Perjantai 10. heinäkuuta 2015

Tehtävä 1. Sanomme, että tason äärellinen pistejoukko $\mathcal{S}$ on *tasapainoinen*, jos jokaista kahta $\mathcal{S}$:n eri pistettä A ja B kohden on olemassa sellainen $\mathcal{S}$:n piste C, että $AC = BC$. Sanomme, että $\mathcal{S}$ on *keskipisteetön*, jos mitään kolmea $\mathcal{S}$:n eri pistettä A, B ja C kohden ei ole olemassa $\mathcal{S}$:n pistettä P, jolle pätisi $PA = PB = PC$.

(a) Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 3$ on olemassa tasapainoinen joukko, jossa on tasan n pistettä.

(b) Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geqslant 3$, joille on olemassa tasapainoinen keskipisteetön joukko, jossa on tasan n pistettä.

Tehtävä 2. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c), joille jokainen luvuista

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

on luvun 2 potenssi.

(*Luvun 2 potenssi on muotoa 2^n oleva kokonaisluku, missä n on ei-negatiivinen kokonaisluku.*)

Tehtävä 3. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $AB > AC$. Olkoon Γ sen ympärysympyrä, H korkeusjanojen leikkauspiste ja F A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon M BC:n keskipiste. Olkoon Q sellainen Γ:n piste, että $\angle HQA = 90°$, ja olkoon K sellainen Γ:n piste, että $\angle HKQ = 90°$. Oletetaan, että pisteet A, B, C, K ja Q ovat kaikki eri pisteitä ja sijaitsevat Γ:lla tässä järjestyksessä.

Todista, että kolmioiden KQH ja FKM ympärysympyrät sivuavat toisiaan.

Työaika 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Joka tehtävän maksimipistemäärä on 7.

Language: **Finnish**

Day: **2**

Lauantai 11. heinäkuuta 2015

Tehtävä 4. Kolmion ABC ympärysympyrä on Ω ja O on Ω:n keskipiste. A-keskinen ympyrä Γ leikkaa janan BC pisteissä D ja E niin, että B, D, E ja C ovat eri pisteitä ja tässä järjestyksessä suoralla BC. Olkoot F ja G Γ:n ja Ω:n leikkauspisteet, niin että A, F B, C ja G ovat eri pisteitä ja tässä järjestyksessä ympyrällä Ω. Kolmion BDF ympärysympyrä leikkaa janan AB myös pisteessä K ja kolmion CEG ympärysympyrä janan CA myös pisteessä L.

Oletetaan, että suorat FK ja GL ovat eri suoria ja että ne leikkaavat toisensa pisteessä X. Osoita, että piste X on suoralla AO.

Tehtävä 5. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$f\left(x + f(x+y)\right) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 6. Kokonaislukujono $a_1, a_2, \ldots$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ kaikilla $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ kaikilla $1 \leqslant k < \ell$.

Todista, että on olemassa kaksi positiivista kokonaislukua b ja N, niin että

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

kaikilla ehdon $n > m \geqslant N$ toteuttavilla kokonaisluvuilla m ja n.