

Уторак, 23. јул 2013.

**1. задатак.** Доказати да за свака два природна броја  $k$  и  $n$  постоји  $k$  природних бројева  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (не обавезно различитих) таквих да је

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

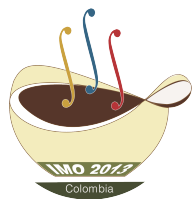
**2. задатак.** Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дијели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена сљедећа два услова:

- ниједна права не садржи неку од тачака из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број  $k$  такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред  $k$  правих.

**3. задатак.** Приписана кружница троугла  $ABC$  наспрам тјемева  $A$  додирује страницу  $BC$  у тачки  $A_1$ . Аналогно се дефинишу тачке  $B_1$  на  $CA$  и  $C_1$  на  $AB$ , као додирне тачке приписаних кружница наспрам тјемева  $B$  и  $C$ , редом. Претпоставимо да центар описане кружнице троугла  $A_1B_1C_1$  лежи на описаној кружници троугла  $ABC$ . Доказати да је троугао  $ABC$  правоугли.

*Приписана кружница троугла  $ABC$  наспрам тјемева  $A$  је кружница која додирује страницу  $BC$ , продужетак странице  $AB$  преко тачке  $B$  и продужетак странице  $AC$  преко тачке  $C$ . Слично се дефинишу приписане кружнице наспрам тјемева  $B$  и  $C$ .*



Сриједа, 24. јул 2013.

**4. задатак.** Нека је  $H$  ортоцентар оштроуглог троугла  $ABC$ , а  $W$  тачка на страници  $BC$  различита од тјемева  $B$  и  $C$ . Тачке  $M$  и  $N$  су подножја висина из тјемева  $B$  и  $C$ , редом. Нека је  $\omega_1$  описана кружница троугла  $BWN$ , а  $X$  тачка на  $\omega_1$  таква да је  $WX$  пречник кружнице  $\omega_1$ . Аналогно, нека је  $\omega_2$  описана кружница троугла  $CWM$ , а  $Y$  тачка на  $\omega_2$  таква да је  $WY$  пречник кружнице  $\omega_2$ . Доказати да су тачке  $X$ ,  $Y$  и  $H$  колинеарне.

**5. задатак.** Нека је  $\mathbb{Q}_{>0}$  скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  задовољава следећа три услова:

- (i) за све  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  важи  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) за све  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  важи  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) постоји рационалан број  $a > 1$  такав да је  $f(a) = a$ .

Доказати да је  $f(x) = x$  за свако  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**6. задатак.** Дат је природан број  $n \geq 3$ , и  $n+1$  тачака на кружници које је дијеле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима  $0, 1, \dots, n$ , таква да се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем кружнице. Означавање се назива *лијепим* ако, за сваке четири ознаке  $a < b < c < d$  за које је  $a + d = b + c$ , тетива која спаја тачке означене са  $a$  и  $d$  не сијече тетиву која спаја тачке означене са  $b$  и  $c$ .

Нека је  $M$  број лијепих означавања, а  $N$  број уређених парова  $(x, y)$  природних бројева таквих да је  $x + y \leq n$  и  $\text{НЗД}(x, y) = 1$ . Доказати да је

$$M = N + 1.$$