

Þriðjudagur, 8. júlí, 2014

Dæmi 1. Látum $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ vera óendanlega runu jákvæðra heiltalna. Sannið að til er nákvæmlega ein heiltala $n \geq 1$ þannig að

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Dæmi 2. Látum $n \geq 2$ vera heiltölu. Athugum $n \times n$ skákborð sem samanstendur af n^2 reitum. Uppstilling n hróka er sögð *friðsamleg* ef sérhver lína og sérhver dálkur inniheldur nákvæmlega einn hrók. Finnið stærstu jákvæðu heiltöluna k þannig að fyrir sérhverja friðsamlega uppstillingu n hróka er til $k \times k$ feringur sem inniheldur ekki hrók á neinum af k^2 reitunum.

Dæmi 3. Kúptur ferhyrningur $ABCD$ er með $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Punkturinn H er ofanvarp A á BD . Punktarnir S og T liggja á hliðunum AB og AD þannig að H er innan í þríhyrningum SCT og

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Sannið að línan BD er snertill umritaðs hring þríhyrningsins TSH .

Miðvikudagur, 9. júlí, 2014

Dæmi 4. Punktarnir P og Q liggja á hliðinni BC í hvasshyrndum þríhyrning ABC þannig að $\angle PAB = \angle BCA$ og $\angle CAQ = \angle ABC$. Punktarnir M og N liggja á línunum AP og AQ þannig að P er miðpunktur AM og Q er miðpunktur AN . Sannið að línurnar BM og CN skerist á umritaða hring þríhyrningsins ABC .

Dæmi 5. Fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n gefur Höfðaborgarbankinn út mint að virði $\frac{1}{n}$. Gefið er endalegt safn slíkra minta (ekki nauðsynlega allar að ólíku virði) með samanlagt verðgildi í mesta lagi $99 + \frac{1}{2}$. Sannið að hægt er að skipta þessu safni í 100 eða færri hópa þannig að samanlagt verðgildi sérhvers hóps sé í mesta lagi 1.

Dæmi 6. Mengi lína í sléttunni er *venjulegt* ef engar tvær línur eru samsíða og engar þrjár línur skerast í sama punkti. Mengi lína sem er venjulegt skiptir sléttunni í svæði og sum þeirra hafa endanlegt flatarmál. Við köllum þau *endanlegu svæðin*. Sannið að fyrir nægjanlega stórt n er hægt, fyrir sérhvert mengi n lína sem er venjulegt, að lita að minnsta kosti \sqrt{n} línanna bláar þannig að ekkert af endanlegu svæðunum hafi alla jaðrana bláa.

Athugasemd: Niðurstöðunni \sqrt{n} er hægt að skipta út fyrir $c\sqrt{n}$ og fjöldi stiga sem veitt eru fer eftir fastanum c .