

Sişenbe, 16-njy iýul 2019 ý.

Mesele 1. Goý, \mathbb{Z} —bitin sanlaryň köplügi bolsun. Islendik a we b bitin sanlar üçin $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$ şertini kanagatlandyryan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funksiýalaryň hemmesini tapyň.

Mesele 2. ABC üçburçlukda A_1 nokat BC kesimde ýerleşýär, B_1 nokat bolsa AC kesimde ýerleşýär. Goý, P we Q nokatlar, deňşlilikde, AA_1 we BB_1 kesimlerde ýerleşip, PQ göni çyzyk AB göni çyzyga parallel bolsun. Goý, P_1 nokat PB_1 göni çyzykda ýerleşip, B_1 nokat P we P_1 nokatlaryň arasynda ýerleşsin we $\angle PP_1C = \angle BAC$ bolsun. Şuňa meňzeşlikde, goý, Q_1 nokat QA_1 göni çyzykda ýerleşip, A_1 nokat Q we Q_1 nokatlaryň arasynda ýerleşsin we $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ bolsun. P, Q, P_1 we Q_1 nokatlaryň bir töwerekde ýatýandygyny subut ediň.

Mesele 3. Sosial toruň 2019 agzasy bar. Agzalaryň käbirleri başga käbir agzalar bilen dost bolup, dostluk ikitaraplaýyndyr, ýagny eger agza A agza B bilen dost bolsa, agza B hem agza A bilen dostdur. Yzygiderlikde şeýle wakalar bolup dur, her gezekde bir wakadan:

A —hem B bilen hem C bilen dost, emma B we C özara dost däl bolan üç sany A, B we C agzalar alynýar. Soňra bolsa B we C dostlaşýarlar, emma indi A — B we C bilen dost däl ýagdaýa gelýär. Beýleki agzalaryň arasyndaky dostluk gatnaşygy bolsa üýtgemän durýar.

Başda 1010 agzanyň her biriniň 1009 dosty, 1009 agzanyň bolsa her biriniň 1010 dosty bar. Her agzanyň iň köp bir dosty bolar ýaly wakalaryň yzygiderligi bardygyny subut ediň.

Çarşenbe, 17-nji iýul 2019 ý.

Mesele 4. $k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})$ bolan položitel bitin sanlaryň ähli (k, n) jübütlerini tapyň.

Mesele 5. Bat şäherindäki bank bir ýüzünde H harp beýleki ýüzünde bolsa T harp bolan teňňeleri göýberýär. Hekimiň önüne şolar ýaly teňňeden n sanysy çepden saga bir setire düzlüp goýulýar. Ol yzygiderlikde şu amaly ýerine ýetirýär: eger setirde ýokarky ýüzi H harp bolan takyk $k > 0$ sany teňňe bar bolsa, onda ol çepden k -njy teňňäni ters ýüzüne öwürýär; beýleki ýagdaýda, eger teňňeleriň hemmesiniň ýokarky ýüzi T harp bolsa, ol durýar. Mysal üçin, eger $n = 3$ we teňňelerimiz THT görnüşde düzülen bolsa, amallaryň yzygiderligi $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ bolar, ýagny üç gezekden soň durar.

- Teňňeleriň başda islendik görnüşde ýerleşdirilişinde Hekimiň tükenikli amaldan soň durjakdygyny subut ediň.
- Islendik C görnüş üçin $L(C)$ bilen durmak üçin gerekli bolan amallaryň sanyny aňladalyň. Mysal üçin, $L(THT) = 3$ we $L(TTT) = 0$. C -nyň ähli 2^n dürli bolup biljek görnüşleri üçin $L(C)$ sanlaryň orta arifmetik bahasyny tapyň.

Mesele 6. Goý, I nokat $|AB| \neq |AC|$ bolan ýiti burçly ABC üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň merkezi bolsun. ABC üçburçlugyň içinden çyzylan ω töwerek BC, CA we AB taraplara, deňşililikde, D, E we F nokatlarda galtaşýar. D nokatdan geçip EF kesime perpendikulýar bolan göni çyzyk ω -ny ikinji gezek R nokatda kesýär. AR göni çyzyk ω -ny ikinji gezek P nokatda kesýär. PCE we PBF üçburçluklaryň daşyndan çyzylan töwerekler ikinji gezek Q nokatda kesişýärler. DI we PQ göni çyzyklaryň A -dan geçip AI göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzygyň üstünde kesişýändiklerini subut ediň.