*Tisdag, den 10 juli 2012*

**Problem 1.** Givet en triangel $ABC$, låt punkten $J$ vara centrum för den vidskrivna cirkeln mittemot hörnet $A$. Cirkeln tangerar sidan $BC$ i punkten $M$, samt linjerna $AB$ och $AC$ i punkterna $K$ och $L$, respektive. Linjerna $LM$ och $BJ$ skär varandra i $F$, medan linjerna $KM$ och $CJ$ skär varandra i $G$. Låt $S$ vara skärningspunkten mellan linjerna $AF$ och $BC$, och låt slutligen $T$ vara skärningspunkten mellan linjerna $AG$ och $BC$.

Visa att $M$ ligger i mitten av sträckan $ST$.

(Den vid triangeln $ABC$ *vidskrivna* cirkeln mittemot hörnet $A$ definieras som cirkeln som tangerar sidan $BC$, förlängningen av sidan $AB$ utgående från $B$ samt förlängningen av sidan $AC$ utgående från $C$.)

**Problem 2.** Låt $n \geq 3$ vara ett heltal, och låt $a_2, a_3, \ldots, a_n$ vara positiva reella tal sådana att $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Visa att

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \;>\; n^n.$$

**Problem 3.** *Lögnarens gissninsspel* är ett spel för två personer $A$ och $B$. Spelreglerna beror på två positiva heltal $k$ och $n$ som är kända till båda spelarna.

I början av spelet väljer $A$ två heltal, $x$ och $N$, där $1 \leq x \leq N$. Spelaren $A$ avslöjar inte talet $x$ men sanningsenligt berättar för $B$ talet $N$. Spelaren $B$ försöker nu erhålla information om talet $x$ genom att till $A$ ställa frågor på följande sätt: i varje fråga bestämmer $B$ en godtycklig mängd $S$ av positiva heltal (möjligen samma mängd som i någon av tidigare frågor) och frågar $A$ om $x$ tillhör $S$.

Spelaren $B$ kan ställa så många frågor som han vill.

Spelaren $A$ måste omedelbart besvara var och en av $B$s frågor med *ja* eller *nej*, men får lov att ljuga så många gånger som hon bara önskar. Den enda begränsningen är att för varje $k+1$ på varandra följande svaren, måste minst ett vara sant.

Efter att $B$ har ställt så många frågor som han vill måste han ange en mängd $X$ bestående av som mest $n$ positiva heltal. Om $x$ ligger i $X$ så vinner $B$; annars, förlorar han.

Visa att:

1. Om $n \geq 2^k$, så har $B$ en vinnande strategi.

2. För tillräckligt stora $k$, finns ett heltal $n \geq 1.99^k$, sådant att $B$ har ingen vinnande strategin.



*Tid: 4 timmar och 30 minuter*
*För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng.*

*Onsdag, den 11 juli 2012*

**Problem 4.** Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sådana att för alla heltal $a$, $b$, $c$ som uppfyller $a+b+c=0$, följande likhet gäller:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ betecknar här mängden av heltalen.)

**Problem 5.** Låt $ABC$ vara en triangel med $\angle BCA = 90^\circ$, och låt $D$ vara fotpunkten för höjden från $C$. Låt $X$ vara en inre punkt på sträckan $CD$. Låt vidare $K$ vara en punkt på sträckan $AX$ sådan att $BK = BC$. På liknande sätt, låt $L$ vara en punkt på sträckan $BX$ sådan att $AL = AC$. Låt slutligen $M$ vara skärningspunkten mellan $AL$ och $BK$.

Visa att $MK = ML$.

**Problem 6.** Bestäm alla positiva heltal $n$ för vilka det finns icke-negativa heltal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sådana att

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$



*Tid: 4 timmar och 30 minuter*
*För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng*