Salı, 18 Temmuz 2017

Soru 1. Her $a_0 > 1$ tam sayısı için a_0, a_1, a_2, ... dizisi şu şekilde tanımlanıyor:

$$\text{her } n \geqslant 0 \text{ için } \; a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{eğer } \sqrt{a_n} \text{ tam sayı ise} \\ a_n + 3 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

a_0 ın hangi değerleri için öyle bir A sayısı vardır ki sonsuz çoklukta n değeri için $a_n = A$ olsun?

Soru 2. Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. Tüm x, y gerçel sayıları için

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Soru 3. Bir avcı ve bir görünmez tavşan düzlemde bir oyun oynuyorlar. Tavşanın başlama noktası A_0 ile avcının başlama noktası B_0 aynıdır. Oyunun $(n-1)$'inci turunun sonunda tavşan A_{n-1} noktasında, avcı ise B_{n-1} noktasında bulunsun. Oyunun n'inci turunda, şu üç işlem sırayla gerçekleşiyor:

(i) Tavşan A_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir A_n noktası seçip görünmez kalarak A_n ye yerleşiyor.

(ii) Bir takip cihazı avcıya bir P_n noktası bildiriyor. Takip cihazının avcıya verdiği tek garanti P_n ile A_n arasındaki uzaklığın 1 birimden fazla olmadığıdır.

(iii) Avcı B_{n-1} noktasına tam olarak 1 birim uzaklıkta bulunan bir B_n noktası seçip görünür kalarak B_n ye yerleşiyor.

Tavşan nasıl hareket ederse etsin ve takip cihazı hangi noktaları bildirirse bildirsin, avcı kendi hareketlerini öyle seçebilir mi ki 10^9 tur sonunda kendisiyle tavşan arasındaki uzaklığın 100 den fazla olmayacağını garantilesin?

Süre: 4 saat 30 dakikadır
Her soru 7 puan değerindedir

Çarşamba, 19 Temmuz 2017

Soru 4. Bir Ω çemberi üzerinde birbirinden farklı R ve S noktaları RS çap olmayacak şekilde alınıyor. Ω ya R de teğet olan doğru ℓ olsun. T noktası, $[RT]$ doğru parçasının orta noktası S olacak şekilde alınıyor. Ω nın kısa RS yayı üzerinde bir J noktası, JST üçgeninin çevrel çemberi Γ ile ℓ doğrusu iki farklı noktada kesişecek şekilde alınıyor. Γ ve ℓ nin kesişim noktalarının R ye daha yakın olanı A olsun. AJ doğrusu Ω yı ikinci kez K da kessin. KT nin Γ ya teğet olduğunu gösteriniz.

Soru 5. $N \geqslant 2$ verilmiş bir tam sayı olsun. Herhangi ikisinin boyları birbirinden farklı olan $N(N+1)$ futbolcu bir şekilde yan yana sıraya dizilmiştir. Takımın antrenörü bu sıradan $N(N-1)$ futbolcuyu öyle çıkarmak istiyor ki geriye kalan $2N$ futbolcudan oluşan yeni sıra aşağıdaki N adet şartı sağlasın:

(1) En uzun futbolcu ile ikinci en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

(2) Üçüncü en uzun futbolcu ile dördüncü en uzun futbolcu arasında kimse olmayacak,

$\vdots$

(N) İkinci en kısa futbolcu ile en kısa futbolcu arasında kimse olmayacak.

Antrenörün bunu her zaman yapabileceğini gösteriniz.

Soru 6. x ve y tam sayıları aralarında asalsa (x, y) sıralı ikilisine *temel ikili* diyelim. Sonlu sayıda temel ikiliden oluşan herhangi bir S kümesi verilmiş olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan bir n pozitif tam sayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz:

S deki her (x, y) için $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$ dir.

Language: Turkish

Süre: 4 saat 30 dakikadır
Her soru 7 puan değerindedir