

2013.07.23, Мэзмар

Бодлого 1. Өгсөн k, n натурал тоонуудыг хувьд

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

байх m_1, m_2, \dots, m_k натурал тоонууд (эхлээтэй байх албагүй) оршихыг батал.

Бодлого 2. Аль эсвэл гурав нь нэг шүүмжүүд үнэ орших хавтгайн 4027 цэгний 2013 нь гуаан, 2014 нь хөхөөр будагдсан бол түүнийг **колумбийн цогц** гээ. Өгсөн колумбийн цогц ба хавтгайн хэдэн мужид хуваах шүүмжүүдийн ололтийн хувьд

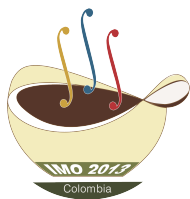
- Эмэлз шүүмж нь цогцын цэгний дайраагүй
- хуваалтанд мунд бүр зөвхөн нэг өнгийн цэгүүдийн агурдаг бол үнэ ололтийн **сайн** гээ. 4027 цэг бүхий эмэлз колумбийн цогцын хувьд k шүүмж бүхий сайн ололто олддог байх k -ийн хамгийн бага үтгэл ол.

Бодлого 3. ABC гурвалжны А-гийн гадаад багтсан тойра нь ВС талыг A_1 цэгт шүргэнэ. СА талыг B_1 цэг, АВ талыг C_1 цэгүүд нь мөн адилгаар В ба С-ийн гадаад багтсан тойргуудаар тодорхойлогдоно. $A_1B_1C_1$ гурвалжны багтаасан тойргийн төв нь ABC гурвалжны багтаасан тойрог гүйр оршдог бол ABC нь тэгш өнцөгт гурвалжин гэдэг батал.

(ABC гурвалжны А-гийн гадаад багтсан тойрог гэдэг нь ВС хэрэгтийн шүргэдэг, АВ талыг үргэлжлэлийн В-ээс цааш АС талыг үргэлжлэлийн С-ээс цааш шүргэдэг тойрог. В ба С-гийн гадаад багтсан тойргууд мөн адил тодорхойлогдоно)

Language: Mongolian

Бодох ам: 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноотой



2013.07.24, Лхагва

Бодлого 4. ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг нь H байх. BC хэрчимийн B ба C-ээс ялгаатай дүрвэн цэг нь W байх. ABC гурвалжны B ба C өрөөлөөс татагдсан өндрүүдийн суурь нь M ба N байх. BWN гурвалжны багтаасан тойрог w_1 ба X нь WX нь w_1 -ийн диаметр байх w_1 -ийн цэг байх. Мөн адилгаар CWM гурвалжны багтаасан тойрог w_2 ба Y нь WY нь w_2 -ийн диаметр байх w_2 -ийн цэг байх. X, Y ба H цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

Бодлого 5. $\mathbb{Q}_{>0}$ нь бүх эерэг рациональ тоонуудын олонлог. $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ функц нь дараах гурван нөхцөлийг хангана:

- 1) $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ бүрийн хувьд $f(x)f(y) \geq f(xy)$ биелнэ;
- 2) $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ бүрийн хувьд $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ биелнэ;
- 3) $f(a) = a$ байх рациональ тоо $a > 1$ оршино.

$x \in \mathbb{Q}_{>0}$ бүрийн хувьд $f(x) = x$ гэж батал.

Бодлого 6. $n \geq 3$ бүхэл тоо байх. Тойрог ба түүнийн тэнхүү тэнхүү нүдүүдэд хуваах $n+1$ цэгүүдийг авъя. Тоо бүрийн эл нэг удаа ашиглах энэ цэгүүдийн $0, 1, \dots, n$ тоонуудаар тэмдэглэх бүх аргын нэг үрвэ. Ямар нэг эргүүлэлтээр давцаж хоёр аргын агил гэж үзвэ. $a+d=b+c$ байх дөрвөн тэмдэглэл $a < b < c < d$ -ийн хувьд a ба d тэмдэглэлтэй цэгүүдийн холбосон ховд, b ба c тэмдэглэлтэй цэгүүдийн холбосон ховдтэй огтлолцохгүй бол үг аргын "гоё" гэе. M нь гоё аргын тоо байх. $x+y \leq n$ ба $X \cap Y(x, y) = 1$ байх натурал тоонуудын эрэмбэлэгдсэн хосын тоог N гэвэл $M = N + 1$ гэж батал.

Language: Mongolian

Бодох цаг: 4 цаг 30 минут
Бодлоодур 7 оноотой