

laupäev, 8. juuli 2023

**Ülesanne 1.** Leia kõik kordarvud  $n > 1$ , mis rahuldavad järgmist tingimust: kui  $d_1, d_2, \dots, d_k$  on arvu  $n$  kõik positiivsed jagajad, kusjuures  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ , siis  $d_i$  jagab arvu  $d_{i+1} + d_{i+2}$  iga  $1 \leq i \leq k-2$  korral.

**Ülesanne 2.** Olgu  $ABC$  teravnurkne kolmnurk, milles  $|AB| < |AC|$ . Olgu  $\Omega$  kolmnurga  $ABC$  ümberringjoon. Olgu  $S$  ringjoone  $\Omega$  punkti  $A$  sisaldava kaare  $CB$  keskpunkt. Läbi punkti  $A$  tõmmatud külje  $BC$  ristsirge lõikub sirgega  $BS$  punktis  $D$  ning ringjoonega  $\Omega$  teist korda punktis  $E \neq A$ . Sirge läbi punkti  $D$ , mis on paralleelne küljega  $BC$ , lõikub sirgega  $BE$  punktis  $L$ . Olgu  $\omega$  kolmnurga  $BDL$  ümberringjoon. Ringjooned  $\omega$  ja  $\Omega$  lõikuvad teist korda punktis  $P \neq B$ .

Tõesta, et ringjoonele  $\omega$  punktist  $P$  tõmmatud puutuja ning sirge  $BS$  lõikuvad nurga  $BAC$  poolitajal.

**Ülesanne 3.** Iga täisarvu  $k \geq 2$  jaoks leia kõik positiivsete täisarvude lõpmatud jadad  $a_1, a_2, \dots$  järgmise omadusega: leidub polünoom  $P$  kujul  $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ , kus  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  on mittenegatiivsed täisarvud, mis rahuldbad iga täisarvu  $n \geq 1$  korral tingimust

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}.$$

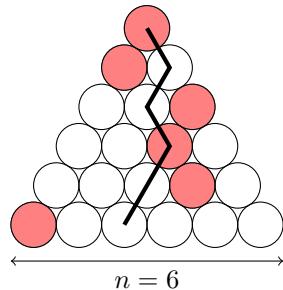
pühapäev, 9. juuli 2023

**Ülesanne 4.** Olgu  $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$  sellised paarikaupa erinevad positiivsed reaalarvud, et arv

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

on täisarv iga  $n = 1, 2, \dots, 2023$  korral. Tõesta, et  $a_{2023} \geq 3034$ .

**Ülesanne 5.** Olgu  $n$  positiivne täisarv. *Jaapani kolmnurk* koosneb  $1 + 2 + \dots + n$  ringist, mis on paigutatud võrdkülgse kolmnurga kujuliselt nii, et iga  $i = 1, 2, \dots, n$  korral sisaldab rida  $i$  täpselt  $i$  ringi, millest täpselt üks on värvitud punaseks. Jaapani kolmnurga *ninja teekond* on  $n$  ringist koosnev jada, mis saadakse alustades ülemisest reast, minnes korduvalt ühelt ringilt ühele kahest vahetult selle all olevast ringist ja lõpetades alumisel real. Siin on näide Jaapani kolmnurgast  $n = 6$  jaoks koos ninja teekonnaga selles kolmnurgas, mis sisaldab kahte punast ringi.



Leidke  $n$  suhtes suurim  $k$ , mille korral leidub igas Jaapani kolmnurgas ninja teekond, mis sisaldab vähemalt  $k$  punast ringi.

**Ülesanne 6.** Olgu  $ABC$  võrdkülgne kolmnurk. Olgu  $A_1, B_1, C_1$  sellised punktid kolmnurga  $ABC$  sisepiirkonnas, et  $|BA_1| = |A_1C|$ ,  $|CB_1| = |B_1A|$ ,  $|AC_1| = |C_1B|$  ning

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Lõikugu sirged  $BC_1$  ja  $CB_1$  punktis  $A_2$ , sirged  $CA_1$  ja  $AC_1$  punktis  $B_2$  ning sirged  $AB_1$  ja  $BA_1$  punktis  $C_2$ .

Tõesta, et kui kolmnurk  $A_1B_1C_1$  on erikülgne, siis kolmnurkade  $AA_1A_2$ ,  $BB_1B_2$  ning  $CC_1C_2$  kolm ümberringjoont läbivad kõik kahte ühist punkti.