

อังคาร, 16. กรกฎาคม 2024

โจทย์ข้อ 1. จงหาจำนวนจริง α ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่าจำนวนเต็ม

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

เป็นพหุคูณของ n (ในที่นี้ $\lfloor z \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ z ตัวอย่างเช่น $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ และ $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$)

โจทย์ข้อ 2. จงหาอันดับของจำนวนเต็มบวก (a, b) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า มีจำนวนเต็มบวก g และ N ที่ทำให้

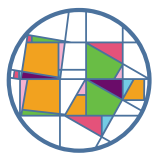
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq N$ (ในที่นี้ $\gcd(x, y)$ หมายถึงตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม x และ y)

โจทย์ข้อ 3. ให้ a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวก และให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติว่า สำหรับแต่ละ $n > N$ ค่าของ a_n เท่ากับจำนวนครั้งที่ a_{n-1} ปรากฏในลำดับ a_1, a_2, \dots, a_{n-1}

จงพิสูจน์ว่าลำดับอย่างน้อยหนึ่งลำดับจาก a_1, a_3, a_5, \dots และ a_2, a_4, a_6, \dots เป็นคาบในท้ายที่สุด

(เราจะกล่าวว่าลำดับอนันต์ b_1, b_2, b_3, \dots เป็นคาบในท้ายที่สุด ถ้ามีจำนวนเต็มบวก p และ M ที่ทำให้ $b_{m+p} = b_m$ สำหรับทุก $m \geq M$)



พุธ, 17. กรกฎาคม 2024

โจทย์ข้อ 4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $AB < AC < BC$ ให้จุดศูนย์กลางวงกลมแนบในและวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC แทนด้วย I และ ω ตามลำดับ ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรง BC ที่ต่างจาก C และทำให้เส้นตรงที่ผ่าน X และขนานกับ AC สัมผัสกับ ω ในทำนองเดียวกัน ให้ Y เป็นจุดบนเส้นตรง BC ที่ต่างจาก B ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่าน Y ขนานกับ AB สัมผัสกับ ω ให้ AI ตัดกับวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC อีกครั้งที่ $P \neq A$ ให้ K และ L เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ AB ตามลำดับ

จงแสดงว่า $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$

โจทย์ข้อ 5. หอยทากนามว่าเทอร์โบเล่นเกมบนกระดานที่มี 2024 แถว และ 2023 หลัก มีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่ในช่องต่าง ๆ ทั้งหมด 2022 ช่อง ในตอนเริ่มต้น เทอร์โบไม่ทราบเลยว่าสัตว์ประหลาดเหล่านี้อยู่ในช่องไหน แต่ทราบว่าในแต่ละแถวมีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่หนึ่งตัวพอดี ยกเว้นในแถวแรกและแถวสุดท้าย และในแต่ละหลัก มีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่อย่างมากหนึ่งตัว

เทอร์โบพยายามที่จะเคลื่อนที่จากแถวแรกไปแถวสุดท้าย ในความพยายามแต่ละครั้ง เทอร์โบเลือกที่จะเริ่มต้นในช่องใดก็ได้ของแถวแรก จากนั้นจึงเคลื่อนที่ไปช่องใดช่องหนึ่งที่มีด้านร่วมกันกับช่องที่อยู่ ณ ขณะนั้น และทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ (โดยจะย้อนกลับมาช่องที่เคยผ่านไปแล้วก็ได้) ถ้าเทอร์โบไปถึงช่องที่มีสัตว์ประหลาด จะถือว่าความพยายามครั้งนั้นสิ้นสุดลง และเทอร์โบจะถูกส่งตัวกลับไปแถวแรกเพื่อเริ่มต้นความพยายามครั้งใหม่ ระหว่างนี้ สัตว์ประหลาดจะไม่ย้ายช่อง และ เทอร์โบจำได้ว่าช่องที่ไปมาแล้วแต่ละช่องมีสัตว์ประหลาดอยู่หรือไม่ ถ้าเทอร์โบไปถึงช่องสักช่องในแถวสุดท้าย จะถือว่าความพยายามของเทอร์โบสิ้นสุดลงและเป็นการจบเกม จงหาค่าของ n ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้เทอร์โบมีกลยุทธ์ที่รับรองได้ว่าจะไปถึงแถวสุดท้ายในความพยายามครั้งที่ n หรือก่อนหน้านั้น ไม่ว่าสัตว์ประหลาดจะอยู่ในช่องใดก็ตาม

โจทย์ข้อ 6. ให้ \mathbb{Q} แทนเซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ เป็น ฟังก์ชันบ่อน้ำ ถ้าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง: สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Q}$ จะได้ว่า

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{หรือ} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้สำหรับฟังก์ชันบ่อน้ำ f ใด ๆ จะมีจำนวนตรรกยะที่แตกต่างกันอย่างมาก c ตัว ที่เขียนได้ในรูป $f(r) + f(-r)$ สำหรับบางจำนวนตรรกยะ r และจงหาค่าน้อยสุดของ c ที่เป็นไปได้