Петок, 10-ти јули, 2015

Задача 1. Конечно множество $\mathcal{S}$ од точки во рамнината се нарекува *балансирано* ако за секои две различни точки A и B од множеството $\mathcal{S}$ постои точка C од множеството $\mathcal{S}$ таква да $AC = BC$. Множество $\mathcal{S}$ се нарекува *бесцентрично* ако за никои три различни точки A, B и C од множеството $\mathcal{S}$ не постои точка P во $\mathcal{S}$ таква да $PA = PB = PC$.

(а) Докажи дека за секој природен број $n \geqslant 3$ постои балансирано множество кое се состои од n точки.

(б) Најди ги сите природни броеви $n \geqslant 3$ за кои постои балансирано бесцентрично множество кое се состои од n точки.

Задача 2. Најди ги сите тројки од природни броеви (a, b, c) такви да секој од броевите

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

е степен на бројот 2.

(*Степен на бројот* 2 *е број од обликот* 2^n, *каде* n *е ненегативен цел број.*)

Задача 3. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $AB > AC$. Нека Γ е неговата опишана кружница, H е неговиот ортоцентар, а F е подножјето на висината спуштена од темето A. Точката M е средина на отсечката BC. Нека Q е точката на кружницата Γ таква да $\sphericalangle HQA = 90^\circ$, а K е точката на кружницата Γ таква да $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Се претпоставува дека точките A, B, C, K и Q се меѓусебно различни и дека лежат на кружницата Γ во тој редослед.

Докажи дека опишаните кружници околу триаголниците KQH и FKM се допираат.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Сабота, 11-ти јули, 2015

Задача 4. Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот ABC и O е нејзиниот центар. Кружницата Γ со центар во точката A ја сече отсечката BC во точките D и E така да точките B, D, E и C се меѓусебно различни и лежат на правата BC во тој редослед. Нека F и G се точките на пресекот на кружниците Γ и Ω, при што точките A, F, B, C и G лежат на кружницата Ω во тој редослед. Нека K е другата точка на пресекот на опишаната кружница околу триаголникот BDF и отсечката AB. Нека L е другата точка на пресекот на опишаната кружница околу триаголникот CGE и отсечката CA.

Се претпоставува дека правите FK и GL се различни и дека се сечат во точката X. Докажи дека точката X лежи на правата AO.

Задача 5. Со $\mathbb{R}$ е означено множеството на сите реални броеви. Одреди ги сите функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кои го задоволуваат равенството

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

за сите реални броеви x и y.

Задача 6. Низата од цели броеви $a_1, a_2, \ldots$ ги задоволува следните услови:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ за сите $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за сите $1 \leqslant k < \ell$.

Докажи дека постојат природни броеви b и N такви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

за сите цели броеви m и n за кои $n > m \geqslant N$.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода