

tiistai, 15. heinäkuuta 2025

Tehtävä 1. Tasossa oleva suora on *aurinkoinen*, jos se **ei ole** yhdensuuntainen x -akselin, y -akselin tai suoran $x + y = 0$ kanssa.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Määritä kaikki epänegatiiviset kokonaisluvut k siten, että tasosta löytyy n eri suoraa, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b , joilla $a + b \leq n + 1$, piste (a, b) sijaitsee vähintään yhdellä suorista
- suorista täsmälleen k ovat aurinkoisia.

Tehtävä 2. Olkoon Ω ympyrä, jonka keskipiste on M , ja olkoon Γ ympyrä, jonka keskipiste on N . Oletetaan lisäksi, että ympyrän Ω säde on pienempi kuin ympyrän Γ säde. Ympyrät Ω ja Γ leikkaavat pisteissä A ja B , missä $A \neq B$. Suora MN leikkaa ympyrän Ω pisteessä C , ja ympyrän Γ pisteessä D siten, että pisteet C, M, N ja D ovat suoralla MN , tassä järjestyksessä. Olkoon P kolmion ACD ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Suora AP leikkaa ympyrän Ω jälleen pisteessä $E \neq A$. Suora AP leikkaa ympyrän Γ jälleen pisteessä $F \neq A$. Olkoon H kolmion PMN ortokeskus.

Osoita, että pisteen H kautta kulkeva, suoran AP kanssa yhdensuuntainen suora sivuaa kolmion BEP ympäri piirrettyä ympyrää.

(Kolmion *ortokeskus* on tämän korkeusjanojen leikkauspiste.)

Tehtävä 3. Olkoon \mathbb{N} positiivisten kokonaislukujen joukko. Funktio $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on *nasta*, jos

$$f(a) \text{ jakaa luvun } b^a - f(b)^{f(a)}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b .

Määritä pienin reaaliluku c siten, että $f(n) \leq cn$ kaikilla nastoilla funktioilla f ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .

keskiviikko, 16. heinäkuuta 2025

Tehtävä 4. Positiivisen kokonaisluvun N aito jakaja on luvun N positiivinen jakaja, joka ei ole N itse.

Äärettömän positiivisten kokonaislukujen jonon a_1, a_2, \dots jokaisella jäsenellä on vähintään kolme aitoa jakajaa. Kaikilla $n \geq 1$ luku a_{n+1} on luvun a_n kolmen suurimman aidon jakajan summa.

Määritä mahdolliset lukujonon jäsenen a_1 arvot.

Tehtävä 5. Alisa ja Bazza pelaavat *koalarajapeliä*. Kaksinpelin säätöt riippuvat kummankin pelaajan tiedossa olevasta positiivisesta reaaliluvusta λ . Pelin vuorolla n (peli alkaa vuorosta $n = 1$) toimitaan seuraavasti:

- Jos n on pariton, Alisa valitsee epänegatiivisen reaaliluvun x_n siten, että

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Jos n on parillinen, Bazza valitsee epänegatiivisen reaaliluvun x_n siten, että

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Jos jompikumpi pelaajista ei voi valita sopivaa lukua x_n , peli loppuu muun pelaajan voittoon. Jos peli jatkuu loputtomasti, kumpikaan pelaajista ei voita. Kaikki valitut luvut ovat kummankin pelaajan tiedossa.

Määritä ne luvun λ arvot, joilla Alisalla on voittostrategia, ja ne luvun λ arvot, joilla Bazzalla on voittostrategia.

Tehtävä 6. Tarkastellaan 2025×2025 -ruudukkoa. Matilda asettaa ruudukolle vaihtelevankokoisia suorakulmion muotoisia laattoja siten, että jokaisen laatan reunat asettuvat ruudukon viivoille ja että jokaisen ruudun peittää enintään yksi laatta.

Määritä pienin laattojen lukumäärä, jolla Matilda voi asettaa laatat siten, että ruudukon jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ruutu, jota ei peitä mikään laatta.