Wtorek, 8 lipca 2014r.

Zadanie 1. Dany jest nieskończony ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$. Dowieść, że istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $n \geqslant 1$, dla której spełnione jest

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Zadanie 2. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Rozważamy szachownicę o wymiarach $n \times n$ składającą się z n^2 kwadratów jednostkowych. Konfigurację n wież na tej szachownicy nazwiemy *spokojną*, jeśli każdy wiersz i każda kolumna szachownicy zawiera dokładnie jedną wieżę. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą k taką, że dla każdej spokojnej konfiguracji n wież istnieje kwadrat o wymiarach $k \times k$ składający się z k^2 kwadratów jednostkowych nie zawierających żadnej wieży.

Zadanie 3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punkt H jest rzutem prostopadłym punktu A na prostą BD. Punkty S i T leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym H leży wewnątrz trójkąta SCT oraz

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Udowodnić, że prosta BD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie TSH.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Środa, 9 lipca 2014r.

Zadanie 4. Punkty P i Q leżą na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\angle PAB = \angle BCA$ oraz $\angle CAQ = \angle ABC$. Punkty M i N leżą odpowiednio na prostych AP i AQ, przy czym P jest środkiem odcinka AM oraz Q jest środkiem odcinka AN. Udowodnić, że proste BM i CN przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 5. Bank Kapsztadzki emituje monety o nominałach $\frac{1}{n}$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Dany jest zestaw skończenie wielu takich monet (o niekoniecznie różnych nominałach) o sumarycznej wartości nie większej niż $99+\frac{1}{2}$. Wykazać, że ten zestaw można podzielić na co najwyżej 100 grup w taki sposób, by sumaryczna wartość monet w każdej grupie nie przekraczała 1.

Zadanie 6. Zbiór prostych na płaszczyźnie jest w *położeniu ogólnym*, jeśli żadne dwie z nich nie są równoległe oraz żadne trzy z nich nie przecinają się w jednym punkcie. Zbiór prostych w położeniu ogólnym dzieli płaszczyznę na regiony. Dla takiego podziału, regiony mające skończone pole będziemy nazywać *skończonymi*. Udowodnić, że dla dostatecznie dużych n, w każdym zbiorze n prostych w położeniu ogólnym da się pokolorować co najmniej $\sqrt{n}$ prostych na niebiesko w taki sposób, by żaden skończony region utworzony przez ten zbiór prostych nie miał całkowicie niebieskiego obwodu.

Uwaga: Rozwiązania wykazujące tezę z $\sqrt{n}$ zastąpionym przez $c\sqrt{n}$ będą punktowane w zależności od wartości stałej c.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów