.)



Четвъртък, 8 юли, 2010

Задача 4. Нека P е точка от вътрешността на $\triangle ABC$. Правите AP , BP и CP пресичат описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ съответно в точки K , L и M . Допирателната към Γ в точката C пресича правата AB в точка S . Да се докаже, че ако $SC = SP$, то $MK = ML$.

Задача 5. В шест кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ първоначално има по една монета. Разрешени са следните две операции:

Операция 1: Избираме непразна кутия B_j , $1 \leq j \leq 5$, премахваме една монета от B_j и добавяме две монети в B_{j+1} .

Операция 2: Избираме непразна кутия B_k , $1 \leq k \leq 4$, премахваме една монета от B_k и разменяме съдържанието (възможно празно) на кутията B_{k+1} и съдържанието (възможно празно) на кутията B_{k+2} .

Съществува ли крайна последователност от операции, след които кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 са празни, а кутията B_6 съдържа точно $2010^{2010^{2010}}$ монети? ($a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Задача 6. Нека a_1, a_2, a_3, \dots е редица от положителни реални числа. Известно е, че съществува естествено число s такова, че

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

за всяко $n > s$. Да се докаже, че съществуват естествени числа ℓ и N , за които $\ell \leq s$ и $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за произволно $n \geq N$.