Мягмар гараг, 7-р сарын 18-ны өдөр, 2017

Бодлого 1. Бүхэл тоо $a_0 > 1$ бүрийн хувьд a_0, a_1, a_2, ... дарааллыг дараах дүрмээр тодорхойлъё. Үүнд $n \geqslant 0$ үед

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{хэрэв } \sqrt{a_n} \text{ нь бүхэл тоо,} \\ a_n + 3 & \text{бусад.} \end{cases}$$

Төгсгөлгүй олон n дугаарын хувьд $a_n = A$ биелэх A тоо олддог байх a_0-ийн бүх утгыг тодорхойл.

Бодлого 2. Бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}$ гэж тэмдэглэе. Дурын бодит x, y тоонуудын хувьд

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

байх бүх $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодлого 3. Хавтгайд анчин ба үл үзэгдэх туулай хоёр тоглоом тогложээ. Туулайн эхлэлийн A_0 цэг анчны эхлэлийн B_0 цэгтэй давхацдаг. Тоглоомын $n-1$ алхмын дараа туулай A_{n-1} цэг дээр, анчин B_{n-1} цэг дээр очсон байдаг. Тоглоомын n дүгээр алхмаар дараах 3 үйлдэл дараалан хийгддэг. Үүнд:

(1) Туулай A_{n-1} цэгээс нэгж зайд байрлах A_n цэг рүү харагдахгүйгээр явдаг.

(2) Тусгай төхөөрөмж анчинд P_n цэгийг мэдээлдэг. P_n ба A_n цэгүүдийн хоорондох зай нэгжээс хэтрэхгүй байх нь тусгай төхөөрөмжөөс анчинд өгч буй баталгаатай зүйл юм.

(3) Анчин B_{n-1} цэгээс нэгж зайд байрлах B_n цэг рүү харагдахуйцаар явдаг.

Туулай хаашаа явах болон тусгай төхөөрөмж ямар цэгүүдийг мэдээлэхээс үл хамааран анчин 10^9 алхмын дараа анчин ба туулайн хоорондох зай 100 нэгжээс хэтрэхгүй байхаар анчин хэрхэн явахаа шийдэх үргэлж боломжтой юу?

Лхагва гараг, 7-р сарын 19-ний өдөр, 2017

Бодлого 4. Ω тойрог дээр ялгаатай R ба S цэгүүдийг RS нь диаметр биш байхаар сонгов. Ω тойргийг R цэгт шүргэх шулууныг ℓ гэе. T цэгийг RT хэрчмийн дундаж цэг S байхаар сонгоё. JST гурвалжныг багтаасан Γ тойрог ℓ шулууныг ялгаатай хоёр цэгээр огтолж байхаар Ω тойргийн богино RS хөвч дээр J цэгийг сонгож авъя. R цэгтэй ойрхон бөгөөд Γ тойрог ба ℓ шулууны огтлолцолд байрлах цэгийг A гэе. AJ цацраг Ω тойргийг огтлох цэгийг K гэе. KT шулуун Γ тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодлого 5. Бүхэл тоо $N \geq 2$ өгөгдөв. Аль ч хоёрынх нь өндөр ялгаатай $N(N+1)$ тамирчид нэг эгнээнд жагсаж байв. Эгнээнд үлдэх $2N$ тамирчны хувьд дараах N ширхэг шаардлага биелж байхаар $N(N-1)$ тамирчныг энэ эгнээнээс гаргахаар шийджээ. Үүнд:

(1) үлдэх тамирчдын хамгийн өндөр 2 тамирчны хооронд хэн ч байхгүй,

(2) үлдэх тамирчдын 3 ба 4-р өндөр тамирчдын хооронд хэн ч байхгүй,

$\vdots$

(N) үлдэх тамирчдын хамгийн намхан 2 тамирчны хооронд хэн ч байхгүй.

Энэ шийдвэр үргэлж биелэх боломжтой болохыг батал.

Бодлого 6. Хэрэв x, y нь харилцан анхны бүхэл тоонууд бол (x, y) хосыг *примитив цэг* гэе. Төгсгөлөг тооны примитив цэгүүдээс тогтох өгөгдсөн S олонлогийн хувьд тус олонлогийн (x, y) цэг бүр дээр

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

адилтгал биелдэг байхаар эерэг бүхэл n, бүхэл a_0, a_1, ..., a_n тоонууд олдохыг батал.