Onsdag, den 7 juli 2010

Problem 1. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att likheten

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

gäller för alla $x, y \in \mathbb{R}$. (Symbolen $\lfloor z \rfloor$ betecknar det största heltalet som är mindre än eller lika med z.)

Problem 2. Låt I vara centrum för den i triangeln ABC inskrivna cirkeln och låt Γ vara den omskrivna cirkeln. Låt linjen AI skära Γ i punkten $D \neq A$. Låt E vara en punkt på bågen $\widehat{BDC}$ och F en punkt på sidan BC sådana att

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Låt slutligen G vara mittpunkten av sträckan IF. Visa att skärningspunkten mellan linjerna DG och EI ligger på Γ.

Problem 3. Låt $\mathbb{N}$ beteckna mängden av alla positiva heltal. Bestäm alla funktioner $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sådana att

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

är ett kvadrattal för alla $m, n \in \mathbb{N}$.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng

Torsdag, den 8 juli 2010

Problem 4. Låt P vara en punkt inuti triangeln ABC. Linjerna AP, BP och CP skär den på triangeln ABC omskrivna cirkeln Γ igen i punkterna K, L och M respektive. Tangentlinjen till Γ i punkten C skär linjen AB i S. Anta att $|SC| = |SP|$. Visa att $|MK| = |ML|$.

Problem 5. I var och en av de sex lådorna $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ finns från början ett enda mynt. Två slags operationer är tillåtna:

Operation 1: Välj en icke-tom låda B_j med $1 \leq j \leq 5$. Ta ut ett mynt från B_j och lägg två nya mynt i B_{j+1}.

Operation 2: Välj en icke-tom låda B_k med $1 \leq k \leq 4$. Ta ut ett mynt från B_k och låt innehållen i lådorna B_{k+1} och B_{k+2} byta plats med varandra (gäller även om minst en av dessa två lådor är tom).

Avgör om det finns en ändlig följd av sådana operationer som leder till att boxarna B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 är tomma medan boxen B_6 innehåller precis $2010^{2010^{2010}}$ mynt. (Observera att $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problem 6. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en följd av positiva reella tal. Anta att vi för något positivt heltal s har

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

för alla $n > s$. Visa att det finns positiva heltal ℓ och N, där $\ell \leq s$, och sådana att $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ för alla $n \geq N$.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng