



Pondělí, 18. července, 2011

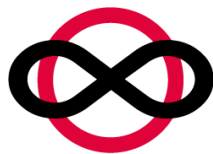
**Úloha 1.** Pro libovolnou množinu  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  čtyř (po dvou různých) přirozených čísel označme  $s_A$  součet  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Dále nechť  $n_A$  značí počet dvojic  $(i, j)$ , kde  $1 \leq i < j \leq 4$  a  $a_i + a_j$  dělí  $s_A$ . Určete všechny čtyřprvkové množiny  $A$  přirozených čísel, pro které je hodnota  $n_A$  největší možná.

**Úloha 2.** Nechť  $\mathcal{S}$  je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka  $\ell$  procházející právě jedním bodem  $P \in \mathcal{S}$ . Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se *středem otáčení*  $P$  dokud „nenarazí“ na další bod množiny  $\mathcal{S}$ , označme jej  $Q$ . Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení  $Q$ , dokud nenarazí na další bod množiny  $\mathcal{S}$ , a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod  $P \in \mathcal{S}$  a přímku  $\ell$ , procházející bodem  $P$ , tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý bod z  $\mathcal{S}$  nekonečně mnohokrát.

**Úloha 3.** Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel splňující nerovnost

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

pro všechna reálná  $x$  a  $y$ . Dokažte, že  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \leq 0$ .



Úterý, 19.července, 2011

**Úloha 4.** Necht  $n$  je celé kladné číslo. Máme dány rovnoramenné váhy a  $n$  závaží o hmotnostech  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . V  $n$  krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na vahách, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou miskou vah ale vždy tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto  $n$  kroků existuje?

**Úloha 5.** Necht  $f$  je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá  $m$  a  $n$  je rozdíl  $f(m) - f(n)$  dělitelný číslem  $f(m - n)$ . Dokažte, že pro libovolná celá  $m$  a  $n$ , taková, že  $f(m) \leq f(n)$ , je číslo  $f(n)$  dělitelné číslem  $f(m)$ .

**Úloha 6.** Necht  $ABC$  je ostroúhlý trojúhelník a  $\Gamma$  kružnice jemu opsaná. Dále necht  $\ell$  je tečna kružnice  $\Gamma$  a  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  jsou po řadě obrazy přímky  $\ell$  v osové symetrii podle přímk  $BC, CA, AB$ . Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  se dotýká kružnice  $\Gamma$ .