

уторак, 16. јула 2019.

Задатак 1. Нека је \mathbb{Z} скуп цијелих бројева. Одреди све функције $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такве да за све цијеле бројеве a и b вриједи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Задатак 2. На страницама BC и AC троугла ABC дате су тачке A_1 и B_1 , редом. Нека су P и Q тачке на дужима AA_1 и BB_1 , редом, такве да су праве PQ и AB паралелне. Нека је P_1 тачка на правој PB_1 таква да тачка B_1 лежи између тачака P и P_1 и вриједи $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Нека је Q_1 тачка на правој QA_1 таква да тачка A_1 лежи између тачака Q и Q_1 и вриједи $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Доказати да су тачке P , Q , P_1 и Q_1 концикличне.

Задатак 3. Друштвена мрежа има 2019 корисника и неки парови корисника су пријатељи. Ако је корисник A пријатељ корисника B , онда је и корисник B пријатељ корисника A . Сљедећи догађаји могу се понављати један за другим (не истовремено):

Три корисника A , B и C таква да је A пријатељ корисника B и C , али B и C нису пријатељи, мијењају своје статусе пријатељстава тако да су B и C сада пријатељи, а A више није пријатељ нити са B нити са C . Сви остали статуси пријатељстава остају непромијењени.

На почетку 1010 корисника има по 1009 пријатеља, док преосталих 1009 корисника има по 1010 пријатеља. Доказати да постоји низ описаних догађаја након којег сваки корисник има највише једног пријатеља.

сриједа, 17. јула 2019.

Задатак 4. Наћи све парове (k, n) природних бројева такве да вриједи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Задатак 5. Банка града Бата издаје новчиће који са једне стране имају ознаку H , а са друге ознаку T . Харун је поредао n оваквих новчића у низ с лијева на десно. Са овим новчићима он понавља следећу операцију: ако је у низу тачно $k > 0$ новчића који показују H , тада окреће k -ти новчић с лијева; иначе, сви новчићи показују T и процес се завршава. На примјер, ако је $n = 3$ и почетни распоред је THT , Харун врши следећи низ операција $THT \rightarrow HNT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, и процес се завршава након ове три операције.

- (а) Доказати да за сваки почетни распоред новчића Харун завршава описани процес након коначно много операција.
- (б) За почетни распоред C нека је са $L(C)$ означен број операција које Харун изврши прије него што се процес заврши. На примјер, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Одредити аритметичку средину бројева $L(C)$ по свих 2^n могућих почетних распореда C .

Задатак 6. Нека је I центар уписане кружнице троугла ABC у којем је $AB \neq AC$. Уписана кружница ω троугла ABC додирује странице BC , CA и AB у тачкама D , E и F , редом. Права кроз D окомита на EF сијече ω поново у R . Права AR сијече ω поново у P . Описане кружнице троуглова PCE и PBF се сијеку поново у Q .

Доказати да се праве DI и PQ сијеку на правој кроз A окомитој на AI .