понеділок, 11 липня 2022

Задача 1. Ощадбанк Осло випускає два типи монет: алюмінієві (позначаються як A) та бронзові (позначаються як B). У Михайлини є n алюмінієвих та n бронзових монет, які деяким чином викладено в рядок. *Ланцюжком* назвемо будь-яку послідовну групу монет одного типу. Для фіксованого натурального числа $k \leqslant 2n$, Михайлина повторює таку операцію: вона вибирає найдовший ланцюжок, що містить k-ту монету зліва, і переміщує всі монети з цього ланцюжку до лівого краю рядка. Наприклад, процес для $n = 4$ та $k = 4$, починаючи з рядка $AABBBABA$, мав би вигляд

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Знайдіть усі такі пари натуральних чисел (n, k) з $1 \leqslant k \leqslant 2n$, що для довільного можливого початкового розташування монет в рядок, в деякий момент перші n монет будуть одного типу.

Задача 2. Через $\mathbb{R}^+$ позначимо множину додатних дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такі, що для всіх чисел $x \in \mathbb{R}^+$ існує єдине число $y \in \mathbb{R}^+$, для якого справджується нерівність

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Задано натуральне число k та скінченну множину S, що складається з непарних простих чисел. Доведіть, що існує не більше одного способу (з точністю до поворотів та симетрій) розставити всі елементи множини S по колу таким чином, щоб добуток довільних двох сусідніх чисел подавався у вигляді $x^2 + x + k$ для деякого натурального числа x.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

вівторок, 12 липня 2022

Задача 4. Дано опуклий п'ятикутник $ABCDE$, в якому $BC = DE$. Нехай всередині $ABCDE$ знайшлась така точка T, що $TB = TD$, $TC = TE$ і $\angle ABT = \angle TEA$. Нехай пряма AB перетинає прямі CD та CT в точках P та Q, відповідно. Припустимо, що точки P, B, A, Q лежать на прямій AB у вказаному порядку. Нехай пряма AE перетинає прямі CD та DT в точках R та S, відповідно. Припустимо, що точки R, E, A, S лежать на прямій AE в цьому порядку. Доведіть, що точки P, S, Q, R лежать на одному колі.

Задача 5. Знайдіть усі трійки (a, b, p) натуральних чисел, де p є простим числом і виконується рівність

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Дано натуральне число n. Дошку $n \times n$, в клітинках якої записано по одному числу, назвемо *Нордичним Квадратом*, якщо вона містить усі натуральні числа від 1 до n^2. Дві різні клітинки вважаються сусідніми, якщо у них є спільна сторона. Назвемо клітинку *долиною*, якщо число в кожній сусідній до неї клітинці більше за число в цій клітинці.

Назвемо *підйомом* послідовність з однієї чи більше клітинок таку, що:

(i) перша клітинка в послідовності є долиною,

(ii) кожна наступна клітинка послідовності є сусідньою до попередньої,

(iii) числа в клітинках послідовності йдуть в зростаючому порядку.

Знайдіть, як функцію від n, мінімальну можливу кількість підйомів в Нордичному квадраті.