



Chinese (Traditional) (cht), day 1

2018 年 7 月 9 日星期一

問題 1. 令 Γ 為銳角三角形 ABC 的外接圓。點 D 和 E 分別在線段 AB 和 AC 上，使得 $AD = AE$. BD 和 CE 的中垂線分別和 Γ 的劣弧 \widehat{AB} 和 \widehat{AC} 相交於點 F 和 G . 證明直線 DE 與 FG 平行（或是同一條線）。

問題 2. 找出所有大於等於 3 的整數 n ，使得存在實數 a_1, a_2, \dots, a_{n+2} ，滿足 $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ ，且對於 $i = 1, 2, \dots, n$, 都有

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

問題 3. 如果一個由數字排成的正三角形陣列，除了最下方一列外，每個數字都是它正下方兩數相減的絕對值，則我們稱之為**反巴斯卡三角**。舉例來說，下面這個包含 1 到 10 所有整數的正三角形陣列，就是一個有 4 列的反巴斯卡三角。

$$\begin{array}{cccc} & & & 4 \\ & & 2 & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

請問，是否存在一個 2018 列的反巴斯卡三角，包含所有從 1 到 $1 + 2 + \dots + 2018$ 的整數？



Chinese (Traditional) (cht), day 2

2018 年 7 月 10 日星期二

問題 4. 平面上的一個點 (x, y) , 若 x, y 都是小於或等於 20 的正整數, 被稱作網格。

一開始, 全部 400 個網格都是空的。甲和乙兩人輪流放石頭。先由甲開始。在甲的回合, 甲將一個新的紅石頭放到一個空的網格上, 使得任意兩個放紅石頭的網格距離都不是 $\sqrt{5}$. 而輪到乙時, 乙將一個新的藍石頭放到任何一個空的網格上 (放藍石頭的網格與其他放石頭的網格之間的距離, 不管是多少都可以)。直到其中一個人不能再放石頭時, 他們就停止。

求出最大的 K 使得不論乙怎麼放藍石頭, 甲都保證至少可放 K 個紅石頭。

問題 5. 令 a_1, a_2, \dots 為一個無窮長的正整數數列。假設整數 $N > 1$, 滿足對每個 $n \geq N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

都是整數。證明存在一個正整數 M 使得當 $m \geq M$ 時, $a_m = a_{m+1}$ 恒成立。

問題 6. 一個凸四邊形 $ABCD$, 滿足 $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. 點 X 在 $ABCD$ 內部, 滿足

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{且} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

證明 $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.