Jumaat, 10 Julai 2015

Soalan 1. Kita katakan bahawa suatu set terhingga $\mathcal{S}$ yang terdiri daripada titik-titik pada suatu satah adalah *seimbang* jika, bagi mana-mana dua titik berbeza A dan B dalam $\mathcal{S}$, wujud suatu titik C dalam $\mathcal{S}$ sehinggakan $AC = BC$. Kita katakan bahawa $\mathcal{S}$ adalah *bebas pusat* jika bagi mana-mana tiga titik berbeza A, B dan C dalam $\mathcal{S}$, tidak wujud titik P dalam $\mathcal{S}$ sehinggakan $PA = PB = PC$.

(a) Buktikan bahawa bagi semua integer $n \geqslant 3$, wujud suatu set seimbang yang terdiri daripada n titik.

(b) Tentukan semua integer $n \geqslant 3$ dimana wujud suatu set seimbang dan bebas pusat yang terdiri daripada n titik.

Soalan 2. Tentukan semua tigaan integer positif (a, b, c) sehinggakan setiap satu daripada nombor

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

bersamaan suatu kuasaan 2.

(*Suatu kuasaan* 2 *ialah suatu integer dalam bentuk* 2^n, *dengan* n *sebarang integer bukan negatif.*)

Soalan 3. Katakan ABC ialah suatu segitiga bersudut tirus dengan $AB > AC$. Katakan Γ ialah bulatan lilitnya, H ortopusatnya, dan F tapak altitud dari A. Katakan M ialah titik tengah bagi BC. Katakan Q ialah titik pada Γ sehinggakan $\angle HQA = 90^\circ$, dan katakan K ialah titik pada Γ sehinggakan $\angle HKQ = 90^\circ$. Andaikan bahawa titik-titik A, B, C, K dan Q adalah berbeza, dan terletak pada Γ dalam aturan sedemikian.

Buktikan bahawa bulatan lilit bagi segitiga-segitiga KQH dan FKM adalah bertangen kepada satu sama lain.

Masa: 4 jam dan 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah

Sabtu, 11 Julai 2015

Soalan 4. Segitiga ABC mempunyai bulatan lilit Ω dan pusat bulatan lilit O. Suatu bulatan Γ dengan pusat A bersilang dengan tembereng BC pada titik D dan E, sehinggakan B, D, E dan C adalah berbeza dan terletak pada garis BC dalam aturan sedemikian. Katakan F dan G ialah titik persilangan bagi Γ dan Ω, sehinggakan A, F, B, C dan G terletak pada Ω dalam aturan sedemikian. Katakan K ialah titik persilangan kedua bagi bulatan lilit segitiga BDF dan tembereng AB. Katakan L ialah titik persilangan kedua bagi bulatan lilit segitiga CGE dan tembereng CA.

Andaikan bahawa garis-garis FK dan GL adalah berbeza dan bersilang pada titik X. Buktikan bahawa X terletak pada garis AO.

Soalan 5. Katakan $\mathbb{R}$ ialah set semua nombor nyata. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

bagi semua nombor nyata x dan y.

Soalan 6. Jujukan integer $a_1, a_2, \ldots$ memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ bagi semua $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ bagi semua $1 \leqslant k < \ell$.

Buktikan bahawa wujud dua integer positif b dan N sehinggakan

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

bagi semua integer m dan n yang memenuhi $n > m \geqslant N$.

Masa: 4 jam dan 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah