



الاثنين 18 تموز 2011

المشكلة 1:

لتكن $\{A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ مجموعة مولفة من أربعة أعداد صحيحة موجبة تماماً و مختلفة مثنى مثنى . ولتكن $S_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. ولتكن n_A عدد الأزواج (i, j) بحيث $1 \leq i < j \leq 4$ والتي من أجل كل منها يكون العدد $a_i + a_j$ قاسماً للعدد S_A . أوجد جميع المجموعات المولفة من أربعة أعداد صحيحة موجبة تماماً و مختلفة مثنى بحيث يكون n_A أكبر ما يمكن .

المشكلة 2:

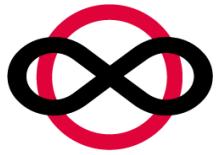
لتكن S مجموعة منتهية من نقط المستوي ، تحتوي على نقطتين على الأقل . ولنفرض أنه لا توجد في S ثلاثة نقط على تقع استقامة واحدة . نعني بالطاحونة العملية التالية : تبدأ العملية بمستقيم ℓ يمر بنقطة واحدة $P \in S$ نعتبرها مركزاً لدوران المستقيم ℓ وندور المستقيم حول النقطة P باتجاه دوران عقارب الساعة حتى يلاقي نقطة أخرى Q من S . ثم نجعل Q مركزاً جديداً لدوران المستقيم ℓ ، ونستمر على هذا النهج عدداً غير منته من المرات على أن تكون جميع مراكز الدوران من S . بين أنه يمكن اختيار نقطة مناسبة $P \in S$ ومستقيم مناسب ℓ يمر من P بحيث الطاحونة التي تبدأ بالمستقيم ℓ تجعل كل نقطة من نقاط S مركزاً للدوران عدداً غير منته من المرات .

المشكلة 3:

ليكن f تابعاً عددياً من مجموعة الأعداد الحقيقة إلى نفسها يحقق :

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

وذلك من أجل كل الأعداد الحقيقة y, x . برهن أن $f(x) = 0$ من أجل كل $x \leq 0$.



الثلاثاء 19 قور 2011

المشكلة 4 :

ليكن $n > 0$ عدداً صحيحاً . لدينا ميزان ذو كفتين و n من الأوزان ، قيمها $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. نريد وضع هذه الأوزان التي عددها n واحداً تلو الآخر في إحدى كفتي الميزان بحيث لا يزيد وزن الكفة اليمنى عن وزن الكفة اليسرى . في كل خطوة نختار أحد الأوزان التي لم يتم وضعها في الميزان ونضعه في إحدى كفتي الميزان حتى يتم الانتهاء من جميع الأوزان . عين عدد الطرائف التي يمكن من خلالها تحقيق ذلك .

المشكلة 5 :

ليكن f تابعاً عددياً من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً . لنفرض أنه من أجل كل عددين صحيحين m و n يكون المقدار $f(m) - f(n)$ قابلاً للقسمة على $f(m-n)$. برهن أنه من أجل كل عددين صحيحين m, n يتحققان $f(m) \leq f(n)$ يكون $f(n)$ قابلاً للقسمة على $f(m)$.

المشكلة 6 :

ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا ولتكن Γ الدائرة المارة برؤوسه ولتكن ℓ مماساً للدائرة Γ ولتكن المستقيمات ℓ_a و ℓ_b و ℓ_c صور انعكاس المستقيم ℓ (نظائر المستقيم ℓ) بالنسبة إلى المستقيمات BC و CA و AB على الترتيب . بين أن الدائرة المارة برؤوس المثلث المعين بالمستقيمات ℓ_a و ℓ_b و ℓ_c تمس الدائرة Γ .