вівторок, 15 липня 2025

Задача 1. Пряму на координатній площині xOy називатимемо *сонячною*, якщо вона **не** є паралельною ані осі x, ані осі y, ані прямій $x + y = 0$.

Нехай $n \geqslant 3$ – деяке ціле число. Знайдіть усі невід'ємні цілі числа k, для яких існують n різних прямих на цій площині, що задовольняють такі дві умови:

- для всіх натуральних чисел a і b таких, що $a + b \leqslant n + 1$, точка з координатами (a, b) лежить принаймні на одній з цих n прямих;
- рівно k з цих n прямих є сонячними.

Задача 2. Нехай Ω і Γ – такі два кола з центрами в точках M і N відповідно, що радіус кола Ω менший ніж радіус кола Γ. Кола Ω і Γ перетинаються в двох різних точках A і B. Пряма MN перетинає коло Ω в точці C, а коло Γ – в точці D так, що C, M, N та D лежать на прямій MN саме в такому порядку. Нехай P – центр описаного кола трикутника ACD. Пряма AP перетинає коло Ω вдруге в точці $E \neq A$, а коло Γ – вдруге в точці $F \neq A$. Нехай H – ортоцентр трикутника PMN.

Доведіть, що пряма, яка проходить через точку H та паралельна прямій AP, є дотичною до описаного кола трикутника BEF.

(*Ортоцентром* трикутника називають точку перетину його висот.)

Задача 3. Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Функцію $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називатимемо *дотепною*, якщо

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ ділиться націло на } f(a)$$

для всіх натуральних чисел a і b.

Знайдіть найменше значення такої дійсної сталої c, що нерівність $f(n) \leqslant cn$ справджується для всіх дотепних функцій f та для всіх натуральних чисел n.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

середа, 16 липня 2025

Задача 4. *Власним дільником* натурального числа N називають додатний дільник числа N, що відмінний від N.

Нескінченна послідовність $a_1, a_2, \ldots$ складається з натуральних чисел, кожний член якої має щонайменше три власних дільники. Для кожного $n \geqslant 1$ число a_{n+1} є сумою трьох найбільших власних дільників числа a_n.

Знайдіть усі можливі значення першого члена послідовності a_1.

Задача 5. Аліна і Богдан грають у *прикоальну гру*, правила якої залежать від дійсного додатного числа λ, що відоме обом гравцям до початку гри. На n-му кроці гри, що починається з $n = 1$, відбувається таке:

- якщо число n непарне, то Аліна вибирає таке невід'ємне дійсне число x_n, що

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n;$$

- якщо число n парне, то Богдан вибирає таке невід'ємне дійсне число x_n, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Усі вибрані числа відомі обом гравцям. Якщо хтось з гравців не може вибрати належне число x_n, то гра зупиняється та інший гравець визнається переможцем. Якщо гра триває нескінченно довго, то жоден з гравців не визнається переможцем.

Знайдіть усі значення λ, для яких Аліна має виграшну стратегію, а також усі значення λ, для яких виграшну стратегію має Богдан.

Задача 6. Клітчаста дошка має розміри 2025×2025. Настя розкладає на дошці прямокутні плитки, можливо різного розміру, у такий спосіб, щоб сторони кожної плитки лежали на лініях дошки і кожна комірка 1×1 була накрита щонайбільше однією плиткою.

Знайдіть найменшу кількість плиток, які має покласти Настя, щоб у кожному рядку і кожному стовпчику непокритою залишилася рівно одна комірка.

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.