الثلاثاء 16 جويليه 2024

مسألة 1. حدّد كلّ الأعداد الحقيقة α التي تحقّق، لكلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد الصحيح

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

مضاعف لـ n. (نرمز بـ $\lfloor z \rfloor$ لأكبر عدد صحيح اصغر من او يساوي z. مثلا ، $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ و $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$).

مسألة 2. حدّد كل الثّنائيات (a, b) من الأعداد الطّبيعية غير المعدومة ، التي من أجلها يوجد عددان طبيعيان غير معدومين g و N يحققان

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

لكلّ عدد طبيعي $n \geqslant N$. (نرمز بـ $\gcd(x, y)$ إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين الصّحيحين x و y).

مسألة 3. لتكن $a_1, a_2, a_3 \ldots$ متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية غير المعدومة، وليكن N عدداً طبيعيّاً غير معدوم. نفرض أنّ لكلّ $n > N$ ، a_n يساوي عدد مرات ظهور العدد a_{n-1} في القائمة $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.
أثبت أنّ على الأقل إِحدى المتتاليتين $a_1, a_3, a_5, \ldots$ و $a_2, a_4, a_6, \ldots$ دوريّة ابتداءا من رتبة معيّنة.
(نقول عن متتالية غير منتهية $b_1, b_2, b_3, \ldots$ انّها دوريّة ابتداءا من رتبة معيّنة إذا وُجِد عددان طبيعيان غير معدومين p و M بحيث يكون $b_{m+p} = b_m$ لكلّ $m \geqslant M$).

الأربعاء 17 جويليه 2024

مسألة 4. ليكن ABC مثلثاً بحيث $AB < AC < BC$. لتكن ω الدّائرة المحاطة بالمثلث ABC و I مركزها. لتكن X النّقطة من المستقيم (BC) المختلفة عن C بحيث يكون المستقيم المّار بالنقطة X والموازي للمستقيم (AC) مماساً للدائرة ω. بالمثل، لتكن Y النقطة من المستقيم (BC) المختلفة عن B بحيث يكون المستقيم المّار بالنقطة Y والموازي للمستقيم (AB) مماساً للدّائرة ω. يقطع المستقيم (AI) الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC مرّة ثانية في النّقطة $P \neq A$. لتكن K و L منتصفي $[AC]$ و $[AB]$، على التّرتيب. أثبت أنّ $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

مسألة 5. يلعب الحلزون سريع لعبة على رقعة مؤلفة من 2024 صفاً و2023 عموداً. هناك وحوشٌ مخفيّة في 2022 خلية من خلايا الرقعة. في البداية، لا يعرف سريع أماكن وجود الوحوش، ولكنه يعلم أنّه يوجد بالضّبط وحشٌ واحدٌ فقط في كلّ صف باستثناء الصّفين الأوّل والأخير، وأنّ كلّ عمود يحوي وحشاً واحداً على الأكثر. يقوم سريع بعدّة محاولات لينتقل من الصّف الأوّل إلى الصّف الأخير. في كلّ محاولة يبدأ من خليّة يختارها من الصّف الأوّل، ثمّ ينتقل تكراراً من خليّة إلى خلية تجاورها تشترك معها بضلع. (يُسمح لسريع أثناء حركته بالعودة إلى خلية زارها سابقاً.) إذا وصل سريع إلى خلية تحوي وحشاً، تنتهي محاولته، ويرجع إلى الصّف الأوّل ليبدأ محاولة جديدة. الوحوش لا تتحرّك، وسريع يتذكّر ما إذا كانت خلية قد زارها سابقاً تحوي وحشاً أو لا. إذا وصل سريع إلى خلية في الصّف الأخير، تنتهي محاولته، وتتوقف اللعبة. حدّد أصغر قيمة لـ n التي من أجلها توجد لسريع إستراتيجية تضمن له الوصول إلى الصّف الأخير في المحاولة رقم n أو قبل ذلك، مهما كانت مواقع الوحوش على الرّقعة.

مسألة 6. لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النّاطقة. نقول عن الدّالة $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ انّها **جيّدة** إذا حقّقت الخاصّية التّالية: لكلّ $x, y \in \mathbb{Q}$، لدينا

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{أو} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

أثبت أنّه يوجد عدد صحيح c بحيث من أجل كلّ دالّة جيّدة f، المقدار $f(r) + f(-r)$ يأخذ على الأكثر c قيمة مختلفة عندما يمسح r المجموعة $\mathbb{Q}$ ، ثم جِدْ أصغر قيمة ممكنة للعدد c.