

Teisipäev, 16. juuli 2019

Ülesanne 1. Olgu \mathbb{Z} täisarvude hulk. Leia kõik sellised funktsioonid $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, et kõigi täisarvude a ja b korral

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Ülesanne 2. Kolmnurgas ABC asub punkt A_1 küljel BC ning punkt B_1 küljel AC . Olgu P ja Q sellised punktid vastavalt lõikudel AA_1 ja BB_1 , et PQ ja AB on paralleelsed. Olgu P_1 selline punkt sirgel PB_1 , et B_1 asub rangelt punktide P ja P_1 vahel ning $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analoogselt, olgu Q_1 selline punkt sirgel QA_1 , et A_1 asub rangelt punktide Q ja Q_1 vahel ning $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Tõesta, et punktid P , Q , P_1 ja Q_1 asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 3. Sotsiaalsõprustikus on 2019 kasutajat, kellest mõned paarid on sõbrad. Alati, kui kasutaja A on kasutaja B sõber, on kasutaja B ühtlasi kasutaja A sõber. Järgnevat tüüpi sündmused võivad leida korduvalt aset, üks korraga:

Kui kasutajad A , B ja C on sellised, et A on korraga nii B kui C sõber, kuid B ja C pole omavahel sõbrad, siis nad muudavad oma sõpruse staatuseid selliselt, et B ja C on nüüd sõbrad, kuid A pole enam ei B ega C sõber. Ükski teine sõpruse staatus ei muutu.

Algselt on 1010 kasutajal igaühel 1009 sõpra ning 1009 kasutajal igaühel 1010 sõpra. Tõesta, et leidub selliste sündmuste jada, mille järel on iga kasutaja sõber ülimalt ühe teise kasutajaga.

Kolmapäev, 17. juuli 2019

Ülesanne 4. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (k, n) , mille korral

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Ülesanne 5. Vannipank annab välja münte, mille ühel küljel on H ja teisel T . Harryl on n sellist münti, mis paiknevad sirgel vasakult paremale. Ta teostab korduvalt järgmist operatsiooni: kui on täpselt $k > 0$ münti küljega H üleval, siis ta keerab ümber vasakult k . mündi; muul juhul on kõik mündid küljega T üleval ning ta lõpetab. Näiteks, kui $n = 3$, siis protsess, mis algab konfiguratsioonist THT , oleks $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, mis lõpeb kolme operatsiooni järel.

- Tõesta, et iga algse konfiguratsiooni korral lõpetab Harry mingi lõpliku arvu operatsioonide järel.
- Iga algse konfiguratsiooni C korral olgu $L(C)$ operatsioonide arv, mille järel Harry lõpetab. Näiteks, $L(THT) = 3$ ning $L(TTT) = 0$. Leia $L(C)$ keskmine väärtus üle kõikide 2^n võimalike C konfiguratsioonide.

Ülesanne 6. Olgu I teravnurkse kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt, kusjuures $|AB| \neq |AC|$. Kolmnurga ABC siseringjoon ω puutub külgi BC , CA ja AB vastavalt punktides D , E ja F . Ristsirge sirgele EF läbi punkti D lõikab ringjoont ω uuesti punktis R . Sirge AR lõikab ringjoont ω uuesti punktis P . Kolmnurkade PCE ja PBF ümberringjooned lõikuvad uuesti punktis Q .

Tõesta, et sirged DI ja PQ lõikuvad AI ristsirgel läbi punkti A .