Fredag, den 10 juli 2015

Problem 1. Vi säger att en ändlig mängd $\mathcal{S}$ av punkter i planet är *balancerad* om det för varje två olika punkter A och B i $\mathcal{S}$ existerar en punkt C i $\mathcal{S}$ sådan att $AC = BC$. Vi säger att $\mathcal{S}$ är *centerfri* om det för varje tre olika punkter A, B och C i $\mathcal{S}$ inte finns någon punkt P i $\mathcal{S}$ sådan att $PA = PB = PC$.

(a) Visa att det finns en balancerad mängd som består av n punkter, för alla heltal $n \geqslant 3$.

(b) Bestäm alla heltal $n \geqslant 3$ för vilka det finns en balancerad centerfri mängd bestående av n punkter.

Problem 2. Bestäm alla triplar (a, b, c) av positiva heltal sådana att vart och ett av talen

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

är en potens av 2.

(*Potens av* 2 *är ett heltal på formen* 2^n, *där* n *är ett icke-negativt heltal.*)

Problem 3. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med $AB > AC$. Låt Γ vara den omskrivna cirkeln till $\triangle ABC$, H vara dess ortocentrum, och låt F vara fotpunkten för höjden från A. Låt också M vara mittpunkten på sidan BC.

Låt vidare Q vara en punkt på Γ sådan att $\angle HQA = 90°$, och låt K vara en punkt på Γ sådan att $\angle HKQ = 90°$. Antag att punkterna A, B, C, K och Q alla är olika, och ligger på Γ i den ordningen.

Visa att de omskrivna cirklarna till trianglarna KQH och FKM tangerar varandra.

Lördag, den 11 juli 2015

Problem 4. Låt O vara medelpunkten i den till triangeln ABC omskrivna cirkeln Ω. En cirkel Γ med medelpunkt i A skär sträckan BC i punkterna D och E, sådana att B, D, E och C är alla olika och ligger på linjen BC, i den ordningen. Låt F och G vara skärningspunkterna mellan Γ och Ω, sådana att A, F, B, C och G ligger på Ω, i den ordningen.

Låt K vara den andra skärningspunkten mellan den till triangeln BDF omskrivna cirkeln och sträckan AB. Låt slutligen L vara den andra skärningspunkten mellan den till triangeln CGE omskrivna cirkeln och sträckan CA.

Antag att linjerna FK och GL är olika och skär varandra i punkten X. Visa att X ligger på linjen AO.

Problem 5. Låt $\mathbb{R}$ vara mängden av alla reella tal. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller ekvationen

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x),$$

för alla reella x och y.

Problem 6. Följden $a_1, a_2, \ldots$ av heltal uppfyller följande villkor:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ för alla $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ för alla $1 \leqslant k < \ell$.

Visa att det finns två positiva heltal b och N sådana att

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2,$$

för alla heltal m och n som uppfyller $n > m \geqslant N$.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng