

e martë, 15. korrik 2025

Problem 1. Një drejtëz në rrafsh quhet *e mirë* nëse **nuk** është paralele as me boshtin x , as me boshtin y , dhe as me drejtëzën $x + y = 0$.

Le të jetë $n \geq 3$ një numër i plotë i dhënë. Gjeni të gjithë numrat e plotë jonegativë k të tillë që ekzistojnë n drejtëza të ndryshme në rrafsh që plotësojnë njëkohësisht kushtet në vijim:

- për të gjithë numrat natyrorë a dhe b të tillë që $a + b \leq n + 1$, pika (a, b) është të paktën në një nga drejtëzat; dhe
- saktësisht k nga n drejtëzat janë të mira.

Problem 2. Le të jenë Ω dhe Γ rrathët me qendra M dhe N , përkatësisht, të tillë që rrezja e Ω është më e vogël se rrezja e Γ . Supozojmë se rrathët Ω dhe Γ priten në dy pikat të ndryshme A dhe B . Drejtëza MN pret Ω në C dhe Γ në D , të tilla që pikat C, M, N dhe D ndodhen në drejtëzë në ketë renditje. Le të jetë P qendra e rrethit të jashtëshkruar ACD . Drejtëza AP pret Ω përsëri në $E \neq A$. Drejtëza AP pret Γ përsëri në $F \neq A$. Le të jetë H ortoqendra e trekëndëshit PMN .

Tregoni që drejtëza që kalon nëpër pikën H dhe paralele me AP është tangjente në rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit BEF .

(*Ortoqendër e një trekëndëshi është pikëprerja e lartësive të tij.*)

Problem 3. Le të shënojmë me \mathbb{N} bashkësinë e numrave natyrorë. Një funksion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ quhet *fantastik* nëse

$$f(a) \text{ e pjesëton } b^a - f(b)^{f(a)}$$

për të gjithë numrat natyrorë a dhe b .

Gjeni konstanten më të vogël reale c të tillë që $f(n) \leq cn$ për të gjitha funksionet fantastike f dhe të gjithë numrat natyrorë n .

e mërkurë, 16. korrik 2025

Problem 4. Një pjesëtues i duhur i një numri natyror N është një pjesëtues pozitiv i N i ndryshëm nga vetë N .

Vargu i pafundëm a_1, a_2, \dots përbëhet nga numra natyrorë, ku secili prej tyre ka të paktën tre pjesëtues të duhur. Për çdo $n \geq 1$, termi a_{n+1} është i barabartë me shumën e tre pjesëtuesëve të duhur më të mëdhenj të a_n .

Gjeni të gjitha vlerat e mundshme të a_1 .

Problem 5. Ana dhe Beni po luajnë *lojën inekoalaty*, një lojë me dy lojtarë, ku rregullat varen nga numri pozitiv real λ që është i njojur për të dy lojtarët. Në hapin e n -të të lojës (duke filluar me $n = 1$) ndodh si në vijim:

- Nëse n është tek, Ana zgjedh një numër real jonegativ x_n të tillë që

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Nëse n është çift, Beni zgjedh një numër real jonegativ x_n të tillë që

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Nëse njëri lojtar nuk mundet të zgjedhë një numër të përshtatshëm x_n , loja përfundon dhe lojtari tjetër fiton. Nëse loja vazhdon pafundësisht, asnjëri nga lojtarët nuk fiton. Të gjithë numrat e zgjedhur janë të njojur nga dy lojtarët.

Gjeni të gjitha vlerat e λ për të cilat Ana ka strategji fituese dhe të gjitha vlerat e λ për të cilat Beni ka strategji fituese.

Problem 6. Konsiderojmë tabelën 2025×2025 të përbërë nga katrorë njësi. Matilda dëshiron që të vendosë në tabelë disa pllaka drejtkëndore, jo detyrimisht me përmasa të njehta, të tilla që brinjët e pllakës janë paralele me brinjët e tabelës dhe çdo kulm i pllakës ndodhet në kulmin e një prej katrорëve njësi, si dhe çdo katoror njësi të mbulohet nga e shumta një pllakë.

Gjeni numrin më të vogël të pllakave që Matilda duhet të vendosë në mënyrë që çdo rresht dhe çdo shtyllë të ketë saktësisht një katoror njësi që nuk është mbuluar nga ndonjë pllakë.