

Version : Norwegian

Første dag
25. juli 2007

Oppgave 1. La a_1, a_2, \dots, a_n være gitte reelle tall. For hver i ($1 \leq i \leq n$) definer

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

og la

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Vis at for vilkårlige reelle tall $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ holder

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Vis at det finnes reelle tall $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ slik at likhet gjelder i (*).

Oppgave 2. La A, B, C, D og E være fem punkter slik at $ABCD$ blir et parallelogram og $BCED$ blir en syklisk firkant. La videre ℓ være en linje gjennom A . Anta at ℓ skjærer linjestykket DC i et indre punkt F og skjærer linjen BC i G . Anta videre at $EF = EG = EC$. Vis at ℓ er halveringslinjen til vinkel DAB .

Oppgave 3. På en matematikkkonkurranse er noen av deltagerne venner. Vennskap er alltid gjensidig. Kall en gruppe deltagere for en *klikk* hvis hver to av medlemmene i gruppen er venner (spesielt er enhver gruppe bestående av færre enn to personer en klikk). Antallet deltagere i en klikk er kalt dens *størrelse*.

Gitt at den maksimale klikkstørrelsen ved denne konkurransen er et partall, vis at deltagerne kan plasseres i to rom slik at den maksimale størrelsen til klikk innenfor det ene rommet er den samme som den maksimale størrelsen til klikk innenfor det andre rommet.

*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng*

Version : Norwegian

Andre dag
26. juli 2007

Oppgave 4. I en trekant ABC skjærer halveringlinjen til vinkel BCA omsikerlen i R ($R \neq C$), BC s midtnormal i P , og AC s midtnormal i Q . La videre BC s midtpunkt kalles K , og AC s midtpunkt L . Vis at trekantene RPK og RQL har samme areal.

Oppgave 5. La a og b være positive heltall. Vis at dersom $4ab - 1$ deler $(4a^2 - 1)^2$, må $a = b$ holde.

Oppgave 6. La n være et positivt heltall. Betrakt

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

som en mengde av $(n + 1)^3 - 1$ punkter i det tredimensjonale rommet. Bestem minste mulige antall planer hvis union inneholder S , men ikke inkluderer $(0, 0, 0)$.

*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng*