Mánudagur 18. Júlí 2011

Dæmi 1. Fyrir sérhvert mengi $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ með fjórum ólíkum jákvæðum heiltölum táknum við summuna $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ með s_A. Látum n_A tákna fjölda tvennda (i, j) þannig að $1 \leq i < j \leq 4$ og $a_i + a_j$ gengur upp í s_A. Finnið öll mengi A með fjórum ólíkum jákvæðum heiltölum þannig að n_A taki sitt hæsta mögulega gildi.

Dæmi 2. Látum $\mathcal{S}$ vera endanlegt mengi sem inniheldur að minnsta kosti tvo punkta í sléttunni. Gerum ráð fyrir að engir þrír punktar í $\mathcal{S}$ liggji á sömu línu. *Vindmylla* er eftirfarandi: Við byrjum með línu ℓ sem fer í gegnum nákvæmlega einn punkt $P \in \mathcal{S}$. Línan snýst réttsælis um *snúningsmiðjuna* P þar til annar punktur úr $\mathcal{S}$ lendir á línunni í fyrsta skipti. Þessi punktur Q tekur núna við hlutverki P sem snúningsmiðja og línan snýst réttsælis um Q þangað til hún lendir aftur á punkti úr $\mathcal{S}$. Þetta er endurtekið óendalega oft.
Sýnið að hægt sé að velja punkt P úr $\mathcal{S}$ og línu ℓ sem liggur í gegnum P þannig að vindmyllan sem verður til notar sérhvern punkt í $\mathcal{S}$ sem snúningsmiðju óendanlega oft.

Dæmi 3. Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera fall frá mengi rauntalnanna yfir á sjálft sig sem uppfyllir

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

fyrir allar rauntölur x og y. Sannið að $f(x) = 0$ fyrir öll $x \leq 0$.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig

Þriðjudagur 19. Júlí 2011

Dæmi 4. Látum $n > 0$ vera heiltölu. Við fáum skálavog og n lóð sem vega $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Við eigum að setja lóðin á vorgarskálarnar eitt af öðru þannig að hægri vogarskálin verði aldrei þyngri en vinstri vogarskálin. Í hverju skrefi veljum við eitt af lóðunum sem enn hafa ekki verið lögð á vogarskálarnar og setjum það annað hvort á vinstri vogarskálina eða hægri vogarskálina. Við gerum þetta þangað til öll lóðin hafa verið lögð á vogarskálarnar.
Ákvarðið á hve marga vegu þetta er framkvæmanlegt.

Dæmi 5. Látum f vera fall frá mengi heiltalna yfir á mengi jákvæðra heiltalna. Gerum ráð fyrir að fyrir sérhverjar tvær heiltölur m og n sé mismunurinn $f(m) - f(n)$ deilanlegur með $f(m-n)$. Sannið að fyrir allar heiltölur m og n með $f(m) \leq f(n)$ þá sé talan $f(n)$ deilanleg með $f(m)$.

Dæmi 6. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með umritaðan hring Γ. Látum ℓ vera snertil Γ, og látum ℓ_a, ℓ_b og ℓ_c vera línurnar sem fást með því að spegla ℓ um línurnar BC, CA og AB í þeirri röð. Sýnið að umritaði hringur þríhyrningsins sem er ákvarðaður af línunum ℓ_a, ℓ_b og ℓ_c snertir hringinn Γ.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig