50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

Language: **Arabic**

Day: **1**

Wednesday, July 15, 2009

المسألة الأولى

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً و لتكن ($k \geq 2$) $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ أعداداً صحيحة مختلفة من المجموعة $\{1, \ldots, n\}$ حيث أن n يقسم $a_i(a_{i+1}-1)$ لكل i من $\{1, \ldots, k-1\}$. برهن أن n لا يقسم $a_k(a_1-1)$.

المسألة الثانية

ليكن ABC مثلثاً و ليكن O مركز الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث. النقطتان P و Q (غير طرفيتين) على الضلعين AC و AB على الترتيب . و لتكن K , L و M منتصفات القطع المستقيمة BP , CQ و PQ على الترتيب ، ولتكن Γ هي الدائرة المارة بالنقاط K , L و M. بفرض أن المستقيم PQ مماساً للدائرة Γ, فبرهن أن $OP = OQ$.

المسألة الثالثة

لتكن $S_1, S_2, S_3, \ldots$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تكون المتتاليتان الجزئيتان :

$S_{S_1}, S_{S_2}, S_{S_3}, \ldots$ و $S_{S_1+1}, S_{S_2+1}, S_{S_3+1}, \ldots$ متتاليتين حسابيتين.

برهن أن المتتالية $S_1, S_2, S_3, \ldots$ متتالية حسابية كذلك.

Language: Arabic (UAE & KWT)

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

Language: **Arabic**

Day: **2**

Thursday, July 16, 2009

المسألة الرابعة

ليكن ABC مثلثاً فيه $AB = AC$. المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{CAB}$ يقطع الضلع BC في النقطة D والمنصف الداخلي للزاوية $\widehat{ABC}$ يقطع الضلع AC في النقطة E .
ليكن K مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلث ADC من الداخل. بفرض أن $\widehat{BEK} = 45^\circ$ ، أوجد جميع القيم الممكنة لقياس الزاوية $\widehat{CAB}$.

المسألة الخامسة

أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ والتي تحقق الخاصية:
لكل a و b من $\mathbb{N}^*$ يوجد مثلث تكون أطوال أضلاعه هي

$$a \text{ و } f(b) \text{ و } f(b + f(a) - 1)$$

($\mathbb{N}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحه الموجبه)

المسألة السادسة

لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداداً صحيحة موجبة مختلفة و لتكن M مجموعة تحتوي على $n-1$ من الأعدادً الصحيحة الموجبةً والتي لا تحتوي العدد $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
تقفز حشرة على طول خط الأعداد الحقيقية بدءا من نقطة الصفر يمينا بالاتجاه الموجب و تنفذ n قفزة بأطوال $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و بترتيب ما.
برهن أنه يمكن اختيار ذلك الترتيب بحيث أن الحشره لا تقع أبدا على أي من نقاط المجموعة M.