



Дүйсенбі, Шілде 18, 2011

**Есеп 1.** Өртүрлі төрт оң бүтін саннан тұратын  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  жиыны үшін  $s_A$  арқылы  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  қосындысын белгілейік. Сонан соң  $n_A$  арқылы мына шартты қанағаттандыратын  $(i, j)$  парларының  $(1 \leq i < j \leq 4)$  санын белгілейік:  $s_A$  саны  $a_i + a_j$  санына қалдықсыз бөлінеді.

Өртүрлі төрт оң бүтін саннан тұратын және  $n_A$  санын максимал мүмкін мәнге жеткізетін барлық  $A$  жиынын табыңдар.

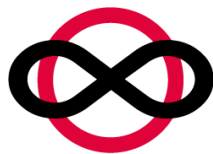
**Есеп 2.** Жазықтықта кемінде екі нүктеден тұратын ақырлы нүктелердің  $\mathcal{S}$  жиыны берілген.  $\mathcal{S}$  жиынынан алынған кез келген үш нүкте бір түзудің бойында жатпайды. Мынадай үрдісті *диірмен* деп атаймыз: ол  $\mathcal{S}$  жиынымен тек қана бір ортақ  $P$  нүктесі бар  $\ell$  түзуінің көмегімен басталады; біз осы түзуді сағат тілімен  $P$  *центрін* айналдыра, түзу үстінде  $\mathcal{S}$  жиынының басқа бір нүктесі пайда болған мезетке шейін бұра береміз; бұл нүкте, оны  $Q$  деп белгілейік, осы мезеттен бастап жаңа центр ретінде қарастырылып, енді түзуді сағат тілімен  $Q$  нүктесін айналдыра, түзу үстінде  $\mathcal{S}$  жиынының басқа бір нүктесі пайда болғанша бұра береміз. Бұл үрдіс ақырсыз жалғаса береді.

$\mathcal{S}$  жиынының бір  $P$  нүктесі және осы  $P$  нүктесі арқылы өтетін бір  $\ell$  түзуі үшін  $\ell$  түзуінің көмегімен басталған диірмен үрдісінің орындалу барысында  $\mathcal{S}$  жиынының әрбір нүктесі ақырсыз көп рет центр рөлін атқаратынын дәлелдендер.

**Есеп 3.**  $\mathbb{R}$  нақты сандар жиынында анықталған және осы жиында мәндерін қабылдайтын  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функциясы кез келген нақты  $x, y$  сандары үшін

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Кез келген  $x \leq 0$  үшін  $f(x) = 0$  болатынын дәлелдендер.



Сейсенбі, Шілде 19, 2011

**Есеп 4.** Бір бүтін  $n > 0$  саны бекітілген. Бізге екі табағы бар таразы және салмақтары  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  болатын  $n$  тас берілген. Біздің мақсатымыз – тастарды, ешбір жүрістен кейін таразының оң жақ табағы басып кетпейтіндей етіп, бір-бірлеп,  $n$  жүрістің ішінде табақтарға салып шығу. Ең басында таразы табақтары бос және әрбір жүрісте біз таразыға салынбай қалған тастардың кез келген біреуін алып, оны таразының сол жақ немесе оң жақ табағына сала аламыз.

Мақсатымызды қанша әдіспен іске асыруға болатынын анықтаңдар.

**Есеп 5.** Бізге  $f: Z \rightarrow N$  функциясы берілген, мұнда  $Z$  бүтін сандар жиынын, ал  $N$  оң бүтін сандар жиынын белгілейді. Кез келген бүтін  $m$  және  $n$  сандары үшін  $f(m) - f(n)$  айырмасы  $f(m - n)$  санына қалдықсыз бөлінетіні белгілі.

Кез келген  $m$  және  $n$  бүтін сандары үшін, егер  $f(m) \leq f(n)$  болса, онда  $f(n)$  саны  $f(m)$  санына қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеңдер.

**Есеп 6.** Сырттай сызылған шеңбері  $\Gamma$  болатын сүйірбұрышты  $ABC$  үшбұрышы берілген.  $\ell$  түзуі  $\Gamma$ -ны жанайды, ал  $\ell_a, \ell_b$  және  $\ell_c$  түзулері  $\ell$  түзуіне сәйкесінше  $BC, CA$  және  $AB$  түзулеріне қарағанда симметриялы екені белгілі.

$\ell_a, \ell_b$  және  $\ell_c$  түзулері анықтайтын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің  $\Gamma$  шеңберін жанайтынын дәлелдеңдер.