

Utorak, 23. juli, 2013.

Zadatak 1. Dokazati da za svaka dva prirodna broja k i n , postoji k pozitivnih brojeva m_1, m_2, \dots, m_k (ne obavezno različitih) takvih da vrijedi

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

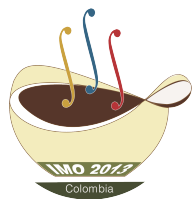
Zadatak 2. Konfiguraciju od 4027 tačaka u ravni zovemo *kolumbijskom* ako se sastoji od 2013 crvenih tačaka i 2014 plavih tačaka, pri čemu nikoje tri tačke iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravih ravan se dijeli na oblasti. Kažemo da je raspored pravih *dobar* za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uslova:

- ni jedna prava ne sadrži neku od tačaka konfiguracije;
- ni jedna oblast ne sadrži tačke različitih boja.

Naći najmanji broj k takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 tačaka, postoji dobar raspored k pravih.

Zadatak 3. Pripisana kružnica trouglu ABC naspram tjemena A dodiruje stranicu BC u tački A_1 . Analogno se definišu tačke B_1 na stranici CA i C_1 na stranici AB , kao dodirne tačke pripisanih kružnica naspram tjemena B i C , redom. Pretpostavimo da centar opisane kružnice trougla $A_1B_1C_1$ leži na opisanoj kružnici trougla ABC . Dokazati da je trougao ABC pravougli.

Pripisana kružica trougla ABC naspram tjemena A je kružnica koja dodiruje stranicu BC , produžetak stranice AB preko tačke B , i produžetak stranice AC preko tačke C . Slično se definišu pripisane kružnice naspram tjemena B i C .



Srijeda, 24. juli, 2013.

Zadatak 4. Neka je H ortocentar oštroglog trougla ABC , a W tačka na stranici BC , različita od tjemena B i C . Tačke M i N su podnožja visina iz tjemena B i C , redom. Neka je ω_1 opisana kružnica trougla BWN , a X tačka na ω_1 takva da je WX prečnik kružnice ω_1 . Analogno, neka je ω_2 opisana kružnica trougla CWM , a Y tačka na ω_2 takva da je WY prečnik kružnice ω_2 . Dokazati da su tačke X , Y i H kolinearne.

Zadatak 5. Neka je $\mathbb{Q}_{>0}$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Neka funkcija $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeća tri uslova:

- (i) za sve $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, vrijedi $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) za sve $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, vrijedi $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) postoji racionalan broj $a > 1$ takav da je $f(a) = a$.

Dokazati da je $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Zadatak 6. Dat je prirodan broj $n \geq 3$, i $n+1$ tačaka na kružnici koje je dijele na lukove jednake dužine. Posmatrajmo sva moguća označavanja ovih tačaka brojevima $0, 1, \dots, n$ tako da se svaka oznaka koristi tačno jednom; dva takva označavanja smatraju se istim ako se jedno može dobiti iz drugog rotiranjem kružnice. Označavanje se naziva *lijepim* ako, za svake četiri oznake $a < b < c < d$ za koje je $a + d = b + c$, tetiva koja spaja tačke označane sa a i d ne siječe tetivu koja spaja tačke označene sa b i c .

Neka je M broj lijepih označavanja, a N broj uređenih parova (x, y) prirodnih brojeva za koje je $x + y \leq n$ i $NZD(x, y) = 1$. Dokazati da je

$$M = N + 1.$$