Pazartesi, 11 Temmuz 2022

Soru 1. Oslo Bankası, iki tür madeni para basmaktadır: alüminyum (A ile belirtilecektir) ve bronz (B ile belirtilecektir). n adet alüminyum ve n adet bronz parası olan Aslı, başlangıçta bu paraları herhangi bir sırayla yan yana dizmiştir. Ardışık olarak dizilmiş ve aynı tür paralardan oluşan diziye *zincir* diyelim. $k \leqslant 2n$ verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Aslı, aşağıda tanımlanan hamleyi tekrar tekrar yapmaktadır: soldan k. sıradaki parayı içeren en uzun zinciri alıyor ve bu zincirdeki tüm paraları dizinin en soluna taşıyor. Örneğin, $n = 4$ ve $k = 4$ durumunda $AABBBABA$ sıralamasıyla başlayan bir süreç aşağıdaki gibi ilerler

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Başlangıçtaki sıralama nasıl olursa olsun, bu sürecin bir noktasında en soldaki n paranın aynı türden olmasını sağlayan tüm (n, k), $1 \leqslant k \leqslant 2n$ ikililerini bulunuz.

Soru 2. $\mathbb{R}^+$ ile pozitif gerçel sayıların kümesi gösterilmektedir. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz: Her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

koşulunu sağlayan tam olarak bir tane $y \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Soru 3. k bir pozitif tam sayı ve S tek asal sayılardan oluşan sonlu bir küme olsun. S kümesinin tüm elemanlarının bir çember etrafına, yan yana olan herhangi iki elemanın çarpımının bir x pozitif tam sayısı için $x^2 + x + k$ formunda olması koşuluyla en fazla bir farklı şekilde dizilebileceğini gösteriniz (rotasyon ve yansımalar sonucu birbirinden elde edilebilen dizilimler aynı sayılmaktadır).

Language: Turkish

Süre 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.

Salı, 12 Temmuz 2022

Soru 4. Bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $|BC| = |DE|$ dir. $ABCDE$ beşgeninin iç bölgesinde bulunan bir T noktasının $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ ve $\angle ABT = \angle TEA$ olacak şekilde alındığını varsayalım. AB doğrusunun CD ve CT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla P ve Q olsun. P, B, A, Q noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. AE doğrusunun CD ve DT doğrularıyla kesiştiği noktalar sırasıyla R ve S olsun. R, E, A, S noktaları bulundukları doğru üzerinde bu sırayla yer alsın. P, S, Q, R noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Soru 5. a, b pozitif tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere

$$a^p = b! + p$$

denklemini sağlayan tüm (a, b, p) üçlülerini bulunuz.

Soru 6. n bir pozitif tam sayı olsun. $n \times n$ boyutunda, 1'den n^2'ye kadar olan tüm sayıları içeren ve her birim karede tam olarak bir tane sayının yazıldığı satranç tahtasına *İskandinav kare* diyelim. Ortak kenar paylaşan iki birim kareye komşu diyelim. Bir birim karede yazılan sayı, bu karenin tüm komşularında yazılan sayılardan küçükse bu birim kareye *vadi* diyelim. Aşağıdaki şartları sağlayan, bir veya birkaç kareden oluşan birim kare dizisine *yokuş yukarı yol* diyelim:

(i) Bu dizideki ilk birim kare bir vadidir,

(ii) Bu dizideki her birim kare, kendinden önce gelen birim kare ile komşudur,

(iii) Bu dizinin birim karelerinde yazılan sayılar artan sıradadır.

Bir İskandinav karedeki tüm yokuş yukarı yolların toplam sayısının alabileceği en küçük değeri n cinsinden bulunuz.

Language: Turkish

Süre 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.