الثلاثاء، 23 يوليوز 2013

المسألة 1. بيّن أنّ لكلّ عددين صحيحين موجبين قطعا k و n ، يوجد k من الأعداد الصّحيحة الموجبة قطعا m_1 ، m_2 ، ... ، m_k (ليست بالضّرورة مختلفة مثنى مثنى) بحيث

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

المسألة 2. لدينا تشكيلة مكوّنة من 4027 نقطة في المستوى. تسمّى هذه التّشكيلة كولومبيّة إذا كانت 2013 من نقطها حمراء، و 2014 من نقطها زرقاء، ولا تكون أيّ ثلاث نقاط من نقط التّشكيلة مستقيميّة. يمكن تقسيم المستوى إلى مناطق بواسطة مستقيمات. يوصف هذا التّقسيم بالمستقيمات للتّشكيلة الكولمبيّة بأنّه جيّد إذا تحقّق فيه ما يلي:

- لا يمرّ أي من المستقيمات بأيّ نقطة من نقط التّشكيلة؛
- لا توجد في أيّ من المناطق نقطتان بلونين مختلفين.

أوجد القيمة الدّنيا للعدد k بحيث يوجد لكلّ تشكيلة كولوميّة من 4027 نقطة، تقسيم جيّد بواسطة k من المستقيمات.

المسألة 3. ليكن ABC مثلّثا . الدّائرة الخارجيّة للمثلّث ABC المقابلة للرّأس A مماسّة للضّلع $[BC]$ في النقطة A_1 . النقطتان، B_1 على الضّلع $[CA]$ ، و C_1 على الضّلع $[AB]$ ، معرّفتان بطريقة مماثلة، باستعمال الدّائرتين الخارجيّتين المقابلتين للرّأسين B و C على التّوالي . لنفترض أنّ مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث $A_1B_1C_1$ ينتمي إلى الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC . بيّن أنّ المثلث ABC قائم الزّاوية.

(الدّائرة الخارجيّة للمثلّث ABC والمقابلة للرأس A هي الدائرة المماسّة للضلع $[BC]$ ، والمماسّة لامتداد نصف المستقيم $[AB)$ ما بعد النقطة B ، والمماسّة لامتداد نصف المستقيمع $[AC)$ ما بعد النقطة C . الدّائرتان الخارجيّتان المقابلتان للرّأسين B و C معرّفتان بنفس الطّريقة .)

Language: Arabic (Morocco and Tunisia)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء، 24 يوليوز 2013

المسألة 4. ليكن ABC مثلّثا مركز تعامده H وكلّ زواياه حادّة. لتكن W نقطة من الضّلع $[BC]$ تخالف النقط B و C . النقطتان M و N هما على التّوالي موقعا الارتفاعين المنشأين من B و C . نرمز بـ ω_1 إلى الدّائرة المحيطة بالمثلّث BWN ، وبـ X إلى النقطة المنتمية للدّائرة ω_1 بحيث تكون القطعة $[WX]$ قطرا للدّائرة ω_1 . نرمز كذلك بـ ω_2 إلى الدّائرة المحيطة بالمثلّث CWM ، وبـ Y إلى النقطة المنتمية للدّائرة ω_2 بحيث تكون القطعة $[WY]$ قطرا للدّائرة ω_2 . بيّن أنّ النّقط X و Y و H مستقيميّة.

المسألة 5 . نرمز بـ $\mathbb{Q}_{>0}$ لمجموعة الأعداد الجذريّة الموجبة قطعا. لتكن $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ دالّة تحقّق الشّروط الثّلاثة التّالية:

(i) لكلّ x, y من $\mathbb{Q}_{>0}$ ، لدينا $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ؛

(ii) لكلّ x, y من $\mathbb{Q}_{>0}$ ، لدينا $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ؛

(iii) يوجد عدد جذريّ $a > 1$ بحيث $f(a) = a$.

بيّن أنّ $f(x) = x$ لكلّ x من $\mathbb{Q}_{>0}$.

المسألة 6 . ليكن $n \geq 3$ عددا صحيحا. لدينا $n+1$ نقطة موزّعة بطريقة منتظمة على دائرة. لنعتبر كلّ التّرقيمات الممكنة لهذه النقط بواسطة الأعداد 0 ، 1 ، ... ، n بحيث يُستخدم كلّ عدد مرّة واحدة. نعتبر أنّ ترقيمين متطابقان إذا كان بالإمكان الحصول على أحدهما انطلاقا من الآخر بواسطة دوران حول مركز الدّائرة. يقال عن ترقيم إنّه جميل إذا كانت كلّ أربع نقاط مرقّمة بالأعداد $a < b < c < d$ بحيث $a + d = b + c$ ، تحقّق ما يلي:

الوتر الواصل بين النّقطتين المرقّمتين بالعددين a و d لا يتقاطع مع الوتر الواصل بين النّقطتين المرقّمتين بالعددين b و c .

ليكن M عدد التّرقيمات الجميلة غير المتطابقة، وN عدد الأزواج (x, y) من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا بحيث $x + y \leq n$ و $\mathrm{pgcd}(x, y) = 1$. بيّن أنّ

$$M = N + 1.$$

Language: Arabic (Morocco and Tunisia)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة