Language: **Armenian** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Չորեքշաբթի, 16 հուլիսի, 2008թ.

Խնդիր 1: Դիցուք H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: Շրջանագիծը, որի կենտրոնը BC կողմի միջնակետն է, անցնում է H կետով, հատում է BC ուղիղը A_1 և A_2 կետերում: Նմանապես, շրջանագիծը, որի կենտրոնը CA կողմի միջնակետն է, անցնում է H կետով, հատում է CA ուղիղը B_1 և B_2 կետերում, և շրջանագիծը, որի կենտրոնը AB կողմի միջնակետն է, անցնում է H կետով, հատում է AB ուղիղը C_1 և C_2 կետերում: Ապացուցել, որ $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Խնդիր 2: ա) Ապացուցել, որ

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

անհավասարությունը ճիշտ է բոլոր իրական թվերի դեպքում, որոնցից յուրաքանչյուրը տարբեր է 1-ից, և բավարարում են $xyz=1$ պայմանին:

բ) Ապացուցել, որ նշված անհավասարությունը դառնում է հավասարություն անվերջ թվով x, y, z ռացիոնալ թվերի եռյակների համար, որոնցից յուրաքանչյուրը տարբեր է 1-ից, և բավարարում են $xyz=1$ պայմանին:

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ գոյություն ունի անվերջ թվով n դրական ամբողջ թվեր այնպիսի, որ n^2+1 թիվն ունի պարզ բաժանարար, որը մեծ է, քան $2n+\sqrt{2n}$-ը:

Language: Armenian

Աշխատանքի տևողությունը՝ 4 ժամ 30 րոպե, յուրաքանչյուր խնդիրը 7 միավոր է:

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Հինգշաբթի, 17 հուլիսի, 2008թ.

Խնդիր 4: Գտնել այն բոլոր $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ֆունկցիաները (այսինքն՝ այն բոլոր ֆունկցիաները, որոնք որոշված են բոլոր դրական իրական թվերի բազմության վրա և ընդունում են դրական իրական արժեքներ) այնպիսին, որ

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

կամայական w, x, y, z դրական իրական արժեքների դեպքում, որոնք բավարարում են $wx=yz$ հավասարությանը:

Խնդիր 5: Դիցուք n-ը և k-ն բնական թվեր են այնպիսին, որ $k \geq n$, իսկ $(k-n)$ թիվը զույգ է: Կան $2n$ հատ լամպեր, որոնք համարակալված են $1, 2, \ldots, 2n$ թվերով, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է գտնվել երկու վիճակներից մեկում՝ միացված (включена) կամ անջատված (выключена): Սկզբում բոլոր լամպերը եղել են անջատված: Դիտարկվում են քայլերի հաջորդականություններ՝ յուրաքանչյուր քայլում լամպերից միայն մեկը փոխում է իր վիճակը (այսինքն՝ միացված վիճակից դառնում է անջատված, կամ անջատված վիճակից՝ միացված):
Նշանակենք N-ով k քայլերից կազմված հաջորդականությունների քանակը, որոնք բերում են մի իրավիճակի, որում 1-ից մինչև n-րդ բոլոր լամպերը միացված են, իսկ $(n+1)$-րդից մինչև $(2n)$-րդ բոլոր լամպերն անջատված են:
Նշանակենք M-ով k քայլերից կազմված այն հաջորդականությունների քանակը, որոնք բերում են մի իրավիճակի, որում 1-ից մինչև n-րդ բոլոր լամպերը միացված են, իսկ $(n+1)$-րդից մինչև $(2n)$-րդ բոլոր լամպերն անջատված են, ընդ որում այդ ընթացքում $(n+1)$-րդից մինչև $(2n)$-րդ լամպերից ոչ մեկը ոչ մի անգամ չի փոխել իր վիճակը: Գտնել $\frac{N}{M}$ հարաբերության արժեքը:

Խնդիր 6: Դիցուք $ABCD$-ն ուռուցիկ քառանկյուն է, որում՝ $|BA| \neq |BC|$: Նշանակենք ω_1-ով և ω_2-ով շրջանագծերը, որոնք ներգծված են, համապատասխանաբար, ABC և ADC եռանկյուններին: Ենթադրենք գոյություն ունի ω շրջանագիծ, որը շոշափում է BA ճառագայթի շարունակությունը A կետից հետո (за точкой A), BC ճառագայթի շարունակությունը C կետից հետո (за точкой C), և նաև շոշափում է AD և CD ուղիղներին: Ապացուցել, որ ω_1 և ω_2 շրջանագծերի ընդհանուր արտաքին շոշափողները հատվում են ω շրջանագծի վրա:

Language: Armenian

Աշխատանքի տևողությունը՝ 4 ժամ 30 րոպե:
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր: