

language: Thai

วันที่ ๑๒ กรกฎาคม ๒๕๔๙

โจทย์ข้อที่ ๑ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน จุด P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้อง

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

จงแสดงว่า $AP \geq AI$ และสมการเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $P = I$

โจทย์ข้อที่ ๒ ให้ P เป็นรูป 2006 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะเรียกเส้นทแยงมุมของ P ว่า ด้านดี เมื่อจุดปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุมแบ่งเส้นรอบรูปของ P ออกเป็นสองส่วน ซึ่งแต่ละส่วนประกอบด้วยด้านจำนวนคี่ด้าน นอกจากนี้ให้ถือว่าด้านแต่ละด้านของ P เป็น ด้านดี เช่นกัน

จงหาจำนวนที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี ด้านดี สองด้าน ซึ่งเกิดขึ้นจากการซอยแบ่ง P เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยด้วยเส้นทแยงมุม 2003 เส้น โดยไม่มีเส้นทแยงมุมสองเส้นใดตัดกันภายใน P

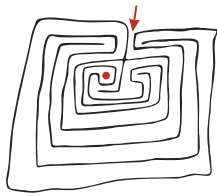
โจทย์ข้อที่ ๓ จงหาจำนวนจริง M ค่าน้อยสุดที่ทำให้สมการ

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที

โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน



language: Thai

วันที่ ๑๓ กรกฎาคม ๒๕๔๙

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาอันดับจำนวนเต็ม (x, y) ทั้งหมดซึ่ง

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n > 1$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาพหุนาม $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ เมื่อมี P ทั้งหมด k ตัว จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม t อย่างมาก n ตัวซึ่ง $Q(t) = t$

โจทย์ข้อที่ ๖ กำหนดจำนวนจริงให้แต่ละด้าน b ของรูปหลายเหลี่ยมมุม P โดยที่จำนวนจริงดังกล่าวมีค่าเท่ากับพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ภายใน P และมี b เป็นด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จงแสดงว่าผลรวมของพื้นที่ทั้งหมดที่กำหนดให้กับด้านของ P มีค่าอย่างน้อยสองเท่าของพื้นที่ของ P

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที

โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน