Måndag, den 11 juli 2016

Problem 1. Låt BCF vara en rätvinklig triangel, med den räta vinkeln vid B. Låt A vara en punkt på linjen CF sådan att F ligger mellan A och C och $FA = FB$. Punkten D väljs så att $DA = DC$, och AC är bisektrisen till $\angle DAB$. Punkten E väljs så att $EA = ED$, och AD är bisektrisen till $\angle EAC$.

Låt M var mittpunkten av CF och låt X vara en sådan punkt att $AMXE$ är en parallellogram (där $AM \parallel EX$ och $AE \parallel MX$).

Visa att linjerna BD, FX, och ME går genom en och samma punkt.

Problem 2. Bestäm alla positiva heltal n sådana att varje ruta i ett $n \times n$ rutnät kan fyllas med en av bokstäverna I, M och O på ett sådant sätt att:

- I varje rad och i varje kolumn gäller att en tredjedel av alla rutor innehåller bokstaven I, en tredjedel innehåller bokstaven M och en tredjedel innehåller bokstaven O; och
- för varje diagonal, där antalat rutor är en multipel av 3, innehåller en tredjedel av rutor bokstaven I, en tredjedel innehåller bokstaven M och en tredjedel innehåller bokstaven O.

Anmärkning: Raderna och koloumnerna i $n \times n$ rutnätet är numrerade från 1 till n i naturlig ordning. Därmed motsvarar varje ruta ett par positiva heltal (i, j) där $1 \leqslant i, j \leqslant n$. För $n > 1$, har rutnätet $4n - 2$ *diagonaler* av två typer. En diagonal av typ ett består av alla rutor (i, j) för vilka $i + j$ är en konstant, medan en diagonal av typ två består av alla rutor (i, j) för vilka $i - j$ är en konstant.

Problem 3. Låt $P = A_1A_2 \ldots A_k$ vara en konvex polygon i planet. Hörnen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ har heltalskoordinater och ligger på en cirkel. Låt S beteckna arean av P.

Givet ett udda positivt heltal n sådant att kvadraterna av alla polygonens sidlängder är heltal delbara med n, visa att $2S$ är ett heltal delbart med n.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng

Tisdag, den 12 juli 2016

Problem 4. En mängd av positiva heltal kallas *ljuvlig* om den innehåller minst två element, och varje element i mängden har en primtalsfaktor gemensam med minst ett annat element i mängden. Låt $P(n) = n^2 + n + 1$.

Vilket är det minsta positiva heltal b, sådant att det finns ett icke-negativt heltal a för vilket mängden

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

är ljuvlig?

Problem 5. Ekvationen

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

är skriven på en tavla, med 2016 linjära faktorer på varje sida om likhetstecken.

Vilket är det minsta tal k, för vilket det är möjligt att radera exakt k av de 4032 linjära faktorerna, på ett sådant sätt att det är kvar minst en faktor på varje sida, och att den nya ekvationen inte har några reella rötter?

Problem 6. Givet är $n \geqslant 2$ sträckor i planet, sådana att varje två skär varandra (i en inre punkt) och att det inte finns tre sträckor som går genom en och samma punkt. Jana måste välja en ändpunkt på varje sträcka och placera där en groda som är vänd mot den andra ändpunkten. Därefter klappar hon händer $n-1$ gånger. Varje gång hon klappar händer hoppar var och en av grodorna omedelbart fram till nästa skärningspunkt på sin sträcka. Grodorna ändrar aldrig riktningen i vilken de hoppar. Jana önskar placera grodorna på ett sådant sätt att två grodor aldrig hamnar i samma skärningspunkt samtidigt.

(a) Visa att Jana alltid kan uppfylla sin önskan om n är udda.

(b) Visa att Jana aldrig kan uppfylla sin önskan om n är jämnt.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng