



Петак, 10. јули 2015.

**1. задатак.** Коначан скуп  $S$  тачака у равни зовемо *уравнотеженим* ако за сваке двије различите тачке  $A$  и  $B$  скупа  $S$  постоји тачка  $C$  у скупу  $S$  таква да је  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . Скуп  $S$  зовемо *бесцентричним* ако ни за које три различите тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$  скупа  $S$  не постоји тачка  $P$  у  $S$  таква да је  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ .

- (а) Доказати да за сваки природан број  $n \geq 3$  постоји уравнотежен скуп који се састоји од  $n$  тачака.
- (б) Одредити све природне бројеве  $n \geq 3$  за које постоји уравнотежен бесцентричан скуп од  $n$  тачака.

**2. задатак.** Наћи све тројке природних бројева  $(a, b, c)$  такве да је сваки од бројева

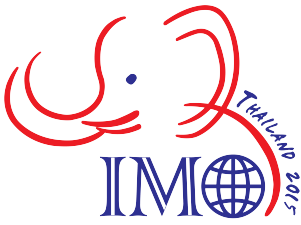
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

степен броја 2.

(Степен броја 2 је број облика  $2^n$ , гдје је  $n$  ненегативан цио број.)

**3. задатак.** Нека је  $ABC$  оштроугли троугао у коме је  $\overline{AB} > \overline{AC}$ . Нека је  $\Gamma$  његова описана кружница,  $H$  ортоцентар, а  $F$  подножје висине из тјемена  $A$ . Тачка  $M$  је средиште дужи  $BC$ . Нека је  $Q$  тачка на кружници  $\Gamma$  таква да је  $\angle HQA = 90^\circ$ , а  $K$  тачка на кружници  $\Gamma$  таква да је  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Сматрамо да су тачке  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  и  $Q$  међусобно различите и да леже на кружници  $\Gamma$  тим редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова  $KQH$  и  $FKM$  додирују.



Субота, 11. јули 2015.

**4. задатак.** Нека је  $\Omega$  описана кружница троугла  $ABC$  и  $O$  њен центар. Кружница  $\Gamma$  са центром у тачки  $A$  сијече дуж  $BC$  у тачкама  $D$  и  $E$  тако да су тачке  $B, D, E$  и  $C$  међусобно различите и леже на правој  $BC$  тим редом. Нека су  $F$  и  $G$  тачке пресјека кружница  $\Gamma$  и  $\Omega$ , при чему тачке  $A, F, B, C$  и  $G$  леже на кружници  $\Omega$  тим редом. Нека је  $K$  друга тачка пресјека описане кружнице троугла  $BDF$  и дужи  $AB$ . Нека је  $L$  друга тачка пресјека описане кружнице троугла  $CGE$  и дужи  $CA$ .

Претпоставимо да су праве  $FK$  и  $GL$  различите и да се сијекну у тачки  $X$ . Доказати да тачка  $X$  лежи на правој  $AO$ .

**5. задатак.** Са  $\mathbb{R}$  је означен скуп свих реалних бројева. Одредити све функције  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  које задовољавају једнакост

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

за све реалне бројеве  $x$  и  $y$ .

**6. задатак.** Низ цијелих бројева  $a_1, a_2, \dots$  задовољава следеће услове:

(i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  за све  $j \geq 1$ ;

(ii)  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  за све  $1 \leq k < \ell$ .

Доказати да постоје природни бројеви  $b$  и  $N$  такви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

за све цијеле бројеве  $m$  и  $n$  за које је  $n > m \geq N$ .