pondelok, 21. septembra 2020

Úloha 1. Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$. Bod P leží vo vnútri $ABCD$. Platia nasledujúce rovnosti pomerov:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokážte, že nasledujúce tri priamky sa pretínajú v jednom bode: osi vnútorných uhlov $\angle ADP$ a $\angle PCB$ a os úsečky AB.

Úloha 2. Reálne čísla a, b, c, d spĺňajú $a \geq b \geq c \geq d > 0$ a $a + b + c + d = 1$. Dokážte, že

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Úloha 3. Máme $4n$ kamienkov s hmotnosťami $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Každý kamienok je zafarbený jednou z n farieb a každou farbou sú zafarbené štyri kamienky. Ukážte, že vieme rozdeliť kamienky na dve kôpky tak, aby boli splnené nasledujúce dve podmienky:

- Celkové hmotnosti oboch kôpok sú rovnaké.
- Každá kôpka obsahuje dva kamienky z každej farby.

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

utorok, 22. septembra 2020

Úloha 4. Dané je celé číslo $n > 1$. Na zjazdovke je n^2 staníc, všetky v rôznych výškach. Každá z dvoch firiem prevádzkujúcich lanovky, A a B, prevádzkuje k lanoviek. Každá lanovka umožňuje presun z jednej stanice do vyššej stanice (bez medzizastávok). k lanoviek firmy A má k rôznych začiatočných staníc a k rôznych konečných staníc; navyše lanovka, ktorá má začiatočnú stanicu vyššie, má aj konečnú stanicu vyššie. Rovnaké podmienky spĺňa aj B. Povieme, že dve stanice sú *spojené* firmou, ak sa dá dostať z nižšej stanice do vyššej použitím jednej alebo viacerých lanoviek tejto firmy (žiadne iné pohyby medzi stanicami nie sú povolené).

Určite najmenšie kladné číslo k, pre ktoré sa dá zaručiť, že nejaké dve stanice sú spojené oboma firmami.

Úloha 5. Majme balíček $n > 1$ kariet. Na každej karte je napísané kladné celé číslo. Balíček má vlastnosť, že aritmetický priemer čísel na každej dvojici kariet je zároveň geometrickým priemerom čísel nejakej skupiny jednej alebo viacerých kariet.

Pre ktoré n to musí znamenať, že všetky čísla na kartách sú rovnaké?

Úloha 6. Dokážte, že existuje kladná konštanta c taká, že platí nasledujúce tvrdenie:

Uvažujme celé číslo $n > 1$ a množinu $\mathcal{S}$ obsahujúcu n bodov v rovine takú, že vzdialenosť každých dvoch rôznych bodov z $\mathcal{S}$ je aspoň 1. Potom existuje priamka ℓ rozdeľujúca $\mathcal{S}$ taká, že vzdialenosť ľubovoľného bodu z $\mathcal{S}$ a priamky ℓ je aspoň $cn^{-1/3}$.

(Priamka ℓ *rozdeľuje* množinu bodov $\mathcal{S}$, ak nejaká úsečka spájajúca body z $\mathcal{S}$ pretína ℓ.)

Poznámka. Riešenia, ktoré nahradia výraz $cn^{-1/3}$ slabším odhadom $cn^{-\alpha}$, môžu byť ocenené bodmi v závislosti od konštanty $\alpha > 1/3$.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.