星期二, 16. 七月 2024

問題 1. 試求所有實數 α，使得對於所有正整數 n，整數

$$\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor2\alpha\rfloor+\cdots+\lfloor n\alpha\rfloor$$

皆爲 n 的倍數。(此處 $\lfloor z\rfloor$ 表示不大於 z 的最大整數。舉例來說，$\lfloor-\pi\rfloor=-4$ 且 $\lfloor2\rfloor=\lfloor2.9\rfloor=2$。)

問題 2. 試求所有正整數對 (a, b) 使得存在正整數 g 與 N 滿足

$$\gcd(a^n+b, b^n+a)=g$$

對於所有整數 $n\geqslant N$ 皆成立。(此處 $\gcd(x, y)$ 表示 x 和 y 的最大公因數。)

問題 3. 令 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 爲無限長的正整數列，且 N 爲一正整數。假設對於所有 $n>N$，a_n 等於整數 a_{n-1} 在數列 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 中出現的次數。

證明在 $a_1, a_3, a_5, \ldots$ 與 $a_2, a_4, a_6, \ldots$ 此兩數列中，至少有一者最終會循環。

(我們稱一個無窮數列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ 最終會循環，若存在正整數 p 與 M 使得 $b_{m+p}=b_m$ 對於所有 $m\geqslant M$ 皆成立。)

星期三, 17. 七月 2024

問題 4. 令 ABC 爲一三角形，其中 $AB < AC < BC$。令 ABC 的內心與內切圓分別爲 I 和 ω 。令 X 爲 BC 線上異於 C 的點，使得過 X 且平行 AC 的直線與 ω 相切。類似地，令 Y 爲 BC 線上異於 B 的點，使得過 Y 且平行 AB 的直線與 ω 相切。令 AI 與 ABC 外接圓再次交於 $P \neq A$。令 K 與 L 分別爲 AC 與 AB 的中點。

證明 $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

問題 5. 蝸牛渦寶在一個 2024 橫列、2023 直排的棋盤上進行遊戲。棋盤上有 2022 隻隱形的怪獸。遊戲開始時，渦寶不知道怪物的位置，但牠知道除了第一橫列與最後一橫列外，每一橫列都恰有一隻怪獸，且每一直排都至多只有一隻怪獸。

渦寶將發起若干次探險，嘗試從第一橫列爬到最後一橫列。每一次探險，牠選擇第一橫列的一格作爲起點，接著開始爬行，每一步都選擇移動到一個與其所在格子有公共邊的格子（牠可以造訪之前去過的格子）。若其抵達有怪物的格子，則該次探險結束，而渦寶會回到第一橫列開始新的探險。怪物不會移動，且渦寶會記得牠造訪過的各格中有沒有怪物。若牠抵達最後一橫列，則探險結束且遊戲結束。

試求最小可能的 n ，讓渦寶存在一個策略，使得不論怪物如何分佈，牠都可以保證在 n 次探險內抵達最後一橫列。

問題 6. 令 $\mathbb{Q}$ 爲所有有理數所成的集合。一個函數 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 被稱爲*媽祖的*，若其滿足以下性質：對於每一組 $x, y \in \mathbb{Q}$，

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{或} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

至少一者成立。證明存在一個整數 c，使得對於任何媽祖的函數 f，皆至多有 c 個可被表示爲 $f(r)+f(-r)$ 的相異有理數，其中 r 爲有理數；並求 c 的最小可能值。