Language: **Georgian**

Day: **1**

ოთხშაბათი, 15 ივლისი, 2009

ამოცანა 1. მოცემულია ნატურალური რიცხვი n და $\{1, \ldots, n\}$ სიმრავლიდან ისეთი $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ წყვილწყვილად განსხვავებული რიცხვები, რომ ყოველი $i = 1, \ldots, (k-1)$ –თვის რიცხვი $a_i(a_{i+1}-1)$ იყოფა n-ზე.
დაამტკიცეთ, რომ $a_k(a_1-1)$ არ იყოფა n-ზე.

ამოცანა 2. ვთქვათ, O არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. P და Q არიან, შესაბამისად, CA და AB გვერდების შიგა წერტილები, ხოლო K, L და M არიან, შესაბამისად, BP, CQ, და PQ მონაკვეთების შუა წერტილები. ვთქვათ, Γ არის წრეწირი, რომელიც გადის K, L და M წერტილებზე.
დაამტკიცეთ, რომ თუ PQ წრფე არის Γ წრეწირის მხები, მაშინ $OP = OQ$.

ამოცანა 3. მოცემულია ნატურალური რიცხვების მკაცრად ზრდადი ისეთი $s_1, s_2, s_3, \ldots$ მიმდევრობა, რომ შემდეგი ორი

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{და} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

ქვემიმდევრობებიდან თითოეული არის არითმეტიკული პროგრესია.
დაამტკიცეთ, რომ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ მიმდევრობა ასევე არის არითმეტიკული პროგრესია.

მუშაობის დრო: 4 საათი და 30 წუთი.
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით.

ხუთშაბათი, 16 ივლისი, 2009

ამოცანა 4. ABC სამკუთხედში $AB = AC$. CAB და ABC კუთხეების ბისექტრისები BC და CA გვერდებს კვეთენ, შესაბამისად, D და E წერტილებში. K არის ADC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. ვთქვათ, $\angle BEK = 45°$.
იპოვეთ CAB კუთხის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოცანა 5. იპოვეთ ყველა ისეთი $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ფუნქცია (ანუ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე და ღებულობს ნატურალურ მნიშვნელობებს), რომ ნებისმიერი a და b ნატურალური რიცხვებისათვის არსებობს არაგადაგვარებული სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია

$$a, \ f(b) \text{ და } f(b + f(a) - 1)$$

რიცხვები. (სამკუთხედს ეწოდება არაგადაგვარებული, თუ მისი წვეროები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე.)

ამოცანა 6. მოცემულია $a_1, a_2, \ldots, a_n$ წყვილწყვილად განსხვავებული ნატურალური რიცხვები და აგრეთვე $n-1$ ცალი ნატურალური რიცხვისაგან შედგენილი M სიმრავლე. ცნობილია, რომ $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ არ ეკუთვნის M სიმრავლეს. კალია იწყებს წერტილიდან, რომლის კოორდინატია 0 და აკეთებს n ცალ ნახტომს რიცხვით ღერძზე მარჯვნივ. კალიის ნახტომების სიგრძეებია $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვები აღებული გარკვეული თანამიმდევრობით. დაამტკიცეთ, რომ ეს თანამიმდევრობა შეიძლება არჩეული იქნას ისე, რომ კალია არ დახტეს წერტილში, რომლის კოორდინატი იქნება რიცხვი M სიმრავლიდან.

მუშაობის დრო: 4 საათი და 30 წუთი.
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით.