



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Latvian (Lettish)**

Day: **1**

*Otrdiena, 2012. gada 10. jūlijs*

**1. uzdevums.** Trijstūrim  $ABC$  pievilкта riņķa līnija ar centru punktā  $J$  pieskaras trijstūra  $ABC$  malai  $BC$  punktā  $M$ , malas  $AB$  pagarinājumam — punktā  $K$ , bet malas  $AC$  pagarinājumam — punktā  $L$ . Taisnes  $LM$  un  $BJ$  krustojas punktā  $F$ , taisnes  $KM$  un  $CJ$  — punktā  $G$ . Taisne  $BC$  krusto taisni  $AF$  punktā  $S$ , bet taisni  $AG$  — punktā  $T$ .

Pierādiet, ka punkts  $M$  ir nogriežņa  $ST$  viduspunkts.

(Par trijstūrim *pievilktu riņķa līniju* sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras vienai trijstūra malai no ārpusēm un abu pārējo malu pagarinājumiem.)

**2. uzdevums.** Dots naturāls skaitlis  $n \geq 3$  un tādi reāli pozitīvi skaitļi  $a_2, a_3, \dots, a_n$ , ka  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Pierādiet, ka

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**3. uzdevums.**  $A$  un  $B$  spēlē šādu spēli ar melošanu. Tās noteikumi ir atkarīgi no naturāliem skaitļiem  $n$  un  $k$ , kas spēlētājiem ir zināmi.

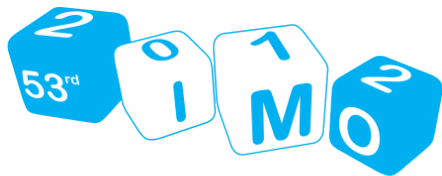
Sākumā  $A$  izvēlas tādus naturālus skaitļus  $x$  un  $N$ , ka  $1 \leq x \leq N$ . Skaitli  $x$  spēlētājs  $A$  patur slepenībā, bet skaitli  $N$  nemelojot pasaka spēlētājam  $B$ . Spēlētājs  $B$  cenšas iegūt informāciju par  $x$ , pēc patikas daudz reižu taujājot spēlētājam  $A$  šādā veidā:  $B$  izvēlas jebkuru naturālu skaitļu kopu  $S$  (iespējams, tādu, kas jau izmantota agrākā jautājumā) un jautā, vai  $x$  pieder  $S$ . Pēc katra jautājuma  $A$  tūlīt atbild “jā” vai “nē”.  $A$  drīkst samelot, tomēr no katrām  $k + 1$  pēc kārtas esošām atbildēm vismaz vienai jābūt patiesai.

Galū galā spēlētājam  $B$  jānosauc kopa  $X$  ar ne vairāk kā  $n$  naturāliem skaitļiem. Ja  $x$  pieder kopai  $X$ ,  $B$  uzvar; citādi  $B$  zaudē. Pierādiet, ka:

- 1) ja  $n \geq 2^k$ , tad spēlētājam  $B$  ir uzvaroša stratēģija;
- 2) visiem pietiekami lieliem  $k$  pastāv tāds  $n \geq 1,99^k$ , ka  $B$  nevar droši panākt uzvaru.

*Language: Latvian*

*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes  
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus*



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Latvian (Lettish)**

Day: **2**

*Trešdiena, 2012. gada 11. jūlijs*

**4. uzdevums.** Atrodiet visas tādas funkcijas  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , ka jebkuriem veseliem skaitļiem  $a, b, c$ , kam  $a + b + c = 0$ , izpildās vienādība

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

( $\mathbb{Z}$  apzīmē veselo skaitļu kopu.)

**5. uzdevums.**  $ABC$  ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi  $\angle BCA$ .  $CD$  ir tā augstums, un  $X$  ir nogriežņa  $CD$  iekšējs punkts.  $K$  un  $L$  ir tādi attiecīgi nogriežņu  $AX$  un  $BX$  punkti, ka  $BK = BC$  un  $AL = AC$ .  $M$  ir nogriežņu  $AL$  un  $BK$  krustpunkts.

Pierādiet, ka  $MK = ML$ .

**6. uzdevums.** Atrodiet visus naturālos skaitļus  $n$ , kuriem pastāv tādi nenegatīvi veseli skaitļi  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ka

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: *Latvian*

*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes  
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus*