Language: **Turkish**

Day: **1**

7 Temmuz 2010 Çarşamba

Soru 1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f\big(\llbracket x \rrbracket\, y\big) = f(x)\, \llbracket f(y) \rrbracket$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz. (Burada $\llbracket z \rrbracket$ ile, z yi aşmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.)

Soru 2. Bir ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ve çevrel çemberi Γ dır. AI doğrusu Γ yı ikinci kez D de kesiyor.

$$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{CAE}) < \frac{1}{2}\, m(\widehat{BAC})$$

koşullarını sağlayacak biçimde, BDC yayı üstünde E ve $[BC]$ kenarı üstünde F noktası alınıyor. $[IF]$ doğru parçasının orta noktası G olsun. DG ve EI doğrularının Γ ya ait bir noktada kesiştiğini kanıtlayınız.

Soru 3. $\mathbb{Z}^+$ ile pozitif tam sayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

sayısının tam kare olmasını sağlayan tüm $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

Language: **Turkish**

Day: **2**

8 Temmuz 2010 Perşembe

Soru 4. P, ABC üçgeninin içinde yer alan bir nokta olsun. AP, BP ve CP doğruları, ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ yı ikinci kez sırasıyla, K, L ve M noktalarında kesiyor. Γ ya C noktasında teğet olan doğru da, AB doğrusunu S noktasında kesiyor. $|SC| = |SP|$ ise, $|MK| = |ML|$ olduğunu kanıtlayınız.

Soru 5. B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 ile gösterilen altı kutunun her birinde başlangıçta birer madenî para bulunuyor. İki tip işleme izin veriliyor:

Tip 1: $1 \le j \le 5$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_j kutusu seçiyoruz. B_j den bir madenî para çıkarıyoruz ve B_{j+1} e iki madenî para koyuyoruz.

Tip 2: $1 \le k \le 4$ olacak biçimde, boş olmayan bir B_k kutusu seçiyoruz. B_k den bir madenî para çıkarıyoruz ve (boş da olsalar) B_{k+1} ile B_{k+2} kutularının içeriklerini birbiriyle değiştiriyoruz.

Sonucunda, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 kutularının boş olmasını ve B_6 kutusunda da tam olarak $2010^{2010^{2010}}$ madenî para olmasını sağlayan sonlu bir işlemler dizisi bulunup bulunmadığını belirleyiniz. (Burada $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ dir.)

Soru 6. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir pozitif gerçel sayılar dizisi olsun. Her $n > s$ için,

$$a_n = \max\{\, a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1 \,\}$$

olmasını sağlayan bir s pozitif tam sayısı bulunduğunu varsayalım. $\ell \le s$ ve her $n \ge N$ için, $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ olacak biçimde ℓ ve N pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.