دوشنبه، ۲۱. سپتامبر ۲۰۲۰

مسئله‌ی ۱. چهارضلعی محدب $ABCD$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی P درون $ABCD$ قرار دارد. نسبت‌های زیر برقرار هستند:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = ۱ : ۲ : ۳ = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

ثابت کنید سه خط ذیل در یک نقطه همرس هستند: نیمسازهای داخلی زوایای $\angle ADP$ و $\angle PCB$ و عمودمنصف پاره‌خط AB.

مسئله‌ی ۲. اعداد حقیقی a, b, c, d با شرط‌های $a \geq b \geq c \geq d > ۰$ و $a + b + c + d = ۱$ مفروض هستند. ثابت کنید:

$$(a + ۲b + ۳c + ۴d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < ۱$$

مسئله‌ی ۳. تعداد $۴n$ مهره با وزن‌های $۱, ۲, ۳, \ldots, ۴n$ داریم. هر مهره با یکی از n رنگ، رنگ‌آمیزی شده است و از هر رنگ چهار مهره داریم. نشان دهید می‌توان مهره‌ها را به دو دسته تقسیم کرد طوری‌که هر دو شرط زیربرقرار باشد:

- مجموع وزن هر دو دسته با هم برابر باشد.
- هر دسته از هر رنگ دو مهره داشته باشد.

Language: Persian (Farsi)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.

سه شنبه، ۲۲. سپتامبر ۲۰۲۰

مسئله‌ی ۴. $n > ۱$ یک عدد صحیح مثبت است. تعداد $n^۲$ ایستگاه با ارتفاع‌های مختلف روی شیب یک کوه قرار دارند. هر یک از دو شرکت تله‌کابین A و B، تعداد k ماشین برقی دارد، که هر ماشین برقی از یک ایستگاه به یکی از ایستگاه‌های بالاترش (بدون توقف میانی) می‌رود. k ماشین برقی متعلق به شرکت A دارای k نقطه‌ی شروع متفاوت و k نقطه‌ی پایان متفاوت هستند، و ماشینی که از نقطه‌ی بالاتر شروع می‌کند به نقطه‌ی بالاتر هم می‌رود. همین خاصیت برای ماشین‌های شرکت B نیز برقرار است. می‌گوییم دو ایستگاه توسط یک شرکت متصل هستند، اگر بتوان با شروع از ایستگاه پایین‌تربه وسیله یک یا چند ماشین از آن شرکت به ایستگاه بالاتر رسید (هیچ حرکت دیگری بین ایستگاه ها مجاز نیست).

کم‌ترین مقدار طبیعی k را بیابید طوری‌که بتوان تضمین کرد که دو ایستگاه وجود دارند که توسط هر دو شرکت متصل هستند.

مسئله‌ی ۵. یک دسته از $n > ۱$ کارت داده شده است. روی هر کارت یک عدد صحیح مثبت نوشته شده است. این دسته دارای این خاصیت است که میانگین حسابی اعداد روی هر جفت کارت برابر با میانگین هندسی یک یا چند کارت است.

برای چه nهایی می‌توان نتیجه گرفت که همه‌ی اعداد روی کارت‌ها با هم برابرند؟

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید عدد ثابتِ مثبت c وجود دارد که حکم زیر درست است:

برای هر عدد صحیح $n > ۱$، و هر مجموعه‌ی S از n نقطه در صفحه طوری‌که فاصله‌ی هر دو نقطه از S حداقل ۱ باشد، خط ℓ وجود دارد که S را جدا می‌کند طوری‌که فاصله‌ی هر نقطه‌ی S از خط ℓ حداقل $cn^{-۱/۳}$ باشد.

(خط ℓ مجموعه‌ی نقاط S را جدا می‌کند اگر پاره‌خط واصل بین دو نقطه از S خط ℓ را قطع کند.)

نکته. برای اثبات کران $cn^{-\alpha}$ به جای $cn^{-۱/۳}$ امتیازی بسته به مقدار $\alpha > ۱/۳$ می‌تواند تعلق بگیرد.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.