

יום שלישי, 15 ביולי 2025

שאלה 1. ישר במישור ייקרא **שמישי** אם הוא לא מקביל לציר ה- x , לציר ה- y , או לישר $x + y = 0$. נתון $n \geq 3$ שלם. מצאו את כל השלמים האי-שליליים k עבורם קיימים n ישרים שונים במישור אשר מקיימים את שתי התכונות הבאות:

- לכל זוג שלמים חיוביים a ו- b המקיימים $a + b \leq n + 1$, הנקודה (a, b) נמצאת על לפחות אחד מהישרים; וגם
- בדיוק k מתוך n הישרים הם שמישיים.

שאלה 2. יהיו Ω ו- Γ מעגלים עם מרכזים M ו- N בהתאמה, עבורם הרדיוס של Ω קטן מהרדיוס של Γ . נתון כי המעגלים Ω ו- Γ נחתכים בשתי נקודות שונות A ו- B . נסמן ב- C וב- D נקודות חיתוך של הישר MN עם המעגלים Ω ו- Γ בהתאמה, כך שהנקודות C, M, N, D נמצאות על הישר בסדר הזה. נסמן ב- P את מרכז המעגל החוסם של המשולש ACD . הישר AP פוגש את Ω בשנית בנקודה E השונה מ- A , ופוגש את Γ בשנית בנקודה F השונה מ- A . נסמן ב- H את מפגש הגבהים במשולש PMN . הוכיחו כי הישר דרך H אשר מקביל ל- AP משיק למעגל החוסם של המשולש BEF .

שאלה 3. נסמן ב- \mathbb{N} את קבוצת השלמים החיוביים. פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ תקרא **בונזה** אם

$$f(a) \text{ מחלק את } b^a - f(b)^{f(a)}$$

לכל זוג שלמים חיוביים a ו- b .

מצאו את המספר הממשי הקטן ביותר c עבורו מתקיים $f(n) \leq cn$ לכל פונקציה בונזה f ולכל שלם חיובי n .

יום רביעי, 16 ביולי 2025

שאלה 4. מחלק תקני של שלם חיובי N הינו מחלק חיובי של N אשר שונה מ- N עצמו.

בסדרה אינסופית של שלמים חיוביים a_1, a_2, \dots מתקיים שלכל איבר יש לפחות שלושה מחלקים תקינים. לכל $n \geq 1$ שלם מתקיים ש- a_{n+1} שווה לסכום של שלושת המחלקים התקינים הגדולים ביותר של a_n .

מצאו את כל הערכים האפשריים של a_1 .

שאלה 5. איילה וברוון משחקים במשחק האי-שיומבט, שחוקיו תלויים במספר ממשי חיובי λ אשר ידוע לשני השחקנים. לכל $n \geq 1$, בתור ה- n של המשחק מתבצעת אחת משתי הפעולות הבאות:

- אם n אי-זוגי, איילה בוחרת מספר ממשי אי-שלילי x_n כך שמתקיים

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n$$

- אם n זוגי, ברוון בוחר מספר ממשי אי-שלילי x_n כך שמתקיים

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$$

אם שחקן כלשהו לא מסוגל לבחור x_n כנדרש, המשחק מסתיים והשחקן השני מנצח. אם המשחק נמשך לנצח, אף שחקן לא מנצח. כל המספרים הנבחרים ידועים לשני השחקנים.

מצאו את כל הערכים של λ עבורם לאיילה יש אסטרטגיה מנצחת, ואת כל הערכים עבורם לברוון יש אסטרטגיה מנצחת.

שאלה 6. נתון לוח משבצות בגודל 2025×2025 . היקף הלוח והקווים אשר מפרידים בין המשבצות יקראו קווי הרשת. מטילדה רוצה לרצף חלק מהלוח באריחים מלבניים, אולי בגדלים שונים, כך שכל צלעות האריחים מונחות על קווי הרשת וכל משבצת מכוסה על ידי אריח אחד לכל היותר.

מצאו את הכמות הקטנה ביותר האפשרית של אריחים שמטילדה תצטרך למקם, כך שבכל שורה ובכל עמודה של הלוח תהיה משבצת אחת בדיוק אשר אינה מכוסה על ידי אף אריח.