ថ្ងៃអង្គារ ទី១៦ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៩

ចំណោទ 1. យក $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំចំនួនគត់។ កំណត់អនុគមន៍ $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ទាំងឡាយណា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a និង b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

ចំណោទ 2. A_1 និង B_1 រៀងគ្នា ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើជ្រុង $[BC]$ និង $[AC]$ នៃត្រីកោណ ABC មួយ។ P និង Q រៀងគ្នា ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[AA_1]$ និង $[BB_1]$ ដែលបន្ទាត់ (PQ) និង (AB) ស្របគ្នា។ យក P_1 ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (PB_1) ដែល B_1 ស្ថិតនៅដាច់ខាតរវាងចំណុច P និង P_1 (B_1 មិននៅត្រង់ P និងមិននៅត្រង់ P_1) ដែល $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$ ។ ដូចគ្នាដែរ យក Q_1 ជាចំណុចមួយស្ថិនៅលើបន្ទាត់ (QA_1) ដែល A_1 ស្ថិតនៅដាច់ខាតរវាងចំណុច Q និង Q_1 (A_1 មិននៅត្រង់ Q និង មិននៅត្រង់ Q_1) ដែល $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$ ។
បង្ហាញថាចំណុច P, Q, P_1 និង Q_1 នៅលើរង្វង់តែមួយ។

ចំណោទ 3. បណ្ដាញសង្គមមួយមានសមាជិក 2019 នាក់។ សមាជិកខ្លះៗនៃសមាជិកទាំងនេះជាមិត្តភក្រនឹងគ្នាពីមួយទៅមួយទៀត។ ទំនាក់ទំនងមិត្តភាពនៃគូសមាជិកជាទំនាក់ទំនងច្រាស់ (បើសមាជិក A ជាមិត្តភក្រជាមួយ B នោះ B ក៏ជាមិត្តភក្រជាមួយ A ដែរ)។ ព្រឹត្តិការណ៍នៃប្រភេទដែលបានពិពណនាខាងក្រោមបានកើតឡើងជាបន្តបន្ទាប់ មួយបន្ទាប់ពីមួយផ្សេងទៀត៖

> A, B និង C ជាសមាជិកបីដែល A ជាមិត្តភក្រជាមួយ B និង C តែ B និង C មិនមែនជាមិត្តភក្រនឹងគ្នា នោះ B និង C ក្លាយជាមិត្តភក្រនឹងគ្នា តែ A លេងជាមិត្តភក្រជាមួយ B និងលេងជាមិត្តភក្រជាមួយ C ទៀតហើយ។ ទំនាក់ទំនងផ្សេងទៀតនៃទំនាក់ទំនងមិត្តភាពមិនផ្លាស់ផ្តូរទេនៅនៅអំឡុងពេលនេះ។

ជាការចាប់ផ្តើម សមាជិក 1010 នាក់ ម្នាក់ៗមានមិត្តភក្រ 1009 នាក់ (ម្នាក់ៗក្នុងចំណោមសមាជិក 1010 មានមិត្តភក្រ 1009 នាក់) និង សមាជិក 1009 នាក់ ម្នាក់ៗមានមិត្តភក្រ 1010 នាក់ ។
បង្ហាញថាមានស៊ីតនៃព្រឹត្តិការណ៍បែបនេះមួយដែលបន្ទាប់ពីនេះ សមាជិកម្នាក់ៗនឹងមានមិត្តភក្រមួយយ៉ាងច្រើន។

Language: Khmer

រយៈពេល ៖ ៤ ម៉ោង ៣០នាទី
ចំណោទនិមួយៗទទួលបាន៧ ពិន្ទុ

ថ្ងៃពុធ ទី១៧ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៩

ចំណោទ 4. កំណត់គូ (k, n) ទាំងអស់នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

