Language: **Korean**

Day: **1**

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

2012년 7월 10일, 화요일

문제 1. 삼각형 ABC에 대하여 꼭지점 A의 맞은 편에 위치한 방접원의 중심(방심)을 J라 하자. 이 방접원이 변 BC에 점 M에서 접하고, 두 직선 AB, AC에 각각 점 K, L에서 접한다. 두 직선 LM과 BJ의 교점을 F, 두 직선 KM과 CJ의 교점을 G라 하자. 두 직선 AF 와 BC의 교점을 S, 두 직선 AG와 BC의 교점을 T라 할 때, M이 선분 ST의 중점임을 보여라.

문제 2. 정수 $n \geq 3$에 대하여 양의 실수 $a_2, a_3, \ldots, a_n$이 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$을 만족한다. 다음 부등식이 성립함을 보여라:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

문제 3. 두 명의 선수 A와 B가 *거짓말쟁이 추측 게임*을 한다. 이 게임의 룰은 두 양의 정수 k와 n에 의해 결정되고 이 숫자들을 선수들은 미리 알고 있다.

게임이 시작될 때 A는 먼저 양의 정수 x와 N을(단, $x \leq N$) 선택한 후, A는 B에게 x는 감추고 N은 무엇인지 정직하게 알려 준다. B는 x에 대한 정보를 얻기 위해 다음과 같은 방식으로 A에게 질문들을 한다: B는 각 질문마다 양의 정수로 이루어진 집합 S을 지정해 그것이 무엇인지 설명한 후(이전에 지정한 집합과 같아도 상관없다), x가 그 집합에 속하는 지 물어 본다. B 는 원하는 만큼 얼마든지 여러 번 질문할 수 있다. A는 B가 질문할 때마다 '예' 또는 ' 아니오'로 즉시 답을 해야 한다. 단, A는 몇 번이고 거짓으로 대답할 수 있다. 하지만, A는 임의의 $k+1$번의 연속한 B의 질문에 대하여 적어도 한 번은 정직하게 대답하여야 한다.

B는 원하는 만큼 충분히 여러 번 질문한 후, n개 이하의 양의 정수로 이루어진 집합 X를 제시하여야 한다.이때, x가 X에 속하면 B 가 이기고, 그렇지 않으면 B가 진다. 다음을 각각 보여라:

1. $n \geq 2^k$이면, B의 필승 전략이 존재한다.

2. 충분히 큰 모든 k에 대하여, B의 필승 전략이 존재하지 않는 어떤 정수 $n \geq 1.99^k$이 존재한다.

제한시간: 4시간 30분
문항 당 7점

2012년 7월 11일, 수요일

문제 4. 다음 등식이 성립하는 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$를 모두 구하여라: $a+b+c=0$을 만족하는 모든 정수 a, b, c에 대하여

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

단, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합이다.

문제 5. $\angle BCA = 90°$인 삼각형 ABC에 대하여, 점 D를 C에서 변 AB에 내린 수선의 발이라고 하고, 점 X를 선분 CD 위의 내점(양 끝점이 아닌 점)이라 하자. 점 K는 선분 AX 위의 점으로 $BK = BC$를 만족하고, 점 L은 선분 BX 위의 점으로 $AL = AC$를 만족한다고 하자. 점 M을 직선 AL과 BK의 교점이라 할 때, $MK = ML$임을 보여라.

문제 6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n을 모두 구하여라: 등식

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

을 만족하는 음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 존재한다.

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점