



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Lithuanian (lit), day 1

šeštadienis, liepos 8 d., 2023

1 uždavinys. Raskite visus sudėtinius natūraliuosius skaičius $n > 1$ tenkinančius tokią sąlygą: jei d_1, d_2, \dots, d_k yra visi skaičiaus n teigiami dalikliai, kur $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, tai d_i dalija $d_{i+1} + d_{i+2}$ su kiekvienu $1 \leq i \leq k - 2$.

2 uždavinys. Tegu ABC yra smailusis trikampis, kuriame $AB < AC$, o Ω – jo apibrėžtinis apskritimas. Tegu S yra apskritimo Ω lanko CB , kuriam priklauso taškas A , vidurio taškas. Tiesė, statmena tiesei BC ir einanti per tašką A , kerta tiesę BS taške D , o apskritimą Ω taške $E \neq A$. Tiesė, lygiagreti tiesei BC ir einanti per tašką D , kerta tiesę BE taške L . Tegu ω yra trikampio BDL apibrėžtinis apskritimas. Tarkime, kad ω kertasi su Ω taške $P \neq B$. Įrodykite, kad apskritimo ω liestinės taške P ir tiesės BS sankirtos taškas priklauso kampo $\angle BAC$ pusiaukampinei.

3 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius $k \geq 2$. Raskite visas begalines natūraliųjų skaičių sekas a_1, a_2, \dots , turinčias tokią savybę: egzistuoja toks daugianaris $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, čia c_0, c_1, \dots, c_{k-1} yra sveikieji neneigiami skaičiai, kad su kiekvienu natūraliuoju $n \geq 1$ galioja lygybė

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}.$$

Language: Lithuanian

Darbai skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Lithuanian (lit), day 2

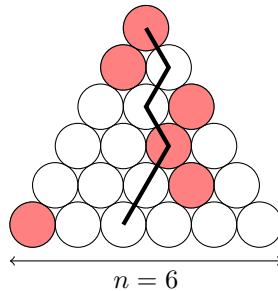
sekmadienis, liepos 9 d., 2023

4 uždavinys. Tarkime, kad $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ yra poromis skirtingi teigiami realieji skaičiai, su kuriais

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

yra sveikasis skaičius, kai $n = 1, 2, \dots, 2023$. Įrodykite, kad $a_{2023} \geq 3034$.

5 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius n . *Japoniškas trikampis* yra sudarytas iš $1 + 2 + \dots + n$ skritulių sudėliotų lygiakraščio trikampio forma taip, kad su kiekvienu $i = 1, 2, \dots, n$, i -tąją nuo viršaus eilutę sudaro lygiai i skritulių, iš kurių lygiai vienas yra nudažytas raudonai. Japoniško trikampio *nindziakelis* yra n skritulių seka, kuri prasideda nuo viršutiniojo skritulio, eina per kurį nors vieną iš dviejų po juo esančių skritulių, po to vėl per vieną iš dviejų po naujuoju sekos skrituliu esančių skritulių ir t.t. kol galiausiai baigiasi vienu iš apatinėje eilėje esančių skritulių. Čia yra japoniško trikampio pavyzdys, kai $n = 6$, ir vieno iš to japoniško trikampio nindziakelių, kuriam priklauso du raudoni skrituliai, pavyzdys.



Raskite didžiausią natūralųjį skaičių k , išreikštą per n , kad bet kuriame japoniškame trikampyje visada atsirastų toks nindziakelis, kuriam priklauso bent k raudonų skritulių.

6 uždavinys. Duotas lygiakraštis trikampis ABC . Taškai A_1, B_1, C_1 yra trikampio ABC viduje ir tenkina sąlygas $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ bei

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Tiesės BC_1 ir CB_1 kertasi taške A_2 , tiesės CA_1 ir AC_1 kertasi taške B_2 , o tiesės AB_1 ir BA_1 kertasi taške C_2 . Be to, žinoma, kad trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinės turi skirtingus ilgius.

Įrodykite, kad trijų trikampių AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 apibrėžtiniai apskritimai turi du bendrus taškus.