Wtorek, 18 lipca 2017

Zadanie 1. Dla danej liczby całkowitej $a_0 > 1$ zdefiniujmy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ następująco:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{jeśli liczba } \sqrt{a_n} \text{ jest całkowita,} \\ a_n + 3 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant 0.$$

Wyznaczyć wszystkie wartości a_0, dla których istnieje taka liczba A, że $a_n = A$ dla nieskończenie wielu wartości n.

Zadanie 2. Przez $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Zadanie 3. Myśliwy i niewidzialny zając grają w grę na płaszczyźnie euklidesowej. Punkt startowy zająca A_0 oraz punkt startowy myśliwego B_0 są równe. Po $n-1$ rundach gry zając znajduje się w punkcie A_{n-1} a myśliwy znajduje się w punkcie B_{n-1}. W n-tej rundzie gry następujące trzy zdarzenia zachodzą kolejno.

(i) Zając, pozostając niewidocznym, przemieszcza się do dowolnego punktu A_n leżącego w odległości dokładnie 1 od A_{n-1}.

(ii) Urządzenie namierzające wskazuje myśliwemu pewien punkt P_n. Jedyną gwarancją dawaną myśliwemu przez urządzenie jest to, że odległość pomiędzy punktami P_n i A_n jest nie większa niż 1.

(iii) Myśliwy, pozostając widocznym, przemieszcza się do dowolnego punktu B_n leżącego w odległości dokładnie 1 od B_{n-1}.

Czy myśliwy może zawsze tak dobierać swoje ruchy, by, niezależnie od ruchów zająca oraz punktów wskazywanych przez urządzenie namierzające, po 10^9 rundach mieć pewność, że odległość pomiędzy nim a zającem jest nie większa niż 100?

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

Środa, 19 lipca 2017

Zadanie 4. Niech R i S będą różnymi punktami leżącymi na okręgu Ω, przy czym odcinek RS nie jest średnicą Ω. Prosta ℓ jest styczna do okręgu Ω w punkcie R. Niech T będzie takim punktem, że S jest środkiem odcinka RT. Punkt J wybrano na krótszym łuku RS okręgu Ω tak, że okrąg Γ opisany na trójkącie JST przecina prostą ℓ w dwóch różnych punktach. Niech A będzie punktem przecięcia okręgu Γ i prostej ℓ leżącym bliżej punktu R. Prosta AJ przecina okrąg Ω ponownie w punkcie K. Udowodnić, że prosta KT jest styczna do okręgu Γ.

Zadanie 5. Dana jest liczba całkowita $N \geqslant 2$. Drużyna $N(N+1)$ piłkarzy, wśród których każdych dwóch jest różnego wzrostu, ustawiła się w rzędzie. Trener Piechniczek chciałby usunąć $N(N-1)$ piłkarzy z tego rzędu w taki sposób, by w powstałym rzędzie złożonym z $2N$ piłkarzy następujących N warunków było spełnionych:

(1) nikt nie stoi pomiędzy dwoma najwyższymi piłkarzami;

(2) nikt nie stoi pomiędzy trzecim najwyższym piłkarzem i czwartym najwyższym piłkarzem;

$\vdots$

(N) nikt nie stoi pomiędzy dwoma najniższymi piłkarzami.

Wykazać, że jest to zawsze możliwe.

Zadanie 6. Uporządkowaną parę (x, y) liczb całkowitych nazywamy *punktem pierwotnym* jeśli największy wspólny dzielnik x i y wynosi 1. Dany jest skończony zbiór S składający się z punktów pierwotnych. Dowieść, że istnieje dodatnia liczba całkowita n oraz liczby całkowite a_0, a_1, $\ldots$, a_n takie, że dla każdego punktu pierwotnego (x, y) należącego do S spełniona jest równość:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.