*Вторник, 8 юли, 2014 г.*

**Задача 1.** Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществува единствено естествено число $n \geq 1$, за което

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

**Задача 2.** Шахматна дъска $n \times n$, където $n \geq 2$ е естествено число, е разделена на $n^2$ единични квадратчета. Конфигурация от $n$ шахматни топа се нарича *мирна*, ако всеки ред и всеки стълб на дъската съдържа точно по един топ. Да се намери най-голямото естествено число $k$, за което за всяка мирна конфигурация от топове съществува $k \times k$ квадрат, такъв, че на никое от неговите $k^2$ единични квадратчета няма топ.

**Задача 3.** Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Точка $H$ е петата на перпендикуляра от $A$ към $BD$. Точките $S$ и $T$ съответно от страните $AB$ и $AD$ са такива, че $H$ е вътрешна за триъгълника $SCT$ и

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Да се докаже, че правата $BD$ се допира до описаната около триъгълника $TSH$ окръжност.



*Време за работа: 4 часа и 30 минути*
*Всяка задача се оценява със 7 точки*

*Сряда, 9 юли, 2014 г.*

**Задача 4.** Върху страната $BC$ на остроъгълен триъгълник $ABC$ са избрани точки $P$ и $Q$ така, че $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точките $M$ и $N$ съответно върху правите $AP$ и $AQ$ са такива, че $P$ е среда на $AM$ и $Q$ е среда на $AN$. Да се докаже, че правите $BM$ и $CN$ се пресичат върху описаната около триъгълника $ABC$ окръжност.

**Задача 5.** За всяко естествено число $n$ Банката на Кейптаун издава монети с номинал $\frac{1}{n}$. Да се докаже, че всяка колекция от такива монети (не непременно с различни номинали) с обща стойност най-много $99 + \frac{1}{2}$ може да се разбие на 100 или по-малко групи, всяка от които на обща стойност най-много 1.

**Задача 6.** Множество от прави в равнината е в *общо положение*, ако никои две от правите не са успоредни и никои три от тях не се пресичат в една точка. Множество от прави в общо положение разделя равнината на области, някои от които имат крайно лице; тези области се наричат *крайни*. Да се докаже, че за всяко достатъчно голямо $n$ във всяко множество от $n$ прави в общо положение е възможно да се оцветят поне $\sqrt{n}$ от правите в синьо така, че нито една от крайните области да няма изцяло синя граница.

*Забележка*: Доказване на граница $c\sqrt{n}$, където $c$ е реална константа, вместо $\sqrt{n}$, ще се точкува в зависимост от стойността на константата $c$.