Понеделник, 18.07.2011

Задача 1. За множеството $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ кое се состои од четири различни природни броеви, збирот $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ е означен со s_A. Нека n_A го означува бројот на парови $(i, j), 1 \leqslant i < j \leqslant 4$, за кои $a_i + a_j$ е делител на s_A. Најди ги сите множества A, кои се состојат од четири различни природни броеви, за кои n_A прима најголема можна вредност.

Задача 2. Нека $\mathcal{S}$ е конечно множество од точки во рамнината кое содржи барем две точки. Познато е дека никои три точки од множеството $\mathcal{S}$ не лежат на иста права. *Ветерница* се нарекува следната постапка. На почетокот се избира права ℓ која содржи точно една точка $P \in \mathcal{S}$. Правата ℓ ротира во насока на стрелките на часовникот околу *центар* P до моментот кога за прв пат правата содржи некоја друга точка од множеството $\mathcal{S}$. Нека таа точка е означена со Q. Во тој момент точката Q станува нов центар, а правата продолжува да ротира во насока на стрелките на часовникот околу Q до првиот момент кога правата повторно содржи некоја друга точка од множеството $\mathcal{S}$. Оваа постапка продолжува до бесконечност.
Докажи дека е можно да се избере некоја точка P од множеството $\mathcal{S}$ и некоја права ℓ која минува низ P, така да во добиената ветерница секоја точка од множеството $\mathcal{S}$ е во улога на центар бесконечно многу пати.

Задача 3. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција дефинирана на множеството на реални броеви и која прима реални вредности, за која важи

$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f(f(x))$$

за сите реални броеви x и y. Докажи дека $f(x) = 0$ за сите $x \leqslant 0$.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Macedonian**

Day: **2**

Вторник, 19.07.2011.

Задача 4. Нека n е природен број. Дадена е терезија (урамнотежена вага со два таса) и n тегови со тежини $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Сите n тегови треба да се поставaт, еден по друг, на тасовите на терезијата, односно во секој од n-те чекори се избира еден од теговите кој се уште не е поставен на тасовите и се става или на левиот или на десниот тас од терезијата, и при тоа теговите се поставуват така да во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот тас. Одреди го бројот на начини на кои ова поставување може да се изврши.

Задача 5. Нека $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е функција дефинирана на множеството на цели броеви и која прима вредности во множеството на природни броеви. Нека за било кои два цели броеви m и n, бројот $f(m-n)$ е делител на разликата $f(m) - f(n)$. Докажи дека за сите цели броеви m и n такви да $f(m) \leqslant f(n)$, бројот $f(m)$ е делител на бројот $f(n)$.

Задача 6. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека Γ е опишаната кружница околу него. Нека правата ℓ е произволна тангента на кружницата Γ и нека ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c се правите кои се симетрични со ℓ во однос на правите BC, CA и AB, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот, добиен со правите ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c, ја допира кружницата Γ.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода