



יום שני, 19. יולי 2021

שאלה 1. יהא $n \geq 100$ מספר שלם. מאיר כותב את המספרים $n, n+1, \dots, 2n$, כל מספר על קלף משלהו. לאחר מכן הוא מעריב את $n+1$ הקלפים, ומחלק אותם לשתי ערמות. הוכיחו כי בחלוקת אחת מהערמות יש שני קלפים אשר סכום המספרים עליהם הוא ריבוע שלם.

שאלה 2. הוכיחו כי הא-שיויון

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

מתקיים לכל n מספרים ממשיים x_1, \dots, x_n .

שאלה 3. יהא ABC משולש חד זווית בו $AB > AC$. תھא D נקודה פנימית במשולש ABC עבורה $\angle DAB = \angle CAD$ מקיימת $AC < AB$. הנקודה E על הקטע AD מקיימת $\angle FDE = \angle BCD$ על הקטע AB מקיימת $\angle FDA = \angle BDC$, והנקודה X על הישר AC מקיימת $CX = BX$ מרכז המעגלים החוסמים של המשולשים ADC ו- EXD . הוכיחו כי הישרים O_1O_2 ו- O_1O_2 נפגשים בנקודה אחת.



יום שלישי, 20 ביולי 2021

שאלה 4. יהא Γ מעגל עם מרכז I , ויהא $ABCD$ מרובע קמור בו כל אחד מהקטעים DA - CD , BC , AB , AI משיק למעגל Γ . יהא Ω החום של BA . המשך הקרן BA מעבר ל- A פוגש את Ω בנקודה X , והמשך הקרן BC מעבר ל- C פוגש את Ω בנקודה Y . המשכיהם AD ו- CD מעבר ל- D פוגשים את Ω בנקודות T ו- Z , בהתאם. הוכחו כי

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

שאלה 5. שתי לוטרות, ששמותיהן ברווז וג'ירפה, אספו 2021 אבניים לפתיחת צדפות. ג'ירפה סימנה את האבניים במספרים 1 עד 2021, וחפרה 2021 בורות קטנים במעגל מסביב לעין האهوוב עלייהן. בבוקר למחרת ג'ירפה הבינה שהרווז חניכים אבן אחת לכל בור, אך לא התיחס למספרון כלל. ג'ירפה האומללה החליטה לסדר מחדש את האבניים באמצעות סדרה של 2021 מהלכים. במהלך ה- k , ג'ירפה החליפה את המיקומים של שתי האבניים הסמוכות לאבן k . הוכחו כי קיים ערך של k עבורו במהלך ה- k -ה ג'ירפה החליפה אבניים a ו- b עם $a < b < k$.

שאלה 6. יהא $2 \geq m$ מספרשלם, תהא A קבוצה סופית של שלמים (לאו דווקא חיוביים), ותהי n סכום איברי B_k שווה m^k . הוכחו כי A מכילה לפחות $m/2$ איברים. נתון כי לכל $k = 1, 2, \dots, m$ סכום איברי B_k שווה m^k .