Tisdag, den 23 juli, 2013

Uppgift 1. Visa att det för varje par av positiva heltal k och n, existerar k positiva heltal $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (inte nödvändigtvis olika) sådana att

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Uppgift 2. En konfiguration av 4027 punkter i planet kallas *colombiansk* om den består av 2013 röda och 2014 blå punkter, och om det inte finns tre av punkter i konfigurationen som ligger på en rät linje. Genom att dra några räta linjer delas planet i flera regioner. En uppsättning av linjer kallas *bra* för en colombiansk konfiguration om följande två villkor är uppfyllda:

- ingen linje går genom någon punkt i konfigurationen;
- ingen region innehåller punkter av båda färgerna.

Bestäm det minsta värdet på k, sådant att det för varje colombiansk konfiguration av 4027 punkter existerar en bra uppsättning av k linjer.

Uppgift 3. Anta att den vidskrivna cirkeln till triangeln ABC, belägen mittemot hörnet A, tangerar sidan BC i punkten A_1. Definiera på motsvarande sätt punkterna B_1 på CA och C_1 på AB genom att använda vidskrivna cirklar belägna mittemot B och C, respektive. Antag vidare att medelpunkten för den omskrivna cirkeln till triangeln $A_1B_1C_1$ ligger på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC. Visa att triangeln ABC är rätvinklig.

Den vidskrivna cirkeln *till triangeln ABC, belägen mittemot hörnet A, är cirkeln som tangerar triangelns sida BC, strålen AB bortom hörnet B samt strålen AC bortom hörnet C. Vidskrivna cirklar belägna mitt emot B och C definieras på liknande sätt.*

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng

Onsdag, den 24 juli, 2013

Uppgift 4. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med ortocentrum H, och låt W vara en punkt på sidan BC, som ligger strikt mellan B och C. Låt M och N vara fotpunkterna för höjderna från B och C, respektive. Låt ω_1 vara den omskrivna cirkeln till triangeln BWN, och låt X vara punkten på ω_1 sådan att WX är diameter i ω_1. Likadant, låt ω_2 vara den omskrivna cirkeln till triangeln CWM, och låt Y vara punkten på ω_2 sådan att WY är diameter i ω_2. Visa att X, Y och H ligger på en rät linje.

Uppgift 5. Låt $\mathbb{Q}_{>0}$ vara mängden av positiva rationella tal. Låt $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller följande tre villkor:

(i) för alla $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gäller att $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) för alla $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gäller att $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) det finns ett rationellt tal $a > 1$ sådant att $f(a) = a$.

Visa att $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Uppgift 6. Låt $n \geq 3$ vara ett heltal, och betrakta en cirkel med $n+1$ punkter jämnt fördelade på den. Betrakta alla markeringar av dessa punkter med talen $0, 1, \ldots, n$, sådana att varje tal används precis en gång. Två sådana markeringar anses vara identiska om man kan få den ena från den andra genom en rotation av cirkeln. En markering kallas *vacker* om, det för varje fyra etiketter $a < b < c < d$ med $a + d = b + c$, gäller att kordan som förbinder punkterna markerade med a och d inte skär kordan som förbinder punkterna markerade med b och c.

Låt M vara antalet vackra markeringar, och låt N vara antalet ordnade par (x, y) av positiva heltal, sådana att $x + y \leq n$ och $SGD(x, y) = 1$. Visa att

$$M = N + 1.$$

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng