



*antradienis, 16. liepos 2024*

**1 uždavinys.** Raskite visus realiuosius skaičius  $\alpha$ , kuriems su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi  $n$  sveikasis skaičius

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

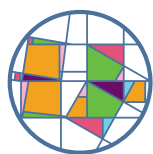
dalijasi iš  $n$ . (Čia  $\lfloor z \rfloor$  žymi didžiausią sveikąjį skaičių, kuris neviršija  $z$ . Pavyzdžiui,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  ir  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**2 uždavinys.** Raskite visas natūraliųjų skaičių poras  $(a, b)$ , su kuriomis egzistuoja tokie natūralieji skaičiai  $g$  ir  $N$ , kad lygybė

$$DBD(a^n + b, b^n + a) = g$$

galioja su visais sveikaisiais  $n \geq N$ . (Čia  $DBD(x, y)$  žymi sveikųjų skaičių  $x$  ir  $y$  didžiausiąjį bendrą daliklį.)

**3 uždavinys.** Tegul  $a_1, a_2, a_3, \dots$  yra begalinė natūraliųjų skaičių seka, o  $N$  - natūralusis skaičius. Tarkime, kad su kiekvienu  $n > N$ ,  $a_n$  yra lygus skaičiaus  $a_{n-1}$  pasikartojimų skaičiui tarp skaičių  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Įrodykite, kad bent viena iš sekų  $a_1, a_3, a_5, \dots$  ir  $a_2, a_4, a_6, \dots$  yra periodinė. (Begalinė seka  $b_1, b_2, b_3, \dots$  yra vadinama periodine, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai  $p$  ir  $M$ , kad  $b_{m+p} = b_m$  su visais  $m \geq M$ .)



*trečiadienis, 17. liepos 2024*

**4 uždavinys.** Duotas trikampis  $ABC$ , kuriame  $AB < AC < BC$ . Tarkime, kad  $\omega$  yra trikampio  $ABC$  įbrėžtinis apskritimas, o  $I$  – to apskritimo centras. Tegul  $X$  yra toks tiesės  $BC$  taškas, nesutampantis su  $C$ , kad tiesė, einanti per  $X$  ir lygiagreti  $AC$ , yra  $\omega$  liestinė. Analogiškai, tegul  $Y$  yra toks tiesės  $BC$  taškas, nesutampantis su  $B$ , kad tiesė, einanti per  $Y$  ir lygiagreti  $AB$ , yra  $\omega$  liestinė. Tarkime, kad tiesė  $AI$  kerta trikampio  $ABC$  apibrėžtinį apskritimą taške  $P \neq A$ . Tegul  $K$  ir  $L$  yra atitinkamai kraštinių  $AC$  ir  $AB$  vidurio taškai. Įrodykite, kad  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**5 uždavinys.** Sraigė Turbo žaidžia žaidimą lentelėje, kurią sudaro 2024 eilutės ir 2023 stulpeliai. Kažkuriuose 2022 lentelės langeliuose yra pasislėpę monstrai. Žaidimo pradžioje Turbo nežino kur tie monstrai slepiasi, tačiau žino, kad yra lygiai vienas monstras kiekvienoje eilutėje, išskyrus pirmąją ir paskutinąją eilutes, bei žino, kad kiekviename stulpelyje yra ne daugiau kaip vienas monstras. Turbo turi keletą bandymų pereiti iš pirmosios eilutės į paskutinąją. Kiekvienu savo bandymu ji gali pasirinkti bet kurį pirmosios eilutės langelį ir žingsnis po žingsnio vis pereiti į gretimą langelį, po to į šiam gretimą langelį ir t.t. Langeliai yra vadinami gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę. (Savo bandymo metu ji gali ir sugrįžti į langelį, kuriame jau buvo prieš tai.) Jei sraigė pasiekia langelį, kuriame yra monstras, tai šis jos bandymas baigiasi, ir ji turi pradėti naują savo bandymą vėl nuo pirmosios eilutės. Monstrai niekur nejuda, o Turbo prisimena ar langeliuose, kuriuose ji jau pabuvojo, yra monstrai ar jų nėra. Jei sraigėi pavyksta pasiekti paskutinąją eilutę, tai šis jos bandymas baigiasi sėkmingai, ir ji žaidimą laimi. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių  $n$ , su kuriuo Turbo turi strategiją, kuri garantuoja jai galimybę visada pasiekti paskutinąją eilutę  $n$ -tuoju bandymu arba anksčiau, kad ir kaip bebūtų išsidėstę monstrai.

**6 uždavinys.** Tegul  $\mathbb{Q}$  žymi racionaliųjų skaičių aibę. Funkcija  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  yra vadinama gražia, jei ji tenkina tokią savybę: su visais  $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{arba} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Įrodykite, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius  $c$ , kad kiekvienai gražiai funkcijai  $f$  atsiras ne daugiau kaip  $c$  skirtingų racionaliųjų skaičių, užrašomų pavidalu  $f(r) + f(-r)$  su koku nors racionaliuoju  $r$ , ir raskite mažiausią įmanomą  $c$  reikšmę.