ponedeljak, 18. 07. 2011.

1. zadatak. Za zadani skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, sastavljen od četiri različita prirodna broja, označimo sumu elemenata $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ sa s_A. Neka je n_A broj parova indeksa (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, za koje broj $a_i + a_j$ dijeli s_A. Odrediti sve takve skupove A, sastavljene od četiri različita prirodna broja, za koje n_A postiže maksimalnu vrijednost.

2. zadatak. Neka je S konačan skup tačaka u ravni koji sadrži bar dvije tačke. Nikoje tri tačke skupa S nisu kolinearne. *Vjetrenjača* je sljedeći postupak u kojem na samom početku biramo pravu l koja sadrži tačno jednu tačku $P \in S$.

Prava l rotira u smjeru kazaljke na satu oko *centra* P do prvog momenta u kojem prava sadrži neku drugu tačku skupa S (označimo ovu tačku sa Q). Nakon toga, prava rotira u smjeru kazaljke na satu oko novog centra Q do (prvog) momenta u kojem prava sadrži neku drugu tačku skupa S. Ovaj postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta, pri čemu je centar rotacije uvijek tačka iz skupa S.

Dokazati da je moguće odabrati neku tačku $P \in S$ i neku pravu l koja sadrži tačku P, tako da za dobijenu *vjetrenjaču* svaka tačka skupa S postaje *centar* rotacije beskonačno mnogo puta.

3. zadatak. Neka funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeći uslov

$$f(x+y) \leq y \cdot f(x) + f\big(f(x)\big),$$

za sve realne brojeve x i y. Dokazati da je $f(x) = 0$ za sve $x \leq 0$.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

utorak, 19. 07. 2011.

4. zadatak. Neka je n prirodan broj. Data je ravnotežna vaga sa dva tasa i n utega sa težinama $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Sve utege moramo postaviti na vagu, jedan za drugim. U svakom koraku odaberemo jedan od utega koji još nije postavljen na vagu i postavimo ga na lijevi ili desni tas vage, tako da težina desnog tasa nije veća od težine lijevog tasa.

Odrediti broj načina na koje je ovo postavljanje moguće uraditi.

5. zadatak. Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, sa skupa cijelih brojeva na skup prirodnih brojeva, takva da je razlika $f(m) - f(n)$ djeljiva brojem $f(m-n)$, za bilo koja dva cijela broja m i n.

Dokazati da je broj $f(n)$ djeljiv brojem $f(m)$, za sve cijele brojeve m i n za koje je $f(m) \leq f(n)$.

6. zadatak. Zadan je oštrougli trougao ABC sa opisanom kružnicom Γ. Neka je prava l tangentna sa kružnicom Γ, a neka su prave l_a, l_b i l_c prave simetrične pravoj l u odnosu na stranice BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da je kružnica opisana oko trougla određenog pravama l_a, l_b i l_c tangentna sa kružnicom Γ.