



Croatian (hrv), day 1

ponedjeljak, 11. srpnja 2022.

Zadatak 1. Banka u Oslu izdaje dvije vrste kovanica: aluminijске (označene slovom A) i brončane (označene slovom B). Vlatko ima n aluminijskih i n brončanih kovanica, poredanih u niz slijeva na desno u nekom poretku. *Lanac* je bilo koji podniz uzastopnih kovanica iste vrste. Za dani prirodni broj $k \leq 2n$, Vlatko ponavlja sljedeći potez: pronalazi najdulji lanac koji sadrži k -tu kovanicu slijeva i premješta sve kovanice u tom lancu na lijevi kraj niza. Na primjer, ako je $n = 4$ i $k = 4$, proces koji počinje poretkom $AABBABA$ je

$$AABBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots .$$

Odredi sve parove (n, k) , pri čemu je $1 \leq k \leq 2n$, takve da za svaki početni poredak, u nekom trenutku tijekom procesa, prvih n kovanica na lijevom kraju niza bude iste vrste.

Zadatak 2. Neka \mathbb{R}^+ označava skup pozitivnih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ postoji točno jedan $y \in \mathbb{R}^+$ za koji vrijedi

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Zadatak 3. Neka je k prirodni broj i neka je S konačan skup neparnih prostih brojeva. Dokaži da postoji najviše jedan raspored (do na rotacije i refleksije) elemenata skupa S ukrug tako da umnožak bilo koja dva susjedna broja ima oblik $x^2 + x + k$ za neki prirodni broj x .



Croatian (hrv), day 2

utorak, 12. srpnja 2022.

Zadatak 4. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut takav da vrijedi $|BC| = |DE|$, te točka T unutar $ABCDE$ takva da vrijedi $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ i $\angle ABT = \angle TEA$. Pravac AB siječe pravce CD i CT u točkama P i Q , redom, pri čemu točke P, B, A, Q leže na pravcu u tom poretku. Pravac AE siječe pravce CD i DT u točkama R i S , redom, pri čemu točke R, E, A, S leže na pravcu u tom poretku. Dokaži da točke P, S, Q, R leže na jednoj kružnici.

Zadatak 5. Odredi sve trojke (a, b, p) prirodnih brojeva takvih da je p prost broj i vrijedi

$$a^p = b! + p.$$

Zadatak 6. Neka je n prirodni broj. *Nordijski kvadrat* je tablica $n \times n$ u čija polja su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da svako polje sadrži točno jedan broj. Dva polja smatramo susjednima ako imaju zajedničku stranicu. Svako polje susjedno samo poljima koja sadrže veće brojeve nazivamo *dol*. *Uspon* je niz od jednog ili više polja takav da vrijedi:

- (i) prvo polje u nizu je dol,
- (ii) svaka dva uzastopna polja u nizu su susjedna, i
- (iii) brojevi upisani u polja u nizu su u rastućem poretku.

Odredi, u ovisnosti o n , najmanju moguću vrijednost ukupnog broja uspona u nordijskom kvadratu.