

12 июля 2006 года

Задача 1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Внутри треугольника выбрана точка P такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I .

Задача 2. Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если ее концы делят границу P на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны P также называются *хорошими*.

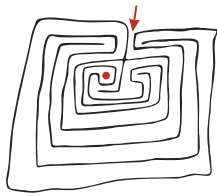
Пусть P разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P . Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

Задача 3. Определите наименьшее действительное число M такое, что неравенство

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

выполняется для любых действительных чисел a, b, c .

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов



13 июля 2006 года

Задача 4. Найдите все пары (x, y) целых чисел такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$$

(здесь P применен k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

Задача 6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P , одна из сторон которых совпадает с b . Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P , не меньше удвоенной площади многоугольника P .

*Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов*