

Wednesday, July 15, 2009
יום רביעי 15 ביולי, 2009

בעיה 1. יהי n מספר חובי שלם, ויהיו a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) מספרים שלמים שונים זה מזה מתוך הקבוצה $\{1, \dots, n\}$, כך ש- n מחלק את $a_i(a_{i+1}-1)$ עבור $i = 1, \dots, k-1$. הוכח כי n אינו מחלק את $a_k(a_1-1)$.

בעיה 2. יהיו ABC משולש שמרכזו המרגל החוסם אותו הוא O . הנקודות P ו- Q הן נקודות פנימיות של הצלעות AB ו- CA , בהתאם. יהיו K, L ו- M נקודות האמצע של הקטעים PQ ו- OQ , בהתאמה. יהיה Γ המרגל העובר דרך PQ ו- OM . נניח כי הישר PQ משיק למעגל Γ . הוכח כי $OP = OQ$.

בעיה 3. נניח כי \dots, s_3, s_2, s_1 היא סדרה עולה ממש של מספרים שלמים חיוביים, כך ששתי התת-סדרות

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad - \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

הן סדרות חשבוניות. הוכח כי הסדרה \dots, s_3, s_2, s_1 עצמה סדרה חשבונית.

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות וחצי
כל שאלה שווה 7 נקודות

Thursday, July 16, 2009
יום חמישי, 16 ביולי, 2009

בעיה 4. יהיו ABC משולש שבו $AB = AC$. חוציא הווית של הווית $\angle CAB$ ו- $\angle ABC$ פוגשים את הצלעות BC ו- CA ב- D ו- E , בהתאם. יהיו K מרכזו המעגל החסום במשולש ADC . נניח כי $\angle BEK = 45^\circ$. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $\angle CAB$.

בעיה 5. מצא את כל הפונקציות f מקבוצת המספרים השלמים החוביים לקבוצת המספרים השלמים החוביים, כך שעבור כל שני מספרים שלמים חוביים a ו- b קיים משולש לא מנון שצלעוותיו הן באורכים

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1)$$

(משולש לא מנון הוא משולש שקודקודיו אינם נמצאים על ישר אחד)

בעיה 6. יהיו a_1, a_2, \dots, a_n מספרים שלמים חוביים שונים זה מזה, ותהי M קבוצה של $1-n$ מספרים שלמים חוביים שאינה מכילה את $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$. תגьץ צורך לкопוץ לאורך הציר הממשי, החל מנקודה 0, ולבצע n קפיצות ימינה בקפיצות באורכים a_1, a_2, \dots, a_n בסדר כלשהו. הוכח ניתן לבחור את סדר אורכי הקפיצות באופן שהחגיג לא ינתה לעולם על נקודה מסוימת M .

Language: Hebrew (Israel)

זמן המוקצב: 4 שעות וחצי
כל שאלה שווה 7 נקודות