ორშაბათი, 11. ივლისი 2022

ამოცანა 1. ოსლოს ბანკი უშვებს ალუმინის მონეტებს და ბრინჯაოს მონეტებს. აღვნიშნოთ ალუმინის ტიპის მონეტა A-თი, ხოლო ბრინჯაოს ტიპის - B-თი. გუკამ ერთ რიგში რაღაც თანმიმდევრობით განალაგა მარცხნიდან მარჯვნივ $2n$ ცალი ასეთი მონეტა, რომელთაგან n ცალი ალუმინისაა, ხოლო $n-$ ბრინჯაოსი. ბლოკი ვუწოდოთ ერთმანეთის მიყოლებით დალაგებულ ერთი და იგივე ტიპის მონეტების ნებისმიერი სიგრძის მიმდევრობას. ვთქვათ $k \leqslant 2n$ ფიქსირებული მთელი დადებითი რიცხვია. გუკა ყოველ ჯერზე ასრულებს შემდეგ ოპერაციას: ის იღებს უდიდესი სიგრძის ბლოკს, რომელიც შეიცავს მარცხნიდან k-ურ ადგილზე მყოფ მონეტას და ამ ბლოკში შემავალ ყოველ მონეტას გადააადგილებს რიგის მარცხენა ბოლოში. მაგალითად თუ $n=4$, $k=4$ და საწყისი განლაგებაა $AABBBABA$, მაშინ პროცესი გაგრძელდება შემდეგნაირად

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

იპოვეთ ყველა წყვილი (n,k), სადაც $1 \leqslant k \leqslant 2n$ ისეთი, რომ მონეტების ნებისმიერი საწყისი განლაგებისთვის, პროცესის განმავლობაში იქნება რაღაც მომენტი, როდესაც რიგში მარცხნიდან პირველი n ცალი მონეტა იქნება ერთი და იგივე ტიპის.

ამოცანა 2. ვთქვათ $\mathbb{R}^+$ არის ყველა ნამდვილ დადებით რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ისეთი, რომ ყოველი $x \in \mathbb{R}^+$-თვის, არსებობს ზუსტად ერთი $y \in \mathbb{R}^+$, რომ მართებულია უტოლობა

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

ამოცანა 3. ვთქვათ k არის მთელი დადებითი რიცხვი და ვთქვათ S არის კენტ მარტივ რიცხვთა სასრული სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს არაუმეტეს ერთი გზა (მოტრიალების და არეკვლის სიზუსტით) S სიმრავლის ყველა ელემენტის წრეწირის გასწვრივ განლაგებისა ისე, რომ ნებისმიერი ორი მეზობელი რიცხვის ნამრავლი იყოს x^2+x+k სახის, სადაც x მთელი დადებითი რიცხვია.

სამშაბათი, 12. ივლისი 2022

ამოცანა 4. ვთქვათ $ABCDE$ ამოზნექილი ხუთკუთხედია ისეთი, რომ $BC = DE$. დავუშვათ $ABCDE$-ს შიგნით მოიძებნა წერტილი T ისეთი, რომ $TB = TD$, $TC = TE$ და $\angle ABT = \angle TEA$. ვთქვათ AB წრფე კვეთს CD და CT წრფეებს შესაბამისად P და Q წერტილებში. დავუშვათ, რომ P, B, A, Q წერტილები, ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით მდებარეობენ წრფეზე . ვთქვათ AE წრფე კვეთს CD და DT წრფეებს შესაბამისად R და S წერტილებში. დავუშვათ, რომ R, E, A, S წერტილები, ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით მდებარეობენ წრფეზე . დაამტკიცეთ, რომ P, S, Q, R წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

ამოცანა 5. იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა (a, b, p) სამეული, სადაც p მარტივი რიცხვია და

$$a^p = b! + p.$$

ამოცანა 6. ვთქვათ n მთელი დადებითი რიცხვია. ნორვეგიული კვადრატი ვუწოდოთ $n \times n$ კვადრატულ ცხრილს, რომლის უჯრებში ჩაწერილია ყველა მთელი რიცხვი 1-დან n^2-ის ჩათვლით და ამასთან, ყოველ უჯრაში წერია ერთი და მხოლოდ ერთი რიცხვი. მოცემული უჯრის მეზობელი უჯრა ვუწოდოთ უჯრას, რომელსაც მოცემულ უჯრასთან მხოლოდ ერთი გვერდი აქვს საერთო. დაბლობი ვუწოდოთ ნებისმიერ უჯრას, რომლის ყველა მეზობელ უჯრაში უფრო დიდი რიცხვი წერია ვიდრე თავად ამ უჯრაში. აღმართი ვუწოდოთ ერთი ან რამდენიმე უჯრისგან შემდგარ მიმდევრობას თუ სრულდება შემდეგი:

(i) უჯრათა მიმდევრობის პირველი უჯრა არის დაბლობი,

(ii) უჯრათა მიმდევრობის ყოველი მომდევნო უჯრა წინა უჯრის მეზობელია,

(iii) უჯრათა მიმდევრობაში ჩაწერილი რიცხვები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას.

ყოველი n-თვის, იპოვეთ უმცირესი შესაძლო რაოდენობა ყველა აღმართისა ნორვეგიულ კვადრატში.