الثلاثاء، 16 تموز، 2019

مسألة 1. لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة. عيّن جميع التوابع $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ التي تحقّق، مهما كانت الأعداد الصحيحة a و b كان

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

مسألة 2. في المثلث ABC، تقع النقطة A_1 على الضلع BC وتقع النقطة B_1 على الضلع AC. لتكن P و Q نقطتين على القطعتين المستقيمتين AA_1 و BB_1، بالترتيب وبحيث يكون PQ موازياً للمستقيم AB. لتكن P_1 نقطة على المستقيم PB_1، بحيث تقع B_1 تماماً بين P و P_1، ويكون $\angle PP_1C = \angle BAC$. بالمثل، لتكن Q_1 نقطة على المستقيم QA_1، بحيث تقع A_1 تماماً بين النقطتين Q و Q_1، ويكون $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

أثبت أن النقاط P و Q و P_1 و Q_1 تقع على دائرة واحدة.

مسألة 3. تضم شبكة تواصل اجتماعي 2019 مستخدماً، ويمكن أن تربط أي مستخدمين اثنين منهم علاقة صداقة. عندما يكون المستخدم A صديقاً للمستخدم B، يكون المستخدم B أيضاً صديقاً للمستخدم A. أحداثٌ من النمط الآتي يمكن أن تقع على نحو متكرر، واحداً بعد الآخر:

> يمكن لثلاثة مستخدِمين A و B و C بحيث A صديق لكل من B و C، ولكن B و C ليسا صديقين، أن يغيّروا حالات الصداقة فيما بينهم بحيث يصبح B و C صديقين وتلغى الصداقة بين A وكل من B و C. وتبقى بقية حالات الصداقة على حالها في هذا الحدث.

في البدء هناك 1010 مستخدماً لدى كل منهم 1009 صديقاً، و 1009 مستخدماً لدى كل منهم 1010 صديقاً. أثبت أنّه توجد متتالية من الأحداث يصبح بعدانتهائها لكل مستخدم صديقاً واحداً على الأكثر.

المدّة: 4 ساعات و30 دقيقة
لكل مسألة 7 درجات

Language: Arabic-Syria

الأربعاء، 17 تموز، 2019

مسألة 4. أوجد جميع الأزواج (k, n) من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً التي تحقّق

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

مسألة 5. يصدر بنك مدينة باث قطعاً نقدية معدنية على أحد وجهيها الرمز H وعلى الوجه الآخر الرمز T. يملك هاري n قطعة منها مصفوفة في سطر من اليسار إلى اليمين. يقوم هاري بتكرار الخطوة الآتية: إذا كان هناك بالتحديد $k > 0$ قطعة نقدية تظهر الوجه H فإنه يقلب القطعة رقم k من اليسار، وإلا أظهرت جميع القطع الوجه T، وعندها يتوقف. على سبيل المثال، في حالة $n = 3$ الإجرائية التي تبدأ بالتوزيع THT تجري على النحو الآتي $THT \to HHT \to HTT \to TTT$، وتتوقف بعد ثلاث خطوات.

1. أثبت أنّه مهما كان التوزيع في البدء، فإن هاري يتوقف بعد عدد منته من الخطوات.
2. إذا كان التوزيع في البدء هو C، نعرف $L(C)$ عدد الخطوات التي يجريها هاري قبل أن يتوقف. مثلاً $L(THT) = 3$ و $L(TTT) = 0$. احسب متوسّط قيم $L(C)$ عندما تمسح C جميع توزيعات البدء الممكنة التي عددها 2^n.

مسألة 6. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا فيه $AB \neq AC$. وليكن I مركز الدائرة ω الماسّة لأضلاع المثلث داخلاً. نفترض أن ω تمس الأضلاع BC و CA و AB في D و E و F بالترتيب. يقطع المستقيم المار بالنقطة D عمودياً على المستقيم EF الدائرة ω ثانية في R. ويقطع المستقيم AR الدائرة ω ثانية في P. تتقاطع الدائرتان المارتان برؤوس المثلثين PCE و PBF ثانية في Q.

أثبت أن المستقيمين DI و PQ يتلاقيان في نقطة تقع على المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على AI.

المدّة: 4 ساعات و 30 دقيقة
لكل مسألة 7 درجات

Language: Arabic-Syria