Senin, 11 Juli 2022

Soal 1. Bank Oslo menerbitkan dua jenis koin: aluminium (dinyatakan A) dan baja (dinyatakan B). Marianne memiliki n koin aluminium dan n koin baja. Dia meletakkan semua koin ini dalam satu baris dalam suatu urutan awal. Sebuah *rantai* adalah sebuah barisan koin-koin berurutan yang jenisnya sama. Diberikan sebuah bilangan bulat positif $k \leqslant 2n$. Marianne melakukan operasi berikut berulang-ulang: dia mengambil rantai terpanjang yang mengandung koin ke-k dari kiri, dan dia memindahkan semua koin di rantai tersebut ke posisi paling kiri. Contohnya, bila $n = 4$ dan $k = 4$, proses yang dimulai dari urutan awal $AABBBABA$ menjadi

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Cari semua pasangan (n, k) dengan $1 \leqslant k \leqslant 2n$ sehingga untuk setiap urutan awal, pada suatu saat dalam proses ini, semua n koin di paling kiri memiliki jenis yang sama.

Soal 2. Misalkan $\mathbb{R}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Carilah semua fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$, terdapat tepat satu bilangan $y \in \mathbb{R}^+$ yang memenuhi

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Soal 3. Diberikan sebuah bilangan bulat positif k. Misalkan S adalah himpunan berhingga yang semua unsurnya bilangan prima ganjil. Buktikan bahwa terdapat paling banyak satu cara (termasuk rotasi dan refleksi) untuk menempatkan unsur-unsur S dalam sebuah lingkaran, sehingga hasil kali sebarang dua bilangan yang bersebelahan berbentuk $x^2 + x + k$ untuk suatu bilangan bulat positif x.

Language: Indonesian

Waktu: 4 jam 30 menit.
Setiap soal bernilai 7 angka.

Selasa, 12 Juli 2022

Soal 4. Diberikan segilima konveks $ABCDE$ yang memenuhi $BC = DE$. Diberikan titik T di dalam $ABCDE$ yang memenuhi $TB = TD$, $TC = TE$ dan $\angle ABT = \angle TEA$. Misalkan garis AB memotong garis CD dan CT berturut-turut di titik P dan Q, sehingga P, B, A, Q segaris dalam urutan tersebut. Misalkan garis AE memotong garis CD dan DT berturut-turut di titik R dan S, sehingga R, E, A, S segaris dalam urutan tersebut. Buktikan titik-titik P, S, Q, dan R berada dalam satu lingkaran.

Soal 5. Carilah semua tripel bilangan bulat positif (a, b, p) yang memenuhi p prima dan

$$a^p = b! + p.$$

Soal 6. Diberikan bilangan bulat positif n. Sebuah *persegi Nordik* adalah sebuah papan $n \times n$ yang mengandung semua bilangan bulat dari 1 sampai dengan n^2, sehingga setiap kotak mengandung tepat satu bilangan. Dua kotak berbeda disebut bertetangga jika mereka mengandung sebuah sisi yang sama. Sebuah kotak yang bertetangga hanya dengan kotak-kotak yang mengandung bilangan yang lebih besar disebut *lembah*. Sebuah *lintasan menanjak* adalah sebuah barisan yang terdiri dari satu atau lebih kotak, sehingga:

(i) kotak pertama di barisan tersebut adalah sebuah lembah,

(ii) kotak-kotak berikutnya dalam barisan tersebut bertetangga dengan kotak sebelumnya, dan

(iii) bilangan-bilangan yang ditulis dalam kotak-kotak di barisan tersebut membentuk barisan naik.

Carilah, sebagai fungsi dalam n, banyaknya lintasan menanjak paling sedikit dalam sebuah persegi Nordik.