Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Понеділок, 11 липня 2016 року

Задача 1. Задано прямокутний трикутник BCF з прямим кутом B. Нехай A — точка на прямій CF така, що $FA = FB$ та F лежить між A і C. Точку D вибрано так, що $DA = DC$ і AC — бісектриса $\angle DAB$. Точку E вибрано так, що $EA = ED$ і AD — бісектриса $\angle EAC$. Нехай M — середина CF, а точка X така, що $AMXE$ — паралелограм (у якому $AM \parallel EX$ і $AE \parallel MX$). Доведіть, що прямі BD, FX і ME перетинаються в одній точці.

Задача 2. Знайдіть усі натуральні n, для яких у кожну клітинку дошки $n \times n$ можна помістити одну з літер I, M або O так, що:

- у кожному рядку та у кожному стовпчику буде розташована рівно третина літер I, рівно третина літер M та рівно третина літер O; і
- у кожній діагоналі, кількість клітинок якої ділиться на три, буде розташована рівно третина літер I, рівно третина літер M та рівно третина літер O.

Зауваження: Якщо рядки та ствопчики таблиці $n \times n$ занумеровані числами від 1 до n природнім чином, тоді кожній клітинці відповідає пара натуральних чисел (i, j), для яких $1 \leqslant i, j \leqslant n$. При $n > 1$, таблиця має $4n - 2$ *діагоналі* двох типів. Діагональ першого типу складається з усіх клітинок (i, j), для яких $i + j$ є константою, а діагональ другого типу складається з усіх клітинок (i, j), для яких $i - j$ є константою.

Задача 3. Нехай $P = A_1A_2 \dots A_k$ — опуклий многокутник на декартовій площині. Вершини $A_1, A_2, \dots, A_k$ мають цілі координати і лежать на одному колі. Нехай S — площа многокутника P. Непарне натуральне число n таке, що квадрати довжин сторін P є цілими числами, які діляться на n. Доведіть, що $2S$ є цілим числом, яке ділиться на n.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів

Вівторок, 12 липня 2016 року

Задача 4. Множина натуральних чисел називається *тендітною*, якщо вона містить не менше двох елементів, і кожний елемент цієї множини має спільний простий дільник з принаймні одним іншим елементом цієї множини. Нехай $P(n) = n^2 + n + 1$. Для якого найменшого натурального числа b існує ціле невід'ємно число a таке, що множина

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

є тендітною?

Задача 5. Рівняння

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

записане на дошці, ліва і права частини якого містять по 2016 лінійні множники. Знайдіть найменше можливе значення k, для якого можна витерти з дошки рівно k з цих 4032 лінійних множників так, що хоча б один множник залишиться у кожній частині рівняння, і рівняння, що залишилось, не має дійсних коренів?

Задача 6. На площині задано $n \geqslant 2$ відрізків таким чином, що довільні два перетинаються у внутрішній точці та жодні три не перетинаються в одній точці. Дід Панас має вибрати кінець кожного відрізка і посадити в нього жабеня очима у напрямку іншого кінця. Після цього, він плескає в долоні $n-1$ раз. Кожного разу, коли він плескає, кожне жабеня одразу перестрибує у наступну точку перетину свого відрізку. Жабенята ніколи не змінюють напрямок стрибків. Дід Панас хоче розсадити жабенят таким чином, щоб жодна пара жабенят не опиналася в одній точці перетину у жодний момент часу.

(a) Доведіть, що дід Панас може завжди так зробити, коли n — непарне число.

(b) Доведіть, що дід Панас не зможе цього зробити, коли n — парне число.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів