Pondělí, 9. července 2018

Úloha 1. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s opsanou kružnicí Γ. Body D, E leží postupně uvnitř stran AB, AC tak, že $|AD| = |AE|$. Osy úseček BD, CE protínají kratší oblouky AB, AC kružnice Γ postupně v bodech F, G. Dokažte, že přímky DE a FG jsou rovnoběžné (nebo totožné).

Úloha 2. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Úloha 3. *Packalův trojúhelník* je tabulka čísel ve tvaru rovnostranného trojúhelníku taková, že kromě čísel ve spodním řádku je každé číslo rovno absolutní hodnotě rozdílu dvou čísel bezprostředně pod ním. Následující tabulka je příkladem Packalova trojúhelníku o čtyřech řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Rozhodněte, zda existuje Packalův trojúhelník o 2018 řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po $1 + 2 + \cdots + 2018$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Úterý, 10. července 2018

Úloha 4. *Značka* je bod (x, y) v rovině takový, že x a y jsou kladná celá čísla nepřevyšující 20.

Na začátku je všech 400 značek prázdných. Amálka a Budulínek na ně střídavě pokládají kamínky, přičemž Amálka začíná. Amálka ve svém tahu položí nový červený kamínek na prázdnou značku tak, aby vzdálenost každých dvou značek s červenými kamínky byla různá od $\sqrt{5}$. Budulínek ve svém tahu položí nový modrý kamínek na jakoukoliv prázdnou značku. (Značka s modrým kamínkem může mít jakékoliv vzdálenosti od ostatních značek.) Hra skončí, jakmile jeden z hráčů nemůže táhnout.

Najděte největší K takové, že Amálka může vždy položit alespoň K červených kamínků, ať už hraje Budulínek jakkoliv.

Úloha 5. Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Předpokládejme, že existuje celé číslo $N > 1$ takové, že pro všechna $n \geqq N$ je číslo

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokažte, že existuje celé číslo M takové, že $a_m = a_{m+1}$ pro všechna $m \geqq M$.

Úloha 6. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Uvnitř něj leží bod X takový, že

$$|\measuredangle XAB| = |\measuredangle XCD| \quad \text{a} \quad |\measuredangle XBC| = |\measuredangle XDA|.$$

Dokažte, že $|\measuredangle BXA| + |\measuredangle DXC| = 180°$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.