星期一, 11. 七月 2022

問題 1. 奧斯陸銀行發行兩種硬幣：鋁幣（記做 A）以及銅幣（記做 B）。瑪麗有 n 枚鋁幣和 n 枚銅幣，他任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣爲「同花段」。給定一正整數 $k \leqslant 2n$，瑪麗重複下列的操作：找出包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段，然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說，當 $n = 4$ 且 $k = 4$ 時，從 $AABBBABA$ 這個起始狀態開始操作，過程會是

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

找出符合 $1 \leqslant k \leqslant 2n$ 的所有數對 (n, k)，使得不管是什麼起始狀態，在操作過程的某個時刻，最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的。

問題 2. 令 $\mathbb{R}^+$ 代表所有正實數所形成的集合。找出所有函數 $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得對於任意 $x \in \mathbb{R}^+$，都恰好有一個 $y \in \mathbb{R}^+$ 讓不等式

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

成立。

問題 3. 令 k 爲一正整數，且 S 是一個由有限多個奇質數所形成的集合。證明至多只有一種方式可以將 S 中所有數字排成一個圓圈（旋轉與翻轉視爲同一種），使得任意兩個相鄰數字的乘積皆可以被表示成 $x^2 + x + k$ 的形式，其中 x 爲某個正整數。

星期二, 12. 七月 2022

問題 4. 令 $ABCDE$ 爲一凸五邊形滿足 $BC = DE$，假設在 $ABCDE$ 內部存在一點 T 使得 $TB = TD$, $TC = TE$ 且 $\angle ABT = \angle TEA$。令直線 AB 分別與直線 CD 和 CT 交於點 P 和 Q，假設 P, B, A, Q 在同一直線上按照此順序排列。令直線 AE 分別與直線 CD 和 DT 交於點 R 和 S，假設 R, E, A, S 在同一直線上按照此順序排列。證明 P, S, Q, R 落在同一個圓上。

問題 5. 找出所有三元正整數組 (a, b, p)，滿足 p 是質數且

$$a^p = b! + p.$$

問題 6. 令 n 爲一正整數。一個「北歐方陣」爲包含 1 至 n^2 所有整數的 $n \times n$ 方格表，使得每個方格內恰有一個數字。兩個相異方格是相鄰的如果他們有公共邊。一個方格被稱爲「山谷」，若其內的數字比所有相鄰方格內的數字都小。一條「上坡路徑」是一個包含一或多個方格的序列，滿足：

(i) 序列的第一個方格是山谷，

(ii) 序列中隨後的每個方格都和其前一個方格相鄰，且

(iii) 序列中方格內所寫的數字遞增。

試求一個北歐方陣中，上坡路徑數量的最小可能值，以 n 的函數表示之。