

Teisipäev, 15. juuli 2025

**Ülesanne 1.** Nimetame sirget tasandil *päkseliseks*, kui see **ei ole** paralleelne *x*-telje, *y*-telje ega sirgega  $x + y = 0$ .

Olgu antud täisarv  $n \geq 3$ . Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud  $k$ , mille korral leiduvad tasandil  $n$  erinevat sirget, mis rahuldavad mõlemat järgmist tingimust:

- kõigi positiivsete täisarvude  $a$  ja  $b$  korral, kus  $a + b \leq n + 1$ , asub punkt  $(a, b)$  vähemalt ühel sirgetest;
- $n$  sirgest on täpselt  $k$  päkselised.

**Ülesanne 2.** Olgu ringjooned  $\Omega$  ja  $\Gamma$  vastavalt keskpunktidega  $M$  ja  $N$ , kusjuures ringjoone  $\Omega$  raadius on väiksem kui ringjoone  $\Gamma$  raadius. Ringjooned  $\Omega$  ja  $\Gamma$  lõikuvad kahes eri punktis  $A$  ja  $B$ . Sirge  $MN$  lõikub ringjoonega  $\Omega$  punktis  $C$  ja ringjoonega  $\Gamma$  punktis  $D$  nii, et punktid  $C, M, N$  ja  $D$  asuvad sirgel selles järjekorras. Olgu  $P$  kolmnurga  $ACD$  ümberringjoone keskpunkt. Sirge  $AP$  lõikub ringjoonega  $\Omega$  uesti punktis  $E \neq A$ . Sirge  $AP$  lõikub ringjoonega  $\Gamma$  uesti punktis  $F \neq A$ . Olgu  $H$  kolmnurga  $PMN$  kõrguste lõikepunkt.

Tõesta, et sirge, mis läbib punkti  $H$  ning on paralleelne sirgega  $AP$ , puutub kolmnurga  $BEF$  ümberringjoont.

**Ülesanne 3.** Olgu  $\mathbb{N}$  positiivsete täisarvude hulk. Funktsiooni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  nimetatakse *bonzaks*, kui

$$f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}$$

kõigi positiivsete täisarvude  $a$  ja  $b$  korral.

Leia vähim reaalarvuline konstant  $c$ , mille korral  $f(n) \leq cn$  kõigi bonza funktsionide  $f$  ja kõigi positiivsete täisarvude  $n$  jaoks.

Kolmapäev, 16. juuli 2025

**Ülesanne 4.** Positiivse täisarvu  $N$  pärisjagajaks nimetame arvu  $N$  positiivset jagajat, mis ei ole arv  $N$  ise.

Lõpmatus positiivsete täisarvude jadas  $a_1, a_2, \dots$  on igal liikmel vähemalt kolm pärisjagajat. Iga  $n \geq 1$  korral on arv  $a_{n+1}$  arvu  $a_n$  kolme suurima pärisjagaja summa.

Leia kõik võimalikud  $a_1$  väärused.

**Ülesanne 5.** Andres ja Birgit mängivad *Austraalia mängu*, mille reeglid sõltuvad positiivse reaalarvu  $\lambda$  väärustest. Mõlemad mängijad teavad  $\lambda$  väärust. Mängu  $n$ -dal käigul (esimesel käigul  $n = 1$ ) toimub järgnev:

- Kui  $n$  on paaritu, siis valib Andres sellise mittenegatiivse reaalarvu  $x_n$ , et

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Kui  $n$  on paaris, siis valib Birgit sellise mittenegatiivse reaalarvu  $x_n$ , et

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Kui mängija ei saa sobilikku arvu  $x_n$  valida, siis mäng lõppeb ning teine mängija võidab. Kui mäng kestab igavesti, siis ei võida kumbki mängija. Mõlemad mängijad teavad kõiki mängu jooksul valitud arve.

Leia kõik  $\lambda$  väärused, mille korral leidub Andresel võitev strateegia, ning kõik  $\lambda$  väärused, mille korral leidub Birgilil võitev strateegia.

**Ülesanne 6.** Vaatleme  $2025 \times 2025$  ruudustikku. Matilda tahab ruudustikule asetada mõned ristkülikud (võib-olla erinevate mõõtmetega) selliselt, et iga ristküliku iga külg asub täielikult mõnel ruudustiku joonel ning iga ühikruut on kaetud ülimalt ühe ristkülikuga.

Leia vähim arv ristkülikuid, mida Matilda peab ruudustikule asetama, et ruudustiku igas reas ja igas veerus oleks täpselt üks ühikruut, mida ei kata ükski ristkülik.