

วันอังคารที่ ๑๖ กรกฎาคม ๒๕๖๒

โจทย์ข้อ ๑. ให้ \mathbb{Z} แทนเซตของจำนวนเต็ม จงหาฟังก์ชัน $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ทั้งหมดซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็ม a และ b

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

โจทย์ข้อ ๒. ในรูปสามเหลี่ยม ABC จุด A_1 อยู่บนด้าน BC และจุด B_1 อยู่บนด้าน AC ให้ P และ Q เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AA_1 และ BB_1 ตามลำดับ โดยที่ PQ ขนานกับ AB ให้ P_1 เป็นจุดบนเส้นตรง PB_1 ซึ่ง B_1 อยู่ระหว่าง P และ P_1 และ $\angle PP_1C = \angle BAC$ ในทำนองเดียวกัน ให้ Q_1 เป็นจุดบนเส้นตรง QA_1 ซึ่ง A_1 อยู่ระหว่าง Q และ Q_1 และ $\angle CQ_1Q = \angle CBA$

จงพิสูจน์ว่าจุด P, Q, P_1 และ Q_1 อยู่บนวงกลมเดียวกัน

โจทย์ข้อ ๓. เครือข่ายสังคมออนไลน์เครือข่ายหนึ่งมีผู้ใช้ 2019 คน โดยผู้ใช้บางคู่เป็นเพื่อนกัน ถ้าผู้ใช้ A เป็นเพื่อนกับผู้ใช้ B แล้วผู้ใช้ B จะเป็นเพื่อนกับผู้ใช้ A ด้วย เหตุการณ์ต่อไปนี้สามารถเกิดขึ้นได้เรื่อย ๆ ครั้งละหนึ่งเหตุการณ์

ผู้ใช้สามคน A, B และ C ซึ่ง A เป็นเพื่อนกับทั้ง B และ C แต่ B และ C ไม่เป็นเพื่อนกัน สามารถเปลี่ยนสถานะความเป็นเพื่อน โดยที่ B และ C จะกลายเป็นเพื่อนกัน แต่ A จะเลิกเป็นเพื่อนกับ B และ C ส่วนสถานะความเป็นเพื่อนอื่น ๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

เมื่อแรกเริ่ม ผู้ใช้ 1010 คนมีเพื่อนคนละ 1009 คน และผู้ใช้ 1009 คนที่เหลือมีเพื่อนคนละ 1010 คน จงพิสูจน์ว่ามีลำดับของเหตุการณ์ดังกล่าว ที่ทำให้ผู้ใช้แต่ละคนเหลือเพื่อนอย่างมากหนึ่งคน

วันพุธที่ ๑๗ กรกฎาคม ๒๕๖๒

โจทย์ข้อ ๔. จงหาอันดับของจำนวนเต็มบวก (k, n) ทั้งหมดซึ่ง

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

โจทย์ข้อ ๕. ธนาคารแห่งเมืองบาสแจกจ่ายเหรียญจำนวนหนึ่งที่มีตัวอักษร H บนหน้าหนึ่งและตัวอักษร T บนอีกหน้าหนึ่งของเหรียญ แฮร์รีเรียงเหรียญดังกล่าวจำนวน n เหรียญเป็นเส้นตรงจากซ้ายไปขวา เขาทำกระบวนการต่อไปนี้ซ้ำ ๆ ถ้ามีเหรียญแสดงหน้า H อยู่ $k > 0$ เหรียญพอดี เขาจะพลิกเหรียญที่ k นับจากด้านซ้าย แต่ถ้าทุกเหรียญแสดงหน้า T เขาจะหยุด

ยกตัวอย่างเช่น เมื่อ $n = 3$ และรูปแบบตั้งต้นเป็น THT ลำดับของกระบวนการดังกล่าวจะเป็น

$$THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$$

ซึ่งสิ้นสุดหลังจากทำกระบวนการไปแล้วสามครั้ง

(a) จงแสดงว่า สำหรับรูปแบบตั้งต้นใด ๆ แฮร์รีจะสามารถทำกระบวนการดังกล่าวได้เพียงจำกัดครั้ง

(b) สำหรับรูปแบบตั้งต้น C ใด ๆ นิยาม $L(C)$ เป็นจำนวนครั้งที่แฮร์รีทำกระบวนการก่อนที่เขาจะหยุด ยกตัวอย่างเช่น $L(THT) = 3$ และ $L(TTT) = 0$ จงหาค่าเฉลี่ยของ $L(C)$ เมื่อแทน C ด้วยรูปแบบตั้งต้นทั้ง 2^n รูปแบบที่เป็นไปได้

โจทย์ข้อ ๖. ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC ซึ่ง $AB \neq AC$ วงกลมแนบใน ω ของ ABC สัมผัสด้าน BC, CA และ AB ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ เส้นตรงที่ผ่าน D และตั้งฉากกับ EF ตัดกับ ω อีกครั้งที่จุด R เส้นตรง AR ตัดกับ ω อีกครั้งที่จุด P วงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยม PCE และ PBF ตัดกันอีกครั้งที่จุด Q

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง DI และ PQ ตัดกันบนเส้นตรงที่ผ่าน A และตั้งฉากกับ AI