



Thứ Ba, ngày 16 tháng Bảy năm 2024

Bài 1. Xác định tất cả các số thực α sao cho với mọi số nguyên dương n thì số nguyên

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

là một bội của n . (Trong đó, $\lfloor z \rfloor$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá z . Ví dụ, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ và $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Bài 2. Xác định tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho tồn tại các số nguyên dương g và N thỏa mãn

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

với mọi số nguyên $n \geq N$. (Trong đó, $\gcd(x, y)$ ký hiệu ước chung lớn nhất của các số nguyên x và y .)

Bài 3. Cho dãy vô hạn các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, \dots và số nguyên dương N . Giả sử rằng với mọi $n > N$, a_n bằng số lần xuất hiện của a_{n-1} trong dãy a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Chứng minh rằng một trong hai dãy số a_1, a_3, a_5, \dots và a_2, a_4, a_6, \dots là tuần hoàn kể từ một chỉ số nào đó.

(Một dãy số vô hạn b_1, b_2, b_3, \dots là *tuần hoàn kể từ một chỉ số nào đó* nếu tồn tại các số nguyên dương p và M sao cho $b_{m+p} = b_m$ với mọi $m \geq M$.)



Thứ Tư, ngày 17 tháng Bảy năm 2024

Bài 4. Cho tam giác ABC với $AB < AC < BC$. Gọi I và ω tương ứng là tâm nội tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi X là điểm nằm trên đường thẳng BC , khác C , sao cho đường thẳng qua X và song song với AC tiếp xúc với ω . Tương tự, gọi Y là điểm nằm trên đường thẳng BC , khác B , sao cho đường thẳng qua Y và song song với AB tiếp xúc với ω . Đường thẳng AI cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $P \neq A$. Gọi K và L tương ứng là trung điểm của AC và AB .

Chứng minh rằng $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Bài 5. Ông sên Turbo chơi trò chơi sau trên một bảng ô vuông gồm 2024 hàng và 2023 cột. Trong 2022 ô vuông đơn vị nào đó, có các con quỷ nấp ở đó. Ban đầu, Turbo không hề biết ô nào có quỷ nấp, nhưng nó biết rằng trên mỗi hàng có đúng một con quỷ, ngoại trừ hàng đầu tiên và hàng cuối cùng, và trên mỗi cột có không quá một con quỷ.

Turbo thực hiện một chuỗi các lần thử để tìm cách đi từ hàng đầu tiên tới hàng cuối cùng. Tại mỗi lần thử, nó được quyền chọn một ô bất kỳ trên hàng đầu tiên để xuất phát, sau đó liên tục di chuyển giữa các ô, mỗi bước từ một ô sang một ô có cạnh chung với ô mà nó đang đứng. (Nó được phép đi qua các ô đã từng ghé qua trước đó.) Nếu nó tới một ô có quỷ thì lần thử này dừng lại và nó được đưa trở lại hàng đầu tiên để thực hiện một lần thử mới. Những con quỷ không di chuyển, và Turbo nhớ mỗi ô nó từng ghé qua là có quỷ hay không. Nếu nó tới được một ô bất kỳ trên hàng cuối cùng thì trò chơi kết thúc.

Xác định giá trị nhỏ nhất của n sao cho Turbo luôn có chiến lược đảm bảo tới được hàng cuối cùng sau không quá n lần thử, cho dù những con quỷ có nấp ở những ô nào đi chăng nữa.

Bài 6. Ký hiệu \mathbb{Q} là tập các số hữu tỷ. Một hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ được gọi là *đẹp* nếu có tính chất sau: với mỗi $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{hoặc} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên c sao cho với mọi hàm số đẹp f , có không quá c số hữu tỷ phân biệt có dạng $f(r) + f(-r)$, với r là số hữu tỷ nào đó, và tìm giá trị nhỏ nhất có thể của c .