2024-yil 16-Iyul, Seshanba

1-Masala: α haqiqiy sonning barcha qiymatlarini topingki, bunda n musbat butun sonning har bir qiymatida

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

ifoda n ga qoldiqsiz bo'linsin. (Izoh: $\lfloor z \rfloor$ orqali z dan kichik yoki teng bo'lgan eng katta butun sonni belgilaymiz. Masalan, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ va $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

2-Masala: (a, b) musbat butun sonlarning barcha juftliklarini toping bunda, shunday g va N musbat butun sonlar mavjudki,

$$EKUB(a^n + b,\ b^n + a) = g$$

tenglik barcha $n \geqslant N$ butun sonlar uchun o'rinli bo'lsin. (Izoh: $EKUB(x, y)$ orqali x va y butun sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini belgilaymiz.)

3-Masala: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ musbat butun sonlarning cheksiz ketma-ketligi va N musbat butun son berilgan bo'lsin. Ma'lumki, har bir $n > N$ uchun, a_n soni $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ lar orasida a_{n-1} sonining ishtirok etishlar soniga teng. $a_1, a_3, a_5, \ldots$ va $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ketma-ketliklardan kamida bittasi qaysidir haddan boshlab davriy ekanini isbotlang. (Agar $b_1, b_2, b_3, \ldots$ cheksiz ketma-ketlikda barcha $m \geqslant M$ musbat butun sonlar uchun $b_{m+p} = b_m$ shartni qanoatlantiradigan shunday p va M musbat butun sonlar topilsa, ushbu cheksiz ketma-ketlik *qaysidir haddan boshlab davriy* deyiladi.)

Language: Uzbek

Vaqt: 4 soat va 30 daqiqa
Har bir masala 7 balldan baholanadi

2024-yil 17-Iyul, Chorshanba

4-Masala: ABC uchburchakda $AB < AC < BC$ bo'lsin. ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana ω hamda uning markazi I nuqtada bo'lsin. BC to'g'ri chiziqda C nuqtadan farqli shunday X nuqta tanlanganki, bunda X nuqtadan AC ga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq ω aylanaga urinadi. Xuddi shunday, BC to'g'ri chiziqda B nuqtadan farqli shunday Y nuqta tanlanganki, bunda Y nuqtadan AB ga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq ω aylanaga urinadi. AI to'g'ri chiziqning ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylanasini ikkinchi marta kesish nuqtasi $P \neq A$ nuqta bo'lsin. K va L nuqtalar mos ravishda AC va AB tomonlarning o'rtalari bo'lsin. Isbotlang: $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

5-Masala: Turbo shilliq qurt 2024 ta qator va 2023 ta ustundan tashkil topgan doskada quyidagi o'yinni o'ynayapti. Doskaning 2022 ta katakchasida monsterlar yashiringan. Turbo dastlab monsterlar aynan qaysi kataklarda yashiringanini bilmaydi. Ammo, unga ma'lumki, monsterlar doskaning birinchi va oxirgi qatorlarida joylashmagan. Boshqa barcha qatorlarda aynan bittadan monster yashiringan. Har bir ustunda esa ko'pi bilan bitta monster yashiringan.

Turbo birinchi qatordan oxirgi qatorga borish uchun bir nechta urinishlar qilib ko'radi. Har bir urinishda u birinchi qatordagi ixtiyoriy katakchani tanlaydi va umumiy tomonga ega bo'lgan qo'shni kataklarga harakatlanadi. (U avval bosib o'tgan katakchasiga qaytib kelishi mumkin.) Agar u monster yashiringan katakchaga kelsa, uning ushbu urinishi yakunlangan hisoblanadi hamda yangi urinishni boshlash uchun birinchi qatorga tushiriladi. Monsterlar harakatlanmaydi va Turbo har bir bosib o'tgan katakchasida monster bor yoki yo'qligini xotirasida saqlab qoladi. Agar u oxirgi qatorning bironta katakchasiga yetib borsa, u urinishlarni to'xtatadi va o'yin tugagan hisoblanadi. n ning shunday eng kichik qiymatini topingki, bunda monsterlarning joylashishidan qat'iy nazar, Turbo ko'pi bilan n ta urinishda kafolatlangan holda oxirgi qatorga yetib borolsin.

6-Masala: $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plami bo'lsin. Har bir $x, y \in \mathbb{Q}$ lar uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funksiyalarni *ajoyib funksiya* deb ataymiz:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{yoki} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Ixtiyoriy ajoyib funksiya f uchun $f(r) + f(-r)$ (bunda r qandaydir ratsional son) ko'rinishidagi turli ratsional sonlar soni ko'pi bilan c ga teng bo'ladigan shunday c butun son mavjudligini isbotlang, hamda c ning qabul qilishi mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping.

Vaqt: 4 soat va 30 daqiqa
Har bir masala 7 balldan baholanadi