ponedjeljak, 21. septembar 2020.

Zadatak 1. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao i neka se tačka P nalazi u unutrašnjosti $ABCD$. Važe sljedeće proporcije:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokazati da se sljedeće tri prave sijeku u jednoj tački: simetrale unutrašnjih uglova $\angle ADP$ i $\angle PCB$ i simetrala duži AB.

Zadatak 2. Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da važi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ i $a+b+c+d = 1$. Dokazati nejednakost

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Zadatak 3. Dato je $4n$ kamenčića čije su težine $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena tačno četiri kamenčića. Dokazati da je moguće podijeliti kamenčiće u dvije grupe tako da su zadovoljena oba uslova:

- Ukupne težine obje grupe su jednake.
- Svaka grupa sadrži po dva kamenčića od svake boje.

Language: Montenegrin

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.

utorak, 22. septembar 2020.

Zadatak 4. Dat je prirodan broj $n > 1$. Na padini planine postoji n^2 stanica koje su na međusobno različitim visinama. Obje kompanije koje upravljaju žičarama, A i B, rade sa po k vozila; svako vozilo obavlja prevoz od jedne do druge stanice koja je na većoj visini (nema stajanja na međustanicama). Svih k vozila kompanije A ima k različitih startnih i k različitih krajnjih stanica i vozilo koje ima višu početnu stanicu ima i višu krajnju stanicu. Isti uslovi važe za B. Kažemo da jedna kompanija *povezuje* dvije stanice ako je moguće iz niže stići u višu korišćenjem jedne ili više vozila te kompanije(drugi tipovi kretanja među stanicama nijesu dozvoljeni).

Odrediti najmanji prirodan broj k za koji možemo biti sigurni da postoje dvije stanice koje povezuju obje kompanije.

Zadatak 5. Dat je špil od $n > 1$ karata. Na svakoj karti je zapisan jedan prirodan broj. Špil ima svojstvo da je aritmetička sredina brojeva na proizvoljnom paru karata jednaka geometrijskoj sredini brojeva na nekom skupu od jedne ili više karata.

Za koje n važi da su svi brojevi na kartama međusobno jednaki?

Zadatak 6. Dokazati da postoji pozitivna konstanta c takva da važi sljedeće tvrđenje:

Neka je $n > 1$ prirodan broj i $\mathcal{S}$ skup od n tačaka u ravni takvih da je udaljenost između bilo koje dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ najmanje 1. Tada slijedi da postoji prava ℓ koja razdvaja $\mathcal{S}$ takva da je udaljenost bilo koje tačke skupa $\mathcal{S}$ od ℓ najmanje $cn^{-1/3}$.

(Prava ℓ *razdvaja* skup tačaka $\mathcal{S}$ ako neka duž čiji krajevi pripadaju skupu $\mathcal{S}$ siječe ℓ.)

Komentar. Slabiji rezultati u kojima je $cn^{-1/3}$ zamijenjeno sa $cn^{-\alpha}$ mogu osvojiti bodove u zavisnosti od vrijednosti konstante $\alpha > 1/3$.

Language: Montenegrin

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.