ចំណោទ 5. ធនាគារនៃទីក្រុងបាត់ *(Bath)* បានផ្តល់កាក់ប្រាក់ដែលមុខរបស់វា ម្ខាងឆ្លាក់អក្សរ H និងម្ខាងទៀតឆ្លាក់អក្សរ T ។ សីហាបានរៀបជាជួរ n កាក់ប្រាក់ពីខាងឆ្វេងទៅខាងស្តាំ។ គាត់បានរៀបកាក់ប្រាក់ត្រឡប់ចុះត្រឡប់ឡើងច្រើនដងតាមប្រមាណវិធីត្រឡប់កាក់ប្រាក់ដូចខាងក្រោម៖

- បើអក្សរ H ត្រូវបានមើលឃើញលើ k កាក់ប្រាក់ជាមួយនឹង $k \geqslant 1$ (កាក់ប្រាក់បានរៀបមានអក្សរ H ចំនួន k) គាត់ត្រឡប់កាក់ប្រាក់ទី k ដោយចេញពីឆ្វេង
- បើកាក់ប្រាក់មិនចេញអក្សរ H (ចេញអក្សរ T ទាំងអស់) ទេ នោះគាត់ឈប់ធ្វើតំណើរការត្រឡប់កាក់ប្រាក់។

ឧទាហរណ៍ បើ $n = 3$ តំណើរការត្រឡប់កាក់ប្រាក់ដំបូងចាប់ផ្តើមពីការរៀប THT (កាក់ប្រាក់បានរៀប) ជា

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

ដូច្នេះសីហាឈប់ត្រឡប់កាក់ប្រាក់បន្ទាប់ពីប្រមាណវិធីទាំងបី។

(a) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ការរៀបកាក់ប្រាក់ដំបូង សីហាត្រូវតែឈប់ការត្រឡប់កាក់ប្រាក់បន្ទាប់ពីប្រមាណវិធីកំណត់មួយ (គាត់ធ្វើប្រមាណវិធីកំណត់មួយដើម្បីឲ្យគាត់ឈប់ត្រឡប់កាក់ប្រាក់) ។

(b) ចំពោះការរៀបកាក់ប្រាក់ដំបូង C គេយក $L(C)$ ជាចំនួនប្រមាណវិធីនៃការត្រឡប់កាក់ប្រាក់ដែលសីហានឹងរៀបមុននឹងឈប់។ ឧទាហរណ៍ $L(THT) = 3$ និង $L(TTT) = 0$ ។
កំណត់តម្លៃមធ្យមនៃចំនួន $L(C)$ ដែលបានទទួល កាលណា C ជ្រើសរើសក្នុងសំណុំនៃ 2^n ការរៀបកាក់ប្រាក់ដំបូងដែលអាចមាន។

ចំណោទ 6. ABC ជាត្រីកោណមានមុំស្រួច *(acute-angled triangle)* ដែល $AB \neq AC$ ។ គេយក ω ជារង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABC និង យក I ជាផ្ចិតនៃ ω ហើយ យក D, E និង F រៀងគ្នាជាចំណុចប៉ះនៃ ω ជាមួយជ្រុង $[BC]$, $[CA]$ និង $[AB]$ ។ យក R ជាចំណុចនៃ ω ផ្សេងពី D ដែលបន្ទាត់ (DR) កែងនឹងបន្ទាត់ (EF) ។ យក P ជាចំណុចប្រសព្វផ្សេងពី R រវាងបន្ទាត់ (AR) និងរង្វង់ ω ។ ជាចុងក្រោយ យក Q ជាចំណុចប្រសព្វផ្សេងពី P រវាងរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ PCE និង រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ PBF ។
បង្ហាញថាបន្ទាត់ (DI) និង (PQ) កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចមួយស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កែងនឹង (AI) ដែលកាត់តាម A ។

Language: Khmer

រយៈពេល ៖ ៤ ម៉ោង និង ៣០នាទី
ចំណោទនិមួយៗទទួលបាន ៧ ពិន្ទុ