Дүйсенбі, Шілде 18, 2011

Есеп 1. Әртүрлі төрт оң бүтін саннан тұратын $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ жиыны үшін s_A арқылы $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ қосындысын белгілейік. Сонан соң n_A арқылы мына шартты қанағаттандыратын (i, j) парларының $(1 \leq i < j \leq 4)$ санын белгілейік: s_A саны $a_i + a_j$ санына қалдықсыз бөлінеді.

Әртүрлі төрт оң бүтін саннан тұратын және n_A санын максимал мүмкін мәнге жеткізетін барлық A жиынын табыңдар.

Есеп 2. Жазықтықта кемінде екі нүктеден тұратын ақырлы нүктелердің $\mathcal{S}$ жиыны берілген. $\mathcal{S}$ жиынынан алынған кез келген үш нүкте бір түзудің бойында жатпайды. Мынадай үрдісті *диірмен* деп атаймыз: ол $\mathcal{S}$ жиынымен тек қана бір ортақ P нүктесі бар ℓ түзуінің көмегімен басталады; біз осы түзуді сағат тілімен P *центрін* айналдыра, түзу үстінде $\mathcal{S}$ жиынының басқа бір нүктесі пайда болған мезетке шейін бұра береміз; бұл нүкте, оны Q деп белгілейік, осы мезеттен бастап жаңа центр ретінде қарастырылып, енді түзуді сағат тілімен Q нүктесін айналдыра, түзу үстінде $\mathcal{S}$ жиынының басқа бір нүктесі пайда болғанша бұра береміз. Бұл үрдіс ақырсыз жалғаса береді.

$\mathcal{S}$ жиынының бір P нүктесі және осы P нүктесі арқылы өтетін бір ℓ түзуі үшін ℓ түзуінің көмегімен басталған диірмен үрдісінің орындалу барысында $\mathcal{S}$ жиынының әрбір нүктесі ақырсыз көп рет центр рөлін атқаратынын дәлелдеңдер.

Есеп 3. $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынында анықталған және осы жиында мәндерін қабылдайтын $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциясы кез келген нақты x, y сандары үшін

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Кез келген $x \leq 0$ үшін $f(x) = 0$ болатынын дәлелдеңдер.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Kazakh**

Day: **2**

Сейсенбі, Шілде 19, 2011

Есеп 4. Бір бүтін $n > 0$ саны бекітілген. Бізге екі табағы бар таразы және салмақтары $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ болатын n тас берілген. Біздің мақсатымыз – тастарды, ешбір жүрістен кейін таразының оң жақ табағы басып кетпейтіндей етіп, бір-бірлеп, n жүрістің ішінде табақтарға салып шығу. Ең басында таразы табақтары бос және әрбір жүрісте біз таразыға салынбай қалған тастардың кез келген біреуін алып, оны таразының сол жақ немесе оң жақ табағына сала аламыз.

Мақсатымызды қанша әдіспен іске асыруға болатынын анықтаңдар.

Есеп 5. Бізге $f : Z \to N$ функциясы берілген, мұнда Z бүтін сандар жиынын, ал N оң бүтін сандар жиынын белгілейді. Кез келген бүтін m және n сандары үшін $f(m) - f(n)$ айырмасы $f(m - n)$ санына қалдықсыз бөлінетіні белгілі.

Кез келген m және n бүтін сандары үшін, егер $f(m) \leq f(n)$ болса, онда $f(n)$ саны $f(m)$ санына қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

Есеп 6. Сырттай сызылған шеңбері Γ болатын сүйірбұрышты ABC үшбұрышы берілген. ℓ түзуі Γ-ны жанайды, ал ℓ_a, ℓ_b және ℓ_c түзулері ℓ түзуіне сәйкесінше BC, CA және AB түзулеріне қарағанда симметриялы екені белгілі.

ℓ_a, ℓ_b және ℓ_c түзулері анықтайтын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің Γ шеңберін жанайтынын дәлелдеңдер.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады