Среда, 15-ти јули, 2009.

Задача 1. Нека n е природен број и нека $a_1, \dots, a_k$ $(k \geqslant 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, \dots, n\}$, такви да броевите $a_i(a_{i+1} - 1)$ се деливи со n за секој $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1 - 1)$ не е делив со n.

Задача 2. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Нека P и Q се внатрешни точки на страните CA и AB, соодветно. Точките K, L и M се средини на отсечките BP, CQ и PQ, соодветно, а Γ е кружница која минува низ точките K, L и M.

Правата PQ е тангента на кружницата Γ. Докажи дека важи $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Задача 3. Нека $s_1, s_2, s_3, \dots$ е строго растечка низа од природни броеви, таква да следниве две нејзини поднизи

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{и} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

се аритметички прогресии. Докажи дека и низата $s_1, s_2, s_3, \dots$ е аритметичка прогресија.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Четврток, 16-ти јули, 2009.

Задача 4. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \overline{AC}$. Симетралите на аглите $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ ги сечат страните BC и CA во точките D и E, соодветно. Нека K е центар на впишаната кружница во триаголникот ADC. Нека важи $\sphericalangle BEK = 45^\circ$. Одреди ги сите можни вредности на аголот $\sphericalangle CAB$.

Задача 5. Одреди ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (т.е. функции определени на множеството на природни броеви и кои примаат вредности во множеството на природни броеви) такви да, за сите природни броеви a и b, постои недегенериран триаголник чии страни имаат должини

$$a, \; f(b) \; \text{ и } \; f(b + f(a) - 1).$$

(Триаголникот е *недегенериран* ако неговите темиња не се колинеарни точки.)

Задача 6. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се меѓусебно различни природни броеви и нека M е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Скакулецот треба да направи n скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ во некој редослед. Докажи дека тој редослед може да се избере така да скакулецот ниту еднаш не скокне во точка чија координата е од множеството M.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода