mandag, 19. juli 2021

Opgave 1. Lad $n \geqslant 100$ være et helt tal. Ivan skriver hvert af tallene $n, n+1, \ldots, 2n$ på forskellige kort. Derefter blander han de $n+1$ kort og deler dem i to bunker. Vis at mindst en af de to bunker indeholder to kort så summen af de to tal på kortene er et kvadrattal.

Opgave 2. Vis at uligheden

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

er sand for alle reelle tal $x_1, \ldots, x_n$.

Opgave 3. I en spidsvinklet trekant ABC er $|AB| > |AC|$. Lad D være et indre punkt i trekant ABC så $\angle DAB = \angle CAD$. Punktet E på linjestykket AC opfylder at $\angle ADE = \angle BCD$, punktet F på linjestykket AB opfylder $\angle FDA = \angle DBC$, og punktet X på linjen AC opfylder $|CX| = |BX|$. Lad O_1 og O_2 være centrene for de omskrevne cirkler til henholdsvis trekant ADC og EXD. Vis at linjerne BC, EF og O_1O_2 skærer hinanden i et punkt.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

tirsdag, 20. juli 2021

Opgave 4. Lad Γ være en cirkel med centrum I, og $ABCD$ en konveks firkant så hvert af linjestykkerne AB, BC, CD og DA tangerer Γ. Lad Ω være den omskrevne cirkel til trekant AIC. Forlængelsen af BA ud over A skærer Ω i X, og forlængelsen af BC ud over C skærer Ω i Z. Forlængelserne af AD og CD ud over D skærer Ω i henholdsvis Y og T. Vis at

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Opgave 5. To egern, Busk og Spring, har samlet 2021 valnødder til vinteren. Spring nummererer valnødderne fra 1 til 2021 og graver 2021 små huller i en cirkel i jorden rundt om deres yndlingstræ. Næste morgen bemærker Spring at Busk har lagt en valnød i hvert hul, men uden at lægge mærke til deres nummerering. Spring er utilfreds og beslutter at bytte rundt på valnødderne ved at udføre en serie af 2021 træk. I det k'te træk bytter Spring om på de to valnødder der er naboer til valnød k. Vis at der findes en værdi af k så Spring i det k'te træk ombytter valnødderne a og b hvor $a < k < b$.

Opgave 6. Lad $m \geqslant 2$ være et helt tal, A en endelig mængde af (ikke nødvendigvis positive) hele tal og $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ delmængder af A. Antag at for hvert $k = 1, 2, \ldots, m$ er summen af elementerne i B_k lig med m^k. Vis at A indeholder mindst $m/2$ elementer.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.