*Երեքշաբթի, 15. հուլիսի 2025*

**Խնդիր 1.** Հարթության վրա գտնվող ուղիղը կոչվում է *արևային*, եթե այն զուգահեռ **չէ** $OX$ և $OY$ առանցքներին և $x+y=0$ ուղղին:

Դիցուք տրված է $n \geqslant 3$ ամբողջ թիվը: Գտնել բոլոր $k$ ոչբացասական ամբողջ թվերը, որոնց համար գոյություն ունեն $n$ հատ իրարից տարբեր ուղիղներ հարթության վրա, որոնք բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին.

- ցանկացած $a$ և $b$ դրական ամբողջ թվերի համար. եթե $a+b \leqslant n+1$, ապա $(a,b)$ կետը գտնվում է այդ ուղիղներից գոնե մեկի վրա; և
- $n$ հատ ուղիղներից ճիշտ $k$ հատ ուղիղ արևային են:

**Խնդիր 2.** Դիցուք $\Omega$-ն և $\Gamma$-ն համապատասխանաբար $M$ և $N$ կենտրոններով շրջանագծեր են, այնպես, որ $\Omega$-ի շառավիղը փոքր է $\Gamma$-ի շառավղից: Դիցուք $\Omega$ և $\Gamma$ շրջանագծերը հատվում են երկու իրարից տարբեր $A$ և $B$ կետերում: $MN$ ուղիղը հատում է $\Omega$ շրջանագիծը $C$ կետում, իսկ $\Gamma$ շրջանագիծը՝ $D$ կետում այնպես, որ $C$, $M$, $N$, $D$ կետերը գտնվում են ուղղի վրա նշված հերթականությամբ: Դիցուք $P$-ն $ACD$ եռանկյան արտագծած շջանագծի կենտրոնն է: $AP$ ուղիղը հատում է $\Omega$-ն երկրորդ անգամ $E \neq A$ կետում: $AP$ ուղիղը հատում է $\Gamma$-ն երկրորդ անգամ $F \neq A$ կետում: Դիցուք $H$-ը $PMN$ եռանկյան օրթոկենտրոնն է:

Ապացուցել, որ $H$ կետով $AP$ ուղղին տարված զուգահեռ ուղիղը շոշափում է $BEF$ եռանկյան արտագծած շրջանագիծը:

**Խնդիր 3.** Դիցուք $\mathbb{N}$-ը դրական ամբողջ թվերի բազմությունն է: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է *գերազանց*, եթե տեղի ունի

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ բաժանվում է } f(a)$$

պայմանը ցանկացած $a$ և $b$ դրական ամբողջ թվերի համար:

Գտնել փոքրագույն $c$ իրական թիվը, որի համար տեղի ունի $f(n) \leqslant cn$ պայմանը ցանկացած $f$ գերազանց ֆունկցիայի և ցանկացած $n$ դրական ամբողջ թվի համար:

*Չորեքշաբթի, 16. հուլիսի 2025*

**Խնդիր 4.** $N$ դրական ամբողջ թվի *սեփական բաժանարարը* $N$-ի այնպիսի դրական բաժանարար է, որը հավասար չէ $N$-ին։

$a_1, a_2, \ldots$ անվերջ հաջորդականությունը բաղկացած է դրական ամբողջ թվերից, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի առնվազն երեք հատ սեփական բաժանարար։ Ցանկացած $n \geqslant 1$ բնական թվի համար $a_{n+1}$ ամբողջ թիվը $a_n$ թվի ամենամեծ երեք հատ սեփական բաժանարարների գումարն է։

Գտնել $a_1$-ի բոլոր հնարավոր արժեքները։

**Խնդիր 5.** Ալիսան և Բազզան խաղում են *Անհավասարություն խաղը*, որը երկու հոգու խաղ է, որի կանոնները կախված են $\lambda$ իրական դրական թվից, որը հայտնի է երկու խաղացողներին։ Խաղի $n$-րդ քայլում (սկսելով $n = 1$-ից) կատարվում է հետևյալը.

- եթե $n$-ը կենտ է, ապա Ալիսան ընտրում է $x_n$ ոչբացասական իրական թիվ այնպես, որ
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- եթե $n$-ը զույգ է, ապա Բազզան ընտրում է $x_n$ ոչբացասական ամբողջ թիվ այնպես, որ
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Եթե խաղացողը չի կարողանում ընտրել պայմանին բավարարող $x_n$ թիվ, ապա խաղը վերջանում է և մյուս խաղացողը հաղթում է։ Եթե խաղն անվերջ շարունակվում է, ապա խաղացողներից ոչ ոք չի հաղթում։ Բոլոր ընտրված թվերը հայտնի են երկու խաղացողներին։

Գտնել $\lambda$-ի բոլոր արժեքները, որոնց համար Ալիսան ունի հաղթական մարտավարություն, և բոլոր այն արժեքները, որոնց համար Բազզան ունի հաղթական մարտավարություն։

**Խնդիր 6.** Դիտարկենք միավոր վանդակներից կազմված $2025 \times 2025$ չափերի տախտակը։ Մաթիլդան ցանկանում է տեղադրել ցանցի վրա որոշ ուղղանկյունաձև սալիկներ (ոչ անպայման հավասար կողմերով) այնպես, որ ցանկացած սալիկի կողմերը գտնվեն ցանցային գծերի վրա և ցանցի յուրաքանչյուր վանդակ ծածկվի ամենաշատը մեկ սալիկով։

Գտնել սալիկների փոքրագույն քանակը, որը Մաթիլդան պետք է տեղադրի այնպես, որ ցանկացած տողի և ցանկացած սյան մեջ գոյություն ունենա ճիշտ մեկ վանդակ, որը ծածկված չէ սալիկներից ոչ մեկով։