ორშაბათი, 11 ივლისი, 2016

ამოცანა 1. სამკუთხედ BCF-ში კუთხე B მართია. ვთქვათ A არის წერტილი CF წრფეზე ისეთი, რომ $FA = FB$ და F ძევს A და C-ს შორის. D წერტილი შერჩეულია ისე, რომ $DA = DC$ და AC არის $\angle DAB$ კუთხის ბისექტრისა. E წერტილი შერჩეულია ისე, რომ $EA = ED$ და AD არის $\angle EAC$ კუთხის ბისექტრისა. ვთქვათ M არის CF-ის შუაწერტილი. ვთქვათ X არის ისეთი წერტილი, რომ $AMXE$ პარალელოგრამია ($AM \parallel EX$ და $AE \parallel MX$). დაამტკიცეთ, რომ BD, FX და ME წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა მთელი დადებითი რიცხვი n, რომლისთვისაც $n \times n$ დაფის თითოეულ უჯრაში შეგვიძლია ჩავწეროთ I, M და O ასოები ისე, რომ თითოეულ უჯრაში ეწეროს ერთი ასო და:

- ყოველ სტრიქონში და ყოველ სვეტში, ზუსტად მესამედი იყოს ასო I, ზუსტად მესამედი იყოს ასო M და ზუსტად მესამედი იყოს ასო O; და
- ყოველ დიაგონალში, რომლის უჯრების რაოდენობაც სამის ჯერადია, ზუსტად მესამედი იყოს ასო I, ზუსტად მესამედი იყოს ასო M და ზუსტად მესამედი იყოს ასო O.

შენიშვნა: თუ $n \times n$-ზე დაფის სტრიქონებსა და სვეტებს გადავნომრავდ ბუნებრივი რიგით რიცხვებით $1, 2, ..., n$, მაშინ თითოეულ უჯრას შეესაბამება დადებით მთელ რიცხვთა (i, j) წყვილი, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. როცა $n > 1$, დაფას გააჩნია $4n-2$ ცალი ორი ტიპის *დიაგონალი*. პირველი ტიპის დიაგონალი შედგება ყველა იმ (i, j) უჯრისგან, რომელთათვისაც $i+j$ მუდმივი სიდიდეა, ხოლო მეორე ტიპის დიაგონალი შედგება ყველა იმ (i, j) უჯრისგან, რომელთათვისაც $i - j$ მუდმივი სიდიდეა.

ამოცანა 3. ვთქვათ $P = A_1A_2\ldots A_k$ სიბრტყეზე მდებარე ამოზნექილი მრავალკუთხედია. ცნობილია, რომ A_1, A_2, $\ldots$, A_k წვეროები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე და მათი კოორდინატები მთელი რიცხვებია. ვთქვათ S არის P-ს ფართობი. მოცემულია მთელი დადებითი კენტი რიცხვი n ისეთი, რომ P-ს ყოველი გვერდის სიგრძის კვადრატი მთელი რიცხვია, რომელიც იყოფა n-ზე. დაამტკიცეთ, რომ $2S$ არის მთელი რიცხვი, რომელიც იყოფა n-ზე.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

სამშაბათი, 12 ივლისი, 2016

ამოცანა 4. დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს ეწოდება *კარგი* თუ ის შეიცავს ორ ელემენტს მაინც და ამ სიმრავლის ყოველ ელემენტს აქვს საერთო მარტივი გამყოფი ერთ სხვა ელემენტთან მაინც მოცემული სიმრავლიდან. ვთქვათ $P(n) = n^2 + n + 1$. იპოვეთ უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვი b, რომლისთვისაც არსებობს არაუარყოფითი მთელი რიცხვი a ისეთი, რომ

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

არის კარგი სიმრავლე.

ამოცანა 5. დაფაზე წერია განტოლება

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

რომელშიც ტოლობის თითოეულ მხარეს 2016 ცალი წრფივი მამრავლია. იპოვეთ k-ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა, რომლისთვისაც შეგვიძლია წავშალოთ ზუსტად k ცალი წრფივი მამრავლი ამ 4032 ცალი წრფივი მამრავლიდან ისე, რომ ტოლობის თითოეულ მხარეს დაგვრჩეს ერთი მაინც წრფივი მამრავლი და მიღებულ განტოლებას არ ჰქონდეს ნამდვილი ამონახსნი.

ამოცანა 6. სიბრტყეზე მოცემულია $n \geqslant 2$ ცალი წრფის მონაკვეთი ისე, რომ ყოველი ორი მონაკვეთი იკვეთება მათ შიგა წერტილში და არც ერთ სამ მონაკვეთს საერთო წერტილი არ აქვს. საბა ირჩევს ყოველი მონაკვეთის ერთ-ერთ ბოლოს და სვამს იქ ბაყაყს სახით მონაკვეთის მეორე ბოლოსკენ. შემდეგ ის $n-1$-ჯერ ურტყამს ხელის გულებს ერთმანეთს, ანუ $n-1$-ჯერ უკრავს ტაშს. ყოველი ტაშის შემდეგ ყოველი ბაყაყი მაშინვე ხტება წინ მისი მონაკვეთის უახლოეს გადაკვეთის წერტილზე. ბაყაყები არასდროს იცვლიან ხტომის მიმართულებას. საბას სურს განალაგოს ბაყაყები ისე, რომ არც ერთი ორი მათგანი არასდროს არ მოხვდეს გადაკვეთის წერტილში ერთდროულად.

ა) დაამტკიცეთ, რომ საბა ყოველთვის განახორციელებს თავის სურვილს თუ n კენტია.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ საბა ვერასდროს განახორციელებს თავის სურვილს, თუ n ლუწია.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით