ponedjeljak, 19. srpnja 2021

Zadatak 1. Neka je $n \geqslant 100$ prirodni broj. Ivan zapisuje svaki od brojeva $n, n+1, \ldots, 2n$ na zasebnu karticu. Nakon toga miješa tih $n+1$ kartica i dijeli ih u dvije hrpe. Dokaži da barem jedna od tih hrpa sadrži dvije kartice takve da je zbroj brojeva napisanih na njima kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 2. Dokaži da nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

vrijedi za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$.

Zadatak 3. U unutrašnjosti šiljastokutnog trokuta ABC u kojem je $|AB| > |AC|$, dana je točka D takva da vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Za točku E na dužini $\overline{AC}$ vrijedi $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, za točku F na dužini $\overline{AB}$ vrijedi $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, te za točku X na pravcu AC vrijedi $|CX| = |BX|$. Neka su O_1 i O_2 središta kružnica opisanih trokutima ADC i EXD, redom. Dokaži da se pravci BC, EF, i O_1O_2 sijeku u jednoj točki.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

utorak, 20. srpnja 2021

Zadatak 4. Neka je Γ kružnica sa središtem I, te $ABCD$ konveksan četverokut takav da dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ diraju Γ. Neka je Ω kružnica opisana trokutu AIC. Produžetak dužine $\overline{BA}$ preko A siječe Ω u X, a produžetak dužine $\overline{BC}$ preko C siječe Ω u Z. Produžeci dužina $\overline{AD}$ and $\overline{CD}$ preko D sijeku Ω u Y i T, redom. Dokaži da vrijedi

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Zadatak 5. Vjeverice Grmko i Skočko su skupile 2021 orah tijekom zime. Skočko je označio orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 malu rupu ukrug u tlu oko najdražeg stabla. Idućeg jutra Skočko je primijetio da je Grmko stavio po jedan orah u svaku rupu, ali nije obraćao pažnju na brojeve. Skočko je zato odlučio promijeniti raspored oraha nizom od 2021 poteza. U k-tom potezu, Skočko mijenja pozicije dvama orasima susjednima orahu označenom brojem k. Dokaži da postoji broj k takav da u k-tom potezu Skočko mijenja pozicije nekim orasima označenima brojevima a i b takvima da vrijedi $a < k < b$.

Zadatak 6. Neka je $m \geqslant 2$ prirodni broj, A konačan skup (ne nužno pozitivnih) cijelih brojeva, te $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ podskupovi skupa A. Ako za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ zbroj elemenata skupa B_k iznosi m^k, dokaži da A ima barem $m/2$ elemenata.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.