47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Macedonian**

12 Јули, 2006

Задача 1. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголник ABC. Во внатрешноста на триаголникот е избрана точка P, таква да

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажи дека $AP \geq AI$, и дека равенството важи ако и само ако точката P се совпаѓа со точката I.

Задача 2. Нека P е правилен многуаголник со 2006 страни. За дијагоналата на P велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на P на два дела, така да секој од нив се состои од непарен број на страни од P. Страните на P исто така ги нарекуваме *добри.*

Да ги разгледаме поделбите на многуаголникот P на триаголници со помош на 2003 дијагонали, така да кои било две од тие дијагонали немаат заедничка точка во внатрешноста на P. Одреди го максималниот број на рамнокраки триаголници со две добри страни, кои може да се добијат при некоја таква поделба.

Задача 3. Најди го најмалиот реален број M, таков да неравенството

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за сите реални броеви a, b и c.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

13 Јули, 2006

Задача 4. Најди ги сите парови (x, y) од цели броеви, такви да важи

$$1 + 2^{x} + 2^{2x+1} = y^{2}.$$

Задача 5. Нека $P(x)$ е полином од n - ти степен ($n > 1$) со цели коефициенти и нека k е природен број. Да го разгледаме полиномот

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

каде P се појавува k пати. Докажи дека постојат најмногу n цели броеви t такви да $Q(t) = t$.

Задача 6. На секоја страна b на конвексен многуаголник P ѝ ја придружуваме максималната плоштина на триаголникот, на кој една од страните се совпаѓа со b и кој е содржан во P. Докажи дека збирот од сите плоштини, придружени на страните на многуаголникот, е поголема или еднаква на двојната плоштина на многуаголникот.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода