IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

Montenegrin (mnt), day 1

Уторак, 18. јул 2017.

1. задатак. За дати природан број $a_0 > 1$, дефинишимо низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ тако да је за свако $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако је } \sqrt{a_n} \text{ цио број,} \\ a_n + 3, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Одредити све вриједности a_0 за које постоји број A такав да је $a_n = A$ за бесконачно много вриједности n.

2. задатак. Са $\mathbb{R}$ је означен скуп реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

3. задатак. Ловац и невидљиви зец играју игру у равни. Полазне тачке зеца и ловца, редом означене са A_0 и B_0, су исте. Након $n-1$ кругова игре, зец је у тачки A_{n-1}, а ловац у тачки B_{n-1}. У n-том кругу се догађа сљедеће, овим редом:

(i) Зец се непримјетно помјера у тачку A_n на растојању тачно 1 од тачке A_{n-1}.

(ii) Ловац на радару очитава тачку P_n. Једино што радар гарантује је да је растојање између тачака P_n и A_n највише 1.

(iii) Ловац се помјера у тачку B_n на растојању тачно 1 од тачке B_{n-1}, што зец види.

Да ли ловац увијек, ма какви били кретање зеца и извјештаји са радара, може да се креће тако да осигура да послије 10^9 кругова растојање између њега и зеца буде највише 100?

Сриједа, 19. јул 2017.

4. задатак. Дате су различите тачке R и S на кружници Ω тако да RS није њен пречник. Нека је ℓ тангента на кружницу Ω у тачки R. Тачка T је таква да је S средиште дужи RT. Тачка J на краћем луку RS кружнице Ω је таква да описана кружница Γ троугла JST сијече праву ℓ у двије различите тачке. Нека је A она од те двије тачке која је ближа тачки R. Права AJ поново сијече кружницу Ω у тачки K. Доказати да права KT додирује кружницу Γ.

5. задатак. Дат је природан број $N \geqslant 2$. У реду се налази $N(N+1)$ фудбалера међусобно различитих висина. Шеф Мишко жели да уклони $N(N-1)$ играча, остављајући ред са $2N$ играча у коме је задовољено сљедећих N услова:

(1) између двојице највиших играча не стоји нико,

(2) између трећег и четвртог играча по висини не стоји нико,

⋮

(N) између двојице најнижих играча не стоји нико.

Доказати да се ово увијек може извести.

6. задатак. Уређени пар цијелих бројева (x, y) зовемо *примитивном тачком* ако је највећи заједнички дјелилац бројева x и y једнак 1. Нека је S коначан скуп примитивних тачака. Доказати да постоје природан број n и цијели бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n$ такви да за све тачке (x, y) из скупа S важи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 поена