12 ביולי 2006

שאלה מספר 1.

יהי ABC משולש שמרכז המעגל החסום שלו הוא I. נקודה P הנמצאת בתוך המשולש מקיימת את השוויון

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

הוכח כי $AP \geq AI$ וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

שאלה מספר 2.

יהי P מצולע משוכלל בעל 2006 צלעות. אלכסון של P נקרא *טוב* אם שני קצותיו מחלקים את ההיקף של P לשני חלקים, שכל אחד מהם מורכב ממספר איזוגי של צלעות של P. הצלעות של המצולע P נקראות גם הן *טובות*.

נניח כי המצולע P חולק למשולשים על ידי העברת 2003 אלכסונים, כך שאין בהם שני אלכסונים בעלי נקודה משותפת הנמצאת בתוך המצולע P. מצא את המספר הגדול ביותר של משולשים שווי שוקיים, שיש להם שתי צלעות טובות, אשר יכולים להתקבל בתצורה כזאת.

שאלה מספר 3.

מצא את המספר הממשי M הקטן ביותר, כך שאי השוויון

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

מתקיים עבור כל שלושה מספרים ממשיים a, b, c.

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

13 ביולי 2006

שאלה מספר 4.

מצא את כל הזוגות (x,y) של מספרים שלמים כך ש

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

שאלה מספר 5.

יהי $P(x)$ פולינום בעל דרגה $n>1$ ובעל מקדמים שלמים, ויהי k מספר שלם חיובי. נתבונן בפולינום $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, כאשר P מופיע k פעמים. הוכח כי קיימים לכל היותר n מספרים שלמים t כך ש $Q(t)=t$.

שאלה מספר 6.

לכל צלע b של פוליגון קמור P נשייך את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחת שלו היא b וכולו מוכל ב- P. הוכח כי הסכום של השטחים המשוייכים לצלעות של P שווה לפחות פעמיים השטח של P.

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות

כל שאלה שווה 7 נקודות