Martedì 8 luglio 2014

Problema 1. Sia $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una successione infinita di interi positivi.

Dimostrare che esiste un unico intero $n \geq 1$ tale che

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Sia $n \geq 2$ un intero. Consideriamo una scacchiera $n \times n$ formata da n^2 quadratini unitari. Una configurazione di n torri su questa scacchiera si dice *pacifica* se ogni riga ed ogni colonna contiene esattamente una torre.

Determinare il più grande intero positivo k tale che, per ogni configurazione pacifica di n torri, esiste un quadrato $k \times k$ che non contiene torri in nessuno dei suoi k^2 quadratini unitari.

Problema 3. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso in cui $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Sia H il piede della perpendicolare condotta da A a BD. I punti S e T appartengono ai lati AB e AD, rispettivamente, e sono tali che H è interno al triangolo SCT e

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Dimostrare che la retta BD è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo TSH.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Mercoledì, 9 luglio 2014

Problema 4. I punti P e Q appartengono al lato BC del triangolo acutangolo ABC e sono tali che $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. I punti M ed N appartengono alle rette AP e AQ, rispettivamente, e sono tali che P è il punto medio di AM, e Q è il punto medio di AN.

Dimostrare che il punto di intersezione delle rette BM e CN appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Problema 5. Per ogni intero positivo n, la Banca di Cape Town emette monete di valore $\frac{1}{n}$. Data una collezione finita di tali monete (non necessariamente di valori diversi) con valore totale non superiore a $99 + \frac{1}{2}$, dimostrare che è possibile suddividere la collezione in al più 100 gruppi, ciascuno dei quali ha valore totale al più 1.

Problema 6. Un insieme di rette nel piano si dice in *posizione generale* se non contiene due rette parallele né tre rette che passano per uno stesso punto. Un insieme di rette in posizione generale suddivide il piano in regioni, alcune delle quali hanno area finita. Queste regioni sono dette le *regioni finite* dell'insieme.

Dimostrare che, per ogni n sufficientemente grande, in ogni insieme di n rette in posizione generale è possibile colorare di blu almeno $\sqrt{n}$ delle sue rette in modo che nessuna regione finita dell'insieme abbia bordo interamente blu.

Nota: Soluzioni con $c\sqrt{n}$ invece di $\sqrt{n}$ saranno valutate a seconda del valore di c.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti