

12 Temmuz 2006

**Problem 1.** İçeğet çemberinin merkezi  $I$  olan bir  $ABC$  üçgeninin içinde,

$$\hat{m}(PBA) + \hat{m}(PCA) = \hat{m}(PBC) + \hat{m}(PCB)$$

olacak şekilde bir  $P$  noktası seçiliyor.  $|AP| \geq |AI|$  olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak  $P = I$  olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

**Problem 2.** Bir  $P$  düzgün 2006-genini veriliyor.  $P$  nin bir köşegenine, uçları  $P$  nin çevresini, her birisi  $P$  nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor.  $P$  nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.

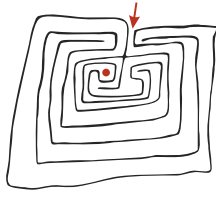
$P$ , herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

**Problem 3.** Tüm  $a, b, c$  reel sayıları için

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük  $M$  reel sayısını bulunuz.

Süre 4,5 saattir.  
Her problem 7 puandır.



13 Temmuz 2006

**Problem 4.**  $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$  eşitliğini sağlayan tüm  $(x, y)$  tam sayı ikililerini belirleyiniz.

**Problem 5.** Katsayıları tam sayı ve derecesi  $n > 1$  olan bir  $P(x)$  polinomu ile bir  $k > 0$  tam sayısı veriliyor.  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ ,  $P$  nin  $k$  kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere,  $Q(t) = t$  eşitliğini sağlayan  $t$  tam sayılarının sayısının en fazla  $n$  olacağını ispatlayınız.

**Problem 6.** Dışbükey bir  $P$  çokgeninin her  $b$  kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi  $b$  olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor.  $P$  nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının,  $P$  nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

*Süre 4,5 saattir.  
Her problem 7 puandır.*