

ponedeljek, 11. julij, 2016

Naloga 1. Trikotnik BCF ima pravi kot pri oglišču B . Naj bo A taka točka na premici CF , da je $|FA| = |FB|$ in da točka F leži med točkama A in C . Točka D je izbrana tako, da je $|DA| = |DC|$ in je AC simetrala kota $\angle DAB$. Točka E je izbrana tako, da je $|EA| = |ED|$ in je AD simetrala kota $\angle EAC$. Naj bo točka M razpolovišče stranice CF . Naj bo X taka točka, da je $AMXE$ paralelogram (pri čemer je $AM \parallel EX$ in $AE \parallel MX$). Dokaži, da se premice BD , FX in ME sekajo v eni točki.

Naloga 2. Poišči vsa naravna števila n , za katera lahko v vsako polje preglednice velikosti $n \times n$ vpišemo eno izmed črk I , M in O , tako da velja:

- v vsaki vrstici in vsakem stolpcu je ena tretjina vpisanih črk črka I , ena tretjina vpisanih črk je črka M in ena tretjina vpisanih črk je črka O ; ter
- v vsaki diagonali, pri kateri je število vpisanih črk večkratnik števila 3, je ena tretjina vpisanih črk na diagonali črka I , ena tretjina vpisanih črk je črka M in ena tretjina vpisanih črk je črka O .

Opomba. Vrstice in stolpci preglednice velikosti $n \times n$ so na običajen način oštevilčene s števili od 1 do n . Vsakemu polju torej priredimo par naravnih števil (i, j) , pri čemer je $1 \leq i, j \leq n$. Za $n > 1$ ima preglednica $4n - 2$ diagonali, vsak izmed teh diagonal je ene izmed dveh vrst. Diagonala prve vrste je sestavljena iz vseh polj (i, j) , za katera je $i + j$ konstanta, diagonala druge vrste pa je sestavljena iz vseh polj (i, j) , za katere je $i - j$ konstanta.

Naloga 3. Naj bo $P = A_1A_2 \dots A_k$ konveksni mnogokotnik v ravnini. Oglišča A_1, A_2, \dots, A_k imajo celoštevilске koordinate in ležijo na krožnici. Naj bo S ploščina mnogokotnika P . Naj bo n tako liho število, da so kvadrati dolžin stranic mnogokotnika P cela števila deljiva z n . Dokaži, da je $2S$ celo število deljivo z n .

torek, 12. julij, 2016

Naloga 4. Množica naravnih števil se imenuje *dišeča*, če vsebuje vsaj dva elementa in ima vsak izmed njenih elementov skupen praštevilski delitelj z vsaj enim od njenih preostalih elementov. Naj bo $P(n) = n^2 + n + 1$. Koliko je lahko najmanjša vrednost naravnega števila b , da obstaja nenegativno celo število a , tako da je množica

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

dišeča?

Naloga 5. Na tabli je napisana enačba

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016)$$

z 2016 linearnimi členi na vsaki strani. Koliko je najmanjša možna vrednost števila k , tako da lahko izbrišemo natanko k od teh 4032 linearnih členov in na vsaki strani ostane vsaj en člen, dobljena enačba pa nima nobene realne rešitve?

Naloga 6. V ravnini je $n \geq 2$ daljic, tako da se vsaki dve daljici sekata v notranji točki, nobene tri daljice pa se ne sekajo v isti točki. Geoff mora pri vsaki daljici izbrati eno izmed krajišč in nanj položiti žabo, ki je obrnjena proti drugemu krajišču daljice. Nato bo $(n-1)$ -krat plosknil z rokama. Vsakokrat, ko bo plosknil, bo vsaka žaba takoj skočila naprej do naslednjega presečišča na svoji daljici. Žabe nikoli ne spremenijo smeri skakanja. Geoff želi žabe razporediti tako, da ne bi bili nikoli nobeni dve žabi hkrati na istem presečišču.

- (a) Dokaži, da je Geoffova želja vedno uresničljiva, če je n liho število.
- (b) Dokaži, da ni Geoffova želja nikoli uresničljiva, če je n sodo število.