

Сәрсенбі, 15 шілде, 2009

1 есеп. $\{1, \dots, n\}$ жиынынан әртүрлі a_1, \dots, a_k натурал сандары алынған; мұндағы n – натурал сан және $k \geq 2$. Егер әрбір $i = 1, \dots, k-1$ үшін $a_i(a_{i+1}-1)$ саны n -ге бөлінетін болса, онда $a_k(a_1-1)$ саны n -ге бөлінбейтінін дәлелдендер.

2 есеп. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрін O деп белгілейік. P және Q сәйкесінше CA және AB кесінділерінің ішкі нүктелері болсын. K, L және M нүктелері сәйкесінше BP, CQ және PQ кесінділерінің ортасы болсын. K, L және M нүктелері арқылы өтетін шеңберді Γ деп белгілейік. Егер PQ түзуі Γ шеңберін жарайтын болса, онда $OP = OQ$ екенін дәлелдендер.

3 есеп. Оң бүтін сандардың қатандылығынан өспелі s_1, s_2, s_3, \dots тізбегі берілген, оған қоса

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{және} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

ішкі тізбектерінің екеуі де арифметикалық прогрессия құрайтыны белгілі. Олай болса, s_1, s_2, s_3, \dots тізбегінің езі де арифметикалық прогрессия құрайтынын дәлелдендер.

Бейсенбі, 16 шілде, 2009

4 есеп. $AB = AC$ болатын ABC үшбұрышы берілген. $\angle CAB$ және $\angle ABC$ бұрыштарының биссектрисалары BC және CA қабыргаларын сәйкесінше D және E нүктелерінде қияды. K нүктесі ADC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрі болсын. Егер $\angle BEK = 45^\circ$ екені белгілі болса, онда $\angle CAB$ бұрышының барлық мүмкін мәндерін табындар.

5 есеп. Оң бүтін сандар жиынында анықталған және мәндерін оң бүтін сандар жиынынан қабылдайтын, оған қоса кез келген оң бүтін a және b сандары үшін $a, f(b)$ және $f(b + f(a) - 1)$ сандары азғындалмаған үшбұрыштың қабыргаларының ұзындығы болатындей, барлық f функциясын анықтаңдар (төбелері бір түзудің бойында жатпайтын үшбұрышты азғындалмаган дейміз).

6 есеп. Әртүрлі оң бүтін a_1, a_2, \dots, a_n сандары берілген. M жиыны $n-1$ оң бүтін саннан тұрады және $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ саны M жиынына енбейді. Шегіртке нақты сандар өсінің бойымен 0 нүктесінен бастап онға қарай n рет әйтеуір бір ретпен a_1, a_2, \dots, a_n ұзындықтарына секіре алады. Шегіртке осы секірулер ретін M жиынының ешбір нүктесіне қонбайтындей етіп таңдай алатынын дәлелдендер.

Language: Kazakh

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпайлға бағаланады