

12 luglio 2006

Problema 1. Sia ABC un triangolo e sia I il centro della sua circonferenza inscritta. Sia P un punto interno al triangolo tale che

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Dimostrare che $AP \geq AI$ e che vale l'uguaglianza se e solo se $P = I$.

Problema 2. Sia P un 2006-agono regolare. Una diagonale di P si dice *buona* se i suoi estremi dividono il bordo di P in due parti ognuna delle quali è composta da un numero dispari di lati di P . I lati di P sono considerati anch'essi *buoni*.

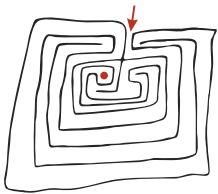
Supponiamo che P sia stato suddiviso in triangoli da 2003 diagonali che a due a due non hanno nessun punto in comune all'interno di P . Determinare il massimo numero di triangoli isosceli aventi due lati buoni che possono apparire in una tale suddivisione.

Problema 3. Determinare il più piccolo numero reale M tale che la diseguaglianza

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

sia soddisfatta per tutti i numeri reali a, b, c .

*Tempo; 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti*



13 luglio 2006

Problema 4. Determinare tutte le coppie (x, y) di interi tali che

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n > 1$ con coefficienti interi e sia k un intero positivo. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, dove P compare k volte. Dimostrare che ci sono al più n interi t tali che $Q(t) = t$.

Problema 6. Assegniamo ad ogni lato b di un poligono convesso P la massima area di un triangolo che ha b come lato ed è contenuto in P . Dimostrare che la somma delle aree assegnate ai lati di P è maggiore o uguale al doppio dell'area di P .

*Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti*