الإثنين، 11 جويلية 2022

مسألة 1. يصدر بنك أوسلو نوعين من القطع النقدية: قطع الألمنيوم (نرمز لها بـ A) وقطع البرونز (نرمز لها بـ B). تملك رنيم n قطعة من الألمنيوم وn قطعة من البرونز، مرتبة بطريقة عشوائية في صف. نعرف سلسلة على أنها تتابع قطع من نفس النوع. نثبّت عددا طبيعيا k حيث $1 \leqslant k \leqslant 2n$. تكرر رنيم العملية التالية مرارا: تحدد أطول سلسلة تحتوي على القطعة ذات الرتبة k بدءا من اليسار، وتنقل كل القطع الموجودة في هذه السلسلة إلى بداية الصف من جهة اليسار. فمثلا، إذا كان $n = 4$ و $k = 4$، وكان الترتيب الأولي للقطع هو $AABBBABA$ فإن تتابع العمليات يكون كالتالي

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

جد كل الثنائيات (n, k) مع $1 \leqslant k \leqslant 2n$ بحيث مهما كان الترتيب الأولي للقطع، فإنه في لحظة ما تكون n قطعةً الأولى من اليسار كلها من نفس النوع.

مسألة 2. لتكن $\mathbb{R}_{>0}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما. جد كل الدوال $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ بحيث لكل $x \in \mathbb{R}_{>0}$، يوجد عدد وحيد $y \in \mathbb{R}_{>0}$ يحقق

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

مسألة 3. ليكن k عددا طبيعيا غير معدوم وS مجموعة منتهية من الأعداد الأولية الفردية. برهن أنه توجد طريقة وحيدة على الأكثر (بغض النظر عن الدوران والتناظر) لوضع عناصر المجموعة S على دائرة بحيث يكون جداء أي عددين متجاورين من الشكل x^2+x+k حيث x عدد طبيعي غير معدوم.

Language: Arabic (Algerian)

الزمن: 4 ساعات و30 دقيقة
لكلّ مسألة 7 درجات

الثلاثاء 12 جويلية 2022

مسألة 4. ليكن $ABCDE$ خماسيا محدبا بحيث $BC = DE$. نفرض أنه توجد نقطة T داخل $ABCDE$ حيث $TB = TD$، $TC = TE$ و $\angle ABT = \angle TEA$. المستقيم (AB) يقطع المستقيمين (CD) و (CT) في النقطتين P وQ على الترتيب، نفرض أن النقط P, B, A, Q في استقامية بهذا الترتيب. المستقيم (AE) يقطع المستقيمين (CD) و(DT) في النقطتين R وS على الترتيب، نفرض أن النقط R, E, A, S في استقامية بهذا الترتيب. أثبت أن P، S، Q و R تقع على نفس الدائرة.

مسألة 5. جد كل الثلاثيات (a, b, p) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث p أولي وتحقق

$$a^p = b! + p.$$

مسألة 6. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. نعرف مربعا شماليا على أنّه شبكة من القياس $n \times n$ تحتوي على جميع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n^2 بحيث تحوي كل خانة عددا واحدا بالضبط. نقول عن خانتين أنّهما متجاورتان إذا كان لهما ضلع مشترك. كل خانة العدد المكتوب فيها أصغر من كل الأعداد المكتوبة في الخانات المجاورة لها تسمى منخفضا. نسمي مسارا متصاعدا كل متتالية مكونة من خانة أو أكثر بحيث تحق الشروط التالية:

١. الخانة الأولى في هذه المتتالية هي منخفض

٢. كل خانتين متتابعتين في المتتالية دائما متجاورتان

٣. الأعداد المكتوبة في خانات المتتالية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

جد بدلالة n، أصغر قيمة ممكنة لعدد المسارات المتصاعدة في مربع شمالي.