

2009年7月15日, 星期三

1. 设  $n$  是一个正整数,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) 是集合  $\{1, \dots, n\}$  中的互不相同的整数, 使得对于  $i = 1, \dots, k-1$ , 都有  $n$  整除  $a_i(a_{i+1}-1)$ . 证明:  $n$  不整除  $a_k(a_1-1)$ .

2. 设  $O$  是三角形  $ABC$  的外心. 点  $P$  和  $Q$  分别是边  $CA$  和  $AB$  的内点. 设  $K, L$  和  $M$  分别是线段  $BP, CQ$  和  $PQ$  的中点,  $\Gamma$  是过点  $K, L$  和  $M$  的圆. 若直线  $PQ$  与圆  $\Gamma$  相切, 证明:  $OP = OQ$ .

3. 设  $s_1, s_2, s_3, \dots$  是一个严格递增的正整数数列, 使得它的两个子数列

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{和} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

都是等差数列. 证明: 数列  $s_1, s_2, s_3, \dots$  本身也是一个等差数列.

2009年7月16日, 星期四

4. 在三角形  $ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle CAB$  和  $\angle ABC$  的内角平分线分别与边  $BC$  和  $CA$  相交于点  $D$  和  $E$ . 设  $K$  是三角形  $ADC$  的内心. 若  $\angle BEK = 45^\circ$ , 求  $\angle CAB$  所有可能的值.

5. 求所有从正整数集到正整数集上的满足如下条件的函数  $f$ : 对所有正整数  $a$  和  $b$ , 都存在一个以

$$a, f(b) \text{ 和 } f(b + f(a) - 1)$$

为三边长的非退化三角形.

(称一个三角形为非退化三角形是指它的三个顶点不共线.)

6. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是互不相同的正整数.  $M$  是有  $n-1$  个元素的正整数集, 且不含数  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . 一只蚱蜢沿着实数轴从原点 0 开始向右跳跃  $n$  步, 它的跳跃距离是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的某个排列. 证明: 可以选择一种排列, 使得蚱蜢跳跃落下的点所表示的数都不在集  $M$  中.