

دوشنبه، ۹ جولای ۲۰۱۸

سوال ۱. فرض کنید که Γ دایره‌ی محیطی مثلث حاده‌الزاویه ABC باشد. نقاط D و E به ترتیب روی پاره‌خط‌های AB و AC قرار دارند به گونه‌ای که $AD = AE$. عمودمنصف‌های BD و CE به ترتیب کمان‌های کوچک‌تر AB و AC را در نقاط F و G قطع می‌کنند. ثابت کنید خطوط DE و FG با هم موازی‌اند (یا بر هم منطبق‌اند).

سوال ۲. تمام اعداد صحیح $n \geq 3$ را بیابید طوری که اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_{n+2} وجود داشته باشند که $a_{n+2} = a_2$ و $a_{n+1} = a_1$ و به ازای $i = 1, 2, \dots, n$

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

سوال ۳. یک مثلث پاد خیام-پاسکال یک آرایه مثلثی از اعداد است به طوری که، به جز اعداد سطر پایینی آن، هر عدد قدر مطلق تفاضل دو عددی است که در پایین آن قرار دارد. به طور مثال آرایه زیر یک مثلث پاد خیام-پاسکال با چهار سطر است که همه اعداد ۱ تا ۱۰ را شامل می‌شود.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

آیا یک مثلث پاد خیام-پاسکال با ۲۰۱۸ سطر وجود دارد که همه اعداد از ۱ تا $1 + 2 + \dots + 2018$ را شامل شود؟

سه‌شنبه، ۱۰ جولای ۲۰۱۸

سوال ۴. یک پایگاه یک نقطه (x, y) در صفحه است به طوری که x و y هر دو اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ هستند. در ابتدا هر یک از چهارصد پایگاه خالی است. امید و مرتضی، با شروع از امید، به نوبت سنگ‌هایی روی پایگاه‌ها قرار می‌دهند. امید در هر نوبت خود، یک سنگ قرمز جدید روی یک پایگاه خالی قرار می‌دهد طوری که فاصله هیچ دو پایگاهی که سنگ قرمز دارند، برابر با $\sqrt{5}$ نباشد. مرتضی در هر نوبت خود، یک سنگ آبی جدید روی یک پایگاه خالی قرار می‌دهد. (پایگاهی که سنگ آبی دارد مجاز است که هر فاصله‌ای از هر پایگاه پرشده‌ای داشته باشد.) بازی وقتی متوقف می‌شود که یک بازیکن نتواند روی هیچ پایگاهی سنگ جدیدی قرار دهد. بزرگ‌ترین K را بیابید که امید مطمئن باشد که می‌تواند حداقل K سنگ قرمز را روی پایگاه‌ها قرار دهد، مستقل از این‌که مرتضی چگونه سنگ‌های آبی‌اش را روی پایگاه‌ها قرار دهد.

سوال ۵. فرض کنید a_1, a_2, \dots یک دنباله نامتناهی از اعداد صحیح مثبت باشد. فرض کنید که یک عدد صحیح $N > 1$ وجود دارد که برای هر $n \geq N$ عدد

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

یک عدد صحیح است. ثابت کنید که یک عدد صحیح مثبت مثل M وجود دارد که برای هر $m \geq M$ ، داریم $a_m = a_{m+1}$.

سوال ۶. چهارضلعی محدب $ABCD$ طوری است که $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. نقطه X درون چهارضلعی $ABCD$ به گونه‌ای قرار دارد که

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{و} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

ثابت کنید $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.