

Senin, 11 Juli 2016

Soal 1. Segitiga BCF siku-siku di sudut B . Misalkan A adalah titik pada garis CF sehingga $FA = FB$ dan F terletak di antara A dan C . Titik D dipilih sehingga $DA = DC$ dan AC adalah garis bagi $\angle DAB$. Titik E dipilih sehingga $EA = ED$ dan AD adalah garis bagi $\angle EAC$. Misalkan M adalah titik tengah CF . Misalkan X adalah suatu titik sehingga $AMXE$ merupakan jajargenjang (dimana $AM \parallel EX$ dan $AE \parallel MX$). Buktikan bahwa garis BD , FX , dan ME berpotongan di satu titik.

Soal 2. Cari semua bilangan asli n sehingga setiap kotak dari tabel $n \times n$ dapat diisi dengan salah satu dari huruf I , M , dan O sedemikian sehingga:

- di setiap baris dan kolom, sepertiga diantaranya berisi I , sepertiga diantaranya berisi M , dan sepertiga diantaranya berisi O ; dan
- pada setiap diagonal, jika banyaknya kotak pada diagonal tersebut merupakan kelipatan 3, maka sepertiga diantaranya berisi I , sepertiga diantaranya berisi M , dan sepertiga diantaranya berisi O .

Catatan: Baris dan kolom dari suatu tabel $n \times n$ masing-masing dilabeli dengan 1 sampai n secara berurutan. Maka setiap kotak dilabeli dengan suatu pasangan bilangan asli (i, j) dengan $1 \leq i, j \leq n$. Untuk $n > 1$, tabel tersebut memiliki $4n - 2$ diagonal yang terdiri atas dua tipe. Suatu diagonal tipe pertama memuat semua kotak (i, j) dengan $i + j$ konstan, dan suatu diagonal tipe kedua memuat semua kotak (i, j) dengan $i - j$ konstan.

Soal 3. Misalkan $P = A_1A_2 \dots A_k$ adalah suatu poligon konveks pada bidang. Titik-titik sudut A_1, A_2, \dots, A_k mempunyai koordinat bilangan bulat dan terletak pada sebuah lingkaran. Misalkan S adalah luas dari P . Suatu bilangan asil ganjil n diberikan sedemikian sehingga kuadrat setiap sisi dari P adalah bilangan bulat yang habis dibagi n . Buktikan bahwa $2S$ adalah bilangan bulat yang habis dibagi n .

Selasa, 12 Juli 2016

Soal 4. Suatu himpunan bilangan asli dikatakan *harum* jika memiliki setidaknya dua anggota dan masing-masing anggota mempunyai faktor prima persekutuan dengan setidaknya satu anggota lainnya. Misalkan $P(n) = n^2 + n + 1$. Berapakah bilangan asli terkecil b yang mungkin agar terdapat suatu bilangan bulat non-negatif a sehingga himpunan

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

harum?

Soal 5. Persamaan

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

ditulis di papan, dengan 2016 faktor linear pada masing-masing sisi. Berapakah bilangan asli terkecil k supaya dimungkinkan untuk menghapus tepat k dari 4032 faktor linear tersebut sedemikian sehingga masing-masing sisi memiliki setidaknya satu faktor dan persamaan yang tersisa tidak mempunyai solusi real?

Soal 6. Terdapat $n \geq 2$ segmen garis pada bidang sehingga setiap dua segmen berpotongan, dan tidak ada tiga segmen yang bertemu pada satu titik. Cecep harus memilih salah satu titik ujung dari masing-masing segmen dan meletakkan seekor katak disana, menghadap ke titik ujung lainnya. Kemudian dia akan bertepuk tangan sebanyak $n-1$ kali. Setiap kali dia bertepuk tangan, masing-masing katak akan melompat maju ke titik potong berikutnya pada segmen tersebut. Katak tidak pernah mengubah arah lompatannya. Cecep ingin meletakkan katak-katak tersebut sedemikian sehingga tidak ada dua katak yang menempati titik perpotongan yang sama pada saat yang sama.

- (a) Buktikan bahwa keinginan Cecep dapat selalu terpenuhi jika n ganjil.
- (b) Buktikan bahwa keinginan Cecep tidak akan pernah terpenuhi jika n genap.