



Language: Macedonian

Day: 1

Петок, 10-ти јули, 2015

Задача 1. Конечно множество \mathcal{S} од точки во рамнината се нарекува *балансирано* ако за секои две различни точки A и B од множеството \mathcal{S} постои точка C од множеството \mathcal{S} таква да $AC = BC$. Множество \mathcal{S} се нарекува *бесцентрично* ако за никои три различни точки A , B и C од множеството \mathcal{S} не постои точка P во \mathcal{S} таква да $PA = PB = PC$.

- Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ постои балансирано множество кое се состои од n точки.
- Најди ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постои балансирано бесцентрично множество кое се состои од n точки.

Задача 2. Најди ги сите тројки од природни броеви (a, b, c) такви да секој од броевите

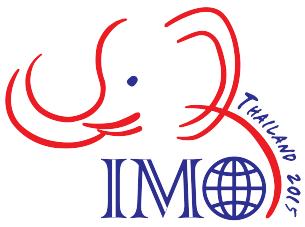
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

е степен на бројот 2.

(Степен на бројот 2 е број од обликот 2^n , каде n е ненегативен цели број.)

Задача 3. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $AB > AC$. Нека Γ е неговата описана кружница, H е неговиот ортоцентар, а F е подножјето на висината спуштена од темето A . Точкита M е средина на отсечката BC . Нека Q е точката на кружницата Γ таква да $\angle HQA = 90^\circ$, а K е точката на кружницата Γ таква да $\angle HKQ = 90^\circ$. Се претпоставува дека точките A , B , C , K и Q се меѓусебно различни и дека лежат на кружницата Γ во тој редослед.

Докажи дека описаните кружници околу триаголниците KQH и FKM се допираат.



Language: Macedonian

Day: 2

Сабота, 11-ти јули, 2015

Задача 4. Нека Ω е описаната кружница околу триаголникот ABC и O е нејзиниот центар. Кружницата Γ со центар во точката A ја сече отсечката BC во точките D и E така да точките B, D, E и C се меѓусебно различни и лежат на правата BC во тој редослед. Нека F и G се точките на пресекот на кружниците Γ и Ω , при што точките A, F, B, C и G лежат на кружницата Ω во тој редослед. Нека K е другата точка на пресекот на описаната кружница околу триаголникот BDF и отсечката AB . Нека L е другата точка на пресекот на описаната кружница околу триаголникот CGE и отсечката CA .

Се претпоставува дека правите FK и GL се различни и дека се сечат во точката X . Докажи дека точката X лежи на правата AO .

Задача 5. Со \mathbb{R} е означеното множеството на сите реални броеви. Одреди ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кои го задоволуваат равенството

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

за сите реални броеви x и y .

Задача 6. Низата од цели броеви a_1, a_2, \dots ги задоволува следните услови:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ за сите $j \geq 1$;
- (ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за сите $1 \leq k < \ell$.

Докажи дека постојат природни броеви b и N такви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

за сите цели броеви m и n за кои $n > m \geq N$.