Ponedeljek, 18. julij 2011

Naloga 1. Za vsako množico $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ štirih različnih naravnih števil označimo s s_A vsoto $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Naj bo n_A število tistih parov (i, j), kjer je $1 \leq i < j \leq 4$, za katere $a_i + a_j$ deli s_A. Določite vse množice A štirih različnih naravnih števil, za katere je vrednost n_A največja možna.

Naloga 2. Naj bo $\mathcal{S}$ končna množica vsaj dveh točk v ravnini. Denimo, da nobene tri točke iz $\mathcal{S}$ niso kolinearne. Z izrazom *mlin na veter* poimenujemo postopek, pri katerem na začetku izberemo premico ℓ, ki gre skozi točko $P \in \mathcal{S}$ in na kateri ne leži nobena druga točka iz $\mathcal{S}$. Premica se vrti v smeri urnega kazalca okrog *središča vrtenja* P vse do takrat, dokler premica prvič ne gre skozi še neko drugo točko iz $\mathcal{S}$. Ta točka, ki jo označimo s Q, nato postane novo središče vrtenja in premica se sedaj vrti v smeri urnega kazalca okrog Q vse do takrat, dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz $\mathcal{S}$. Ta postopek se nikoli ne konča, središče vrtenja je vedno točka iz $\mathcal{S}$.
Pokažite, da lahko vedno izberemo točko P iz $\mathcal{S}$ in premico ℓ, ki gre skozi P, tako da bo pri pripadajočem mlinu na veter vsaka točka iz $\mathcal{S}$ središče vrtenja neskončno mnogokrat.

Naloga 3. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero velja

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

za vsa realna števila x in y. Dokažite, da je $f(x) = 0$ za vse $x \leq 0$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

Torek, 19. julij 2011

Naloga 4. Naj bo n naravno število. Na voljo imamo primerjalno tehtnico in n uteži, ki tehtajo $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vseh n uteži želimo položiti na primerjalno tehtnico v n zaporednih korakih na tak način, da v vsakem izmed korakov izberemo eno izmed uteži, ki še ni na primerjalni tehtnici, in jo položimo bodisi v levo bodisi v desno posodo primerjalne tehtnice, pri čemer uteži v desni posodi po nobenem izmed n korakov niso težje od uteži v levi posodi.
Določite, na koliko načinov lahko to storimo.

Naloga 5. Naj bo f funkcija, ki slika iz množice celih števil v množico naravnih števil. Denimo, da je za poljubni celi števili m in n razlika $f(m) - f(n)$ deljiva s $f(m-n)$. Dokažite, da je za vsa cela števila m in n, za katera velja $f(m) \leq f(n)$, število $f(n)$ deljivo s $f(m)$.

Naloga 6. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik in naj bo Γ trikotniku ABC očrtana krožnica. Naj bo ℓ tangenta na krožnico Γ in naj bodo ℓ_a, ℓ_b in ℓ_c premice, ki jih dobimo, če prezrcalimo ℓ po vrsti prek premic BC, CA in AB. Pokažite, da se krožnica, ki je očrtana trikotniku, določenim s premicami ℓ_a, ℓ_b in ℓ_c, ter krožnica Γ dotikata.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.