antradienis, 16. liepos 2024

1 uždavinys. Raskite visus realiuosius skaičius α, kuriems su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n sveikasis skaičius

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

dalijasi iš n. (Čia $\lfloor z \rfloor$ žymi didžiausią sveikąjį skaičių, kuris neviršija z. Pavyzdžiui, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ir $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

2 uždavinys. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (a, b), su kuriomis egzistuoja tokie natūralieji skaičiai g ir N, kad lygybė

$$DBD(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

galioja su visais sveikaisiais $n \geqslant N$. (Čia $DBD(x, y)$ žymi sveikųjų skaičių x ir y didžiausiąjį bendrą daliklį.)

3 uždavinys. Tegul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yra begalinė natūraliųjų skaičių seka, o N - natūralusis skaičius. Tarkime, kad su kiekvienu $n > N$, a_n yra lygus skaičiaus a_{n-1} pasikartojimų skaičiui tarp skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Įrodykite, kad bent viena iš sekų $a_1, a_3, a_5, \ldots$ ir $a_2, a_4, a_6, \ldots$ yra periodinė. (Begalinė seka $b_1, b_2, b_3, \ldots$ yra vadinama periodine, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai p ir M, kad $b_{m+p} = b_m$ su visais $m \geqslant M$.)

Language: Lithuanian

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.

trečiadienis, 17. liepos 2024

4 uždavinys. Duotas trikampis ABC, kuriame $AB < AC < BC$. Tarkime, kad ω yra trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas, o I – to apskritimo centras. Tegul X yra toks tiesės BC taškas, nesutampantis su C, kad tiesė, einanti per X ir lygiagreti AC, yra ω liestinė. Analogiškai, tegul Y yra toks tiesės BC taškas, nesutampantis su B, kad tiesė, einanti per Y ir lygiagreti AB, yra ω liestinė. Tarkime, kad tiesė AI kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą taške $P \neq A$. Tegul K ir L yra atitinkamai kraštinių AC ir AB vidurio taškai. Įrodykite, kad $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

5 uždavinys. Sraigė Turbo žaidžia žaidimą lentelėje, kurią sudaro 2024 eilutės ir 2023 stulpeliai. Kažkuriuose 2022 lentelės langeliuose yra pasislėpę monstrai. Žaidimo pradžioje Turbo nežino kur tie monstrai slepiasi, tačiau žino, kad yra lygiai vienas monstras kiekvienoje eilutėje, išskyrus pirmąją ir paskutiniąją eilutes, bei žino, kad kiekviename stulpelyje yra ne daugiau kaip vienas monstras. Turbo turi keletą bandymų pereiti iš pirmosios eilutės į paskutiniąją. Kiekvienu savo bandymu ji gali pasirinkti bet kurį pirmosios eilutės langelį ir žingsnis po žingsnio vis pereiti į gretimą langelį, po to į šiam gretimą langelį ir t.t. Langeliai yra vadinami gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę. (Savo bandymo metu ji gali ir sugrįžti į langelį, kuriame jau buvo prieš tai.) Jei sraigė pasiekia langelį, kuriame yra monstras, tai šis jos bandymas baigiasi, ir ji turi pradėti naują savo bandymą vėl nuo pirmosios eilutės. Monstrai niekur nejuda, o Turbo prisimena ar langeliuose, kuriuose ji jau pabuvojo, yra monstrai ar jų nėra. Jei sraigei pavyksta pasiekti paskutiniąją eilutę, tai šis jos bandymas baigiasi sėkmingai, ir ji žaidimą laimi. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n, su kuriuo Turbo turi strategiją, kuri garantuoja jai galimybę visada pasiekti paskutiniąją eilutę n-tuoju bandymu arba anksčiau, kad ir kaip bebūtų išsidėstę monstrai.

6 uždavinys. Tegul $\mathbb{Q}$ žymi racionaliųjų skaičių aibę. Funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ yra vadinama gražia, jei ji tenkina tokią savybę: su visais $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{arba} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Įrodykite, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius c, kad kiekvienai gražiai funkcijai f atsiras ne daugiau kaip c skirtingų racionaliųjų skaičių, užrašomų pavidalu $f(r) + f(-r)$ su kokiu nors racionaliuoju r, ir raskite mažiausią įmanomą c reikšmę.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.