Language: **Croatian**

Day: **1**

srijeda, 7. srpnja 2010.

Zadatak 1. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da jednakost

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}$. (Ovdje smo sa $\lfloor z \rfloor$ označili najveći cijeli broj manji ili jednak z.)

Zadatak 2. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC i neka je Γ kružnica opisana tom trokutu. Neka pravac AI siječe kružnicu Γ u točkama A i D. Neka je E točka na luku $\widehat{BDC}$ i neka je F točka na stranici $\overline{BC}$ tako da vrijedi

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Neka je G polovište dužine $\overline{IF}$.
Dokažite da sjecište pravaca DG i EI leži na kružnici Γ.

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{N}$ skup svih pozitivnih cijelih brojeva (tj. skup prirodnih brojeva). Odredite sve funkcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

kvadrat prirodnog broja za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

četvrtak, 8. srpnja 2010.

Zadatak 4. Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC i neka je Γ kružnica opisana tom trokutu. Pravci AP, BP i CP sijeku kružnicu Γ u točkama K, L i M, tim redom. Tangenta na kružnicu Γ u točki C siječe pravac AB u točki S. Pretpostavimo da je $|SC| = |SP|$. Dokažite da je tada $|MK| = |ML|$.

Zadatak 5. U svakoj od šest kutija $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ u početku se nalazi točno jedan novčić. Dopuštene su dvije vrste poteza:

1. *vrsta*: Izaberemo nepraznu kutiju B_j, gdje je $1 \leqslant j \leqslant 5$. Izvadimo jedan novčić iz B_j i dodamo dva novčića u B_{j+1}.
2. *vrsta*: Izaberemo nepraznu kutiju B_k, gdje je $1 \leqslant k \leqslant 4$. Izvadimo jedan novčić iz B_k te zamijenimo sadržaje (moguće praznih) kutija B_{k+1} i B_{k+2}.

Odredite postoji li konačan niz takvih poteza tako da su na kraju kutije B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prazne, a kutija B_6 sadrži točno $2010^{2010^{2010}}$ novčića. (Primjetite da je $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Zadatak 6. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavimo da za neki prirodni broj s vrijedi

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

za sve $n > s$. Dokažite da postoje prirodni brojevi ℓ i N takvi da je $\ell \leqslant s$ i vrijedi $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ za sve $n \geqslant N$.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova