Terça-feira, 16 de julho de 2024

Problema 1. Determine todos os números reais α tais que, para todo inteiro positivo n, o inteiro

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

é múltiplo de n (note que $\lfloor z \rfloor$ representa o maior inteiro menor que ou igual a z; por exemplo, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$).

Problema 2. Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais existem inteiros positivos g e N tais que

$$mdc(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

cumpre-se para todos os inteiros $n \geqslant N$ (note que $mdc(x, y)$ representa o máximo divisor comum dos inteiros x e y).

Problema 3. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos e seja N um inteiro positivo. Suponha que, para cada $n > N$, a_n é igual ao número de vezes que o valor a_{n-1} aparece na lista $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Prove que pelo menos uma das sequências $a_1, a_3, a_5, \ldots$ e $a_2, a_4, a_6, \ldots$ é periódica a partir de um certo termo.

Nota: uma sequência infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ é *periódica a partir de um certo termo* se existem inteiros positivos p e M tais que $b_{m+p} = b_m$ para todo $m \geqslant M$.

Quarta-feira, 17 de julho de 2024

Problema 4. Seja ABC um triângulo com $AB < AC < BC$. Sejam I o incentro e ω o incírculo do triângulo ABC. Seja X o ponto na reta BC, diferente de C, tal que a reta paralela a AC passando por X é tangente a ω. Analogamente, seja Y o ponto na reta BC, diferente de B, tal que a reta paralela a AB passando por Y é tangente a ω. A reta AI intersecta o circuncírculo do triângulo ABC novamente em $P \neq A$. Sejam K e L os pontos médios de AC e AB, respectivamente.

Prove que $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problema 5. O caracol Turbo joga num tabuleiro retangular com 2024 linhas e 2023 colunas. Em 2022 casas (quadrados unitários) desse tabuleiro existem monstros escondidos. Inicialmente, Turbo não conhece a posição de qualquer um dos monstros, mas ele sabe que existe exatamente um monstro em cada linha, com exceção da primeira e da última linha, e que cada coluna tem no máximo um monstro.

Turbo faz uma série de tentativas para ir da primeira linha à última linha. Em cada tentativa, ele escolhe começar em qualquer casa na primeira linha, e repetidamente se move para uma casa adjacente, ou seja, com um lado em comum (ele pode voltar a uma casa visitada anteriormente). Se ele chega a uma casa em que há um monstro, essa tentativa acaba e ele é transportado de volta para a primeira linha para começar uma nova tentativa. Os monstros não se movem e Turbo lembra se em cada casa que ele visitou há, ou não há, um monstro. Se ele chega a uma casa na última linha, a tentativa acaba e o jogo termina.

Determine o menor valor de n para o qual Turbo tem uma estratégia que garante que ele chegará na última linha na n-ésima tentativa, ou antes, sem importar as posições dos monstros.

Problema 6. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Uma função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ é chamada *aquaesulian* se satisfaz a seguinte propriedade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ou} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Mostre que existe um inteiro c tal que, para qualquer função aquaesulian f, existem no máximo c números racionais diferentes da forma $f(r) + f(-r)$, para algum número racional r, e encontre o menor valor possível de c.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.