Τρίτη, 8 Ιουλίου 2014

Πρόβλημα 1. Έστω $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ μία άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Πρόβλημα 2. Έστω $n \geq 2$ ακέραιος. Θεωρούμε έναν $n \times n$ σκακιστικό πίνακα που αποτελείται από n^2 μοναδιαία τετράγωνα. Ένας σχηματισμός από n πύργους σε αυτόν τον πίνακα είναι *ειρηνικός*, αν κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα περιέχει ακριβώς ένα πύργο. Βρείτε το μέγιστο ακέραιο k που είναι τέτοιος ώστε, για κάθε *ειρηνικό* σχηματισμό από n πύργους, υπάρχει ένα $k \times k$ τετράγωνο το οποίο δεν περιέχει πύργο σε κανένα από τα k^2 μοναδιαία τετράγωνά του.

Πρόβλημα 3. Κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ έχει $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Το σημείο H είναι το ίχνος της κάθετης από το A προς τη διαγώνιο BD. Τα σημεία S και T βρίσκονται πάνω στις πλευρές AB και AD, αντίστοιχα, έτσι ώστε το σημείο H να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου SCT και

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία BD είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου TSH.

Χρόνος διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τετάρτη, 9 Ιουλίου 2014

Πρόβλημα 4. Τα σημεία P και Q βρίσκονται πάνω στην πλευρά BC του οξυγωνίου τριγώνου ABC, έτσι ώστε $\angle PAB = \angle BCA$ και $\angle CAQ = \angle ABC$. Τα σημεία M και N βρίσκονται πάνω στις ευθείες AP και AQ, αντίστοιχα, έτσι ώστε το P να είναι το μέσο του AM και το Q να είναι το μέσο του AN. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BM και CN τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 5. Για κάθε θετικό ακέραιο n, η Τράπεζα του Κέιπ Τάουν εκδίδει κέρματα αξίας $\frac{1}{n}$. Αν δοθεί μια πεπερασμένη συλλογή τέτοιων κερμάτων (όχι απαραίτητα με διαφορετικές αξίες) με συνολική αξία το πολύ $99 + \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να χωρίσουμε αυτή τη συλλογή σε 100 ή λιγότερες ομάδες, έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει συνολική αξία το πολύ 1.

Πρόβλημα 6. Ένα σύνολο ευθειών στο επίπεδο είναι σε *γενική θέση*, αν δεν υπάρχουν δύο ευθείες του παράλληλες, ούτε τρεις ευθείες του που περνούν από το ίδιο σημείο. Ένα σύνολο ευθειών σε *γενική θέση* χωρίζει το επίπεδο σε χωρία, μερικά από τα οποία έχουν πεπερασμένο εμβαδό, που τα ονομάζουμε *πεπερασμένα χωρία* του συνόλου. Να αποδείξετε ότι για όλα τα αρκετά μεγάλα n, σε κάθε σύνολο n ευθειών σε *γενική θέση* είναι δυνατόν να χρωματίσουμε μπλε τουλάχιστον $\sqrt{n}$ από τις ευθείες, κατά τέτοιο τρόπο ώστε κανένα από τα *πεπερασμένα χωρία* του να μην έχει όλες τις πλευρές του χρωματισμένες μπλε.

Σημείωση: Αποτελέσματα στα οποία το $\sqrt{n}$ έχει αντικατασταθεί από το $c\sqrt{n}$ θα βαθμολογηθούν με μονάδες που θα εξαρτηθούν από την τιμή της σταθεράς c.

Χρόνος διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες