



18 iyul 2011. Bazarertəsi

Məsələ 1. Dörd fərqli müsbət tam ədədlərdən ibarət $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ çoxluğu üçün $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ cəmini s_A ilə işarə edək. n_A ilə isə, elə (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$ cütlerinin sayı işarə olunmuşdur ki, s_A cəmi $a_i + a_j$ -yə bölünür. Dörd fərqli müsbət tam ədədlərdən ibarət bütün elə A çoxluqlarını tapın ki, onlar üçün n_A mümkün ən böyük qiymətini alsın.

Məsələ 2. S - müstəvi üzərində ən azı 2 nöqtəsi olan sonlu sayda nöqtələr çoxluğu olsun. Məlumdur ki, S çoxlugunun hər hansı ixtiyari üç nöqtəsi bir düz xətt üzərində yerləşmirlər. Aşağıdakı əməliyyatı *Dəyirman* adlandırıraq. Əvvəlcə üzərində ancaq bir $P \in S$ nöqtəsi olan l düz xətti seçilir. l düz xətti dönmə mərkəzi P nöqtəsi olmaqla S çoxlugundan başqa bir nöqtədən keçdiyi ana qədər saat əqrəbi istiqamətində dönməktədir. Bundan sonra həmin başqa nöqtəni Q ilə işarə etsək düz xətt dönmə mərkəzi Q olmaqla təkrar S çoxlugundan başqa bir nöqtədən keçdiyi ana qədər saat əqrəbi istiqamətində döñəcəkdir. Bu hadisə sonsuz sayda davam edəcəkdir.

İsbat edin ki S çoxlugundan götürülmüş elə bir P nöqtəsi və bu P nöqtəsindən keçən elə bir l düz xətti seçmək olar ki, l düz xətti ilə başlayan *dəyirman* üçün S çoxlugunun hər bir nöqtəsi dönmə mərkəzi olaraq sonsuz sayda iştirak etsin.

Məsələ 3. $f : R \rightarrow R$ təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu həqiqi ədələr çoxlugundan ibarət olan və həqiqi x, y ədədləri üçün

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

şərtini ödəyən funksiya olsun. Isbat edin ki, bütün $x \leq 0$ ədədləri üçün $f(x) = 0$ olar.



19 iyul 2011. Çərşəmbə axşamı

Məsələ 4. $n > 0$ bir tam ədəddir. İki gözlü tərəzi və agırlıqları $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ olan n sayda çəki daşları verilmişdir. Bütün bu çəki daşlarını n addımda növbə ilə və heç bir addımda tərəzinin sağ gözünün sol gözündən daha ağır olmayacaq şəkildə tərəzinin gözlərinə qoymamız lazım. Bütün bu çəki daşları tərəziyə qoyulana qədər hər addımda əvvəlcədən tərəziyə qoyulmamış bir çəki daşı seçilir və tərəzinin ya sağ və ya sol gözünə qoyulur.

Bu addımlar ardıcılılığını neçə fərqli şəkildə edəbiləcəyimizi müəyyənləşdirir.

Məsələ 5. Təyin oblastı tam ədədlər çoxluğu və qiymətlər oblastı müsbət tam ədədlər çoxluğu olan $f : Z \rightarrow Z^+$ funksiyası verilmişdir. Məlumdur ki, istənilən m və n tam ədədləri üçün $f(m) - f(n)$ fərqi $f(m-n)$ -ə bölünür. Isbat edin ki, $f(m) \leq f(n)$ şərtini ödəyən bütün m və n tam ədədləri üçün $f(n)$ ədədi $f(m)$ -ə bölünür.

Məsələ 6. ABC – itibucaklı üçbucaq və Γ -onun xaricinə çəkilmiş çevrə olsun. l düz xətti Γ -çevrəsinə toxunan düz xəttidir. l_a, l_b, l_c - isə uyğun olaraq BC, CA və AB düz xətlərinə nisbətən l düz xəttinə simmetrik olan düz xətlərdir. Isbat edin ki, l_a, l_b, l_c düz xətlərindən əmələ gələn üçbucagın xaricinə çəkilmiş çevrə, Γ -çevrəsinə toxunur.