Utorok 23.7.2013

Úloha 1. Dokážte, že ku každej dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nie nutne rôznych) takých, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Úloha 2. Konfigurácia 4027 bodov v rovine sa nazýva *kolumbijská*, ak pozostáva z 2013 červených a 2014 modrých bodov a žiadne tri body tejto konfigurácie neležia na jednej priamke. Ak nakreslíme niekoľko priamok, rovina sa rozdelí na niekoľko oblastí. Rozloženie priamok je *dobré* pre *kolumbijskú* konfiguráciu, ak sú splnené dve nasledovné podmienky:

- žiadna priamka neprechádza žiadnym bodom konfigurácie;
- žiadna oblasť neobsahuje body oboch farieb.

Nájdite najmenšiu hodnotu k takú, že pre každú *kolumbijskú* konfiguráciu 4027 bodov existuje *dobré* rozloženie k priamok.

Úloha 3. Nech kružnica pripísaná trojuholníku ABC oproti vrcholu A sa dotýka strany BC v bode A_1. Definujme body B_1 na CA a C_1 na AB analogicky, použijúc pripísané kružnice oproti vrcholom B a C. Predpokladajme, že stred kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.

Kružnica pripísaná trojuholníku ABC oproti vrcholu A je kružnica, ktorá sa dotýka úsečky BC, polpriamky AB za bodom B a polpriamky AC za bodom C. Kružnice pripísané oproti vrcholom B a C sú definované analogicky.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Streda 24.7.2013

Úloha 4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s ortocentrom H a nech W je vnútorný bod strany BC. Body M a N sú postupne päty výšok z bodov B a C. Označme ω_1 kružnicu opísanú trojuholníku BWN a nech X je taký bod na ω_1, že WX je priemer ω_1. Analogicky označme ω_2 kružnicu opísanú trojuholníku CWM a nech Y je taký bod na ω_2, že WY je priemer ω_2. Dokážte, že X, Y a H sú kolineárne.

Úloha 5. Nech $\mathbb{Q}_{>0}$ je množina kladných racionálnych čísel. Nech $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ je funkcia splňujúca nasledovné tri podmienky:

(i) pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ platí $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ platí $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) existuje racionálne číslo $a > 1$ také, že $f(a) = a$.

Dokážte, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Úloha 6. Nech $n \geq 3$ je celé číslo. Uvažujme kružnicu a na nej $n+1$ rovnomerne rozložených bodov. Uvažujme všetky také označenia týchto bodov znakmi $0, 1, \ldots, n$, že každý znak je použitý práve raz. Dve takéto označenia sa považujú za zhodné, ak jedno z nich je možné dostať z druhého rotáciou kružnice. Označenie sa nazýva *krásne*, ak pre ľubovoľné štyri znaky $a < b < c < d$ také, že $a+d = b+c$, tetiva spájajúca body označené znakmi a a d nepretína tetivu spájajúcu body označené znakmi b a c.

Nech M je počet *krásnych* označení a nech N je počet usporiadaných dvojíc (x, y) nesúdeliteľných kladných celých čísel takých, že $x + y \leq n$. Dokážte, že

$$M = N + 1.$$

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.