

دوشنبه ۲۷ تیر ۱۳۹۰

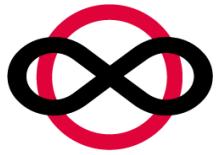
**مسئله ۱.** برای هر مجموعه  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  از چهار عدد صحیح مثبت متمایز، مجموع  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  را با  $s_A$  نمایش می‌دهیم. فرض کنید  $n_A$  نشان دهنده تعداد زوج‌های  $(i, j)$  باشد که  $i < j$  و  $a_i + a_j$  عدد  $s_A$  را عاد کند. تمام مجموعه‌های  $A$  از چهار عدد صحیح مثبت متمایز را بیابید که بیشترین مقدار ممکن  $n_A$  را به دست می‌دهند.

**مسئله ۲.** فرض کنید  $\zeta$  مجموعه‌ای متناهی از حداقل دو نقطه در صفحه باشد. فرض کنید هیچ سه نقطه‌ای از  $\zeta$  هم خط نباشند. منظور از یک روند آسیاب بادی روندی است که با یک خط  $\ell$  گذرنده از تنها یک نقطه  $P \in \zeta$  شروع می‌شود. این خط در جهت ساعتگرد حول مرکز  $P$  دوران می‌کند تا اولین باری که نقطه دیگری متعلق به  $\zeta$  را ملاقات کند. این نقطه دیگر،  $Q$ ، به عنوان مرکز دوران جدید جایگزین می‌شود و حال خط در جهت ساعتگرد حول  $Q$  دوران می‌کند، تا وقتی که نقطه بعدی  $\zeta$  را ملاقات کند. این روند تا ابد ادامه پیدا می‌کند. نشان دهید که می‌توانیم نقطه  $P$  در  $\zeta$  و خط  $\ell$  گذرنده از  $P$  را چنان انتخاب کنیم که روند آسیاب بادی حاصل، هر نقطه از  $\zeta$  را نامتناهی بار به عنوان مرکز دوران به کار ببرد.

**مسئله ۳.** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یکتابع با مقادیر حقیقی، تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی باشد به طوری که

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

برای هر  $x$  و  $y$  حقیقی برقرار باشد. ثابت کنید  $f(0) = 0$ .



سه شنبه ۲۸ تیر ۱۳۹۰

**مسئله ۴.** فرض کنید  $n > 0$  یک عدد صحیح باشد. یک ترازوی دو کفه ای و  $n$  وزنه با وزن های  $2^{n-1}, 2^0, \dots, 2^1$  داده شده است. می خواهیم هر کدام از  $n$  وزنه را، یکی پس از دیگری، روی ترازو چنان قرار دهیم که کفه راست هرگز سنگین تر از کفه چپ نشود. در هر مرحله یکی از وزنه هایی را که هنوز روی ترازو قرار داده نشده اند، انتخاب می کنیم، و آن را روی کفه چپ یا کفه راست قرار می دهیم، تا زمانی که همه وزنه ها قرار داده شوند.

تعداد روش هایی را به دست آورید که می توانیم این کار را انجام دهیم.

**مسئله ۵.** تابع  $f$  از مجموعه اعداد صحیح به مجموعه اعداد صحیح مثبت را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر دو عدد صحیح  $m$  و  $n$ ، عبارت  $f(m) - f(n)$  بر  $f(m-n)$  بخش پذیر است. ثابت کنید برای همه اعداد صحیح  $m$  و  $n$  با  $f(m) \leq f(n)$  عدد  $f(n)$  بر  $f(m)$  بخش پذیر است.

**مسئله ۶.** مثلث حاده الزاویه  $ABC$  با دایره محیطی  $\Gamma$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\ell$  خطی مماس بر  $\Gamma$  باشد، و فرض کنید  $\ell_a, \ell_b$  و  $\ell_c$  به ترتیب خطوط قرینه  $\ell$  نسبت به خطوط  $AB$ ،  $BC$  و  $CA$  باشند. نشان دهید دایره محیطی مثلثی که با خطوط  $\ell_a, \ell_b$  و  $\ell_c$  مشخص می شود، بر دایره  $\Gamma$  مماس است.