Utorok, 8. júl 2014

Úloha 1. Nech $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Dokážte, že existuje práve jedno celé číslo $n \geqq 1$ také, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqq a_{n+1}.$$

Úloha 2. Nech $n \geqq 2$ je celé číslo. Uvažujme šachovnicu s rozmermi $n \times n$ pozostávajúcu z n^2 jednotkových štvorcových políčok. Konfiguráciu n veží na tejto šachovnici nazývame *šťastná*, ak každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jednu vežu. Nájdite najväčšie kladné celé číslo k také, že pre každú šťastnú konfiguráciu n veží existuje štvorec s rozmermi $k \times k$, ktorý neobsahuje vežu na žiadnom zo svojich k^2 políčok.

Úloha 3. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = 90°$. Bod H je pätou kolmice z bodu A na priamku BD. Body S, T ležia postupne na stranách AB, AD, pričom bod H je vnútorným bodom trojuholníka SCT a platí

$$|\measuredangle CHS| - |\measuredangle CSB| = 90°, \quad |\measuredangle THC| - |\measuredangle DTC| = 90°.$$

Dokážte, že priamka BD sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku TSH.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Streda, 9. júl 2014

Úloha 4. Na strane BC daného ostrouhlého trojuholníka ABC ležia body P, Q, pričom $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle BCA|$ a $|\measuredangle CAQ| = |\measuredangle ABC|$. Body M a N ležia postupne na priamkach AP a AQ tak, že bod P je stredom úsečky AM a bod Q je stredom úsečky AN. Dokážte, že priamky BM a CN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Úloha 5. Banka v Kapskom Meste razí mince s hodnotou $\frac{1}{n}$ pre každé kladné celé číslo n. Majme konečnú kolekciu takýchto mincí (nie nutne s rôznymi hodnotami), ktorá má celkovú hodnotu nanajvýš $99 + \frac{1}{2}$. Dokážte, že túto kolekciu možno rozdeliť na 100 alebo menej častí tak, aby každá časť mala celkovú hodnotu nanajvýš 1.

Úloha 6. Hovoríme, že priamky v rovine sú vo *všeobecnej polohe*, ak žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Množina priamok vo všeobecnej polohe rozdeľuje rovinu na oblasti, z ktorých niektoré majú konečný obsah; nazývame ich *konečné oblasti* prislúchajúce danej množine priamok. Pre každé dostatočne veľké n dokážte, že v ľubovoľnej množine n priamok vo všeobecnej polohe je možné zafarbiť aspoň $\sqrt{n}$ priamok modrou farbou tak, že žiadna z prislúchajúcich konečných oblastí nebude mať celú hranicu modrú.

Poznámka. Riešenia, v ktorých bude tvrdenie dokázané s výrazom $c \cdot \sqrt{n}$ namiesto $\sqrt{n}$, budú ohodnotené bodmi v závislosti od hodnoty konštanty c.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.