58th International Mathematical Olympiad

Bosnian (bos), day 1

Utorak, 18. juli 2017.

1. zadatak. Za dati prirodan broj $a_0 > 1$, definišimo niz $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tako da je za svako $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ako je } \sqrt{a_n} \text{ cio broj,} \\ a_n + 3, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Odrediti sve vrijednosti a_0 za koje postoji broj A takav da je $a_n = A$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n.

2. zadatak. Sa $\mathbb{R}$ je označen skup realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y važi

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

3. zadatak. Lovac i nevidljivi zec igraju igru u ravni. Polazne tačke zeca i lovca, redom označene sa A_0 i B_0, su iste. Nakon $n-1$ krugova igre, zec je u tački A_{n-1}, a lovac u tački B_{n-1}. U n-tom krugu se događa sljedeće, ovim redom:

(i) Zec se neprimjetno pomjera u tačku A_n na rastojanju tačno 1 od tačke A_{n-1}.

(ii) Lovac na radaru očitava tačku P_n. Jedino što radar garantuje je da je rastojanje između tačaka P_n i A_n najviše 1.

(iii) Lovac se pomjera u tačku B_n na rastojanju tačno 1 od tačke B_{n-1}, što zec vidi.

Da li lovac uvijek, ma kakvi bili kretanje zeca i izvještaji sa radara, može da se kreće tako da osigura da poslije 10^9 krugova rastojanje između njega i zeca bude najviše 100?

Language: Bosnian

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena

Srijeda, 19. juli 2017.

4. zadatak. Date su različite tačke R i S na kružnici Ω tako da RS nije njen prečnik. Neka je ℓ tangenta na kružnicu Ω u tački R. Tačka T je takva da je S sredina duži RT. Tačka J na kraćem luku RS kružnice Ω je takva da opisana kružnica Γ trougla JST siječe pravu ℓ u dvije različite tačke. Neka je A ona od te dvije tačke koja je bliža tački R. Prava AJ ponovo siječe kružnicu Ω u tački K. Dokazati da prava KT dodiruje kružnicu Γ.

5. zadatak. Dat je prirodan broj $N \geqslant 2$. U redu se nalazi $N(N+1)$ fudbalera, po parovima različitih visina. Admir želi da ukloni $N(N-1)$ igrača, ostavljajući red sa $2N$ igrača u kome je zadovoljeno sljedećih N uslova:

(1) između dvojice najviših igrača ne stoji niko,

(2) između trećeg i četvrtog igrača po visini ne stoji niko,

⋮

(N) između dvojice najnižih igrača ne stoji niko.

Dokazati da se ovo uvijek može izvesti.

6. zadatak. Uređeni par cijelih brojeva (x, y) zovemo *primitivnom tačkom* ako je najveći zajednički djelilac brojeva x i y jednak 1. Neka je S konačan skup primitivnih tačaka. Dokazati da postoje prirodan broj n i cijeli brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takvi da za sve tačke (x, y) iz skupa S važi

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$