subota, 8. juli 2023

Zadatak 1. Odrediti sve složene prirodne brojeve $n > 1$ koji imaju sljedeću osobinu: ako su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ svi pozitivni djelioci broja n, pri čemu vrijedi $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, onda d_i dijeli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za svako $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Zadatak 2. Neka je ABC oštrougli trougao u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Neka je Ω opisana kružnica trougla ABC. Neka je S sredina luka CB kružnice Ω koji sadrži tačku A. Okomica iz A na BC siječe BS u D i kružnicu Ω ponovo u $E \neq A$. Prava kroz D paralelna sa BC siječe pravu BE u L. Označimo opisanu kružnicu trougla BDL sa ω. Neka se ω i Ω sijeku ponovo u $P \neq B$. Dokazati da se tačka presjeka tangente na ω u P i prave BS nalazi na unutrašnjoj simetrali ugla $\angle BAC$.

Zadatak 3. Za svaki prirodni broj $k \geqslant 2$, odrediti sve beskonačne nizove prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ za koje postoji polinom P oblika $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, pri čemu su $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nenegativni cijeli brojevi, takav da vrijedi

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

za svaki prirodan broj $n \geqslant 1$.

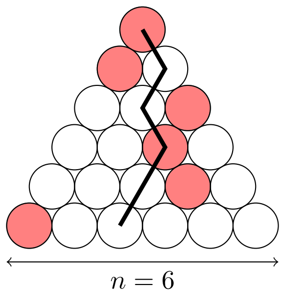
nedjelja, 9. juli 2023

Zadatak 4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ po parovima različiti, pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

cijeli broj za svako $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokazati da je $a_{2023} \geqslant 3034$.

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. *Japanski trougao* sastoji se od $1 + 2 + \cdots + n$ krugova raspoređenih u oblik jednakostraničnog trougla tako da za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, i-ti red sadrži tačno i krugova, od kojih je tačno jedan obojen u crveno. *Nindža put* u nekom japanskom trouglu je niz od n krugova koji se dobija na sljedeći način: počinjemo u krugu u prvom redu, a u svakom narednom koraku krećemo se iz trenutnog kruga u neki od dva kruga koji se nalaze direktno ispod trenutnog kruga i završavamo kada dođemo u zadnji red. Ispod je dat primjer jednog japanskog trougla za $n = 6$, zajedno sa jednim nindža putem u tom trouglu koji sadrži dva crvena kruga.



U zavisnosti od n, odrediti najveće k takvo da u svakom japanskom trouglu postoji nindža put koji sadrži bar k crvenih krugova.

Zadatak 6. Neka je ABC jednakostraničan trougao. Neka su A_1, B_1, C_1 tačke u unutrašnjosti trougla ABC takve da vrijedi $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ i

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°.$$

Neka se prave BC_1 i CB_1 sijeku u A_2, prave CA_1 i AC_1 u B_2, a prave AB_1 i BA_1 u C_2.
Dokazati da ako je trougao $A_1B_1C_1$ raznostraničan, onda tri opisane kružnice trouglova AA_1A_2, BB_1B_2 i CC_1C_2 prolaze kroz dvije zajedničke tačke.

Language: Bosnian

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.