Mittwoch, 7. Juli 2010

Aufgabe 1. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Hierbei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Aufgabe 2. Das Dreieck ABC habe den Inkreismittelpunkt I und den Umkreis Γ. Die Gerade AI schneide Γ ein zweites Mal im Punkt D. Ferner seien E ein Punkt auf dem Bogen BDC und F ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$ mit

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

Schließlich sei G der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IF}$. Man beweise, dass sich die Geraden DG und EI auf Γ schneiden.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Zahl

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Donnerstag, 8. Juli 2010

Aufgabe 4. Im Inneren des Dreiecks ABC liege der Punkt P. Die Geraden AP, BP und CP schneiden den Umkreis Γ von ABC jeweils ein zweites Mal in den Punkten K, L bzw. M. Die Tangente an Γ durch C schneide die Gerade AB in S. Es gelte $|\overline{SC}| = |\overline{SP}|$.
Man beweise $|\overline{MK}| = |\overline{ML}|$.

Aufgabe 5. In jedem von sechs Behältern B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6 befindet sich zu Beginn genau eine Münze. Es gibt zwei Typen von erlaubten Operationen:

Typ 1: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_j mit $1 \leq j \leq 5$ aus. Man entferne eine Münze aus B_j und füge zum Behälter B_{j+1} zwei Münzen hinzu.

Typ 2: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_k mit $1 \leq k \leq 4$ aus. Man entferne eine Münze aus B_k und vertausche die Inhalte der (möglicherweise leeren) Behälter B_{k+1} und B_{k+2}.

Man entscheide, ob es eine endliche Folge von solchen Operationen gibt, nach deren Ausführung die ersten fünf Behälter B_1, B_2, B_3, B_4 und B_5 leer sind und der sechste Behälter B_6 genau $2010^{2010^{2010}}$ Münzen enthält. (Man beachte: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Aufgabe 6. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Ferner sei s eine positive ganze Zahl, so dass

$$a_n = \max\{\, a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1 \,\}$$

für alle $n > s$ gilt. Man beweise, dass es positive ganze Zahlen N und ℓ mit $\ell \leq s$ derart gibt, dass $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ für alle $n \geq N$ gilt.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.