luni, 19. iulie 2021

Problema 1. Fie $n \geqslant 100$ un număr natural. Ivan scrie fiecare dintre numerele $n, n+1, \ldots, 2n$ pe câte un cartonaș diferit. Apoi el amestecă cele $n+1$ cartonașe și le împarte în două teancuri. Demonstrați că cel puțin unul dintre teancuri conține două cartonașe astfel încât suma numerelor de pe ele este un pătrat perfect.

Problema 2. Demonstrați că inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

este adevărată pentru orice numere reale $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 3. Fie D un punct în interiorul triunghiului ascuțitunghic ABC cu $AB > AC$, astfel încât $\angle DAB = \angle CAD$. Punctul E de pe segmentul AC satisface $\angle ADE = \angle BCD$, punctul F de pe segmentul AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, și punctul X de pe dreapta AC satisface $CX = BX$. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ADC și respectiv EXD. Demonstrați că dreptele BC, EF și O_1O_2 sunt concurente.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

marți, 20. iulie 2021

Problema 4. Fie Γ un cerc cu centrul în I și $ABCD$ un patrulater convex astfel încât fiecare dintre segmentele AB, BC, CD și DA este tangent la Γ. Fie Ω cercul circumscris triunghiului AIC. Prelungirea lui BA dincolo de A intersectează pe Ω în X, și prelungirea lui BC dincolo de C intersectează pe Ω în Z. Prelungirile lui AD și CD dincolo de D intersectează pe Ω în Y și respectiv T. Demonstrați că

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problema 5. Două veverițe, Bushy și Jumpy, au adunat pentru iarnă 2021 de nuci. Jumpy numerotează nucile de la 1 la 2021, și sapă 2021 de gropi aranjate în formă circulară în jurul copacului lor favorit. În dimineața următoare Jumpy observă că Bushy a pus câte o nucă în fiecare groapă, fără să țină cont de numerotare. Nemulțumită, Jumpy decide să reordoneze nucile efectuând o secvență de 2021 de mutări. La mutarea k Jumpy schimbă între ele pozițiile celor două nuci alăturate nucii k. Demonstrați că există o valoare a lui k astfel încât, la mutarea k, Jumpy schimbă nucile a și b astfel încât $a < k < b$.

Problema 6. Fie $m \geqslant 2$ un număr natural, fie A o mulțime finită de numere întregi (nu neapărat pozitive), și fie $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ submulțimi ale lui A. Presupunem că pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, m$ suma elementelor mulțimii B_k este m^k. Demonstrați că A conține cel puțin $m/2$ elemente.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.