Teisipäev, 16. juuli 2024

Ülesanne 1. Leia kõik sellised reaalarvud α, et iga positiivse täisarvu n korral on täisarv

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

arvu n kordne. (Kirjutis $\lfloor z \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu z. Näiteks $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ning $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Ülesanne 2. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille jaoks leiduvad sellised positiivsed täisarvud g ja N, et kõigi täisarvude $n \geqslant N$ korral kehtib võrdus

$$\text{SÜT}(a^n + b,\, b^n + a) = g.$$

(Kirjutis $\text{SÜT}(x, y)$ tähistab täisarvude x ja y suurimat ühistegurit.)

Ülesanne 3. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivsete täisarvude lõpmatu jada ja olgu N positiivne täisarv. Eeldame, et iga $n > N$ korral on arv a_n võrdne arvu a_{n-1} esinemiste arvuga järjendis $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Tõesta, et vähemalt üks jadadest $a_1, a_3, a_5, \ldots$ ja $a_2, a_4, a_6, \ldots$ on lõpuks perioodiline.

(Ütleme, et lõpmatu jada $b_1, b_2, b_3, \ldots$ on *lõpuks perioodiline*, kui leiduvad sellised positiivsed täisarvud p ja M, et $b_{m+p} = b_m$ kõigi täisarvude $m \geqslant M$ korral.)

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.

Kolmapäev, 17. juuli 2024

Ülesanne 4. Olgu ABC kolmnurk, milles $AB < AC < BC$. Tähistagu I ja ω vastavalt kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkti ja siseringjoont. Punkt $X \neq C$ on selline punkt sirgel BC, et sirge läbi punkti X, mis on paralleelne sirgega AC, puutub ringjoont ω. Analoogiliselt on punkt $Y \neq B$ selline punkt sirgel BC, et sirge läbi punkti Y, mis on paralleelne sirgega AB, puutub ringjoont ω. Sirge AI lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont teist korda punktis $P \neq A$. Olgu K ja L vastavalt külgede AC ja AB keskpunktid.

Tõesta, et $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Ülesanne 5. Tigu Turbo mängib mängu ruudustikul, millel on 2024 rida ja 2023 veergu. Ruudustiku 2022 ruudus on peidetud koletised. Esialgu ei tea Turbo, kus ükski koletis asub, kuid ta teab, et igas reas, välja arvatud esimeses ja viimases reas, on täpselt üks koletis, ja et igas veerus on maksimaalselt üks koletis.

Turbo teeb mitu katset minna esimesest reast viimasesse ritta. Igal katsel alustab ta mingist esimese rea ruudust, seejärel liigub ta järjest ühise küljega naaberruutude vahel. (Tal on lubatud naasta juba külastatud ruutudesse.) Kui Turbo satub ruutu, kus asub koletis, tema katse lõpeb ja ta viiakse tagasi esimesse ritta, et alustada uue katsega. Koletised ei liigu ja Turbo mäletab, kas igas külastatud ruudus asub koletis või mitte. Kui ta jõuab mistahes viimase rea ruutu, tema katse lõpeb ja mäng saab läbi.

Määrake vähim arv n, mille puhul leidub Turbol strateegia, mis sõltumata koletiste asukohast tagab viimasesse ritta jõudmise hiljemalt n. katsel

Ülesanne 6. Olgu $\mathbb{Q}$ kõigi ratsionaalarvude hulk. Nimetame funktsiooni $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *imeliseks*, kui kehtib omadus: iga $x, y \in \mathbb{Q}$ korral

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{või} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Tõesta, et leidub täisarv c, nii et iga imelise funktsiooni f korral leidub ülimalt c erinevat ratsionaalarvu kujul $f(r) + f(-r)$, kus $r \in \mathbb{Q}$, ning leia vähim võimalik c väärtus.

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.