

*sreda, 15. julij 2009*

**Naloga 1.** Naj bo  $n$  naravno število in naj bodo  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) različna naravna števila iz množice  $\{1, \dots, n\}$ , za katera velja, da  $n$  deli  $a_i(a_{i+1} - 1)$  za vsak  $i = 1, \dots, k - 1$ . Dokaži, da  $n$  ne deli  $a_k(a_1 - 1)$ .

**Naloga 2.** Naj bo točka  $O$  središče trikotniku  $ABC$  očrtane krožnice, točka  $P$  notranja točka stranice  $CA$  in točka  $Q$  notranja točka stranice  $AB$ . Točke  $K, L$  oziroma  $M$  so po vrsti razpolovišča daljic  $BP, CQ$  oziroma  $PQ$ . Naj bo  $\Gamma$  krožnica, ki gre skozi točke  $K, L$  in  $M$ . Denimo, da je premica  $PQ$  tangenta krožnice  $\Gamma$ . Dokaži, da je  $|OP| = |OQ|$ .

**Naloga 3.** Naj bo  $s_1, s_2, s_3, \dots$  tako strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil, da sta podzaporedji

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{in} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

aritmetični zaporedji. Dokaži, da je tudi zaporedje  $s_1, s_2, s_3, \dots$  aritmetično zaporedje.

četrtek, 16. julij 2009

**Naloga 4.** V trikotniku  $ABC$  velja  $|AB| = |AC|$ . Simetrala kota  $\angle CAB$  seka stranico  $BC$  v točki  $D$ , simetrala kota  $\angle ABC$  seka stranico  $CA$  v točki  $E$ . Naj bo  $K$  središče trikotniku  $ADC$  včrtane krožnice. Denimo, da je  $\angle BEK = 45^\circ$ . Določi vse možne velikosti kota  $\angle CAB$ .

**Naloga 5.** Določi vse funkcije  $f$ , ki slikajo iz množice naravnih števil v množico naravnih števil, za katere velja, da za vsaki naravni števili  $a$  in  $b$  obstaja neizrojeni trikotnik s stranicami dolžin

$$a, f(b) \text{ in } f(b + f(a) - 1).$$

(Trikotnik je *neizrojen*, če njegova oglišča niso kolinearna.)

**Naloga 6.** Naj bodo  $a_1, a_2, \dots, a_n$  različna naravna števila in naj bo  $M$  množica  $n - 1$  naravnih števil, ki ne vsebuje števila  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Kobilica namerava skakati po številski premici, tako da bo začela v točki s koordinato 0 in bo naredila  $n$  skokov v desno z dolžinami  $a_1, a_2, \dots, a_n$  v nekem zaporedju. Dokaži, da lahko izbere tako zaporedje dolžin skokov, da ne bo nikoli skočila na nobeno točko s koordinato iz množice  $M$ .