2006 m. liepos 12 d.

1 uždavinys. Trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras yra I. Trikampio viduje paimtas toks taškas P, kad $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Įrodykite, kad $AP \geq AI$, ir lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $P = I$.

2 uždavinys. Taisyklingojo 2006-kampio P įstrižainę vadiname *gera*, jeigu jos galiniai taškai dalija daugiakampio kontūrą į dvi dalis, kurių kiekvieną sudaro nelyginis kraštinių skaičius. Daugiakampio P kraštines taip pat vadiname *geromis*. Tarkime, kad P suskaidytas į trikampius 2003 įstrižainėmis, kurių jokios dvi neturi bendrų taškų P viduje. Raskite, kiek daugiausia tame skaidinyje gali būti lygiašonių trikampių, turinčių dvi geras kraštines.

3 uždavinys. Raskite mažiausią realųjį skaičių M tokį, kad nelygybė

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

būtų teisinga su visais realiaisiais skaičiais a, b ir c.

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **2**

language: **Lithuanian**

2006 m. liepos 13 d.

<u>4 uždavinys.</u> Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras (x, y), kad

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

<u>5 uždavinys.</u> Sakykime, kad $P(x)$ yra laipsnio $n > 1$ daugianaris su sveikaisiais koeficientais, o k – bet kuris natūralusis skaičius. Nagrinėkime daugianarį $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kur P parašyta k kartų. Įrodykite, kad yra daugiausiai n tokių sveikųjų skaičių t, jog $Q(t) = t$.

<u>6 uždavinys.</u> Iškilojo daugiakampio P kiekvienai kraštinei b priskirkime didžiausią plotą iš trikampių, turinčių kraštinę b ir esančių daugiakampyje P. Įrodykite, kad visoms daugiakampio P kraštinėms priskirtų plotų suma ne mažesnė už dvigubą P plotą.

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais