



*Ponedjeljak, 18. jul 2011.*

**Zadatak 1.** Za skup  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  čiji su elementi četiri različita prirodna broja, sa  $s_A$  označimo zbir  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Označimo sa  $n_A$  broj parova  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , takvih da je  $s_A$  djeljivo sa  $a_i + a_j$ .

Naći sve skupove  $A$  čiji su elementi četiri različita prirodna broja, za koje  $n_A$  dostiže najveću moguću vrijednost.

**Zadatak 2.** Neka je  $\mathcal{S}$  konačan skup tačaka u ravni koji sadrži bar dvije tačke. U skupu  $\mathcal{S}$  ne postoje tri tačke koje leže na istoj pravoj. *Vjetrenjačom* ćemo zvati sljedeći proces. Prvo biramo pravu  $\ell$  na kojoj se nalazi tačno jedna tačka  $P \in \mathcal{S}$ . Prava  $\ell$  rotira oko centra  $P$  u smjeru kretanja kazaljke na satu sve dok se na njoj ne nađe neka tačka iz  $\mathcal{S}$  različita od  $P$ . U tom trenutku ta tačka, označimo je sa  $Q$ , postaje novi centar rotacije a prava  $\ell$  nastavlja da rotira u smjeru kretanja kazaljke na satu sve dok se na njoj ne nađe neka tačka iz  $\mathcal{S}$  različita od  $Q$ . Proces traje beskonačno dugo.

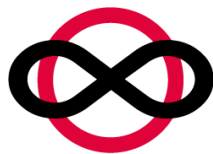
Dokazati da je moguće izabrati neku tačku  $P$  iz  $\mathcal{S}$  i neku pravu  $\ell$ , pri čemu prava  $\ell$  sadrži tačku  $P$  i nijednu drugu tačku iz  $\mathcal{S}$ , tako da je u *vjetrenjači* koja počinje sa pravom  $\ell$ , svaka od tačaka iz  $\mathcal{S}$  centar rotacije beskonačno mnogo puta.

**Zadatak 3.** Neka je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

za sve realne brojeve  $x$  i  $y$ .

Dokazati da je  $f(x) = 0$  za svako  $x \leq 0$ .



*Utorak, 19. jul 2011.*

**Zadatak 4.** Dat je prirodan broj  $n$ . Imamo vagu sa tasovima i  $n$  tegova čije su težine  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Svih  $n$  tegova se jedan za drugim razmješta na tasove, odnosno u svakom od  $n$  koraka bira se teg, koji još nije smješten na vagu i smješta se na lijevi ili desni tas; pri tome teg se stavlja tako da ni u jednom trenutku težina na desnom tasu nije veća od one na lijevom. Odrediti broj načina na koji se može sprovesti ovaj niz koraka.

**Zadatak 5.** Neka je funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  takva da je za sve cijele brojeve  $m$  i  $n$  razlika  $f(m) - f(n)$  djeljiva sa  $f(m - n)$ .

Dokazati da je, za sve cijele brojeve  $m$  i  $n$  za koje je  $f(m) \leq f(n)$ , broj  $f(n)$  djeljiv sa  $f(m)$ .

**Zadatak 6.** Neka je  $ABC$  oštrogli trougao i neka je  $\Gamma$  njegova opisana kružnica. Neka je  $\ell$  proizvoljna tangenta na kružnici  $\Gamma$  i neka su  $\ell_a, \ell_b$  i  $\ell_c$  prave simetrične pravoj  $\ell$  u odnosu na prave  $BC, CA$  i  $AB$ , redom.

Dokazati da kružnica opisana oko trougla određenog pravama  $\ell_a, \ell_b$  i  $\ell_c$  dodiruje kružnicu  $\Gamma$ .