mandag, 21. september 2020

Oppgave 1. Punktet P ligger i det indre av den konvekse firkanten $ABCD$. Vi har de følgende forholdene:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Vis at de følgende tre linjene skjærer i et punkt: De interne vinkelhalveringslinjene til vinklene $\angle ADP$ og $\angle PCB$, og midtnormalen til linjestykket AB.

Oppgave 2. De reelle tallene a, b, c, d er slik at $a \geq b \geq c \geq d > 0$ og $a + b + c + d = 1$. Vis at

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Oppgave 3. Det er $4n$ småstein som veier $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Hver stein er farget i en av n farger, og det er fire steiner i hver farge. Vis at vi kan fordele steinene i to hauger slik at de følgende to betingelsene begge er oppfylt:

- Totalvekten av begge haugene er like.
- Hver haug inneholder to steiner i hver farge.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.

tirsdag, 22. september 2020

Oppgave 4. La $n > 1$ være et heltall. Det er n^2 stasjoner langs en fjellside, alle i forskjellige høyder over bakken. To taubaneselskap A og B har begge k tauvogner. Hver tauvogn går fra en av stasjonene til en annen stasjon høyere opp (uten å stoppe underveis). De k tauvognene til A har k ulike startstasjoner og k ulike sluttstasjoner, og en tauvogn som starter høyere opp enn en annen tauvogn vil også slutte høyere opp. De samme betingelsene gjelder for B. Vi sier at to stasjoner er *sammenkoplet* av et selskap dersom man kan starte fra den laveste av de to stasjonene og komme seg til den høyeste ved å bruke en eller flere tauvogner fra det selskapet (ingen annen bevegelse mellom stasjoner tillates).

Bestem det minste positive heltallet k slik at man kan garantere at det finnes to stasjoner som er sammenkoplet av begge selskap.

Oppgave 5. En kortstokk med $n > 1$ kort er gitt, med et positivt heltall skrevet på hvert kort. Kortstokken har egenskapen at det aritmetiske snittet av tallene på ethvert par med kort også er det geometriske snittet av tallene på en samling med en eller flere kort.

For hvilke n følger det at tallene på kortene alle er like?

Oppgave 6. Vis at det finnes en positiv konstant c slik at følgende påstand stemmer:

La $n > 1$ være et positivt heltall, og $\mathcal{S}$ en mengde n punkter i planet slik at avstanden mellom ethvert par ulike punkter i $\mathcal{S}$ er minst 1. Da følger det at det finnes en linje ℓ som separerer $\mathcal{S}$ slik at avstanden mellom ethvert punkt i $\mathcal{S}$ til ℓ er minst $cn^{-1/3}$.

(En linje ℓ *separerer* en mengde punkter $\mathcal{S}$ dersom et linjestykke mellom to punkter i $\mathcal{S}$ skjærer ℓ.)

Merk: Svakere resultater med $cn^{-1/3}$ erstattet av $cn^{-\alpha}$ kan gi poeng avhengig av konstanten $\alpha > 1/3$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.