Сряда, 15 юли, 2009

Задача 1. Нека n е естествено число и $a_1, \dots, a_k$ $(k \geq 2)$ са две по две различни числа от множеството $\{1, \dots, n\}$ такива, че n дели $a_i(a_{i+1} - 1)$ за $i = 1, \dots, k-1$. Да се докаже, че n не дели $a_k(a_1 - 1)$.

Задача 2. Нека ABC е триъгълник с център на описаната окръжност O. Точките P и Q са вътрешни съответно за страните CA и AB. С K, L и M са означени средите съответно на отсечките BP, CQ и PQ, а Γ е окръжността, минаваща през K, L и M. Нека правата PQ е допирателна към Γ. Да се докаже, че $OP = OQ$.

Задача 3. Нека $s_1, s_2, s_3, \dots$ е строго растяща редица от естествени числа такава, че и двете подредици

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{и} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

са аритметични прогресии. Да се докаже, че редицата $s_1, s_2, s_3, \dots$ е също аритметична прогресия.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Четвъртък, 16 юли, 2009

Задача 4. Даден е триъгълник ABC, за който $AB = AC$. Ъглополовящите на $\angle CAB$ и $\angle ABC$ пресичат страните BC и CA съответно в точки D и E. Нека K е центърът на вписаната окръжност в триъгълник ADC. Да се намерят всички стойности на $\angle CAB$, за които $\angle BEK = 45°$.

Задача 5. Нека $\mathbf{N}$ е множеството на естествените числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такива, че за произволни $a, b \in \mathbf{N}$ съществува неизроден триъгълник с дължини на страните

$$a, \; f(b) \; \text{ и } \; f(b + f(a) - 1).$$

(Един триъгълник е *неизроден*, ако върховете му не са колинеарни.)

Задача 6. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n - 1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки