

Version: Traditional Chinese (Taiwan)

2007 年 7 月 25 日

問題 1. 給定實數 a_1, a_2, \dots, a_n . 對每個 i ($1 \leq i \leq n$), 定義:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\},$$

且令

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) 證明: 對任意實數 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 有

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) 證明: 存在實數 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 使得 (*) 中的等號成立.

問題 2. 設 A, B, C, D, E 五點中, $ABCD$ 是一個平行四邊形, $BCED$ 是一個圓內接四邊形. 設 ℓ 是通過 A 的一條直線, ℓ 與線段 DC 交於點 F (F 是線段 DC 的內點), 且 ℓ 與直線 BC 交於點 G . 若 $EF = EG = EC$, 求證: ℓ 是 $\angle DAB$ 的角平分線.

問題 3. 在一次數學競賽活動中, 有一些參賽選手是朋友. 朋友關係是相互的. 如果一群參賽選手中的任何兩人都不是朋友, 我們就稱這一群選手為一個“團”(特別地, 人數少於 2 的一群也是一個團).

已知在這次競賽中, 最大的團(人數最多的團)之人數是一個偶數, 證明: 我們總能把參賽選手分配到兩個教室, 使得一個教室中的最大團之人數等於另一個教室中的最大團之人數.

考試時間: 4 小時 30 分
每題 7 分

Version: Traditional Chinese (Taiwan)

2006 年 7 月 26 日

問題 4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA$ 的角平分線與 $\triangle ABC$ 的外接圓交於點 R , 與邊 BC 的垂直平分線交於點 P , 與邊 AC 的垂直平分線交於點 Q . 設 K 與 L 分別是邊 BC 和 AC 的中點. 證明: $\triangle RPK$ 和 $\triangle RQL$ 的面積相等.

問題 5. 設 a 與 b 為正整數. 已知 $4ab - 1$ 整除 $(4a^2 - 1)^2$, 證明: $a = b$.

問題 6. 設 n 是一個正整數. 考慮

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

這樣一個三維空間中具有 $(n + 1)^3 - 1$ 個點的集合. 問: 最少要多少個平面, 它們的聯集才能包含 S , 但不含 $(0, 0, 0)$.

考試時間: 4 小時 30 分
每題 7 分