

marți, 15 iulie 2025

Problema 1. O dreaptă din planul xOy se numește *însorită* dacă nu este paralelă nici cu axa Ox , nici cu axa Oy și nici cu dreapta de ecuație $x + y = 0$.

Fie $n \geq 3$ un număr natural dat. Determinați toate numerele naturale $k \geq 0$ astfel încât există n drepte distincte din plan care satisfac următoarele două condiții:

- pentru orice numere naturale nenule a și b , satisfăcând condiția $a + b \leq n + 1$, punctul de coordonate (a, b) se află pe cel puțin una dintre aceste drepte; și
- exact k dintre aceste n drepte sunt însorite.

Problema 2. Fie Ω și Γ două cercuri cu centrele M și respectiv N , astfel încât raza cercului Ω este mai mică decât raza cercului Γ . Presupunem că cercurile Ω și Γ se intersectează în două puncte distincte A și B . Dreapta MN intersectează cercul Ω în punctul C și cercul Γ în punctul D , astfel încât punctele C, M, N și D se află pe dreaptă în această ordine. Fie P centrul cercului circumscris triunghiului ACD . Dreapta AP intersectează din nou cercul Ω în punctul $E \neq A$. Dreapta AP intersectează din nou cercul Γ în punctul $F \neq A$. Fie H ortocentrul triunghiului PMN .

Demonstrați că dreapta care trece prin punctul H și este paralelă cu dreapta AP , este tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF .

(Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a înălțimilor sale.)

Problema 3. Fie \mathbb{N}^* mulțimea numerelor naturale nenule. O funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ se numește *puternică* dacă

$$f(a) \text{ divide pe } b^a - f(b)^{f(a)}$$

pentru orice numere naturale nenule a și b .

Determinați cel mai mic număr real c astfel încât $f(n) \leq cn$ pentru orice funcție puternică f și orice număr natural nenul n .

miercuri, 16 iulie 2025

Problema 4. Se numește *divizor strict* al unui număr natural nenul m orice divizor pozitiv al lui m , diferit de m .

Şirul infinit a_1, a_2, \dots este format din numere naturale nenule astfel încât fiecare termen are cel puțin trei divizori stricti. Pentru orice $n \geq 1$, numărul a_{n+1} este suma celor mai mari trei divizori stricti ai lui a_n .

Determinați toate valorile posibile ale lui a_1 .

Problema 5. Ana și Bob joacă un joc pentru doi jucători, numit *koala*, ale cărui reguli depind de un număr real strict pozitiv λ , care este cunoscut de ambii jucători. La mutarea n a jocului (începând cu $n = 1$) se întâmplă următoarele:

- Dacă n este număr impar, Ana alege un număr real nenegativ $x_n \geq 0$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Dacă n este număr par, Bob alege un număr real nenegativ $x_n \geq 0$ astfel încât

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Dacă un jucător nu mai poate alege un număr potrivit x_n , jocul se termină și celălalt jucător câștigă. Dacă jocul continuă la nesfârșit, nu câștigă niciun jucător. Toate numerele alese sunt cunoscute de ambii jucători.

Determinați toate valorile lui λ pentru care Ana are o strategie câștigătoare, precum și toate acele valori ale lui λ pentru care Bob are o strategie câștigătoare.

Problema 6. Considerăm un tablou de tipul 2025×2025 format din pătrate unitate. Maria vrea să pună în tablou câteva piese dreptunghiulare, posibil de diferite dimensiuni, astfel încât laturile fiecărei piese se află pe dreptele tabloului și fiecare pătrat unitate este acoperit de cel mult o piesă.

Determinați numărul minim de piese pe care Maria trebuie să le pună astfel încât fiecare linie și fiecare coloană a tabloului conține exact un pătrat unitate care nu este acoperit de nicio piesă.