

السبت، 8. جويلية 2023

مسألة 1. ابحث عن جميع الأعداد الطبيعية غير الأولية $n > 1$ التي تتحقق الخاصية الآتية: إذا كانت d_1, d_2, \dots, d_k تمثل جميع القواسم الموجبة للعدد n حيث $n = d_1 < d_2 < \dots < d_k$ حيث $d_{i+1} + d_{i+2} \leq n$ أي كان العدد $2 \leq i \leq k-1$.

مسألة 2. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا بحيث $\angle ACB < 90^\circ$. ولتكن S منتصف النقطة C من Ω الذي يحوي الدائرة المارة برؤوس المثلث. ولتكن A المستقيم المار من A والعمودي على BC يلاقي BS في D ويلاقي الدائرة Ω ثانية في E . المستقيم المار بالنقطة D والموازي للمستقيم BC يلاقي المستقيم BE في L . لتكن الدائرة ω المارة برؤوس المثلث BDL . ولنفترض أن ω تتقاطع ثانية مع Ω في P . أثبت أن الماس للدائرة ω في P يلاقي المستقيم BS في نقطة واقعة على المنصف الداخلي للزاوية $\angle ABC$.

مسألة 3. في حالة عدد صحيح $k \geq 2$, عين جميع المتاليات الالانهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً \dots, a_1, a_2, \dots التي لأجلها يوجد كثير حدود P من الصيغة $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ أمثله c_0, c_1, \dots, c_{k-1} أعداد صحيحة أكبر أو تساوي الصفر، وتحقق

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k}$$

أياً كان العدد الصحيح $n \geq 1$.



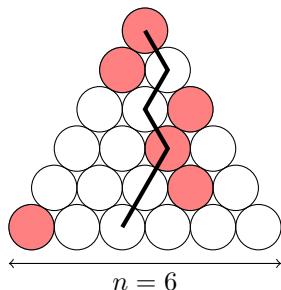
الأحد، 9. جويلية 2023

مسألة 4. لتكن $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ أعداداً حقيقة موجبة تماماً مختلفة مثنى مثنى بحيث يكون

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

عدد صحيح لكل $n = 1, 2, \dots, 2023$. أثبت أن $a_{2023} \geq 3034$.

مسألة 5. ليكن n عدداً صحيحاً تماماً. يتألف مثلث ياباني من $n + 1 + 2 + \dots + n$ من الدوائر المرتبة في المستوى على شكل مثلث متساوي الأضلاع. يحوي السطر رقم i عدداً n من الدوائر واحدة منها فقط حمراء اللون حيث $i = 1, 2, \dots, n$. مسار النجاح في مثلث ياباني هو متتالية مؤلفة من n دائرة يبدأ بالدائرة في السطر العلوي ثم ينتقل على التوالي من دائرة إلى إحدى الدائريتين الواقعتين تحتها مباشرةً وصولاً إلى السطر الأخير. هنا مثال على مثلث ياباني في حالة $n = 6$ مع مسار نجاح يحوي دائرتين حمراوين فيه.



جد بدلالة n أكبر عدد k بحيث يحتوي أي مثلث ياباني على مسار نجاح يضم k كرة حمراء اللون على الأقل.

مسألة 6. ليكن ABC مثلثاً متساوياً الأضلاع. ولتكن A_1, B_1, C_1 ثالث نقاط واقعة داخله وتحقق

$$BA_1 = A_1C, \quad CB_1 = B_1A, \quad AC_1 = C_1B$$

وكذلك

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

يتقاطع BC_1 و BA_2 في A_2 . ويتقاطع CA_1 و CB_1 في B_2 , وأخيراً يتقاطع AB_1 و AC_2 في C_2 . بافتراض أن أطوال أضلاع المثلث $A_1B_1C_1$ مختلفة مثنى مثنى أثبت وجود نقطتين مشتركتين تشتراك بهما الدوائر الثلاث المارة برؤوس كل من المثلثات AA_1A_2 و CC_1C_2 و BB_1B_2 .