

Երեքշաբթի, հուլիսի 16, 2019

Խնդիր 1. Դիցուք \mathbb{Z} -ը ամբողջ թվերի բազմությունն է: Գտնել բոլոր $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ֆունկցիաները, որ ցանկացած a և b ամբողջ թվերի համար բավարարում են

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

հավասարությանը:

Խնդիր 2. Դիցուք ABC եռանկյան BC կողմի վրա նշված է A_1 կետը, իսկ AC կողմի վրա նշված է B_1 կետը: Դիցուք AA_1 և BB_1 հատվածների վրա նշված են համապատասխանաբար P և Q կետերն այնպես, որ PQ ուղիղը զուգահեռ է AB ուղղին: Դիցուք PB_1 ուղղի վրա նշված է P_1 կետն այնպես, որ B_1 կետը գտնվում է P և P_1 կետերի միջև, ընդ որում $\angle PP_1C = \angle BAC$: Նամանման կերպով QA_1 ուղղի վրա նշված է Q_1 կետն այնպես, որ A_1 կետը գտնվում է Q և Q_1 կետերի միջև, ընդ որում $\angle CQ_1Q = \angle CBA$:

Ապացուցել, որ P , Q , P_1 , և Q_1 կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Խնդիր 3. Դիցուք սոցիալական ցանցն ունի 2019 օգտատեր, որոնցից որոշ զույգերն ընկերներ են, ընդ որում եթե A օգտատերն ընկեր է B օգտատիրոջ հետ, ապա B -ն ընկեր է A -ի հետ: Նայանի է, որ պարբերաբար փեղի են ունենում հետևյալ փիպի իրադարձություններ, ընդ որում յուրաքանչյուր պահի կարող է փեղի ունենալ միայն մեկ իրադարձություն՝

Եթե A , B և C ընտրված օգտատերերի եռյակն այնպիսին է, որ A -ն ընկեր է B -ի և C -ի հետ, իսկ B -ն և C -ն ընկերներ չեն, ապա սոցիալական ցանցում նրանք իրենց կարգավիճակները փոխում են այնպես, որ B -ն և C -ն դառնում են ընկերներ, իսկ A -ն այլևս ընկեր չի ոչ B -ի, ոչ էլ C -ի հետ: Մյուս զույգերի ընկերությունների կարգավիճակները չեն փոխվում:

Նայանի է, որ 1010 օգտատերերից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ 1009 ընկեր, իսկ 1009 օգտատերերից յուրաքանչյուրն ունի ճիշտ 1010 ընկեր: Ապացուցել, որ գոյություն ունի իրադարձությունների այնպիսի հերթականություն, որոնց արդյունքում յուրաքանչյուր օգտատեր կունենա առավելագույնը մեկ ընկեր:

Չորեքշաբթի, հուլիսի 17, 2019

Խնդիր 4. Գտնել բոլոր (k, n) բնական թվերի թվագույգերը, որոնց համար փեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}) :$$

Խնդիր 5. Դիցուք Մարգարյան բանկը թողարկում է կոպեկներ, որոնց մի կողմի վրա գրված է H , իսկ մյուս կողմի վրա գրված է T : Տիգրանը գծի երկայնքով ձախից աջ շարում է n հափ կոպեկ: Քայլը կայանում է հետևյալում. եթե կոպեկներից ճիշտ $k > 0$ հափի երևացող երեսին գրված է H , ապա նա շրջում է ձախից հաշված k -րդ կոպեկը, հակառակ դեպքում բոլոր կոպեկները դրված են այնպես, որ երևում է T երեսը և նա գոհունակությամբ ֆիքսում է, որ այլևս քայլ չի կատարելու: Օրինակ, եթե $n = 3$ և սկզբնական դասավորվածությունը THT է, ապա քայլերի արդյունքում կսրացվի դասավորվածությունների հետևյալ շղթան՝

$$THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT,$$

այսինքն կկատարի երեք քայլ:

- (ա) Ապացուցել, որ անկախ սկզբնական դասավորվածությունից Տիգրանը կկատարի վերջավոր քանակությամբ քայլեր:
- (բ) Ցանկացած սկզբնական C դասավորվածության համար $L(C)$ -ով նշանակենք, թե քանի քայլ կկատարի Տիգրանը: Օրինակ $L(THT) = 3$ և $L(TTT) = 0$: Գտնել բոլոր հնարավոր 2^n դասավորվածությունների համար (C -ն ընդունում է այդ արժեքները) Տիգրանի կատարելիք քայլերի միջին թվաբանականը ($L(C)$ -երի միջին թվաբանականը):

Խնդիր 6. Դիցուք ABC -ն սուրանկյուն եռանկյուն է, ընդ որում $AB \neq AC$, իսկ I -ն եռանկյանը ներգծած ω շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք ω -ն եռանկյան BC , CA և AB կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար D , E և F կետերում: Դիցուք D կետով անցնող և EF -ին ուղղահայաց ուղիղը ω -ն երկրորդ անգամ հատում է R կետում: Դիցուք AR -ը ω շրջանագիծը երկրորդ անգամ հատում է P կետում: Դիցուք PCE և PBF եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերը երկրորդ անգամ հատվում են Q կետում:

Ապացուցել, որ DI և PQ ուղիղները հատվում են մի կետում, որը գտնվում է A կետով անցնող և AI -ին ուղղահայաց ուղղի վրա: