

sabato, 8. luglio 2023

**Problema 1.** Determinare tutti i numeri composti  $n > 1$  con la seguente proprietà: se i divisori positivi di  $n$  sono ordinati a formare una lista  $d_1, d_2, \dots, d_k$  tale che

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n,$$

allora si ha che  $d_i$  divide  $d_{i+1} + d_{i+2}$  per ogni  $i$  tale che  $1 \leq i \leq k - 2$ .

(Nota: un numero composto è un intero  $n > 1$  che non è un numero primo.)

**Problema 2.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo con  $AB < AC$ . Sia  $\Omega$  la circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ . Sia  $S$  il punto medio dell'arco  $CB$  di  $\Omega$  che contiene  $A$ . La perpendicolare a  $BC$  passante per  $A$  interseca la retta  $BS$  in  $D$ , e interseca nuovamente  $\Omega$  in  $E \neq A$ . La parallela a  $BC$  passante per  $D$  interseca la retta  $BE$  in  $L$ . Sia  $\omega$  la circonferenza circoscritta al triangolo  $BDL$ , e sia  $P \neq B$  il punto in cui  $\omega$  incontra nuovamente  $\Omega$ .

Dimostrare che la tangente a  $\omega$  in  $P$  e la retta  $BS$  si intersecano in un punto situato sulla bisettrice interna di  $\angle BAC$ .

**Problema 3.** Determinare, per ogni intero  $k \geq 2$ , l'insieme di tutte le successioni infinite  $a_1, a_2, \dots$  di interi positivi per cui esiste un polinomio  $P$  della forma

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

dove  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  sono interi non negativi, tale che

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

per ogni intero  $n \geq 1$ .

domenica, 9. luglio 2023

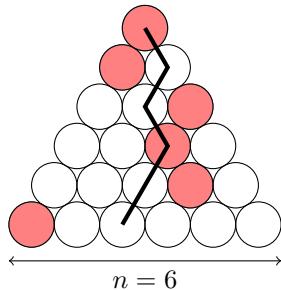
**Problema 4.** Siano  $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$  numeri reali positivi a due a due distinti tali che

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

è un intero per ogni  $n = 1, 2, \dots, 2023$ .

Dimostrare che  $a_{2023} \geq 3034$ .

**Problema 5.** Sia  $n$  un intero positivo. Un *triangolo nipponico* è costituito da  $1 + 2 + \dots + n$  cerchi disposti a formare un triangolo equilatero in cui, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , la  $i$ -esima riga contiene esattamente  $i$  cerchi, dei quali esattamente uno è colorato di rosso. Un *percorso ninja* in un triangolo nipponico è una sequenza di  $n$  cerchi che inizia con il cerchio della prima riga, prosegue andando ripetutamente da un cerchio a uno dei due cerchi immediatamente al di sotto, e termina con un cerchio dell'ultima riga. Ecco un esempio di un triangolo nipponico con  $n = 6$ , con indicato un percorso ninja che contiene due cerchi rossi.



Determinare, in funzione di  $n$ , il più grande intero  $k$  tale che in ogni triangolo nipponico esiste un percorso ninja che contiene almeno  $k$  cerchi rossi.

**Problema 6.** Sia  $ABC$  un triangolo equilatero. Siano  $A_1, B_1, C_1$  punti interni ad  $ABC$  tali che  $BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A, AC_1 = C_1B$ , e

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Le rette  $BC_1$  e  $CB_1$  si intersecano in  $A_2$ , le rette  $CA_1$  e  $AC_1$  si intersecano in  $B_2$ , e le rette  $AB_1$  e  $BA_1$  si intersecano in  $C_2$ .

Dimostrare che, se il triangolo  $A_1B_1C_1$  è scaleno, allora le tre circonferenze circoscritte ai triangoli  $AA_1A_2, BB_1B_2$  e  $CC_1C_2$  passano tutte per due punti comuni.

(Nota: un triangolo è scaleno se i suoi tre lati hanno lunghezze a due a due distinte.)