Dienstag, 16. Juli 2019

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

für alle ganze Zahlen a und b gilt.

Aufgabe 2. Im Dreieck ABC liegt ein Punkt A_1 auf der Seite BC und ein Punkt B_1 auf der Seite AC. Es seien P und Q Punkte auf den Strecken AA_1 bzw. BB_1, so dass PQ parallel zu AB ist. Es sei P_1 ein Punkt auf der Geraden PB_1, so dass B_1 im Inneren der Strecke PP_1 liegt und $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$ gilt. Analog, sei Q_1 ein Punkt auf der Geraden QA_1, so dass A_1 im Inneren der Strecke QQ_1 liegt und $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$ gilt.

Man beweise, dass die Punkte P, Q, P_1 und Q_1 auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 3. Ein soziales Netzwerk hat 2019 Nutzer, von denen einige paarweise befreundet sind. Immer wenn der Nutzer A mit dem Nutzer B befreundet ist, dann ist auch der Nutzer B mit dem Nutzer A befreundet. Ereignisse der folgenden Art können wiederholt nacheinander stattfinden:

> Drei Nutzer A, B und C, von denen A mit B und C befreundet ist, aber B und C nicht befreundet sind, wechseln den Status ihrer Freundschaften so, dass jetzt B und C befreundet sind, aber A nicht mehr mit B befreundet ist und auch nicht mehr mit C befreundet ist. Der Status aller anderen Freundschaften bleibt unverändert.

Anfangs sind 1010 Nutzer mit jeweils genau 1009 Nutzern befreundet und 1009 Nutzer mit jeweils genau 1010 Nutzern befreundet. Man beweise, dass es eine Folge solcher Ereignisse gibt, nach der jeder Nutzer höchstens mit einem anderen Nutzer befreundet ist.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, 17. Juli 2019

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare (k, n) positiver ganzer Zahlen, so dass

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Aufgabe 5. Die Bank of Bath prägt Münzen mit einem H auf der einen Seite und einem T auf der anderen. Harry hat n dieser Münzen von links nach rechts aufgereiht. Er führt wiederholt die folgende Operation durch: Zeigen genau $k > 0$ Münzen ein H, dann dreht er die k-te Münze von links um; falls alle Münzen ein T zeigen, hört er auf. Zum Beispiel wäre für $n = 3$ mit Anfangskonfiguration THT der Prozess $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, welcher nach 3 Operationen endet.

(a) Man zeige, dass Harry für jede Anfangskonfiguration nach einer endlichen Anzahl von Operationen aufhört.

(b) Für jede Anfangskonfiguration C sei $L(C)$ die Anzahl der Operationen bis Harry aufhört. Beispielsweise sind $L(THT) = 3$ und $L(TTT) = 0$. Man bestimme den Durchschnittswert von $L(C)$ über alle 2^n möglichen Anfangskonfigurationen C.

Aufgabe 6. Es sei I der Inkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB \neq AC$. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seiten BC, CA und AB in D, E bzw. F. Die Gerade durch D senkrecht zu EF schneide ω außerdem in R. Die Gerade AR schneide ω außerdem in P. Die Umkreise der Dreiecke PCE und PBF schneiden sich außerdem in Q.

Man beweise, dass sich die Geraden DI und PQ auf derjenigen Geraden durch A schneiden, die senkrecht zu AI ist.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.