שבת, 8 ביולי 2023

שאלה 1. מצאו את כל השלמים הפריקים $n > 1$ עבורם מתקיימת התכונה הבאה: אם $d_1, d_2, \ldots, d_k$ הם כל המחלקים החיוביים של n ומתקיים $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, אז d_i מחלק את $d_{i+1} + d_{i+2}$ לכל $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

שאלה 2. יהא ABC משולש חד-זוויות בו $AB < AC$. נסמן ב-Ω את המעגל החוסם של ABC. נסמן ב-S את אמצע הקשת CB של Ω שמכילה את A. האנך מ-A ל-BC פוגש את BS בנקודה D ופוגש את Ω שנית בנקודה $E \neq A$. הישר דרך D המקביל ל-BC פוגש את הישר BE ב-L. נסמן את המעגל החוסם של המשולש BDL ב-ω. נסמן את נקודת החיתוך השנייה של ω ו-Ω ב-$P \neq B$.

הוכיחו כי המשיק ל-ω ב-P פוגש את BS בנקודה על חוצה הזווית הפנימי של $\angle BAC$.

שאלה 3. לכל $k \geqslant 2$ שלם, מצאו את כל הסדרות האינסופיות של שלמים חיוביים $a_1, a_2, \ldots$ עבורן קיים פולינום P מהצורה $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, באשר $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ הם שלמים אי-שליליים, כך שמתקיים

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

לכל $n \geqslant 1$ שלם.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

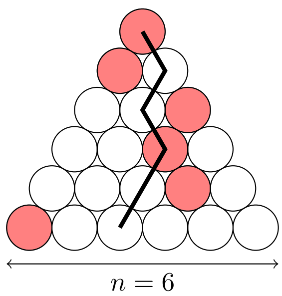
יום ראשון, 9 ביולי 2023

שאלה 4. יהיו $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ ממשיים חיוביים שונים בזוגות עבורם

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

הוא מספר שלם לכל $n = 1, 2, \ldots, 2023$. הוכיחו כי $a_{2023} \geqslant 3034$.

שאלה 5. יהא n שלם חיובי. **משולש יפני** הוא מבנה המורכב מ-$1 + 2 + \cdots + n$ עיגולים המסודרים בצורת משולש שווה צלעות כך שלכל $i = 1, 2, \ldots, n$, בשורה ה-i ישנם בדיוק i עיגולים, מתוכם בדיוק אחד צבוע באדום. **הילוך נינג'ה** במשולש יפני הוא סדרה של n עיגולים המתחילה בשורה העליונה, בכל צעד עוברת מעיגול לאחד משני העיגולים הנמצאים ישירות מתחתיו, ומסתיימת בשורה התחתונה. להלן דוגמה של משולש יפני עבור $n = 6$, יחד עם הילוך נינג'ה באותו משולש המכיל שני עיגולים אדומים.



מצאו, כפונקציה של n, את הערך הגדול ביותר של k עבורו בכל משולש יפני יש הילוך נינג'ה המכיל לפחות k עיגולים אדומים.

שאלה 6. יהא ABC משולש שווה צלעות. תהנא A_1, B_1, C_1 נקודות בפנים המשולש ABC עבורן מתקיים $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$ וכן $AC_1 = C_1B$

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

נסמן את נקודת המפגש של BC_1 ו-CB_1 ב-A_2, את נקודת המפגש של CA_1 ו-AC_1 ב-B_2, ואת נקודת המפגש של AB_1 ו-BA_1 ב-C_2.
הוכיחו שאם המשולש $A_1B_1C_1$ הוא שונה-צלעות, אז שלושת המעגלים החוסמים של AA_1A_2, BB_1B_2 ו-CC_1C_2 כולם עוברים דרך שתי נקודות משותפות.