måndag, 19 juli 2021

Problem 1. Låt $n \geqslant 100$ vara ett heltal. Victor skriver talen $n, n+1, \ldots, 2n$ på var sitt kort. Sen blandar han dessa $n+1$ kort, och delar upp dem i två högar. Visa att åtminstone en av högarna innehåller två kort så att summan av talen på dem är en kvadrat.

Problem 2. Visa att olikheten

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

gäller för alla reella tal $x_1, \ldots, x_n$.

Problem 3. I den spetsvinkliga triangeln ABC är $AB > AC$. Låt D vara en punkt inne i triangeln ABC sådan att $\angle DAB = \angle CAD$. För punkten E på linjesegmentet AC gäller $\angle ADE = \angle BCD$, för punkten F på linjesegmentet AB gäller $\angle FDA = \angle DBC$, och för punkten X på linjen AC gäller $CX = BX$. Låt O_1 och O_2 vara medelpunkter för de omskrivna cirklarna till trianglarna ADC respektive EXD. Visa att linjerna BC, EF och O_1O_2 skär varandra i en punkt.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

tisdag, 20 juli 2021

Problem 4. Låt Γ vara en cirkel med medelpunkt I, och låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning sådan att vart och ett av segmenten AB, BC, CD och DA tangerar Γ. Låt Ω vara den omskrivna cirkeln till triangeln AIC. Förlängningen av BA skär Ω i punkten X sådan att A ligger mellan B och X. Förlängningen av BC skär Ω i punkten Z sådan att C ligger mellan B och Z. Förlängningarna av AD och CD skär Ω i punkterna Y respektive T, som är sådana att D ligger mellan A och Y respektive C och T. Visa att

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problem 5. Två ekorrar, Piff och Puff, har samlat 2021 valnötter inför vintern. Piff numrerar valnötterna från 1 till 2021 och gräver 2021 små hål i en cirkel i marken runt deras favoritträd. Nästa morgon märker Piff att Puff placerat en valnöt i varje hål, men utan att ta någon som helst hänsyn till hur de är numrerade. Missnöjd med detta bestämmer sig Piff för att byta plats på några av valnötterna genom att göra 2021 drag. I drag k byter Piff plats på de två valnötter som ligger bredvid valnöt nummer k. Visa att det finns något k så att Piff i drag k bytte plats på två valnötter a och b sådana $a < k < b$.

Problem 6. Låt $m \geqslant 2$ vara ett heltal och A en ändlig mängd av (inte nödvändigtvis positiva) heltal. Låt $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ vara delmängder av A. Antag att för varje $k = 1, 2, \ldots, m$ så är summan av talen i B_k exakt m^k. Visa att A innehåller minst $m/2$ element.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.