ორშაბათი, 19. ივლისი 2021

ამოცანა 1. ვთქვათ $n \geqslant 100$ არის მთელი რიცხვი. თორნიკე სხვადასხვა ბარათებზე წერს რიცხვებს $n, n+1, \ldots, 2n$, თითო ბარათზე თითოს. ამის შემდეგ ის ურევს ბარათებს და ჰყოფს ორ დასტად. დაამტკიცეთ, რომ ერთი დასტა მაინც შეიცავს ორ ბარათს, რომლებზეც დაწერილი რიცხვების ჯამი სრული კვადრატია.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნამდვილი $x_1, \ldots, x_n$ რიცხვებისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

ამოცანა 3. ვთქვათ ABC მახვილკუთხა სამკუთხედია, $AB > AC$, ხოლო D ამ სამკუთხედის შიგა წერტილია ისეთი, რომ $\angle DAB = \angle CAD$. E წერტილი აღებულია AC სეგმენტზე ისე, რომ $\angle ADE = \angle BCD$, ხოლო F წერტილი აღებულია AB სეგმენტზე ისე, რომ $\angle FDA = \angle DBC$ და X აღებულია AC წრფეზე ისე, რომ $CX = BX$. ვთქვათ ADC და EXD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები შესაბამისად არიან O_1 და O_2 . დაამტკიცეთ, რომ BC, EF და O_1O_2 წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

სამშაბათი, 20. ივლისი 2021

ამოცანა 4. ვთქვათ Γ არის წრეწირი ცენტრით I, ხოლო $ABCD$ არის ამოზნექილი ოთხკუთხედი რომლისთვისაც სეგმენტები AB, BC, CD და DA ეხებიან Γ წრეწირს. ვთქვათ Ω არის AIC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. BA მონაკვეთის გაგრძელება A წერტილის მხარეს Ω წრეწირს კვეთს X წერტილში, ხოლო BC მონაკვეთის გაგრძელება C წერტილის მხარეს Ω-ს კვეთს Z წერტილში. AD და CD მონაკვეთების გაგრძელება D წერტილის მხარეს Ω-ს კვეთს შესაბამისად Y და T წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

ამოცანა 5. ორმა ციყვმა, ჩიპმა და დეილმა, შეაგროვა 2021 ცალი კაკალი ზამთრისთვის. დეილმა დანომრა კაკლები რიცხვებით 1,2,...,2021 და ამოთხარა 2021 ცალი პატარა ორმო წრეწირის გასწვრივ, მათი საცხოვრებელი ხის გარშემო. მეორე დილით დეილმა შეამჩნია, რომ ჩიპს ჩაულაგებია კაკლები ორმოებში, თითო ორმოში თითო, თუმცა არ გაუთვალისწინებია კაკლების ნომრები. განაწყენებულმა დეილმა, გადაწყვიტა კაკლების გადალაგება შემდეგი 2021 სვლის მეშვეობით. k-ურ სვლაზე, დეილი უცვლის ადგილებს კაკლებს, რომლებიც იმყოფებიან k ნომრიანი კაკლის მეზობელ ორმოებში. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს k-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ k-ურ სვლაზე, დეილი გაუცვლის ადგილებს კაკლებს ნომრებით a და b, სადაც $a < k < b$.

ამოცანა 6. ვთქვათ $m \geqslant 2$ არის მთელი რიცხვი, ხოლო A არის მთელ (არა აუცილებლად დადებით) რიცხვთა რაღაც სასრული სიმრავლე და $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ არიან A-ს ქვესიმრავლეები. დავუშვათ, რომ ყოველი $k = 1, 2, \ldots, m$-თვის, B_k სიმრავლის ელემენტთა ჯამი არის m^k. დაამტკიცეთ, რომ A სიმრავლე შეიცავს სულ მცირე $m/2$ ელემენტს.