Sexta-feira, 10 de julho de 2015

Problema 1. Dizemos que um conjunto finito $\mathcal{S}$ de pontos do plano é *equilibrado* se, para cada dois pontos diferentes A e B de $\mathcal{S}$, existe um ponto C de $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é *descentrado* se, para cada três pontos diferentes A, B e C de $\mathcal{S}$, não existe um ponto P de $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Prove que, para todos os inteiros $n \geqslant 3$, existe um conjunto equilibrado com exatamente n pontos.

(b) Determine todos os inteiros $n \geqslant 3$ para os quais existe um conjunto equilibrado e descentrado com exatamente n pontos.

Problema 2. Determine todos os ternos (a, b, c) de inteiros positivos tais que cada um dos números

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

é uma potência de 2.

(*Uma potência de* 2 *é um inteiro da forma* 2^n, *em que* n *é um inteiro não negativo.*)

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$. Sejam Γ o seu circuncírculo, H o seu ortocentro, e F o pé da perpendicular a partir de A. Seja M o ponto médio de BC. Seja Q o ponto de Γ tal que $\widehat{HQA} = 90°$, e seja K o ponto de Γ tal que $\widehat{HKQ} = 90°$. Admita que os pontos A, B, C, K e Q são todos diferentes, e estão sobre Γ nesta ordem.

Prove que os circuncírculos dos triângulos KQH e FKM são tangentes.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Sábado, 11 de julho de 2015

Problema 4. O triângulo ABC tem circuncírculo Ω e circuncentro O. Uma circunferência Γ de centro A intersecta o segmento BC nos pontos D e E, de modo que B, D, E e C são todos diferentes e estão na reta BC nesta ordem. Sejam F e G os pontos de interseção de Γ e Ω, tais que A, F, B, C e G estão em Ω nesta ordem. Seja K o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo BDF com o segmento AB. Seja L o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo CGE com o segmento CA.

Suponha que as retas FK e GL são diferentes e que se intersectam no ponto X. Prove que X pertence à reta AO.

Problema 5. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a equação

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \ = \ x + f(x+y) + yf(x)$$

para todos os números reais x e y.

Problema 6. A sequência $a_1, a_2, \ldots$ de inteiros satisfaz as condições seguintes:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ para qualquer j tal que $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ para quaisquer k, ℓ tais que $1 \leqslant k < \ell$.

Prove que existem dois inteiros positivos b e N tais que

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

para quaisquer inteiros m e n satisfazendo $n > m \geqslant N$.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos