Вторник, 23 юли, 2013 г.

Задача 1. Да се докаже, че за всяка двойка от естествени числа k и n съществуват k естествени числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не непременно различни) такива, че

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2. Конфигурация от 4027 точки в равнината се нарича *колумбийска*, ако тя се състои от 2013 червени точки и 2014 сини точки, като никои три точки от конфигурацията не лежат на една права. Чрез прекарване на прави равнината се разделя на части. Съвкупност от прави се нарича *добра* за колумбийска конфигурация, ако са изпълнени следните две условия:

- никоя права не минава през точка от конфигурацията;
- никоя част не съдържа точки от двата цвята.

Да се намери най-малката възможна стойност на k така, че за всяка колумбийска конфигурация от 4027 точки съществува добра съвкупност от k прави.

Задача 3. Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A се допира до страната BC в точка A_1. Точката B_1 върху страната CA и точката C_1 върху страната AB се дефинират аналогично, като се използват външновписаните окръжности съответно срещу върховете B и C. Нека центърът на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$ лежи на описаната окръжност около $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ *срещу върха A е окръжността, която се допира до страната BC, до лъча AB след B и до лъча AC след C. Външновписаните окръжности за $\triangle ABC$ срещу върховете B и C се дефинират аналогично.*

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Сряда, 24 юли, 2013 г.

Задача 4. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H и нека W е точка върху страната BC (различна от B и C). Точките M и N са петите на височините съответно от B и C. Нека ω_1 е описаната окръжност около $\triangle BWN$, а $X \in \omega_1$ е диаметрално противоположната точка на W относно ω_1. Аналогично, нека ω_2 е описаната окръжност около $\triangle CWM$, а $Y \in \omega_2$ е диаметрално противоположната точка на W относно ω_2. Да се докаже, че точките X, Y и H лежат на една права.

Задача 5. Нека $\mathbb{Q}_{>0}$ е множеството на положителните рационални числа. Нека $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ е функция, изпълняваща следните три условия:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) съществува рационално число $a > 1$ такова, че $f(a) = a$.

Да се докаже, че $f(x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Нека $n \geq 3$ е цяло число и $n+1$ точки върху окръжност образуват правилен $(n+1)$-ъгълник. Разглеждаме всички номерирания на тези точки с числата $0, 1, \ldots, n$ така, че всеки номер се използва точно един път; две такива номерирания се считат за еднакви, ако едното се получава от другото след ротация на окръжността. Едно номериране се нарича *красиво*, ако за всеки четири номера $a < b < c < d$, за които $a + d = b + c$, хордата, съединяваща точките с номера a и d, не пресича хордата, съединяваща точките с номера b и c.

Нека M е броят на красивите номерирания, а N е броят на наредените двойки (x, y) от естествени числа такива, че $x + y \leq n$ и НОД $(x, y) = 1$. Да се докаже, че

$$M = N + 1.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки