mandag, 11. juli 2022

Oppgave 1. Norges Bank utsteder to typer mynter: aluminium (betegnet A) og bronse (betegnet B). Marianne har n mynter av aluminium og n mynter av bronse som ligger på en rekke, i en vilkårlig rekkefølge. Definer en *kjede* som en sekvens av påfølgende mynter av samme type. For et gitt positivt heltall $k \leqslant 2n$, gjentar Marianne følgende operasjon: Hun finner den lengste kjeden som inneholder den k'te mynten fra venstre, og flytter alle myntene i denne kjeden helt til venstre i rekken. For eksempel, hvis $n = 4$ og $k = 4$ og myntene starter i rekkefølgen $AABBBABA$, er prosessen

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Finn alle par (n, k) slik at $1 \leqslant k \leqslant 2n$, slik at det for hver start-rekkefølge finnes et tidspunkt hvor de første n myntene til venstre er av samme type.

Oppgave 2. La $\mathbb{R}^+$ betegne mengden av positive reelle tall. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ slik at for hver $x \in \mathbb{R}^+$ er det nøyaktig én $y \in \mathbb{R}^+$ som tilfredsstiller

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Oppgave 3. La k være et positivt heltall og la S være en endelig mengde bestående av odde primtall. Vis at, hvis vi ser bort fra rotasjon og refleksjon, er det høyst én måte å plassere elementene i S i en sirkel slik at produktet av ethvert par av naboer er på formen $x^2 + x + k$ for et positivt heltall x.

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.

tirsdag, 12. juli 2022

Oppgave 4. La $ABCDE$ være en konveks femkant der $|BC| = |DE|$. Anta at det finnes et indre punkt T i $ABCDE$ slik at $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ og $\angle ABT = \angle TEA$. La linjen AB skjære linjene CD og CT i henholdsvis punktene P and Q. Anta at P, B, A, Q er i denne rekkefølgen på deres linje. La linjen AE skjære linjene CD og DT i henholdsvis punktene R og S. Anta at R, E, A, S er i denne rekkefølgen på deres linje. Vis at punktene P, S, Q, R ligger på en felles sirkel.

Oppgave 5. Finn alle tripler (a, b, p) av positive heltall der p er primtall og

$$a^p = b! + p.$$

Oppgave 6. La n være et positivt heltall. Et *nordisk kvadrat* er en $n \times n$-tabell som inneholder alle heltall fra 1 til n^2, der hver rute i tabellen inneholder nøyaktig ett tall. Vi sier at to forskjellige ruter er naboer dersom de deler en kant. En rute som kun har naboruter med større tall kalles en *dal*. En *tursti* er en sekvens av ruter slik at:

(i) sekvensens første rute er en dal,

(ii) påfølgede ruter i sekvensen er naboer, og

(iii) tallene i rutene i sekvensen er i stigende rekkefølge.

Finn, som en funksjon av n, det minste mulige antallet turstier i et nordisk kvadrat.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.