Вторник, 18 июля 2017 года

Задача 1. Для произвольного целого $a_0 > 1$ определим последовательность a_0, a_1, a_2, ... следующим образом:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ – целое число,} \\ a_n + 3 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad \text{для всех } n \geqslant 0.$$

Найдите все значения a_0, при которых существует число A такое, что $a_n = A$ для бесконечно многих значений n.

Задача 2. Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех вещественных x и y выполнено равенство

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Задача 3. Охотник и невидимый кролик играют в следующую игру на плоскости. Стартовая точка A_0 кролика и стартовая точка B_0 охотника совпадают. Пусть после $n-1$ раунда игры кролик находится в точке A_{n-1}, а охотник – в точке B_{n-1}. Тогда в n-ом раунде игры последовательно выполняются следующие три действия:

(i) Кролик, оставаясь невидимым, перемещается в точку A_n такую, что расстояние между A_{n-1} и A_n в точности равно 1.

(ii) Следящее устройство сообщает охотнику некоторую точку P_n. При этом следящее устройство гарантирует только то, что расстояние между точками P_n и A_n не больше 1.

(iii) Охотник, оставаясь видимым, перемещается в точку B_n такую, что расстояние между B_{n-1} и B_n в точности равно 1.

Всегда ли возможно охотнику, при любых перемещениях кролика и любых сообщаемых следящим устройством точках, выбирать свои перемещения так, чтобы после 10^9 раундов он мог гарантировать, что расстояние между ним и кроликом не больше 100?

Среда, 19 июля 2017 года

Задача 4. Пусть R и S – две различные точки на окружности Ω такие, что RS не является диаметром. Пусть ℓ – касательная к Ω в точке R. Точка T выбрана так, что S является серединой отрезка RT. Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности Ω так, что окружность Γ, описанная около треугольника JST, пересекает ℓ в двух различных точках. Пусть A – та из общих точек Γ и ℓ, которая находится ближе к точке R. Прямая AJ вторично пересекает Ω в точке K. Докажите, что прямая KT касается Γ.

Задача 5. Дано целое число $N \geqslant 2$. Команда, состоящая из $N(N+1)$ футболистов, любые два из которых разного роста, построена в ряд. Тренер хочет удалить из ряда $N(N-1)$ игроков так, чтобы для оставшегося ряда из $2N$ игроков выполнялись следующие N условий:

(1) никто не стоит между двумя самыми высокими игроками,

(2) никто не стоит между третьим и четвертым по росту игроками,

$\vdots$

(N) никто не стоит между двумя самыми низкими игроками.

Докажите, что это всегда возможно.

Задача 6. Упорядоченная пара (x, y) целых чисел называется *примитивной точкой*, если наибольший общий делитель чисел x и y равен 1. Дано конечное множество S примитивных точек. Докажите, что существуют натуральное n и целые a_0, a_1, …, a_n такие, что для каждой примитивной точки (x, y) из S выполнено равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$