

Marți, 18 iulie 2017

Problema 1. Pentru orice număr natural $a_0 > 1$ definim sirul a_0, a_1, a_2, \dots prin:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{dacă } \sqrt{a_n} \text{ este întreg} \\ a_n + 3, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0.$$

Determinați toate valorile lui a_0 pentru care există un număr A astfel încât $a_n = A$ pentru o infinitate de valori ale lui n .

Problema 2. Fie \mathbb{R} mulțimea numerelor reale. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice numere reale x și y ,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Un vânător și un iepure invizibil joacă un joc în planul euclidian. Punctul de pornire al iepurelui, A_0 , și punctul de pornire al vânătorului, B_0 , coincid. După $n - 1$ runde ale jocului, iepurele se află în punctul A_{n-1} și vânătorul se află în punctul B_{n-1} . În a n -a rundă a jocului se întâmplă, în ordine, următoarele:

- (i) fără să fie văzut, iepurele se deplasează într-un punct A_n , astfel încât distanța dintre A_{n-1} și A_n să fie exact 1;
- (ii) un dispozitiv de urmărire îi indică vânătorului un punct P_n . Singura informație pe care dispozitivul i-o dă vânătorului este aceea că distanța de la P_n la A_n este mai mică sau egală cu 1;
- (iii) vânătorul se deplasează într-un punct B_n , vizibil, astfel încât distanța de la B_{n-1} la B_n este exact 1.

Este totdeauna posibil ca, indiferent de felul în care se deplasează iepurele și indiferent de punctele indicate de dispozitiv, vânătorul să-și aleagă mișcările astfel încât după 10^9 runde să fie sigur că distanța dintre el și iepure este mai mică sau egală cu 100?

Miercuri, 19 iulie 2017

Problema 4. Fie R și S puncte diferite pe un cerc Ω , care nu sunt diametral opuse. Fie ℓ tangentă la Ω în R . Punctul T este simetricul lui R față de S . Punctul J este ales pe arcul mic RS al lui Ω , astfel încât cercul Γ circumscris triunghiului JST intersectează ℓ în două puncte distincte. Fie A punctul de intersecție dintre Γ și ℓ , cel mai apropiat de R . Dreapta AJ intersectează din nou Ω în K . Demonstrați că dreapta KT este tangentă la Γ .

Problema 5. Se consideră un număr natural $N \geq 2$. Un număr de $N(N + 1)$ fotbalisti, oricare doi de înălțimi diferite, stau într-un rând. Antrenorul vrea să elimine $N(N - 1)$ jucători din acest rând, astfel încât în noul rând de $2N$ jucători să fie îndeplinite următoarele N condiții:

- (1) nu se află nimeni între cei mai înalți doi jucători;
- (2) nu se află nimeni între al treilea și al patrulea cei mai înalți jucători;
- ⋮
- (N) nu se află nimeni între cei mai scunzi doi jucători.

Arătați că acest lucru este totdeauna posibil.

Problema 6. O pereche ordonată (x, y) de numere întregi este un *punct primativ* dacă cel mai mare divizor comun al numerelor x și y este 1. Dându-se o mulțime finită S de puncte primitive, demonstrați că există un număr natural $n \geq 1$ și numerele întregi a_0, a_1, \dots, a_n astfel încât, pentru orice (x, y) din S :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$