



Language: Czech

Day: 1

Úterý, 23. července 2013

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolnou dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel m_1, m_2, \dots, m_k (ne nutně různých) takových, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Úloha 2. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazýváme *kolumbijským*, jestliže je z nich 2013 červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů v rovině v ní existuje skupina k dobrých přímek.

Úloha 3. V trojúhelníku ABC nechť se kružnice připsaná ke straně BC dotýká této strany v bodě A_1 . Analogicky nechť body B_1 , resp. C_1 , jsou body dotyku kružnic připsaných ke straně AC , resp. ke straně AB , s těmito stranami. Nechť střed kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC , polopřímky opevněné k polopřímce BA a polopřímky opevněné k polopřímce CA . Obdobně je definována kružnice připsaná ke straně AC , resp. AB .

Language: Czech

Čas na řešení: 4 h 30 min.
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů.



Language: Czech

Day: 2

Středa, 24. 2013

Úloha 4. Bud' ABC ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek H a nechť W je bod na straně BC ($W \neq B, W \neq C$). Označme M , resp. N , patu výšky z bodu B , resp. z bodu C . Označme dále ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku BWN a nechť X je bod na této kružnici takový, že úsečka WX je průměrem kružnice ω_1 . Analogicky nechť ω_2 je kružnice opsaná trojúhelníku CWM a Y bod na ní takový, že úsečka WY je průměrem kružnice ω_2 . Dokažte, že body X , Y a H leží na přímce.

Úloha 5. Nechť $\mathbb{Q}_{>0}$ značí množinu kladných racionálních čísel. Uvažme funkce $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

- (i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$,
- (ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$,
- (iii) existuje $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, $a > 1$ takové, že $f(a) = a$.

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Úloha 6. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a mějme $n+1$ bodů, rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme o takových označkováních těchto bodů číselnými znaky $0, 1, \dots, n$, ve kterých je použit každý z těchto znaků právě jednou. Dvě taková označkování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Označkování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolná čtyři znaky $a < b < c < d$ takové, že $a+d = b+c$, tětiva spojující body označené znaky a a d neprotíná tětivu spojující body označené znaky b a c .

Nechť M značí počet krásných označkování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq n$ a $\text{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

Language: Czech

Čas na řešení: 4 h 30 min.
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů.