Ponedeljak, 9. srpnja 2018.

1. zadatak. Neka je Γ opisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC. Točke D i E se nalaze na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, redom, tako da je $|AD| = |AE|$. Simetrale dužina $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ sijeku kraće lukove AB i AC kružnice Γ u točkama F i G, redom. Dokaži da su pravci DE i FG paralelni (ili se poklapaju).

2. zadatak. Pronađi sve prirodne brojeve $n \geq 3$ za koje postoje realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, takvi da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ i

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. zadatak. *Anti-Pascalov trokut* je tablica u obliku jednakostraničnog trokuta koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem retku, vrijedi da je svaki broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koji su neposredno ispod njega. Na primjer, sljedeća tablica je anti-Pascalov trokut sa četiri retka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Da li postoji anti-Pascalov trokut sa 2018 redaka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Croatian

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Utorak, 10. srpnja 2018.

4. zadatak. *Pozicija* je bilo koja točka (x, y) u ravnini takva da su x i y prirodni brojeva manji ili jednaki od 20.

Na početku, svaka od 400 pozicija je slobodna. Ana i Borna igraju igru u kojoj naizmjenično povlače poteze, pri čemu Ana igra prva. U svakom svom potezu Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju tako da je udaljenost bilo koje dvije pozicije na kojima se nalaze crveni kamenčići različita od $\sqrt{5}$. U svakom svom potezu Borna postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kojoj udaljenosti od drugih pozicija na kojima se nalazi neki kamenčić.) Igra se završava kad neki igrač više ne može povući potez.

Odredi najveći broj K takav da Ana sigurno može postaviti barem K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Borna postavlja svoje plave kamenčiće.

5. zadatak. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $N > 1$ takav da je za sve prirodne brojeve $n \geq N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

cijeli broj. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m \geq M$.

6. zadatak. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Točka X leži unutar $ABCD$ tako da vrijedi

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokaži da je $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180^\circ$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova