



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Armenian (arm), day 1

Երեքաբթի, 16. հունիսի 2024

**Խնդիր 1.** Գտե՛ք  $\alpha$  իրական թվի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում ցանկացած  $n$  բնական թվի համար

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

բնական թիվը  $n$ -ի բազմապատիկ է:

Դիտարկում:  $\lfloor z \rfloor$ -ը  $z$ -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվն է: Օրինակ  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  և  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ :

**Խնդիր 2.** Գտե՛ք բոլոր  $(a, b)$  բնական թվերի թվազույգերը, որոնց համար գոյություն ունեն  $g$  և  $N$  բնական թվեր, որ ցանկացած  $n \geq N$  բնական թվի համար տեղի ունի

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

հավասարությունը:

Դիտարկում:  $\gcd(x, y)$ -ը  $x$  և  $y$  թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:

**Խնդիր 3.** Դիցուք  $a_1, a_2, a_3, \dots$  բնական թվերի անվերջ հաջորդականություն է և  $N$ -ը բնական թիվ է: Դիցուք ցանկացած  $n > N$  բնական թվի համար  $a_n$ -ը հավասար է  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  հաջորդականությունում  $a_{n-1}$ -ին հավասար անդամների քանակին: Ապացուցե՛ք, որ  $a_1, a_3, a_5, \dots$  և  $a_2, a_4, a_6, \dots$  հաջորդականություններից գոնե մեկն ի վերջո պարբերական է:

Դիտարկում:  $b_1, b_2, b_3, \dots$  հաջորդականությունն ի վերջո պարբերական է, եթե գոյություն ունեն  $p$  և  $M$  բնական թվեր, որ ցանկացած  $m \geq M$  բնական թվի համար տեղի ունի  $b_{m+p} = b_m$  հավասարությունը:



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Armenian (arm), day 2

Չորեքշաբթի, 17. հունիսի 2024

**Խնդիր 4.** Դիցուք  $ABC$  եռանկյունում  $AB < AC < BC$ : Դիցուք  $\omega$ -ն  $ABC$  եռանկյանը ներգծած շրջանագիծն է, իսկ  $I$ -ն  $\omega$ -ի կենտրոնն է: Դիցուք  $X$ -ը  $BC$  ուղղի վրա  $C$ -ից տարբեր այնպիսի կետ է, որ  $X$  կետից  $AC$ -ին տարված զուգահեռ ուղղիղը շոշափում է  $\omega$ -ն: Նույն կերպ  $Y$ -ը  $BC$  ուղղի վրա  $B$ -ից տարբեր այնպիսի կետ է, որ  $Y$  կետից  $AB$ -ին տարված զուգահեռ ուղղիղը շոշափում է  $\omega$ -ն: Դիցուք  $AI$ -ն  $ABC$  եռանկյան արտագծած շրջանագիծը կրկին հատում է  $P \neq A$  կետում: Դիցուք  $K$  և  $L$  կետերը համապատասխանաբար  $AC$  և  $AB$  հատվածների միջևակետերն են: Ապացուցե՛ք, որ  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ :

**Խնդիր 5.** 2024 տող և 2023 սյունակ ունեցող տախտակի վրա Արտենը խաղում է հետևյալ խաղը: Տախտակի 2022 վանդակներում թաքնված են հրեշներ: Ի սկզբանե Արտենը չգիտի հրեշները դիրքերը, բայց գիտի, որ բացի առաջին և վերջին տողերից մնացած բոլոր տողերում կա մեկական հրեշ և յուրաքանչյուր սյունակում կա ոչ ավելի քան մեկ հրեշ:

Արտենը ցանկանում է առաջին տողից հասնել վերջին տող՝ կատարելով փորձեր: Յուրաքանչյուր փորձում նա առաջին տողից ընտրում է մեկ վանդակ, որից հետո կատարում է հաջորդական քայլեր, մի վանդակից գնալով ընդհանուր կողմ ունեցող հարևան վանդակ (թույլատրվում է վերադառնալ արդեն այցելած վանդակներ): Եթե Արտենը հայտնվում է հրեշով վանդակում, ապա փորձն ավարտվում է անհաջող և նա վերադառնում է առաջին տող՝ նոր փորձ անելու: Հրեշները տեղաշարժվել չեն կարող, իսկ Արտենը հիշում է, թե իր այցելած վանդակներից որոնցում հրեշ կար: Եթե Արտենը հասնում է վերջին տողից ինչ որ վանդակ, ապա փորձը համարվում է հաջողված և խաղը ավարտվում է:

Գտե՛ք  $n$ -ի ամենափոքր հնարավոր արժեքը, որի դեպքում Արտենը կարող է մշակել այնպիսի մարտավարություն, որ անկախ հրեշների դասավորությունից կարողանա առավելագույնը  $n$  փորձով հասնել վերջին տող ու խաղը ավարտել:

**Խնդիր 6.** Դիցուք  $\mathbb{Q}$ -ն ռացիոնալ թվերի բազմությունն է:  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  ֆունկցիան կոչվում է մաթեմյան, եթե ցանկացած  $x, y \in \mathbb{Q}$  թվերի համար

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{կամ} \quad f(f(x) + y) = x + f(y):$$

Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի  $c$  բնական թիվ, որ ցանկացած  $f$  մաթեմյան ֆունկցիայի համար  $f(r) + f(-r)$  տիպի արտահայտություններն ընդունում են ոչ ավելի քան  $c$  տարբեր ռացիոնալ արժեքներ և գտե՛ք այդ պայմանին բավարարող  $c$ -ի փոքրագույն հնարավոր արժեքը:

Language: Armenian

Աշխատաժամանակ՝ 4 ժամ 30 րոպե. Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր.