e shtunë, 8. korrik 2023

Detyra 1. Caktoni të gjithë numrat e plotë të përbërë $n > 1$ që plotësojnë vetinë vijuese: nëse $d_1, d_2, \ldots, d_k$ janë të gjithë pjestuesit pozitivë të n ku $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, atëherë d_i e plotpjesëton $d_{i+1} + d_{i+2}$ për çdo $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Detyra 2. Le të jetë ABC trekëndësh këndngushtë ashtu që $AB < AC$. Le të jetë Ω rrethi i jashtëshkruar në trekëndëshin ABC. Le të jetë S pika e mesit të harkut CB të Ω që përmban A. Normalja nga A në BC e takon BS në D si dhe e takon Ω sërish në $E \neq A$. Drejtëza që kalon në pikën D paralel me BC e takon drejtëzën BE në L. Le të shënojmë rrethin e jashtëshkruar në trekëndëshin BDL me ω. Rrethi ω le të takojë sërish rrethin Ω në $P \neq B$.
Tregoni se tangjentja e ω në P e takon drejtëzën BS në një pikë të simetrales së brendshme të këndit $\angle BAC$.

Detyra 3. Për çdo numër të plotë $k \geqslant 2$, caktoni të gjitha vargjet e pafundme të numrave të plotë pozitivë $a_1, a_2, \ldots$ për të cilët ekziston një polinom P i formës $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, ku $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ janë numra të plotë jonegativë, ashtu që

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

për çdo numër të plotë $n \geqslant 1$.

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.

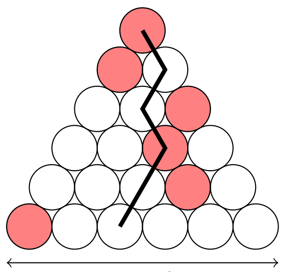
e diel, 9. korrik 2023

Detyra 4. Le të jenë $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ numra realë pozitivë çdo dy nga të cilët janë të ndryshëm mes vete, ashtu që

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

është numër i plotë për çdo $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Tregoni se $a_{2023} \geqslant 3034$.

Detyra 5. Le të jetë n numër i plotë pozitiv. *Trekëndëshi japonez* përbëhet nga $1 + 2 + \cdots + n$ rrathë të vendosur në një formë trekëndore barabrinjëse ashtu që për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$, rreshti $i^{\text{të}}$ përmban saktësisht i rrathë, nga të cilët saktësisht njëri është me ngjyrë të kuqe. *Rrugë e ninxhës* në një trekëndësh japonez është vargu i n rrathëve që merret duke filluar nga rreshti i sipërm, duke vazhduar në mënyrë të përsëritur nga një rreth në njërin nga dy rrathët që ndodhen menjëherë poshtë tij dhe duke përfunduar në rreshtin e poshtëm në fund. Në vijim keni një shembull të një trekëndëshi japonez për $n = 6$, së bashku me një rrugë të ninxhës në atë trekëndësh që përmban dy rrathë të kuq.



$n = 6$

Në varësi të n, caktoni numrin më të madh k të tillë që në çdo trekëndësh japonez ekziston një rrugë e ninxhës që përmban së paku k rrathë të kuq.

Detyra 6. Le të jetë ABC trekëndësh barabrinjës. Le të jenë A_1, B_1, C_1 pika të brendshme të ABC ashtu që $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, dhe

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

BC_1 dhe CB_1 priten në A_2, CA_1 dhe AC_1 priten në B_2, dhe AB_1 dhe BA_1 priten në C_2.
Tregoni se nëse trekëndëshi $A_1B_1C_1$ është brinjëndryshëm, atëherë të tre rrathët e jashtëshkruar në trekëndëshat AA_1A_2, BB_1B_2 dhe CC_1C_2 kalojnë nëpër dy pika të përbashkëta.

(Shënim: Trekëndëshi është brinjëndryshëm nëse çdo dy brinjë kanë gjatësi të ndryshme.)

Language: Albanian (Kosovo)

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.