

월요일, 2016년 7월 11일

**문제 1.** 삼각형  $BCF$ 의 각  $B$ 는 직각이다. 점  $A$ 는 직선  $CF$  위의 점으로서  $FA = FB$ 이고,  $F$ 는  $A$ 와  $C$  사이에 있다. 점  $D$ 는  $DA = DC$ 를 만족하며,  $AC$ 는  $\angle DAB$ 의 이등분선이다. 점  $E$ 는  $EA = ED$ 를 만족하며,  $AD$ 는  $\angle EAC$ 의 이등분선이다.  $CF$ 의 중점을  $M$ 이라 하고,  $X$ 를 사각형  $AMXE$ 가 평행사변형이 되도록 하는 점이라 하자(단,  $AM \parallel EX$ 이고  $AE \parallel MX$ ). 세 직선  $BD$ ,  $FX$ ,  $ME$ 가 한 점에서 만남을 보여라.

**문제 2.**  $n \times n$  체스판이 있다. 이 체스판의 각각의 칸에 세 글자  $I, M, O$  중 하나 씩을 다음 조건을 모두 만족하도록 써 넣으려 한다. 이것이 가능한 양의 정수  $n$ 을 모두 구하여라.

- 각 행과 각 열에 있는 칸 중 삼분의 일은  $I$ 이고, 삼분의 일은  $M$ 이고, 삼분의 일은  $O$ 이다;
- 칸의 개수가 3의 배수가 되는 대각선에 대해서는 칸의 삼분의 일은  $I$ 이고, 삼분의 일은  $M$ 이고, 삼분의 일은  $O$ 이다

**참고:**  $n \times n$  체스판의 각각의 행과 열에는 1부터  $n$ 까지의 번호가 순서대로 매겨져 있다. 따라서 각 칸마다 양의 정수의 순서쌍  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ 이 대응된다.  $n > 1$ 에 대하여, 체스판의 대각선은 두가지 유형으로 총  $4n - 2$ 개가 있다. 첫번째 유형은  $i + j$ 가 일정한  $(i, j)$ -칸들로 이루어진 것이고, 두번째 유형은  $i - j$ 가 일정한  $(i, j)$ -칸들로 이루어진 것이다.

**문제 3.** 평면에 볼록다각형  $P = A_1A_2 \dots A_k$ 가 있다. 각 꼭지점  $A_1, A_2, \dots, A_k$ 의 좌표는 모두 정수이고, 이 점들은 모두 한 원 위에 있다.  $P$ 의 넓이를  $S$ 라 하자. 홀수인 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $P$ 의 각각의 변의 길이의 제곱이  $n$ 의 배수이다.  $2S$ 가  $n$ 의 배수인 정수임을 보여라.

화요일, 2016년 7월 12일

**문제 4.** 양의 정수들로 이루어진 집합이 2개 이상의 원소를 가지며, 각 원소가 나머지 원소들 중 적어도 하나와 공통소인수를 가질 때, 이 집합을 **향기로운** 집합이라고 하자.  $P(n) = n^2 + n + 1$  이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 양의 정수  $b$  중 가장 작은 것은 무엇인가?

다음 집합이 향기로운 집합이 되도록 하는 음이 아닌 정수  $a$ 가 존재한다.

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

**문제 5.** 양변이 각각 2016개의 일차식으로 이루어진 다음 방정식이 칠판에 쓰여져 있다.

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

이 방정식의 4032개의 일차식 중에서 정확하게  $k$ 개의 식을 잘 지워서, 양변에 각각 적어도 하나의 일차식은 남아 있고, 지우고 남은 방정식이 실근을 갖지 않게 하려고 한다. 이것이 가능하게 되는 가장 작은 양의 정수  $k$ 의 값은 무엇인가?

**문제 6.** 평면에  $n \geq 2$ 개의 선분이 있다. 이 중 임의의 두 선분이 내부에서 교차하고, 어떤 세 선분도 한 점에서 만나지 않는다. 진용이는 각각의 선분마다 한 끝점을 선택해서 그 점에 개구리 한 마리를 놓되, 그 개구리가 그 선분의 다른 끝점을 향하도록 놓는다. 그리고 나서 손뼉을  $n-1$ 번 친다. 진용이가 손뼉을 한 번 칠 때마다, 모든 개구리는 앞으로 뛰어서 그 선분의 바로 다음 교점으로 이동한다. 개구리는 뛰는 방향을 절대로 바꾸지 않는다. 진용이는 개구리들이 뛰어 이동할 때, 어떤 두 개구리가 같은 교점에 동시에 있는 일이 발생하지 않도록 개구리를 배치하고자 한다.

(a)  $n$ 이 홀수이면, 진용이가 원하는 대로 할 수 있음을 보여라.

(b)  $n$ 이 짝수이면, 진용이가 원하는 대로 절대로 할 수 없음을 보여라.