Ponedjeljak, 9. jul 2018.

1. zadatak. Neka je Γ opisana kružnica oštrouglog trougla ABC. Tačke D i E nalaze se na dužima AB i AC, redom, tako da je $AD = AE$. Simetrale duži BD i CE sijeku kraće lukove AB i AC kružnice Γ u tačkama F i G, redom. Dokazati da su prave DE i FG paralelne (ili se poklapaju).

2. zadatak. Naći sve prirodne brojeve $n \geq 3$ za koje postoje realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, takvi da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ i

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. zadatak. *Antipaskalov trougao* je tablica oblika jednakostraničnog trougla, koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem redu, važi da je svaki broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koja su neposredno ispod njega. Na primjer, sljedeća tablica je antipaskalov trougao sa četiri reda, koji se sastoji od prirodnih brojeva od 1 do 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Da li postoji antipaskalov trougao sa 2018 redova koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Montenegrin

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena

Utorak, 10. jul 2018.

4. zadatak. *Pozicija* je svaka tačka (x, y) u ravni takva da su x i y prirodni brojevi ne veći od 20.

Na početku je svaka od 400 pozicija slobodna. Ana i Bojan naizmjenično postavljaju kamenčiće na pozicije, pri čemu Ana počinje igru. Na svom potezu, Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju, tako da je rastojanje između svake dvije pozicije na kojima se nalaze crveni kamenčići različito od $\sqrt{5}$. Na svom potezu, Bojan postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kojem rastojanju od drugih zauzetih pozicija.) Igra se završava kada neko od njih ne može postaviti kamenčić.

Naći najveći broj K za koji Ana sigurno može postaviti bar K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Bojan postavlja plave kamenčiće.

5. zadatak. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $N > 1$ takav da je za svaki $n \geq N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

cijeli broj.

Dokazati da postoji prirodan broj M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m \geq M$.

6. zadatak. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da važi $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Tačka X se nalazi unutar četvorougla $ABCD$ tako da je

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{i} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Dokazati da važi $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena