



Lunedì 18 Luglio 2011

**Problema 1.** Per ogni insieme  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  di quattro interi positivi distinti, sia  $s_A$  la somma  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , e sia  $n_A$  il numero delle coppie di indici  $(i, j)$ , con  $1 \leq i < j \leq 4$ , tali che  $a_i + a_j$  divide  $s_A$ .

Tra tutti gli insiemi di quattro interi positivi distinti, determinare gli insiemi  $A$  per cui  $n_A$  è il più grande possibile.

**Problema 2.** Sia  $\mathcal{S}$  un insieme finito di punti del piano, contenente almeno due punti. Assumiamo che i punti di  $\mathcal{S}$  siano a tre a tre non allineati.

Chiamiamo *mulino a vento* il seguente processo.

Il processo inizia con una retta  $\ell$  passante per un unico punto  $P \in \mathcal{S}$ . La retta ruota in senso orario intorno al *pivot*  $P$  fino a che non incontra per la prima volta un altro punto di  $\mathcal{S}$ . Questo punto,  $Q$ , diventa il nuovo pivot, e la retta ora ruota in senso orario intorno a  $Q$ , fino a quando incontra un'altra volta un punto di  $\mathcal{S}$ . Questo processo continua all'infinito.

Dimostrare che si possono scegliere un punto  $P$  di  $\mathcal{S}$  ed una retta  $\ell$  passante per  $P$  tali che il risultante mulino a vento utilizza ogni punto di  $\mathcal{S}$  come pivot infinite volte.

**Problema 3.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

per tutti i numeri reali  $x$  e  $y$ .

Dimostrare che  $f(x) = 0$  per ogni  $x \leq 0$ .



Martedì 19 Luglio 2011

**Problema 4.** Sia  $n > 0$  un numero intero. Si dispone di una bilancia a due piatti e di  $n$  pesi i cui pesi sono  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ .

Si devono piazzare tutti gli  $n$  pesi sulla bilancia, l'uno dopo l'altro, in maniera tale che il piatto destro non contenga mai un peso complessivo maggiore del piatto sinistro. A tal fine, ad ogni passo si sceglie uno dei pesi che non è stato ancora piazzato sulla bilancia e lo si aggiunge o sul piatto sinistro o sul piatto destro, fino a quando non sono stati piazzati tutti i pesi.

Determinare il numero dei modi in cui questo si può fare.

**Problema 5.** Sia  $\mathbb{Z}$  l'insieme degli interi, sia  $\mathbb{N}^*$  l'insieme degli interi positivi, e sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^*$ .

Supponiamo che, comunque si scelgano due interi  $m$  ed  $n$ , la differenza  $f(m) - f(n)$  sia divisibile per  $f(m - n)$ .

Dimostrare che per tutti gli interi  $m, n$  con  $f(m) \leq f(n)$  il numero  $f(n)$  è divisibile per  $f(m)$ .

**Problema 6.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo, e sia  $\Gamma$  la sua circonferenza circoscritta. Sia  $\ell$  una retta tangente a  $\Gamma$ . Siano  $\ell_a, \ell_b$  ed  $\ell_c$  le rette ottenute facendo la simmetria di  $\ell$  rispetto alle rette  $BC, CA$  ed  $AB$ , rispettivamente.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo determinato dalle rette  $\ell_a, \ell_b$  ed  $\ell_c$  è tangente alla circonferenza  $\Gamma$ .