



Duşenbe, 19. lýul 2021

**Mesele 1.** Goý,  $n \geq 100$  bitin san bolsun. Iwan  $n, n+1, \dots, 2n$  sanlaryň her birini dürli kartlaryň ýüzüne ýazdy. Ol soňra bu  $n+1$  sany kartlary garýar, we olary islendik görnüşde iki topara bölyär. Ýüzlerine ýazylan sanlaryň jemi takyk kwadrat bolar ýaly bir topara degişli iki sany kartyň tapyljakdygyny subut ediň.

**Mesele 2.** Islendik  $x_1, \dots, x_n$  hakyky sanlar üçin

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

deňsizligi subut ediň.

**Mesele 3.**  $AB > AC$  bolan ýiti burçly  $ABC$  üçburçluguň içinde  $\angle DAB = \angle CAD$  bolar ýaly  $D$  nokat alynýar.  $AC$  kesimde  $\angle ADE = \angle BCD$  bolar ýaly  $E$  nokat,  $AB$  kesimde  $\angle FDA = \angle DBC$  bolar ýaly  $F$  nokat, we  $AC$  göni çyzykda bolsa  $CX = BX$  bolar ýaly  $X$  nokat alynýar. Goý,  $O_1$  we  $O_2$  nokatlar, degişlilikde,  $ADC$  we  $EXD$  üçburçluklaryň daşyndan çyzylan töwerekleriniň merkezleri bolsun.  $BC$ ,  $EF$ , we  $O_1O_2$  göni çyzyklaryň bir nokatdan geçýändigini subut ediň.



Sişenbe, 20. lýul 2021

**Mesele 4.** Goý,  $\Gamma$  töweregisiň merkezi  $I$  nokat bolsun. Güberçek  $ABCD$  dörtburçluguň  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  we  $DA$  taraplary  $\Gamma$  töwerege galtaşýar. Goý,  $\Omega$  töwerek  $AIC$  üçburçluguň daşyndan çyzylan töwerek bolsun.  $BA$  gönü çyzygyň  $A$  nokatdan dowamy  $\Omega$  töweregى  $X$  nokatda we  $BC$  gönü çyzygyň  $C$  nokatdan dowamy bolsa  $\Omega$  töweregى  $Z$  nokatda kesýär.  $AD$  we  $CD$  gönü çyzyklaryň  $D$  nokatdan dowamy  $\Omega$  töweregى, degişlilikde,  $Y$  we  $T$  nokatlarda kesýärler.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

bolýandygyny subut ediň.

**Mesele 5.** Çip we Deýl bilelikde gyş üçin 2021 sany hoz ýygynadylar. Çip hozlary 1-den 2021-e çenli sanlar bilen belgiläp çykýar we özleriniň iň söýgülü agajynyň daşyndan töwerek görnüşde 2021 sany çukur gazýar. Ertesi irden Çip, Deýliň hozlaryň belgisine garamazdan her çukura bir sany hoz goýandygyny görýär. Muňa gynanyp, Çip hozlary täzeden tertipleşdirmek üçin 2021 sany göcüm etmegi karar berýär:  $k$ -njy göcümde, Çip  $k$  belgili hozuň iki gapdal goňşy hozlarynyň ýerini çalyşýar.  $k$ -njy göcümde Çip  $a$  we  $b$  belgili hozlaryň ýerini çalyşanda  $a < k < b$  deňsizlik ýerine ýaly  $k$  sanyň tapyljakdygyny subut ediň.

**Mesele 6.** Goý,  $m \geq 2$  bitin san bolsun,  $A$  tükenikli agzadan ybarat bolan (položitel bolmaklygy zerur däl) bitin sanlaryň köplüğü bolsun we  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  köplükler bolsa  $A$  köplüğüň bölek köplükleri bolsun. Her bir  $k = 1, 2, \dots, m$  üçin  $B_k$  köplüğüň agzalarynyň jemi  $m^k$  sana deň bolsun.  $A$  köplüğüň iň bolmanda  $m/2$  sany agzasynyň bardygyny subut ediň.