יום שלישי, 18 ביולי, 2017

שאלה 1. לכל שלם $a_0 > 1$, נגדיר סדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ המקיימת לכל $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{אם } \sqrt{a_n} \text{ הוא מספר שלם} \\ a_n + 3, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

מצאו את כל ערכי a_0 עבורם ישנו מספר A המקיים $a_n = A$ עבור אינסוף ערכי n.

שאלה 2. תהא $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורן לכל x ו-y ממשיים,

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy).$$

שאלה 3. ציידת וארנבת בלתי-נראית משחקות משחק במישור האוקלידי. נקודת ההתחלה של הארנבת, A_0, ונקודת ההתחלה של הציידת, B_0, זהות. לאחר $n-1$ סיבובים של המשחק, הארנבת נמצאת בנקודה A_{n-1} והציידת נמצאת בנקודה B_{n-1}. בסיבוב ה-n של המשחק, שלושה דברים מתרחשים בסדר הבא:

(i) הארנבת מקפצת באופן נסתר לנקודה A_n עבורה המרחק בין A_{n-1} ו-A_n הוא בדיוק 1.

(ii) מכשיר מעקב מציג לציידת נקודה P_n. מכשיר המעקב מבטיח לציידת רק שהמרחק בין P_n ו-A_n הוא לכל היותר 1.

(iii) הציידת הולכת באופן גלוי לנקודה B_n עבורה המרחק בין B_{n-1} ו-B_n הוא בדיוק 1.

האם הציידת תמיד יכולה, לא משנה איך הארנבת מקפצת, ולא משנה אילו נקודות מוצגות על ידי מכשיר המעקב, לבחור את מהלכיה כך שלאחר 10^9 סיבובים היא תוכל להבטיח שהמרחק בינה ובין הארנבת הוא לכל היותר 100?

יום רביעי, 19 ביולי, 2017

שאלה 4. תהיינה R ו-S נקודות שונות על המעגל Ω עבורן RS אינו קוטר. יהא ℓ הישר המשיק ל-Ω ב-R. הנקודה T מקיימת ש-S היא אמצע הקטע RT. בוחרים נקודה J על הקשת הקצרה RS של Ω כך שהמעגל החוסם Γ של המשולש JST נחתך עם ℓ בשתי נקודות שונות. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של Γ ו-ℓ הקרובה יותר ל-R. הישר AJ פוגש את Ω שנית בנקודה K. הוכיחו כי KT משיק ל-Γ.

שאלה 5. נתון מספר שלם $N \geq 2$. נבחרת של $N(N+1)$ שחקני כדורגל, אשר כל שניים מתוכם בעלי גבהים שונים, עומדים בשורה. המאמן גרנט רוצה להסיר $N(N-1)$ שחקנים מהשורה, כך שבשורה של $2N$ השחקנים הנותרים יתקיימו N התנאים הבאים:

(1) אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הגבוהים ביותר בשורה,

(2) אף אחד לא עומד בין השחקנים השלישי והרביעי הכי גבוהים בשורה,

⋮

(N) אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הנמוכים ביותר בשורה.

הראו כי זה תמיד אפשרי.

שאלה 6. זוג סדור של מספרים שלמים (x, y) נקרא **נקודה פרימיטיבית** אם המחלק המשותף הגדול ביותר של x ו-y הוא 1. בהינתן קבוצה סופית S של נקודות פרימיטיביות, הוכיחו כי קיימים שלם חיובי n ושלמים $a_0, a_1, \ldots, a_n$ עבורם לכל (x, y) ב-S, מתקיים

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1 .$$

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות