utorak, 15. juli 2025

Zadatak 1 Za pravu u ravni kažemo da je *sunčana* ako **nije** paralelna ni sa x-osom, ni sa y-osom ni sa pravom $x + y = 0$.

Neka je dat cijeli broj $n \geqslant 3$. Odrediti sve nenegativne cijele brojeve k takve da postoji n različitih pravih u ravni koje zadovoljavaju oba sljedeća uslova:

- za sve pozitivne cijele brojeve a i b takve da je $a + b \leqslant n + 1$ tačka (a, b) pripada barem jednoj od ovih pravih; i
- tačno k od ovih n pravih su sunčane.

Zadatak 2 Neka su Ω i Γ kružnice s centrima M i N, redom, tako da je poluprečnik kružnice Ω manji od poluprečnika kružnice Γ. Pretpostavimo da se kružnice Ω i Γ sijeku u dvije različite tačke A i B. Prava MN siječe Ω u C i Γ u D tako da tačke C, M, N i D leže na pravoj u tom redoslijedu. Neka je P centar opisane kružnice trougla ACD. Prava AP siječe Ω po drugi put u $E \neq A$. Prava AP siječe Γ po drugi put u $F \neq A$. Neka je H ortocentar trougla PMN.

Dokazati da prava kroz H paralelna sa AP dodiruje opisanu kružnicu trougla BEF.

(*Ortocentar* trougla je tačka presjeka njegovih visina.)

Zadatak 3 Neka je $\mathbb{N}$ skup pozitivnih cijelih brojeva. Za funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kažemo da *grmi* ako

$$f(a) \ \text{ dijeli } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

za sve pozitivne cijele brojeve a i b.

Odrediti najmanju realnu konstantu c takvu da za sve funkcije f koje grme i sve pozitivne cijele brojeve n vrijedi $f(n) \leqslant cn$.

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

srijeda, 16. juli 2025

Zadatak 4 *Pravi djelilac* pozitivnog cijelog broja N je pozitivan djelilac broja N različit od N.

Svi elementi beskonačnog niza $a_1, a_2, \ldots$ su pozitivni cijeli brojevi takvi da svaki od njih ima barem tri prava djelioca. Za svaki $n \geqslant 1$, broj a_{n+1} je jednak sumi tri najveća prava djelioca broja a_n.

Odrediti sve moguće vrijednosti broja a_1.

Zadatak 5 Adisa i Benjamin igraju igru čija pravila zavise od pozitivnog realnog broja λ čiju vrijednost znaju oba igrača. U n-tom potezu (počevši od $n = 1$) igra se odvija na sljedeći način:

- Ako je n neparan, Adisa bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ako je n paran, Benjamin bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ako igrač ne može izabrati takav broj x_n, igra završava i njegov protivnik pobjeđuje. Ako se igra nastavlja unedogled, nijedan igrač ne pobjeđuje. Oba igrača znaju vrijednosti svih odabranih brojeva.

Odrediti sve vrijednosti λ za koje Adisa ima pobjedničku strategiju i sve vrijednosti λ za koje Benjamin ima pobjedničku strategiju.

Zadatak 6 Posmatrajmo ploču dimenzije 2025×2025 sačinjenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi da na ploču postavi određen broj pravougaonika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravougaonika leži na ivicama jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravougaonikom.

Odrediti minimalan broj pravougaonika koje Matilda treba postaviti tako da svaki red i svaka kolona ploče sadrži tačno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva nijedan pravougaonik.