Lithuanian version

Day 1, 2007-07-25

1 uždavinys. Duoti realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Su kiekvienu i $(1 \le i \le n)$ apibrėžkime

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}.$$

Tegul $d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}$.

(a) Įrodykite, kad kokie bebūtų realieji skaičiai $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, visada yra teisinga nelygybė

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Įrodykite, kad egzistuoja toks realiųjų skaičių rinkinys $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, su kuriuo nelygybė $(*)$ virsta lygybe.

2 uždavinys. Tegul A, B, C, D ir E yra tokie penki taškai, kad $ABCD$ – lygiagretainis, o $BCED$ – iškilasis keturkampis, apie kurį galima apibrėžti apskritimą. Tegul ℓ yra tiesė, einanti per tašką A. Yra žinoma, kad ℓ kerta atkarpą DC kažkuriame tos atkarpos vidiniame taške F, o tiesę BC – taške G. Tegul $EF = EG = EC$. Įrodykite, kad ℓ yra kampo DAB pusiaukampinė.

3 uždavinys. Kai kurie matematikos varžybų dalyviai yra draugai. Draugystė visada abipusė, t.y., jei A yra B draugas, tai ir B yra A draugas. Vadinkime grupę varžybų dalyvių *klika*, jeigu bet kurie du tos grupės nariai yra draugai. (Bet kuri grupė, kurią sudaro mažiau negu du dalyviai, taip pat yra laikoma klika.) Klikos narių skaičius yra vadinamas jos *dydžiu*.

Yra žinoma, kad pačios didžiausios iš visų varžybų dalyvių sudaromos klikos dydis yra lyginis skaičius. Įrodykite, kad visi varžybų dalyviai gali būti taip išskirstyti į du kambarius, kad didžiausios viename kambaryje esančios klikos dydis būtų lygus didžiausios kitame kambaryje esančios klikos dydžiui.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.

Lithuanian version

Day 2, 2007-07-26

4 uždavinys. Trikampio ABC kampo BCA pusiaukampinė kerta apibrėžtą apie ABC apskritimą kitame taške R. Tarkime, kad K yra atkarpos BC vidurio taškas, o L yra atkarpos AC vidurio taškas. Tiesė, kuri eina per tašką K ir yra statmena atkarpai BC, kerta tiesę CR taške P, o tiesė, kuri eina per tašką L ir yra statmena atkarpai AC, kerta tiesę CR taške Q. Įrodykite, kad trikampių RPK ir RQL plotai yra lygūs.

5 uždavinys. Tegul a ir b yra tokie natūralieji skaičiai, kad $(4a^2-1)^2$ dalijasi iš $4ab-1$ be liekanos. Įrodykite, kad $a = b$.

6 uždavinys. Tegul n yra natūralusis skaičius. Nagrinėkime aibę

$$S = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\}$$

kaip trimatės erdvės taškų aibę, sudarytą iš $(n+1)^3 - 1$ taškų. Kiek mažiausiai reikia paimti plokštumų, kad jų visų sąjungai priklausytų visi aibės S taškai, bet nepriklausytų taškas $(0, 0, 0)$?

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.