

월요일, 2016 년 7 월 11 일

**문제 1.** 직삼각형  $BCF$ 에서  $B$ 는 직각정점이다. 점  $A$ 는 직선  $CF$  위의 점으로서  $FA = FB$ 를 만족하고  $F$ 는  $A$ 와  $C$  사이에 있다. 점  $D$ 는  $DA = DC$ 이면서  $AC$ 가  $\angle DAB$ 의 2등분선이 되게 취해졌고 점  $E$ 는  $EA = ED$ 이면서  $AD$ 가  $\angle EAC$ 의 2등분선이 되게 취해졌다.  $M$ 을  $CF$ 의 가운데점이라고 하고  $X$ 를  $AMXE$ 가 평행 4변형인(여기서  $AM \parallel EX$ 이고  $AE \parallel MX$ ) 점이라고 하자. 이때 세 직선  $BD, FX, ME$ 가 공점이라는것을 증명하여라.

**문제 2.** 다음의 두가지 조건에 맞게  $n \times n$ 표의 매 칸에  $I, M, O$ 중의 한 문자를 써넣을수 있는 정의 용근수  $n$ 을 모두 구하여라;

- 매 행과 매 열에 대하여 거기에 있는 칸들중 삼분의 일이  $I$ 이고 삼분의 일이  $M$ 이며 삼분의 일이  $O$ 이다;
- 거기에 있는 칸들의 개수가 3의 배수인 임의의 대각선에 대하여 이 대각선의 칸들중 삼분의 일이  $I$ 이고 삼분의 일이  $M$ 이며 삼분의 일이  $O$ 이다.

**주의.**  $n \times n$ 표의 행과 열들은 각각 위에서부터 아래로, 왼쪽에서부터 오른쪽으로 가면서 1 부터  $n$  까지 번호매겨진다. 이때 표의 매 칸은  $1 \leq i, j \leq n$ 인 하나의 정의 용근수쌍  $(i, j)$ 에 대응한다.

$n > 1$ 일 때 이 표는 두가지 형태를 가진  $4n - 2$ 개의 대각선들을 가진다; 즉 첫 형태의 대각선은  $i + j$ 가 다 같은 칸  $(i, j)$ 들 전체로 이루어지고 둘째형태의 대각선은  $i - j$ 가 다 같은 칸  $(i, j)$ 들 전체로 이루어진다.

**문제 3.**  $P = A_1 A_2 \dots A_k$ 는 평면위의 볼록다각형이다. 정점  $A_1, A_2, \dots, A_k$ 들이 모두 용근수자리표들을 가지며 한 원둘레위에 놓인다고 하자.  $P$ 의 면적을  $S$ 로 표시하자. 어떤 홀수인 정의 용근수  $n$ 이 있어서  $P$ 의 모든 변들의 길이의 두제곱이 다  $n$ 의 배수라고 한다. 이때  $2S$ 가 용근수로서  $n$ 의 배수라는것을 증명하여라.

화요일, 2016 년 7 월 12 일

**문제 4.** 정의 옹근수들로 이루어진 한 모임은 만일 그것이 두개이상의 원소들을 포함하고 그것의 매 원소가 적어도 하나의 다른 원소와 공통씨인수를 가진다면 **향기롭다**고 부른다. 이제  $P(n) = n^2 + n + 1$  로 놓자.

이때 부아닌 옹근수  $a$ 가 존재하여 모임

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

가 향기로운 모임으로 되는 정의 옹근수  $b$ 의 최소값은 얼마인가?

**문제 5.** 량변에 각각 2016 개의 1 차식인수들을 가진 방정식

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

이 칠판에 씌여졌다. 이 4032 개의 1 차식인수들중 꼭  $k$  개를 지우되 량변에 각각 적어도 하나의 1 차식인수가 남아있게 하면서 얻어지는 방정식이 실수풀이를 전혀 가지지 않도록 할수 있는  $k$ 의 최소값은 얼마인가?

**문제 6.** 평면에  $n \geq 2$  개의 선분이 있는데 임의의 두 선분은 서로 내부에서 사귀며 그 어느 세 선분도 한 점에서 사귀지 않는다. 영남이는 매 선분에서 한 끝점을 선택하여 거기에 개구리 한마리씩 놓되 개구리가 그 선분의 다른 끝점을 향하여 바라보도록 놓는다. 그다음 그는 손벽을  $n-1$  번 친다. 그가 손벽을 한번 칠 때마다 모든 개구리들은 그즉시 동시에 그것들이 있는 선분우에서 자기앞방향의 바로 다음번 사귀점으로 훌쩍 뛰어간다. 개구리들은 자기들의 운동방향을 절대로 변화시키지 않는다.

영남이는 손벽을 치는 전기간 그 어느 두 마리의 개구리도 같은 시각에 한 사귀점을 동시에 차지하지 못하도록 처음에 개구리들을 적당히 배치하려고 목적한다.

(a)  $n$ 이 홀수일 때 영남이는 언제나 자기의 목적을 실현할수 있다는것을 증명하여라.

(b)  $n$ 이 짝수일 때 영남이는 자기의 목적을 절대로 실현할수 없다는것을 증명하여라.