



ponedjeljak, 18. srpnja 2011.

### 1. zadatak

Za skup  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  koji se sastoji od četiri međusobno različita prirodna broja, neka  $s_A$  označava sumu  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Neka  $n_A$  označava broj parova  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , za koje broj  $a_i + a_j$  dijeli sumu  $s_A$ .

Odredi sve takve skupove  $A$ , koji se sastoje od četiri međusobno različita prirodna broja, za koje  $n_A$  postiže maksimalnu moguću vrijednost.

### 2. zadatak

Neka je  $\mathcal{S}$  konačan skup točaka u ravnini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa  $\mathcal{S}$  nisu kolinearne. Nazovimo *vjetrenjačom* postupak određen pravcem  $\ell$  na kojem se nalazi točno jedna točka  $P$  skupa  $\mathcal{S}$  na sljedeći način:

Pravac  $\ell$  rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke  $P$  (*središta rotacije*) do prvog trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa  $\mathcal{S}$ . Ta točka, nazovimo je  $Q$ , postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke  $Q$ , do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa  $\mathcal{S}$ . Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

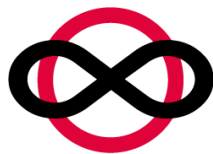
Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije  $P \in \mathcal{S}$  i pravac  $\ell$  koji prolazi kroz  $P$ , koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa  $\mathcal{S}$  beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

### 3. zadatak

Neka  $\mathbb{R}$  označava skup svih realnih brojeva. Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  zadovoljena nejednakost

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Dokaži da je  $f(x) = 0$  za sve  $x \leq 0$ .



*utorak, 19. srpnja 2011.*

**4. zadatak**

Neka je  $n$  prirodni broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i  $n$  utega čije su težine  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu.

Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

**5. zadatak**

Neka je  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  funkcija iz skupa cijelih brojeva u skup prirodnih brojeva, takva da je za sve cijele brojeve  $m, n$  razlika  $f(m) - f(n)$  djeljiva brojem  $f(m - n)$ .

Dokaži da je broj  $f(n)$  djeljiv brojem  $f(m)$ , za sve  $m, n \in \mathbb{Z}$  za koje je  $f(m) \leq f(n)$ .

**6. zadatak**

Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut i  $\Gamma$  njegova opisana kružnica. Neka je  $\ell$  bilo koja tangenta na kružnicu  $\Gamma$ , i neka su  $\ell_a, \ell_b$  i  $\ell_c$  pravci simetrični pravcu  $\ell$  s obzirom na pravce  $BC, CA$  i  $AB$  redom.

Dokaži da kružnica opisana trokutu kojeg određuju pravci  $\ell_a, \ell_b$  i  $\ell_c$  dodiruje kružnicu  $\Gamma$ .