Tisdag, den 16 juli, 2019

Problem 1. Låt $\mathbb{Z}$ vara mängden av alla heltal. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sådana att, för alla heltal a och b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problem 2. I triangeln ABC, punkten A_1 ligger på sidan BC och punkten B_1 ligger på sidan AC. Låt P och Q vara punkterna på sträckorna AA_1 och BB_1, respektive, sådana att PQ är parallell med AB.

Låt P_1 vara en punkt på linjen PB_1, sådan att B_1 ligger strikt mellan P och P_1, och $\angle PP_1C = \angle BAC$. Likadant, låt Q_1 vara en punkt på linjen QA_1, sådan att A_1 ligger strikt mellan Q och Q_1, och $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Visa att punkterna P, Q, P_1, och Q_1 ligger på en cirkel.

Problem 3. Ett socialt nätverk har 2019 användare. Vissa par av dessa användare är vänner. När en användare A är vän med användaren B, så är B också vän med A. Händelser av följande slag kan hända upprepade gånger, en i taget:

> Tre användare A, B, och C, sådana att A är vän med både B och C, men B och C inte är vänner, ändrar deras vänskapsförhållande så att B och C är nu vänner, medan A är inte längre en vän med vare sig B, eller C. Alla andra vänskapsförhållanden är oförändrade.

Från början gäller att 1010 användare har 1009 vänner var, och 1009 användare har 1010 vänner var. Visa att det finns en följd av händelser av typen som beskrevs ovan efter vilken varje användare är vän med som mest en annan användare.

Onsdag, den 17 juli, 2019

Problem 4. Bestäm alla par (k, n) av positiva heltal sådana att

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problem 5. The Bank of Bath ger ut mynt med bokstaven H på den ena sidan och bokstaven T på den andra. Harry har n sådana mynt ordnade längs en linje, från vänster till höger.

Harry utför följande operation upprepade gånger: om det finns exakt $k > 0$ mynt som visar H, så vänder han på myntet som ligger på plats k från vänster i raden; annars, visar alla mynten T och Harry avslutar. Till exampel, om $n = 3$ och startkonfigurationen är THT så skulle hela proceduren vara $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, vilken alltså avslutas efter tre operationer.

(a) Visa att, för varje startkonfiguration, Harry avslutar efter ett ändligt antal operationer.

(b) För varje startkonfiguration C, låt $L(C)$ vara antalet operationer innan Harry avslutar proceduren. Till exempel, $L(THT) = 3$ och $L(TTT) = 0$. Bestäm medelvärdet av $L(C)$ över alla 2^n möjliga startkonfigurationer C.

Problem 6. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med $AB \neq AC$ och låt I vara medelpunkten för den i triangel ABC inskrivna cirkeln ω. Cirkeln ω tangerar sidorna BC, CA, och AB i D, E, och F, respektive. Linjen genom D som är vinkelrät mot EF skär ω igen i R. Linjen AR skär ω igen i P. Cirklarna omskrivna kring trianglarna PCE och PBF skär varandra igen i Q.

Visa att linjerna DI och PQ skär varandra på linjen genom A som är vinkelrät mot AI.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng