Utorak, 10. jul 2012.

Zadatak 1. Zadat je trougao ABC; tačka J je centar spolja upisane kružnice u odnosu na tjeme A. Ta kružnica dodiruje stranu BC u tački M, a prave AB i AC dodiruje u tačkama K odnosno L. Prave LM i BJ se sijeku u tački F, a prave KM i CJ se sijeku u tački G. Neka je S tačka presjeka pravih AF i BC i neka je T tačka presjeka pravih AG i BC.

Dokazati da je M središte duži ST.

(*Spolja upisana kružnica* trougla ABC u odnosu na tjeme A je kružnica koja dodiruje stranu BC, dodiruje polupravu AB iza B i dodiruje polupravu AC iza C.)

Zadatak 2. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokazati da je

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

Zadatak 3. Dva igrača A i B igraju igru *pogađalice*. Pravila te igre zavise od dva prirodna broja k i n i te brojeve znaju oba igrača.

Na početku igre A bira prirodne brojeve x i N za koje važi $1 \leq x \leq N$. Igrač A taji broj x, a broj N tačno saopštava igraču B. Nakon toga igrač B pokušava da dobije informaciju o broju x postavljajući igraču A pitanja sljedećeg tipa: kod svakog pitanja B objavljuje po svom nahođenju izabran skup S čiji su elementi prirodni brojevi (isti skup je mogao koristiti kod nekog ranije postavljenog pitanja) i pita igrača A da li broj x pripada skupu S. Igrač B može postaviti koliko želi pitanja. Na svako pitanje igrač A mora odmah odgovoriti sa *da* ili sa *ne* i može slagati onoliko puta koliko želi; jedino ograničenje je da među svakih $k + 1$ uzastopnih odgovora bar jedan mora biti istinit.

Nakon što je B postavio onoliko pitanja koliko je želio, on mora da odabere skup X koji sadrži najviše n prirodnih brojeva. Ako x pripada skupu X tada je igrač B pobjednik; inače B gubi igru. Dokazati:

1. Ako je $n \geq 2^k$, tada B sebi može garantovati pobjedu.
2. Za dovoljno veliko k postoji prirodan broj $n \geq 1,99^k$ za koji igrač B sebi ne može garantovati pobjedu.

Srijeda, 11. jul 2012.

Zadatak 4. Naći sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a, b, c za koje je $a+b+c=0$ važi sljedeća jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Sa $\mathbb{Z}$ je označen skup cijelih brojeva.)

Zadatak 5. Neka je ABC trougao kod koga je $\angle BCA = 90°$ i neka je D podnožje visine iz tjemena C. Neka je X unutrašnja tačka duži CD. Neka je K tačka duži AX za koju važi $BK = BC$. Analogno, neka je L tačka duži BX za koju važi $AL = AC$. Neka je M tačka presjeka pravih AL i BK.

Dokazati da je $MK = ML$.

Zadatak 6. Naći sve prirodne brojeve n za koje postoje nenegativni cijeli brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da je

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena