ponedjeljak, 19. jul 2021. god.

Zadatak 1. Neka je $n \geqslant 100$ prirodan broj. Ivan na različitim kartama zapisuje brojeve $n, n+1, \ldots, 2n$, po jedan na svakoj karti. On zatim promiješa ovih $n+1$ karata i dijeli ih na dvije grupe. Dokazati da bar jedna od grupa sadrži dvije karte takve da je zbir brojeva na njima potpun kvadrat.

Zadatak 2. Dokazati da nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

važi za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$.

Zadatak 3. Neka je D unutrašnja tačka oštrouglog trougla ABC, kod kojeg je $AB > AC$, takva da važi $\angle DAB = \angle CAD$. Za tačku E na stranici AC važi $\angle ADE = \angle BCD$, za tačku F na stranici AB važi $\angle FDA = \angle DBC$, i za tačku X na pravoj AC važi $CX = BX$. Neka su O_1 i O_2 centri opisanih kružnica trouglova ADC i EXD, redom. Dokazati da se prave BC, EF i O_1O_2 sijeku u jednoj tački.

Language: Montenegrin

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.

utorak, 20. jul 2021. god.

Zadatak 4. Neka je Γ kružnica s centrom u tački I i neka je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da je svaka stranica AB, BC, CD i DA tangenta kružnice Γ. Neka je Ω opisana kružnica trougla AIC. Produžetak stranice BA preko A siječe kružnicu Ω u tački X, a produžetak stranice BC preko C siječe kružnicu Ω u tački Z. Produžeci stranica AD i CD preko D sijeku Ω u Y i T, redom. Dokazati da važi

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Zadatak 5. Vjeverice, Brana i Jana, sakupile su 2021 lješnik za zimu. Jana označava lješnike brojevima od 1 do 2021 i iskopava 2021 rupu poređanu ukrug oko njihovog omiljenog drveta. Sljedećeg jutra Jana je primijetila da je Brana postavila po jedan lješnik u svaku od rupa, ne obraćajući pažnju na njihovu numeraciju. Nesrećna zbog toga, Jana je odlučila da preraspodijeli lješnike izvodeći 2021 potez. U k-tom potezu, Jana zamjenjuje pozicije dva lješnika koji su susjedi lješniku označenom brojem k. Dokazati da postoji broj k tako da, u k-tom potezu, Jana mijenja pozicije lješnika sa brojevima a i b za koje važi $a < k < b$.

Zadatak 6. Neka je $m \geqslant 2$ prirodan broj, A konačan skup (ne obavezno pozitivnih) cijelih brojeva i neka su $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ neki podskupovi skupa A. Pretpostavimo da je, za svako $k = 1, 2, \ldots, m$, zbir elemenata skupa B_k jednak m^k. Dokazati da A sadrži bar $m/2$ elemenata.

Language: Montenegrin

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.