

ponedeljek, 9. julij 2018

Naloga 1. Naj bo Γ očrtana krožnica ostrokotnega trikotnika ABC . Točka D leži na daljici AB in točka E na daljici AC , tako da je $|AD| = |AE|$. Simetrala daljice BD seka krajši lok AB krožnice Γ v točki F , simetrala daljice CE seka krajši lok AC krožnice Γ v točki G . Dokaži, da sta premici DE in FG vzporedni ali enaki.

Naloga 2. Poišči vsa naravna števila $n \geq 3$, za katera obstajajo realna števila a_1, a_2, \dots, a_{n+2} , tako da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ in

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

za $i = 1, 2, \dots, n$.

Naloga 3. *Anti-Pascalov trikotnik* je niz števil, ki so nanizana v obliki enakostraničnega trikotnika, tako da je, razen za spodnjo vrstico, vsako število enako absolutni vrednosti razlike dveh števil, ki sta neposredno pod tem številom. Na primer, naslednji niz števil je anti-Pascalov trikotnik s štirimi vrsticami, ki vsebuje vsako naravno število od 1 do 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & & \\ & 2 & & 6 & \\ & 5 & 7 & & 1 \\ 8 & 3 & 10 & & 9 \end{array}$$

Ali obstaja anti-Pascalov trikotnik z 2018 vrsticami, ki vsebuje vsako naravno število od 1 do $1 + 2 + \dots + 2018$?

torek, 10. julij 2018

Naloga 4. *Položaj* je vsaka točka (x, y) v ravnini, za katero sta x in y naravni števili manjši ali enaki 20.

Na začetku je vseh 400 položajev nezasedenih. Ana in Bor izmenično polagata kamne na položaje, pri čemer prvi kamen položi Ana. Ana, ko je na vrsti, položi nov rdeč kamen na nezasedeni položaj, tako da je razdalja med katerikoli položajema zasedenima z rdečima kamnoma različna od $\sqrt{5}$. Bor, ko je na vrsti, položi nov moder kamen na katerikoli nezasedeni položaj. (Položaj, na katerem je moder kamen, je lahko na katerikoli razdalji od kateregakoli zasedenega položaja.) Ana in Bor prenehata polagati kamne takoj, ko katerikoli od njiju ne more položiti kamna.

Poišči največje število K , tako da lahko Ana zagotovo položi vsaj K rdečih kamnov, ne glede na to, kako polaga kamne Bor.

Naloga 5. Naj bo a_1, a_2, \dots neskončno zaporedje naravnih števil. Denimo, da obstaja naravno število $N > 1$, tako da je za vsak $n \geq N$ število

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celo število. Dokaži, da obstaja naravno število M , tako da je $a_m = a_{m+1}$ za vsako število $m \geq M$.

Naloga 6. Za konveksni štirikotnik $ABCD$ velja $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Točka X leži znotraj štirikotnika $ABCD$, tako da je

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{in} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Dokaži, da je $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.