

월요일, 21. 9 월 2020

문제 1. 볼록사각형 $ABCD$ 의 내부에 한 점 P 가 있고, 다음비례식이 성립한다.

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

이때 다음 세 직선이 한 점에서 만남을 보여라: 각 $\angle ADP$, $\angle PCB$ 의 내각의 이등분선, 선분 AB 의 수직이등분선.

문제 2. 실수 a, b, c, d 가 부등식 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 와 등식 $a + b + c + d = 1$ 을 만족한다. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

문제 3. 서로 무게가 다른 조약돌 $4n$ 개가 있고 각 조약돌의 무게는 $1, 2, 3, \dots, 4n$ 중 하나이다. 각 조약돌은 n 개의 색 중 하나로 색칠되어 있고, 같은 색을 가진 조약돌은 정확히 4 개씩 있다. 이때 다음 두 조건을 모두 만족하도록 조약돌을 두 개의 그룹으로 나눌 수 있음을 보여라.

- 각 그룹의 조약돌의 무게의 총합은 서로 같다.
- 각 그룹에는 각각의 색에 대하여 그 색으로 색칠된 조약돌이 정확히 2 개 있다.

화요일, 22. 9 월 2020

문제 4. 정수 $n > 1$ 이 있다. 한 산의 오르막에 n^2 개의 역이 있고, 역들은 서로 다른 높이에 있다. 두 개의 케이블카 회사 A 와 B 는 각각 k 개의 케이블카를 운행한다. 각각의 케이블카는 낮은 위치에 있는 역에서 출발하여 더 높은 위치에 있는 역까지 운행한다. (중간에 멈추지 않는다.) A 회사에서 운행하는 k 개의 케이블카는 k 개의 서로 다른 역에서 출발하여 서로 다른 k 개의 역까지 운행하고, 더 높은 곳에서 출발한 케이블카는 더 높은 곳까지 운행한다. B 회사가 운행하는 케이블카도 같은 조건으로 운행한다. 두 역이 어떤 회사에 의해 연결된다는 것은 한 회사에서 운행하는 하나 또는 여러 개의 케이블카를 이용하여 이 두 역 중 낮은 위치에 있는 역에서 높은 위치에 있는 역까지 이동할 수 있다는 것이다. (역들 사이의 다른 이동은 허용되지 않는다)

두 회사 모두에 의해 연결되는 두 역이 항상 존재하는 가장 작은 양의 정수 k 를 구하여라.

문제 5. $n > 1$ 장의 카드로 이루어진 카드 묶음이 하나 있다. 각각의 카드에는 양의 정수가 하나 적혀 있다. 이 카드 묶음은 다음 성질을 만족한다: 임의의 한 쌍의 카드에 적혀 있는 두 수의 산술 평균은 이 카드 묶음 내의 한 장 또는 여러 장의 카드에 적혀 있는 수들의 기하 평균과 같다.

어떤 n 에 대하여, 카드에 있는 수가 항상 모두 같아야 할까?

문제 6. 다음 조건을 만족하는 양의 상수 c 가 존재함을 보여라.

정수 $n > 1$ 에 대하여, 임의의 두 점 사이의 거리가 1 이상인 n 개의 평면 위의 점으로 이루어진 집합 S 를 생각하자. 어떤 직선 ℓ 이 존재하여, S 를 두 집합으로 나누고 S 의 각 점으로부터 ℓ 까지의 거리가 $cn^{-1/3}$ 이상이다.

(직선 ℓ 이 점의 집합 S 를 나눈다는 것은 S 에 속하는 어떤 두 점을 연결하는 선분이 ℓ 과 만난다는 것이다.)

Note. $cn^{-1/3}$ 인 경우 대신 이보다 약한 결과인 $cn^{-\alpha}$ 인 경우에 대해 보인 경우, 상수 $\alpha > 1/3$ 의 값에 따라 부분 점수가 주어질 수 있다.