



IMO 2024

65th International
Mathematical Olympiad

Turkmen (tuk), day 1

Sışenbe, 16. iýul 2024

Mesele 1. Islendik n polažitel bitin san üçin

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

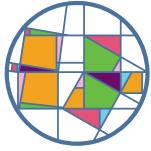
aňlatma n sana kratno bolar ýaly ähli α hakyky sanlary tapmaly. (Bu ýerde $\lfloor z \rfloor$ diýmek z sandan geçmeýän iň uly bitin san. Meselem: $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ we $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Mesele 2. Eger (a, b) bitin polažitel sanlaryň jübüti üçin $g \in N$ bitin polažitel sanlar bar bolup, islendik $n \geq N$ üçin

$$\text{IUUB}(a^n + b, b^n + a) = g$$

ýerine ýetýän bolsa, onda (a, b) bitin polažitel sanlaryň jübütini tapmaly. (Bu ýerde $\text{IUUB}(x, y)$ diýmek $x \in y$ sanlaryň iň uly umumy bölüjisi)

Mesele 3. a_1, a_2, a_3, \dots bitin polažitel sanlaryň tükeniksiz san yzygiderligi we bitin polažitel san N berlen. Her bir $n > N$ üçin a_n sanyň mukdary a_1, a_2, \dots, a_{n-1} sanlaryň arasynda duş gelýän a_{n-1} sanyň mukdaryna deňdigi mälimdir. Onda a_1, a_3, a_5, \dots we a_2, a_4, a_6, \dots san yzygiderlikleriň azyndan biriniň haysydyr bir wagtdan soň periodik boljakdygyny subut ediň. (b_1, b_2, b_3, \dots san yzygiderligi üçin şeýlebir p we M bitin polažitel sanlar tapylyp islendik $m \geq M$ üçin $b_{m+p} = b_m$ ýerine ýetýän bolsa, on bu yzygiderlige haysydyr bir wagtdan soň periodik diýilýär)



IMO 2024

65th International
Mathematical Olympiad

Turkmen (tuk), day 2

Çarşenbe, 17. iýul 2024

Mesele 4. Goý ABC üçburçluk üçin $AB < AC < BC$ bolsun. Goý ω bu ABC üçburçlugyn içinden çyzylan töwerek we I onuň merkezi bolsun. BC gönüde C nokatdan tapawutly bolan X nokat saýlaýar we X nokatdan geçýän AC parallel bolan göni çyzyk ω galtaşýar. Edil şuňa meňzeşlikde BC , gönide B nokatdan tapawutly bolan Y nokat saýlaýar we Y nokatdan geçýän AB parallel bolan göni çyzyk ω galtaşýar. Goý AI göni çyzyk ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregi ikinji gezek $P \neq A$ nokatda kesýän bolsun. Goý K we L nokatlar degişlilikde AC we AB taraplaryň orta nokatlary bolsun. Onda $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ bolýandygyny subut ediň.

Mesele 5. Balykgulak (Ulitka) Turbo 2024 setirden we 2023 sütünden ybarat bolan öýjükli tagtada oýun oýnaýar. 2022 sany öýjükde monstrlar gizlenýär. Ilki başda Turbo haýsy öýjükde monstr bardygy bilmeýär, emma oňa birinji we soňky setirlerden başga her bir setirde takyk bir monstr bardygy we her bir sütünde birden köp bolmadyk monstr bardygy bellidir. Turbo birinji setiriden soňky setire barmak üçin birnäçe gezek synanyşýar. Her synanyşykda başlangyç üçin Turbo birinji setiriden islendik öýjügi saýlap, soňra umumy tarapy bar bolan goňşy öýjüklere göcüm edip bilýär. (Oňa öň baran öýjüklerini gaýdyp gelmäne rugsat berilýär). Ol monstrly öýjüge baran ýagdaýynda onuň synanşygy tamamlanýar we ol täze synanşyk etmegi üçin birinji setire geçirilýär. Monstrlar duran öýjüginden gozganmaýar, Turbo her bir baran öýjüklerinde monstr bardygyny ýada ýokdygyny ýatda saklaýar. Ol soňky setiriň islendik öýjügine ýeten ýagdaýynda onuň synanşyklary tamamlanýar we oýun guitarýar. Monstrlaryň ýerleşis tertibine bagly bolmazdan Turbonyň n we ondan az bolan synanşykda soňky setire barmagyny kepillendirjek strategiyasy bar bolar ýaly n sanyň iň kiçi bahasyny tapyň.

Mesele 6. Goý \mathbb{Q} - rasional sanlaryň köplüğü bolsun. Islendik $x, y \in \mathbb{Q}$ üçin aşakdaky şert ýerine ýetýän $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ funksiýa "ajaýyp" funksiýa diýip aýdylyň:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ýa-da} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Islendik ajaýyp funksiýa üçin $f(r) + f(-r)$ (bu ýerde r käbir rasional san) görnüşdäki dürli rasional sanlar köpünden c deň bolýan şeýle c bitin sanyň bardygyny subut ediň we bu c sanyň iň kiçi bahasyny tapyň.