Երեքշաբթի, հուլիսի 10 , 2012թ.

Խնդիր 1: Տրված է *ABC* եռանկյունը, *J* կետը հանդիսանում է A գագաթին համապատասխան առներգծած շրջանագծի կենտրոնը: Այդ առներգծած շրջանագիծը *BC* կողմը շոշափում է *M*, իսկ *AB* և *AC* ուղիղները՝ համապատասխանաբար *K* և *L* կետերում: *LM* և *BJ* ուղիղները հատվում են *F* կետում, իսկ *KM* և *CJ* ուղիղները հատվում են *G* կետում: Դիցուք *S* կետը *AF* և *BC* ուղիղների հատման կետն է, իսկ *T* –ն *AG* և *BC* ուղիղների հատման կետն է: Ապացուցել, որ *M* կետը *ST* հատվածի միջնակետն է:

(*ABC* եռանկյան *A* գագաթին համապատասխան *առներգծած շրջանագիծ* կոչվում է այն շրջանագիծը, որը շոշափում է *BC* կողմը, և *AB* ու *AC* կողմերի շարունակությունները:)

Խնդիր 2: Տրված են $n \geq 3$ ամբողջ թիվը և $a_2, a_3, \ldots, a_n$ դրական թվերն այնպես, որ $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$: Ապացուցել, որ $(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$:

Խնդիր 3: *A* և *B* խաղացողները խաղում են *գուշակիր* խաղը: Այդ խաղի կանոնները կախված են երկու *k* և *n* դրական ամբողջ թվերից, և այդ թվերը հայտնի են երկու խաղացողներին:
Խաղի սկզբում *A* խաղացողը ընտրում է x և N ամբողջ թվերն այնպես, որ $1 \leq x \leq N$: *A* խաղացողը *x* թիվը պահում է գաղտնի, իսկ *N* թիվը հայտնում է *B* խաղացողին: Դրանից հետո *B* խաղացողը փորձում է ստանալ տեղեկություն *x* թվի մասին, *A* խաղացողին տալով հետևյալ տիպի հարցեր. մի հարցով *B* խաղացողը իր հայեցողությամբ նշում է մի որևէ *S* բազմություն, որը կազմված է դրական ամբողջ թվերից, և հարցնում է *A* խաղացողին, *x* թիվը պատկանում է արդյոք *S* բազմությանը: *B* խաղացողը կարող է տալ այնքան հարց, որքան ինքը ցանկանում է, ընդ որում յուրաքանչյուր հարց կարող է տալ նաև մեկից ավելի անգամ: *A* խաղացողը *B* խաղացողի յուրաքանչյուր հարցին անմիջապես պատասխանում է այո կամ ոչ, ընդ որում նրան թույլատրվում է ստել այնքան անգամ, որքան ինքը ցանկանում է: Միակ սահմանափակումն այն է, որ յուրաքանչյուր $k + 1$ հաջորդական պատասխաններից գոնե մեկը պետք է ճիշտ լինի: Այն բանից հետո, երբ *B* խաղացողը կտա այնքան հարց, որքան ինքը համարում է անհրաժեշտ, նա պետք է նշի *X* բազմությունը, որը պարունակում է *n*-ից ոչ շատ դրական ամբողջ թվեր: Եթե *x*-ը պատկանում է *X* բազմությանը, ապա *B* խաղացողը հաղթել է, հակառակ դեպքում *B* խաղացողը պարտվել է: Ապացուցել, որ

1. Եթե $n \geq 2^k$, ապա *B* խաղացողը կարող է երաշխավորել իր հաղթանակը:

2. Յուրաքանչյուր *k* բավականաչափ մեծ թվի համար գոյություն ունի $n \geq 1.99^k$ ամբողջ թիվ այնպես, որ *B* խաղացողը չի կարող երաշխավորել իր հաղթանակը:

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր

Չորեքշաբթի, հուլիսի 11, 2012թ.

Խնդիր 4: Գտնել այն բոլոր $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ֆունկցիաներն այնպես, որ յուրաքանչյուր a, b, c թվերի համար, որոնք բավարարում են $a+b+c=0$ պայմանին, տեղի ունի

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$ հավասարությունը:

($\mathbb{Z}$-ով նշանակված է բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունը:)

Խնդիր 5: ABC եռանկյան համար հայտնի է, որ $\angle BCA=90^0$, և D կետը C գագաթից տարված բարձրության հիմքն է: CD հատվածի վրա վերցրած է X ներքին կետը: Դիցուք՝ K կետը գտնվում է AX հատվածի վրա և $BK=BC$: Համանմանորեն L կետը գտնվում է BX հատվածի վրա և $AL=AC$. Դիցուք՝ M կետը AL և BK հատվածների հատման կետն է:

Ապացուցել, որ $MK=ML$:

Խնդիր 6: Գտնել այն բոլոր n դրական ամբողջ թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունեն $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ոչ բացասական ամբողջ թվեր այնպես, որ

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1:$$

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր