Þriðjudagur, 18. júlí, 2017

Dæmi 1. Fyrir sérhverja heiltölu $a_0 > 1$, skilgreinum við rununa $a_0, a_1, a_2, \ldots$ með

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ef } \sqrt{a_n} \text{ er heiltala,} \\ a_n + 3 & \text{annars,} \end{cases} \qquad \text{fyrir sérhvert } n \geqslant 0.$$

Ákvarðið öll gildi á a_0 þannig að til sé tala A þannig að $a_n = A$ fyrir óendalega mörg gildi á n.

Dæmi 2. Látum $\mathbb{R}$ vera mengi rauntalnanna. Ákvarðið öll föll $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að fyrir allar rauntölur x og y þá sé

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Dæmi 3. Veiðimaður og ósýnileg kanína leika leik í Evklíðsku sléttunni. Upphafspunktur kanínunnar, A_0, og upphafspunktur veiðimannsins, B_0, eru sá sami. Eftir $n-1$ umferð leiksins þá er kanínan stödd í punkti A_{n-1} og veiðimaðurinn staddur í punkti B_{n-1}. Í n-tu umferð leiksins gerast þrír hlutir í röð.

(i) Kanínan færir sig óséð í punkt A_n þannig að fjarlægðin á milli A_{n-1} og A_n er nákvæmlega 1.

(ii) Staðsetningartæki gefur veiðimanninum punkt P_n. Eina vissan sem veiðimaðurinn hefur um punktinn frá tækinu er að fjarlægðin milli P_n og A_n er í mesta lagi 1.

(iii) Veiðimaðurinn færir sig sýnilega í punkt B_n þannig að fjarlægðin á milli B_{n-1} og B_n er nákvæmlega 1.

Er alltaf mögulegt, sama hverning kanínan færir sig og sama hvaða punkta staðsetningartækið gefur, fyrir veiðimanninn að velja hverning hann færir sig þannig að eftir 10^9 umferðir geti hann tryggt að fjarlægðin milli hans og kanínunnar sé í mesta lagi 100?

Miðvikudagur, 19. júlí, 2017

Dæmi 4. Látum R og S vera ólíka punkta á hringnum Ω þannig að RS er ekki miðstrengur. Látum ℓ vera snertil Ω í R. Punktur T er þannig að S er miðpunktur striksins RT. Punktur J er valinn á minni boganum RS á Ω þannig að umritaði hringurinn Γ um þríhyrninginn JST skeri ℓ í tveimur ólíkum punktum. Látum A vera skurðpunkt Γ og ℓ sem er nær R. Línan AJ sker Ω aftur í K. Sannið að línan KT sé snertill Γ.

Dæmi 5. Heiltala $N \geqslant 2$ er gefin. Hópur $N(N+1)$ fótboltamanna, sem engir tveir eru jafn háir, standa í röð. Lars will fjarlægja $N(N-1)$ leikmenn úr röðinni og skilja eftir nýja röð af $2N$ leikmönnum þannig að eftirfarandi N skilyrði séu uppfyllt:

(1) Enginn stendur á milli tveggja hæstu leikmannanna,

(2) enginn stendur á milli þriðja og fjörða hæsta leikmannsins,

$\vdots$

(N) enginn stendur á milli tveggja lægstu leikmannanna.

Sýnið að þetta sé alltaf mögulegt.

Dæmi 6. Raðar par (x, y) heiltalna er *frumstæður punktur* ef stærsti samdeilir x og y er 1. Gefið endanlegt mengi S af frumstæðum punktum, sannið að alltaf sé til jákvæð heiltala n og heiltölur a_0, a_1, …, a_n þannig að fyrir sérhvert (x, y) í S, gildi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$