Понеділок, 9 липня 2018 року

Задача 1. Нехай Γ — описане коло гострокутного трикутника ABC. Точки D і E лежать на відрізках AB і AC відповідно, при цьому $AD = AE$. Серединні перпендикуляри до відрізків BD і CE перетинають менші дуги AB і AC кола Γ у точках F і G відповідно. Доведіть, що прямі DE і FG паралельні або співпадають.

Задача 2. Знайдіть усі цілі числа $n \geq 3$, для яких існують дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ такі, що $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ і

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 3. *Антипаскалів трикутник* — це таблиця, що має вигляд рівностороннього трикутника, у якій кожне число, за виключенням чисел нижнього рядка, дорівнює модулю різниці двох чисел, що стоять безпосередньо під ним. Нижче наведено приклад антипаскалева трикутника з чотирьох рядків, у якому зустрічаються усі натуральні числа від 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Чи існує антипаскалів трикутник з 2018 рядків, у якому зустрічаються усі натуральні числа від 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Вівторок, 10 липня 2018 року

Задача 4. На координатній площині відмічені всі точки (x, y) з натуральними координатами x і y, що не перевищують 20.

Спочатку кожна з 400 відмічених точок не зайнята. Аліна і Богдан грають у таку гру: вони по черзі кладуть камінці у ще не зайняті відмічені точки, Аліна розпочинає першою. Своїм ходом Аліна має покласти новий червоний камінець у відмічену не зайняту точку таким чином, щоб відстань між довільними двома точками з червоними камінцями не дорівнювала $\sqrt{5}$. Своїм ходом Богдан кладе новий синій камінець у довільну відмічену не зайняту точку. (Точка з синім камінцем може знаходитись на будь-якій відстані від довільної іншої зайнятої точки.) Гра припиняється, коли один з гравців не може покласти камінець.

Знайдіть найбільше значення K, для якого Аліна гарантовано зможе покласти принаймні K червоних камінців, не зважаючи на ходи Богдан.

Задача 5. Нехай $a_1, a_2, \ldots$ — нескінченна послідовність натуральних чисел. Припустимо, що існує ціле число $N > 1$ таке, що для кожного $n \geq N$ число

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

є цілим. Доведіть, що існує натуральне число M таке, що $a_m = a_{m+1}$ для усіх $m \geq M$.

Задача 6. Опуклий чотирикутник $ABCD$ задовольняє умову $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X всередині чотирикутника $ABCD$ така, що

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{і} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Доведіть, що $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.