

الإثنين، 21. سبتمبر 2020

مسألة 1. نعتبر الرباعي المحدب $ABCD$. النقطة P داخل الرباعي $ABCD$ بحيث تتحقق النسب الآتية:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

أثبت أن المستقيمات الثلاثة التالية: المنصفان الداخليان للزوايا $\angle ADP$ و $\angle PCB$ و محور القطعة المستقيمة AB شلائق في نقطة واحدة.

مسألة 2. الأعداد الحقيقية a, b, c, d تحقق $a + b + c + d = 1$ و $a \geq b \geq c \geq d > 0$. أثبت أن

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

مسألة 3. لدينا $4n$ قطعة من الحصى أوزانها $1, 2, 3, \dots, 4n$. كل قطعة من الحصى ملونة بلون من بين n لون، ومن كل لون أربع قطع. بين أنه يمكننا ترتيب هذه القطع في كومتين بحيث يكون الشيطان الآتيان محققاً معاً:

- مجموع أوزان القطع في الكومتين متساوٍ. كل كومة تحتوي على قطعتين من نفس اللون.

الثلاثاء، 22. سبتمبر 2020

مسألة 4. يوجد عدد صحيح $1 < n$. هناك n^2 محطة على جبل تقع جميعها على ارتفاعات مختلفة. هناك شركان A و B للنقل بين المحطات كل منها يدير عمل k حافلة. كل حافلة تتيح إمكانية النقل من محطة إلى محطة أعلى ارتفاعاً (دون توقف على الطريق). لاحفالت الشركة A عدد يساوي k من محطات الانطلاق المختلفة، وعدد يساوي k من محطات الوصول المختلفة، وكل حافلة تبدأ من موقع أعلى تصل أيضاً إلى موقع أعلى. تحقق حافلات الشركة B شروط الشركة A نفسها. نقول إن محطتين متصلتين من قبل شركة إذا كان بإمكان أحدهم البدء من المحطة الأخفض والوصول إلى المحطة الأعلى باستعمال واحدة أو أكثر من حافلات تلك الشركة (ولا يسمح بأي تنقلات أخرى بين المحطات).

عِنْ أصغر عدد صحيح موجب تمامًا k يمكن في حالته ضمان وجود محطتين متصلتين من قبل الشركتين معاً.

مسألة 5. نعطي عدداً $1 < n$ من البطاقات. على كل بطاقة كتب عليها عدد صحيح موجب تماماً. تمتلك مجموعة البطاقات الخاصة الآتية: المتوسط الحسابي للعددين المكتوبين على أي زوج من البطاقات يساوي أيضاً المتوسط الهندسي للأعداد المكتوبة على واحدة أو أكثر من البطاقات.

عند أي قيم n نستنتج من ذلك أن جميع الأعداد المكتوبة على هذه البطاقات متساوية؟

مسألة 6. أثبتت أنه يوجد عدد موجب تماماً c يتحقق الخاصية الآتية: ليكن $1 < n$ عدداً صحيحاً، ولتكن S مجموعة مكونة من n نقطة في المستوى بحيث تكون المسافة بين أي نقطتين مختلفتين في S أكبر أو تساوي 1. عندئذ يوجد مستقيم ℓ يفصل S وبحيث تكون المسافة بين أي نقطة من S إلى ℓ أكبر أو تساوي $cn^{-1/3}$.

(نقول إن مستقيماً ℓ يفصل مجموعة نقاط S إذا تقاطع مع قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من S)

ملاحظة. نتائج أضعف يستبدل فيها بـ $cn^{-1/3}$ المقدار $cn^{-\alpha}$ يمكن أن تمنح نقاطاً وذلك تبعاً لقيمة الثابت $1/3 > \alpha$.