Petak, 10. srpnja 2015.

Zadatak 1. Konačan skup $\mathcal{S}$ točaka u ravnini je *balansiran* ako za bilo koje dvije različite točke A i B u $\mathcal{S}$ postoji točka C u $\mathcal{S}$ takva da je $|AC| = |BC|$. Kažemo da je $\mathcal{S}$ *ekscentričan* ako ni za koje tri u parovima različite točke A, B i C u $\mathcal{S}$ ne postoji točka P u $\mathcal{S}$ takva da je $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ postoji balansirani skup koji se sastoji od n točaka.

(b) Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje postoji balansirani ekscentrični skup koji se sastoji od n točaka.

Zadatak 2. Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva takve da je svaki od brojeva

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

potencija broja 2.

(*Potencija broja* 2 *je cijeli broj oblika* 2^n, *gdje je* n *nenegativni cijeli broj.*)

Zadatak 3. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| > |AC|$. Neka je Γ njegova opisana kružnica, H njegov ortocentar, te F nožište visine iz A. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je Q točka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HQA = 90°$ i neka je K točka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HKQ = 90°$. Pretpostavlja se da su točke A, B, C, K i Q u parovima različite i da leže na kružnici Γ tim redom.

Dokaži da se opisane kružnice trokuta KQH i FKM dodiruju.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Subota, 11. srpnja 2015.

Zadatak 4. Neka je Ω opisana kružnica trokuta ABC i O njeno središte. Kružnica Γ sa središtem A siječe dužinu $\overline{BC}$ u točkama D i E, tako da su točke B, D, E i C u parovima različite i leže na pravcu BC tim redom. Neka su F i G sjecišta kružnica Γ i Ω takva da točke A, F, B, C i G leže na kružnici Ω tim redom. Neka je K drugo sjecište opisane kružnice trokuta BDF i dužine $\overline{AB}$. Neka je L drugo sjecište opisane kružnice trokuta CGE i dužine $\overline{CA}$.

Pretpostavlja se da su pravci FK i GL različiti i da se sijeku u točki X. Dokaži da točka X leži na pravcu AO.

Zadatak 5. Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi jednakost

$$f\big(x + f(x + y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x + y) + yf(x)$$

za sve realne brojeve x i y.

Zadatak 6. Niz $a_1, a_2, \ldots$ cijelih brojeva zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ za sve $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ za sve $1 \leqslant k < \ell$.

Dokaži da postoje prirodni brojevi b i N takvi da je

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

za sve cijele brojeve m i n koji zadovoljavaju $n > m \geqslant N$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.