şənbə, 8. iyul 2023

Məsələ 1. Aşağıdakı şərti ödəyən bütün $n > 1$ mürəkkəb tam ədədlərini tapın: əgər n-in bütün müsbət tam bölənləri $d_1, d_2, \ldots, d_k$ olarsa və $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ şərti ödənərsə, onda hər bir $1 \leqslant i \leqslant k-2$ üçün d_i ədədi $d_{i+1} + d_{i+2}$ ədədini bölür.

Məsələ 2. İtibucaqlı ABC üçbucağında $AB < AC$ olsun. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə Ω olsun. Ω çevrəsində A nöqtəsi daxil olan CB qövsünün orta nöqtəsi S olsun. A nöqtəsindən BC-ə çəkilmiş perpendikulyar BS parçası ilə D nöqtəsində və Ω ilə yenidən $E \neq A$ nöqtəsində kəsişir. D nöqtəsindən BC-ə çəkilmiş paralel xətt BE xətti ilə L nöqtəsində kəsişir. BDL üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə ω olsun. ω ilə Ω yenidən $P \neq B$ nöqtəsində kəsişir.
İsbat edin ki, ω çevrəsinə P nöqtəsindən çəkilmiş toxunan ilə BS xətti $\angle BAC$ bucağının daxili tənböləni üzərində kəsişir.

Məsələ 3. Hər bir $k \geqslant 2$ tam ədədi üçün, bütün elə müsbət tam ədədlərdən təşkil olunmuş $a_1, a_2, \ldots$ sonsuz ardıcıllıqlarını tapın ki, hər bir $a_1, a_2, \ldots$ ardıcıllığı üçün $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ mənfi olmayan tam ədədlər olacaq şəkildə elə bir $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ formasında P çoxhədlisi mövcud olsun ki, hər bir $n \geqslant 1$ tam ədədi üçün

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

şərti ödənsin.

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.

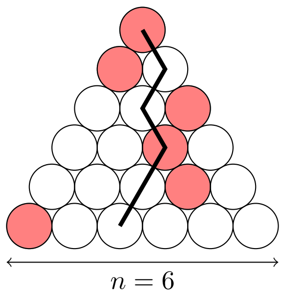
bazar, 9. iyul 2023

Məsələ 4. $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ istənilən ikisi bir-birindən fərqli olan müsbət həqiqi ədədlər olsun və hər bir $n = 1, 2, \ldots, 2023$ üçün

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

bir tam ədəd olsun. İsbat edin ki, $a_{2023} \geqslant 3034$.

Məsələ 5. n müsbət tam ədəd olsun. Bir *Yapon üçbucağı* $1+2+\cdots+n$ sayda çevrənin bərabərtərəfli üçbucaq şəklində düzülməsindən elə əmələ gəlmişdir ki, hər bir $i = 1, 2, \ldots, n$ üçün i-ci sətrdə dəqiq i sayda çevrə vardır və bunların dəqiq bir dənəsi qırmızı ilə rənglənib. Yapon üçbucağında bir *ninja yolu* ən təpədəki çevrədən başlayıb, hər addımda olduğu çevrənin tam altındakı iki çevrədən birinə gedib, ən aşağı sətrdə bitirənədək yaranan n çevrədən ibarət olan bir ardıcıllıqdır. Aşağıda, $n = 6$ olduqda bir Yapon üçbucağı və iki ədəd qırmızı çevrəsi olan bir ninja yolu nümunə üçün verilmişdir.



İstənilən Yapon üçbucağında ən azı k sayda qırmızı çevrəsi olan bir ninja yolu vardırsa, k ədədinin ala biləcəyi ən böyük qiyməti n-dən asılı olacaq şəkildə tapın.

Məsələ 6. ABC bərabərtərəfli üçbucaq olsun. A_1, B_1, C_1 nöqtələri ABC üçbucağının daxilində $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ və

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

olacaq şəkildə verilmişdir. BC_1 və CB_1 xətləri A_2 nöqtəsində, CA_1 və AC_1 xətləri B_2 nöqtəsində, və AB_1 və BA_1 xətləri C_2 nöqtəsində kəsişir.
İsbat edin ki, əgər $A_1B_1C_1$ müxtəliftərəfli üçbucaq olarsa, onda AA_1A_2, BB_1B_2 və CC_1C_2 üçbucaqlarının xaricinə çəkilmiş üç çevrənin hamısı iki ədəd ortaq nöqtədən keçəcək.

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.