

Fyrri dagur — 25. júlí, 2007

Dæmi 1. Gefnar eru rauntölur a_1, a_2, \dots, a_n . Skilgreinum fyrir sérhvert i ($1 \leq i \leq n$)

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

og látum

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Sannið að, fyrir hvaða rauntölur $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ sem er, gildir

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Sýnið að til eru rauntölur $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ þannig að jafnaðarmerki gildi í (*).

Dæmi 2. Látum A, B, C, D og E vera fimm punkta þannig að $ABCD$ er samsíðungur og $BCED$ er rásáður ferhyrningur. Látum enn fremur ℓ vera línu í gegnum A . Gerum ráð fyrir að ℓ skeri línustrikið DC í innri punkti F og skeri línuna BC í punktinum G . Gerum einnig ráð fyrir að $EF = EG = EC$. Sannið að ℓ sé helmingalína hornsins DAB .

Dæmi 3. Í stærðfræðikeppni nokkurri eru sumir keppenda vinir. Vinátta er ávallt gagnkvæm. Nefnum hóp keppenda *klíku* ef sérhverjir tveir þeirra eru vinir. (Sér í lagi er sérhver hópur færri en tveggja keppenda klíka.) Fjöldi meðlima í klíku nefnist *stærð* hennar.

Að því gefnu að hámarks stærð klíku í keppninni sé slétt tala, sannið að raða má keppendum í tvö herbergi þannig að hámarks stærð klíku í öðru herberginu sé sú sama og hámarks stærð klíku í hinu herberginu.

Seinni dagur — 26. júlí, 2007

Dæmi 4. Í þríhyrningi ABC sker helmingalína hornsins BCA umritaða hringinn í punktinum R (frábrugðnum C), miðþveril BC í P , og miðþveril AC í Q . Táknun miðpunkt BC með K og miðpunkt AC með L . Sanníð að þríhyrningarnir RPK og RQL hafa sama flatarmál.

Dæmi 5. Látum a og b vera jákvæðar heiltölur. Sýnið að ef $4ab - 1$ gengur upp í $(4a^2 - 1)^2$, þá er $a = b$.

Dæmi 6. Látum n vera jákvæða heiltölu. Lítum á

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

sem mengi af $(n + 1)^3 - 1$ punktum í þrívíðu rúmi. Ákvarðið minnsta mögulega fjölda af sléttum, hvers sammengi inniheldur S en inniheldur ekki $(0, 0, 0)$.

*Próftími: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi gefur sjö stig.*