53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Czech**

Day: **1**

Úterý, 10. července 2012

Úloha 1. Je dán trojúhelník ABC. Nechť J je střed kružnice připsané ke straně BC a nechť M je bod jejího dotyku s touto stranou. Dále nechť K a L značí po řadě body dotyku této kružnice s přímkami AB a AC. Průsečík přímek LM a BJ označme F a průsečík přímek KM a CJ pak G. Dále nechť S je průsečík přímek AF a BC a konečně nechť T je průsečík přímek AG a BC. Dokažte, že M je středem úsečky ST.

(Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA.)

Úloha 2. Je dáno celé kladné $n \geq 3$ a kladná reálná $a_2, a_3, \ldots, a_n$ taková, že $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokažte, že pak platí nerovnost

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Úloha 3. *„Hra na chytrou horákyni“* je hrou mezi dvěma hráči A a B. Pravidla hry závisejí na dvou kladných celých číslech k a n, která jsou známa oběma hráčům.

Na začátku hry zvolí hráč A celá čísla x a N, kde $1 \leq x \leq N$, a z nich prozradí (po pravdě) hráči B pouze číslo N, číslo x si nechá pro sebe. Hráč B se nyní snaží získat informace o čísle x kladením otázek hráči A. Může přitom klást pouze otázky následujícího typu: vybere libovolnou podmnožinu S kladných celých čísel (může vybrat i množinu, kterou již zvolil v některé z předchozích otázek) a zeptá se hráče A na to, zda číslo x leží v S. Hráč B může položit libovolně mnoho takovýchto otázek. Na každou otázku musí hráč A okamžitě odpovědět, a to buď „ano“, nebo „ne“. Při odpovědích však může hráč A lhát, dokonce libovolně mnohokrát; jediným omezením je pouze to, aby mezi každými jeho $k + 1$ za sebou následujícími odpověďmi byla alespoň jedna pravdivá. Poté, co hráč B skončí s kladením všech svých otázek, zadá nějakou, nejvýše n-prvkovou, podmnožinu X kladných celých čísel. Pokud číslo x náleží do množiny X, tak hráč B vyhrál, jinak prohrál. Dokažte:

1. Jestliže je $n \geq 2^k$, tak má hráč B vyhrávající strategii.
2. Pro každé dostatečně velké celé kladné k (tj. od jisté meze pro každé celé kladné číslo k) existuje číslo $n \geq 1{,}99^k$ takové, že neexistuje vyhrávající strategie za hráče B.

Čas na řešení: 4 h 30 min.
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů.

Středa, 11. července 2012

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pro které platí rovnost

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \; = \; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

pro libovolná celá a, b, c splňující $a + b + c = 0$.
($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.)

Úloha 5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Označme D patu výšky z bodu C. Nechť X je bod uvnitř úsečky CD. Označme K ten bod na úsečce AX, pro který $|BK| = |BC|$. Podobně označme L ten bod na úsečce BX, pro který $|AL| = |AC|$. Dále nechť M je průsečík úseček AL a BK. Ukažte, že $|MK| = |ML|$.

Úloha 6. Nalezněte všechna celá kladná čísla n, pro která existují nezáporná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že platí rovnosti

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Čas na řešení: 4 h 30 min.
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů.