الثلاثاء 16 يوليوز 2019

المسألة 1.

نرمز بـ $\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة النسبية. حدِّد جميع الدوال $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بحيث لكل عددين صحيحين نسبيين a و b :

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

المسألة 2.

لتكن A_1 و B_1 نقطتين تنتميان على التوالي إلى الضلعين $[BC]$ و $[AC]$ في مثلث ABC. ولتكن كذلك P و Q نقطتين تنتميان على التوالي إلى القطعتين $[AA_1]$ و $[BB_1]$، حيث يكون المستقيمان (PQ) و (AB) متوازيين. لتكن P_1 نقطة من المستقيم (PB_1)، حيث تتواجد النقطة B_1 قطعا بين النقطتين P و P_1، وبحيث $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. بالمثل، لتكن Q_1 نقطة من المستقيم (QA_1)، حيث تتواجد النقطة A_1 قطعا بين النقطتين Q و Q_1، وبحيث $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

أثبت أنّ P و Q و P_1 و Q_1 نقط متداورة .

المسألة 3.

تضم شبكة للتواصل الاجتماعي 2019 عضوا. بعض من هؤلاء الأعضاء هم أصدقاء مع بعضهم البعض، وعلاقة الصداقة هنا متبادلة. أحداث من النوع الموضح أدناه تحدث على التوالي واحدا تلو الآخر:

> ليكن A و B و C ثلاثة أعضاء بحيث يكون A صديقا لـ B و C، لكن دون أن تكون بين B و C أية علاقة صداقة؛ ثم يصبح B و C صديقين لكن لم يعد A صديقا سواء لـ B أو لـ C. علاقات الصداقة الآخرى بين الأعضاء لا تتغير خلال هذا الحدث.

في البداية، كان لدى 1010 من الأعضاء 1009 من الأصدقاء لكل واحد منهم، وكان لدى 1009 من الأعضاء 1010 من الأصدقاء لكل واحد منهم.

أثبت أنّ هناك سلسلة من هذه الأحداث التي يصبح عقبها لكل عضو صديق واحد على الأكثر.

Language: Arabic (Moroccan)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 17 يوليوز 2019

المسألة 4.

أوجد جميع الأزواج (k, n) من أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة، بحيث

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

المسألة 5.

أصدر بنك باث قطعا نقدية، وجه كل واحدة منها يحمل الحرف H والوجه الآخر يحمل الحرف T . قام هاري بوضع n قطعة، من هذه القطع النقدية، على شكل خط مستقيم من اليسار إلى اليمين. ثم ينجز عدة مرات متتابعة العملية التالية: إذا كان الحرف H يظهر على k قطعة نقدية بالضبط، مع $k \geq 1$، فإنّ هاري يقلب القطعة النقدية الموجودة في الرتبة k انطلاقا من اليسار ؛ وإذا كان $k = 0$ فإنّه يتوقف. فمثلا، إذا كان $n = 3$، فإنّ العمليات التي تنطلق من التشكيلة THT تكون

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

يتوقف هاري إذن بعد إنجاز 3 عمليات.

(a) بيّن أنّه مهما تكن التشكيلة التي ينطلق منها هاري، فإنّه سيتوقف بعد عدد منته من العمليات.

(b) من أجل كل تشكيلة بدئية C، نرمز بـ $L(C)$ لعدد العمليات التي سينجزها هاري قبل أن يتوقف. فمثلا $L(THT) = 3$ و $L(TTT) = 0$. أوجد القيمة المتوسطة للأعداد $L(C)$ المحصل عليها عندما تتغير C في المجموعة المكونة من 2^n تشكيلة بدئية الممكنة.

المسألة 6.

ليكن ABC مثلثا زواياه حادة حيث $AB \neq AC$. نرمز بـ ω للدائرة المحاطة بالمثلث ABC و I مركز ω، و D و E و F نقط تماس ω مع الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ على التوالي. لتكن R النقطة من ωوالتي تخالف D، حيث يكون المستقيم (DR) عموديا على (EF) . لتكن P نقطة تقاطع المستقيم (AR) والدائرة ω والتي تخالف R. وأخيرا، لتكن Q نقطة تقاطع الدائرتين المحيطتين بالمثلثين PCE و PBF، والتي تخالف P.

بين أنّ المستقيمين (DI) و (PQ) يتقاطعان في نقطة تنتمي إلى المستقيم العمودي على (AI) والمار من A.

Language: Arabic (Moroccan)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة