pirmadienis, 11. liepos 2022

1 uždavinys. Oslo bankas leidžia dviejų rūšių monetas: aliuminio (žymima raide A) ir bronzos (žymima raide B). Marytė turi n aliumininių monetų ir n bronzinių monetų, kurios išdėliotos eilute tam tikra tvarka. *Grandine* vadinsime bet kurią iš eilės einančių tos pačios rūšies monetų seką. Duotas natūralusis skaičius $k \leqslant 2n$. Marytė vieną po kitos atlieka tokias operacijas: išrenka ilgiausią grandinę, kuriai priklauso k-toji moneta eilutėje iš kairės, ir perkelia visą šią grandinę į kairiąją eilutės pusę. Pavyzdžiui, kai $n = 4$ ir $k = 4$, operacijos su pradine eilute $AABBBABA$ bus tokios:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Raskite visas tokias poras (n, k), kur $1 \leqslant k \leqslant 2n$, kad su kiekviena pradine eilute tam tikru momentu pirmosios n iš kairės einančios monetos bus vienos rūšies.

2 uždavinys. Tegu $\mathbb{R}^+$ žymi teigiamų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kad kiekvienam $x \in \mathbb{R}^+$ egzistuoja lygiai vienas $y \in \mathbb{R}^+$, su kuriuo galioja nelygybė

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

3 uždavinys. Tegul k yra natūralusis skaičius, o S - baigtinė nelyginių pirminių skaičių aibė. Įrodykite, kad egzistuoja ne daugiau kaip vienas būdas (neatsižvelgiant į posūkius ir simetrinius atvaizdžius) taip išdėlioti aibės S elementus ratu, kad bet kurių dviejų kaimyninių skaičių sandauga būtų išreiškiama pavidalu $x^2 + x + k$ su kokiu nors natūraliuoju skaičiumi x.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.

antradienis, 12. liepos 2022

4 uždavinys. Duotas iškilasis penkiakampis $ABCDE$, kuriame $BC = DE$. Tarkime, kad to penkiakampio viduje yra toks taškas T, kad $TB = TD$, $TC = TE$ ir $\angle ABT = \angle TEA$. Tiesė AB kerta tieses CD ir CT atitinkamai taškuose P ir Q. Tarkime, kad taškai P, B, A, Q priklauso tiesei nurodyta tvarka. Tiesė AE kerta tieses CD ir DT atitinkamai taškuose R ir S. Tarkime, kad taškai R, E, A, S taip pat priklauso tiesei nurodyta tvarka. Įrodykite, kad taškai P, S, Q, R priklauso vienam apskritimui.

5 uždavinys. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, p) su pirminiais p, kuriems galioja lygybė

$$a^p = b! + p.$$

6 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius n. *Šiaurės kvadratu* yra vadinama $n \times n$ lentelė, kurios langeliuose įrašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki n^2 po vieną skaičių kiekviename langelyje. Du langeliai vadinami gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę. Kiekvienas langelis, kurio visuose gretimuose langeliuose įrašyti skaičiai yra didesni negu jame esantis skaičius, yra vadinamas *slėniu*. *Įkalnės keliu* yra vadinama seka, sudaryta iš vieno arba kelių langelių, kurioje:

(i) pirmasis langelis yra slėnis,

(ii) kiekvienas sekantis langelis yra gretimas prieš jį einančiam langeliui,

(iii) iš eilės einančiuose sekos langeliuose įrašyti skaičiai didėja.

Su kiekvienu natūraliuoju n nustatykite kiek mažiausiai gali būti įkalnės kelių Šiaurės kvadrate.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.