esmaspäev, 19. juuli 2021

Ülesanne 1. Olgu $n \geqslant 100$ täisarv. Jaan kirjutab kõik arvud $n, n+1, \ldots, 2n$ eri kaartidele. Seejärel segab ta need $n+1$ kaarti ära ja jagab kaardid kahte hunnikusse. Tõesta, et vähemalt ühes hunnikus leidub kaks kaarti, millel olevate arvude summa on täisruut.

Ülesanne 2. Näita, et võrratus

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

kehtib kõigi reaalarvude $x_1, \ldots, x_n$ jaoks.

Ülesanne 3. Teravnukses kolmnurgas ABC kehtib $|AB| > |AC|$. Olgu D selline kolmnurga sisepunkt, et $\angle DAB = \angle CAD$. Punkt E lõigul AC rahuldab tingimust $\angle ADE = \angle BCD$, punkt F lõigul AB rahuldab tingimust $\angle FDA = \angle DBC$ ning punkt X sirgel AC rahuldab tingimust $|CX| = |BX|$. Olgu O_1 ja O_2 vastavalt kolmnurkade ADC ja EXD ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et sirged BC, EF ja O_1O_2 lõikuvad ühes punktis.

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.

teisipäev, 20. juuli 2021

Ülesanne 4. Olgu Γ ringjoon keskpunktiga I ja $ABCD$ selline kumer nelinurk, et iga lõikudest AB, BC, CD ja DA puutub ringjoont Γ. Olgu Ω kolmnurga AIC ümberringjoon. Külje BA pikendus üle punkti A lõikab ringjoont Ω punktis X ning külje BC pikendus üle punkti C lõikab ringjoont Ω punktis Z. Külgede AD ja CD pikendused üle punkti D lõikavad ringjoont Ω vastavalt punktides Y ja T. Tõesta, et

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Ülesanne 5. Kaks oravat, Berta ja Juta, on talveks kogunud 2021 pähklit. Juta nummerdab pähklid arvudega 1 kuni 2021 ja kaevab nende lemmikpuu ümber ringikujuliselt maa sisse 2021 väikest auku. Järgmisel hommikul märkab Juta, et Berta on pannud igasse auku ühe pähkli, aga ei ole üldse nummerdust jälginud. Õnnetuna otsustab Juta pähklid 2021 käiguga ümber järjestada. Käigul k vahetab Juta omavahel kahe pähkli k naaberpähkli asukohad. Tõesta, et leidub selline k väärtus, et käigul k vahetab Juta mingite pähklite a ja b asukohad, kus $a < k < b$.

Ülesanne 6. Olgu $m \geqslant 2$ täisarv, A lõplik (mitte tingimata positiivsete) täisarvude hulk ja $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ hulga A alamhulgad. Oletame, et iga $k = 1, 2, \ldots, m$ korral on hulga B_k elementide summa m^k. Tõesta, et A koosneb vähemalt $m/2$ elemendist.

Language: Estonian

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.