2025 оны 7-р сарын 15, Мягмар

Бодлого 1. Хавтгайн x-тэнхлэг, y-тэнхлэг болон $x + y = 0$ шулуунуудын алинтай нь ч параллел **биш** шулууныг *нарлаг* гэе.

$n \geqslant 3$ бүхэл тоо өгөгдөв. Дараах хоёр нөхцөлийг зэрэг хангах n ялгаатай шулуун оршин байдаг бүх сөрөг биш бүхэл k тоог ол.

- $a + b \leqslant n + 1$ байдаг бүх a, b натурал тоонуудын хувьд, (a, b) цэг n шулууны ядаж нэг дээр оршдог;
- n шулууны яг k ширхэг нь нарлаг байдаг.

Бодлого 2. M цэгт төвтэй Ω тойрог ба N цэгт төвтэй Γ тойрог өгөгдсөн ба Ω тойргийн радиус Γ тойргийн радиусаас бага байв. Ω, Γ тойргууд ялгаатай A, B цэгүүдэд огтлолцоно. MN шулуун Ω тойрогтой C цэгт, Γ тойрогтой D цэгт огтлолцох ба C, M, N, D цэгүүд шулуун дээр энэ дарааллаараа байрлана. ACD гурвалжныг багтаасан тойргийг төвийг P гэе. AP шулуун Ω тойрогтой дахин $E \neq A$ цэгт, Γ тойрогтой дахин $F \neq A$ цэгт огтлолцоно. PMN гурвалжны орто төвийг H гэе.

H цэгийг дайрсан AP-тэй параллел шулуун BEF гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

(Гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг уг гурвалжны *орто төв* гэдэг.)

Бодлого 3. Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. Дурын a, b натурал тоонуудын хувьд

$$f(a) \text{ тоо } b^a - f(b)^{f(a)} \text{ тоог хуваадаг}$$

бол $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ функцийг *саак* гэе.

Бүх f саак функц ба бүх n натурал тооны хувьд $f(n) \leqslant cn$ байдаг хамгийн бага бодит c тоог ол.

2025 оны 7-р сарын 16, Лхагва

Бодлого 4. Натурал тооны өөрөөс нь ялгаатай натурал тоон хуваагчийг *жинхэнэ хуваагч* гэнэ.

$a_1, a_2, \ldots$ натурал тоон, төгсгөлгүй дарааллын гишүүн бүр ядаж гурван жинхэнэ хуваагчтай ба дурын $n \geqslant 1$ хувьд a_n тооны хамгийн их гурван жинхэнэ хуваагчийн нийлбэр a_{n+1} байв.

a_1 гишүүний авч болох бүх боломжит утгыг ол.

Бодлого 5. $\lambda > 0$ гэе. Ану, Базар хоёр λ-аас хамаарсан дүрэмтэй дараах тоглоом тоглож байгаа ба хоёулаа λ-ийн утгыг мэднэ. Тоглоомын $n \geqslant 1$ дүгээр ээлжид:

- n сондгой үед Ану x_n сөрөг биш бодит тоог

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n$$

  байхаар сонгоно.

- n тэгш үед Базар x_n сөрөг биш бодит тоог

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n$$

  байхаар сонгоно.

Хэрэв тоглогч ээлжин дээрээ нөхцөл хангах x_n тоо сонгож чадахгүй бол тоглоом дуусах ба нөгөө тоглогч хожно. Тоглоом төгсгөлгүй үргэлжилбэл хэн нь ч хожихгүй. Тоглогчид сонгогдсон тоонуудыг мэдэж байгаа гэж үзнэ.

Ану хожих стратегитай байх бүх λ тооны утгыг ол. Мөн Базар хожих стратегитай байх бүх λ тооны утгыг ол.

Бодлого 6. Нэгж нүднүүдээс тогтох 2025×2025 хэмжээтэй хөлөг авч үзье. Номин хөлөг дээр тэгш өнцөгт хавтангуудыг, талууд нь хөлгийн нүднүүдийг хиллэсэн шулуунууд дээр орших бөгөөд нүд бүр ихдээ нэг хавтангаар хучигдсан байхаар байрлуулахыг хүсчээ. Энд хавтангууд өөр өөр урт, өргөнтэй байж болно.

Хүснэгтийн мөр ба багана бүрд ямар ч хавтангаар хучигдаагүй яг нэг нүд үлдсэн байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн хавтан байрлуулж болох вэ?