Selasa, 15 Juli 2025

Soal 1. Suatu garis pada bidang datar dikatakan *cerah* jika garis tersebut **tidak** sejajar dengan sumbu x, sumbu y, dan garis $x + y = 0$.

Misalkan $n \geqslant 3$ adalah bilangan bulat. Tentukan semua bilangan bulat tak negatif k sehingga terdapat n garis berbeda pada bidang yang memenuhi dua kondisi sebagai berikut:

- untuk semua bilangan bulat positif a dan b dengan $a + b \leqslant n + 1$, titik (a, b) terletak pada paling tidak satu garis dari garis-garis tersebut; dan
- tepat k dari n garis adalah cerah.

Soal 2. Misalkan Ω dan Γ adalah lingkaran yang berpusat berturut-turut di M dan N sehingga panjang jari-jari lingkaran Ω kurang dari panjang jari-jari lingkaran Γ. Misalkan Ω dan Γ berpotongan pada dua titik berbeda A dan B. Garis MN memotong Ω di C dan Γ di D, sehingga titik C, M, N dan D terletak pada garis dengan urutan tersebut. Misalkan P adalah pusat lingkaran luar segitiga ACD. Garis AP memotong Ω lagi di $E \neq A$. Garis AP memotong Γ lagi di $F \neq A$. Misalkan H adalah titik tinggi segitiga PMN.

Buktikan bahwa garis melalui H yang sejajar dengan AP adalah adalah garis singgung lingkaran luar BEF.

(*Titik tinggi* segitiga adalah titik potong ketiga garis tinggi segitiga.)

Soal 3. Misalkan $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif. Suatu fungsi $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dikatakan *bonza* jika

$$f(a) \ \text{ habis membagi } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

untuk semua bilangan bulat positif a dan b.

Tentukan konstanta real terkecil c sehingga $f(n) \leqslant cn$ untuk semua fungsi bonza f dan semua bilangan bulat positif n.

Rabu, 16 Juli 2025

Soal 4. *Pembagi sejati* dari suatu bilangan bulat N adalah pembagi positif N selain N itu sendiri.

Barisan tak hingga $a_1, a_2, \ldots$ terdiri dari bilangan-bilangan bulat positif, masing-masing suku memiliki paling sedikit tiga pembagi sejati. Untuk setiap $n \geqslant 1$, bilangan a_{n+1} merupakan hasil penjumlahan tiga pembagi sejati terbesar dari a_n.

Tentukan semua kemungkinan nilai a_1.

Soal 5. Alice dan Bazza bermain *inekoalaty game*, sebuah permainan dengan dua pemain yang peraturannya tergantung pada suatu bilangan real positif λ, yang diketahui oleh kedua pemain. Pada giliran ke-n dari permainan tersebut (dimulai dengan $n = 1$) hal-hal berikut terjadi:

- Jika n gasal, Alice memilih suatu bilangan real tak negatif x_n sehingga
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Jika n genap, Bazza memilih suatu bilangan real tak negatif x_n sehingga
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Jika seorang pemain tidak dapat memilih bilangan x_n yang cocok, permainan berakhir dan pemain lain menang. Jika permainan berlangsung secara terus menerus, maka tidak ada pemain yang menang. Semua bilangan yang dipilih diketahui oleh kedua pemain.

Tentukan semua nilai λ sehingga Alice memiliki strategi kemenangan dan semua nilai λ sehingga Bazza memiliki strategi kemenangan.

Soal 6. Perhatikan sebuah kisi persegi satuan berukuran 2025×2025. Matilda ingin meletakkan beberapa ubin persegi panjang pada kisi tersebut, mungkin dengan ukuran yang berbeda, sehingga setiap sisi ubin terletak pada garis kisi dan setiap persegi satuan ditutupi oleh paling banyak satu ubin.

Tentukan banyak ubin minimum yang Matilda butuhkan agar setiap baris dan setiap kolom kisi memiliki tepat satu persegi satuan yang tidak ditutupi oleh ubin manapun.