화요일, 2019년 7월 16일

문제 1. 모든 정수의 집합을 $\mathbb{Z}$라 하자. 모든 정수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 를 모두 구하여라.

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

문제 2. 삼각형 ABC의 두 변 BC, AC 위에 각각 점 A_1, B_1이 있다. 두 점 P, Q는 각각 선분 AA_1, BB_1 위에 있고 PQ는 AB와 평행하다. 점 P_1은 직선 PB_1 위에 있고 B_1은 P와 P_1 사이에 있으며 ($B_1 \neq P$, P_1), $\angle PP_1C = \angle BAC$이다. 이와 유사하게 점 Q_1은 직선 QA_1 위에 있고 A_1은 Q와 Q_1 사이에 있으며 ($A_1 \neq Q$, Q_1), $\angle CQ_1Q = \angle CBA$이다. 이때, 네 점 P, Q, P_1, Q_1이 한 원 위에 있음을 보여라.

문제 3. 한 SNS망 안에 2019명의 이용자가 있고, 그들 사이에 어떤 친구관계가 존재한다. 이용자 A가 이용자 B와 친구관계이면, B도 A와 친구관계이다. 다음과 같은 이벤트가 반복적으로 시행된다고 하자.

> 세 명의 이용자 A, B, C에 대하여 A가 B, C와 친구관계이고 B와 C는 친구관계가 아닌 경우, 다음과 같이 친구관계를 바꾼다: B와 C는 친구관계가 되도록 하고, A는 B와 친구관계가 안 되고, A는 C와도 친구관계가 안 되도록 한다. 이때, 그 외의 친구관계는 바뀌지 않는다.

처음 단계에서, 1010명의 이용자 각각은 1009명의 이용자와 친구관계이고, 나머지 1009명의 이용자 각각은 1010명의 이용자와 친구관계라 하자. 위와 같은 이벤트를 계속 시행하여, 결국에는 모든 이용자들이 각각 한 명 이하의 이용자와 친구관계가 되도록 하는 일련의 이벤트가 존재함을 보여라.

Language: Korean

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점

수요일, 2019년 7월 17일

문제 4. 다음 조건을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (k, n)을 모두 구하여라.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

문제 5. Bath은행은 한 면은 H, 반대면은 T인 동전을 발행한다. Harry는 n개의 동전을 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 늘어놓았다. 그는 다음과 같은 시행을 반복적으로 한다: 만일 이 동전 중 H가 정확히 $k(k > 0)$개가 있으면 왼쪽부터 k번째 동전을 뒤집는다. 만일 모든 동전이 모두 T이면 시행을 멈춘다. 예를 들어, $n = 3$이고 초기 놓임이 THT인 경우, 다음과 같은 3번의 시행을 한 후 멈춘다. $THT \to HHT \to HTT \to TTT$.

(a) 초기 놓임이 어떠하든, Harry는 유한 번의 뒤집는 시행을 한 후에 시행을 멈추게 됨을 보여라.

(b) 각 초기 놓임 C에 대하여, $L(C)$를 Harry가 시행을 멈추기 전까지 한 시행의 횟수라 하자. 예를 들어, $L(THT) = 3$이고 $L(TTT) = 0$이다. 2^n개의 모든 가능한 초기 놓임 C에 대하여, $L(C)$의 평균값을 구하여라.

문제 6. 예각삼각형 ABC의 내심은 I이고 $AB \neq AC$이다. 삼각형 ABC의 내접원 ω는 변 BC, CA, AB와 각각 D, E, F에서 접한다. 점 D를 지나고 EF에 수직인 직선이 ω와 또 다시 만나는 점을 R이라 하자. 직선 AR이 ω와 또 다시 만나는 점을 P라 하자. 삼각형 PCE의 외접원과 삼각형 PBF의 외접원이 만나는 점을 $Q(Q \neq P)$라 할 때, 두 직선 DI와 PQ의 교점이 A를 지나고 AI와 수직인 직선 위에 있음을 보여라.

Language: Korean

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점