

Вторник, 18 юли, 2017

**Задача 1.** За всяко цяло число  $a_0 > 1$ , дефинираме редицата  $a_0, a_1, a_2, \dots$  по следното правило:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число,} \\ a_n + 3 & \text{в противен случай,} \end{cases} \quad \text{за всяко } n \geq 0.$$

Да се намерят всички стойности на  $a_0$ , за които съществува число  $A$  такова, че  $a_n = A$  за безбройно много стойности на  $n$ .

**Задача 2.** Нека  $\mathbb{R}$  е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такива, че за всеки две реални числа  $x$  и  $y$  е изпълнено равенството

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

**Задача 3.** Ловец и невидим заек играят в равнината следната игра. Началната точка  $A_0$  на заека и началната точка  $B_0$  на ловеца съвпадат. Нека след  $n-1$  рунда на играта заекът се намира в точка  $A_{n-1}$ , а ловецът се намира в точка  $B_{n-1}$ . Тогава в  $n$ -я рунд на играта последователно се изпълняват следните три действия:

- (i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка  $A_n$ , за която разстоянието между  $A_{n-1}$  и  $A_n$  е точно 1.
- (ii) Проследяващо устройство докладва някаква точка  $P_n$  на ловеца, като гарантира единствено това, че разстоянието между точките  $P_n$  и  $A_n$  е най-много 1.
- (iii) Ловецът, оставайки видим, се придвижва до точка  $B_n$ , за която разстоянието между  $B_{n-1}$  и  $B_n$  е точно 1.

Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен, че след  $10^9$  рунда разстоянието между него и заека е най-много 100?

Сряда, 19 юли, 2017

**Задача 4.** Нека  $R$  и  $S$  са различни точки от окръжността  $\Omega$ , като  $RS$  не е диаметър. Правата  $\ell$  се допира до  $\Omega$  в точка  $R$ . Точка  $T$  е такава, че  $S$  е средата на отсечката  $RT$ . Точка  $J$  е избрана върху малката дъга  $RS$  на  $\Omega$  така, че описаната около триъгълник  $JST$  окръжност  $\Gamma$  пресича  $\ell$  в две различни точки. Нека  $A$  е пресечната точка на  $\Gamma$  и  $\ell$ , която е по-близка до  $R$ . Правата  $AJ$  пресича  $\Omega$  за втори път в точка  $K$ . Да се докаже, че правата  $KT$  се допира до окръжността  $\Gamma$ .

**Задача 5.** Дадено е естествено число  $N \geq 2$ . Група от  $N(N+1)$  футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, е подредена в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата  $N(N-1)$  играчи така, че за оставащата редица от  $2N$  играчи да са изпълнени следните  $N$  условия:

- (1) няма играч между двамата най-високи,
- (2) няма играч между третия и четвъртия по височина,
- $\vdots$
- ( $N$ ) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това винаги е възможно.

**Задача 6.** Наредената двойка  $(x, y)$  от цели числа е *примитивна*, ако най-големият общ делител на  $x$  и  $y$  е равен на 1. Дадено е крайно множество  $S$  от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число  $n$  и цели числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , такива, че за всяка двойка  $(x, y)$  от  $S$  е изпълнено равенството

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$