

*e martë, 15. korrik 2025*

**Problem 1.** Një drejtëz në rrafsh quhet *e mirë* nëse **nuk** është paralele as me boshtin  $x$ , as me boshtin  $y$ , dhe as me drejtëzën  $x + y = 0$ .

Le të jetë  $n \geq 3$  një numër i plotë i dhënë. Gjeni të gjithë numrat e plotë jonegativë  $k$  të tillë që ekzistojnë  $n$  drejtëza të ndryshme në rrafsh që plotësojnë njëkohësisht kushtet në vijim:

- për të gjithë numrat natyrorë  $a$  dhe  $b$  të tillë që  $a + b \leq n + 1$ , pika  $(a, b)$  është të paktën në një nga drejtëzat; dhe
- saktësisht  $k$  nga  $n$  drejtëzat janë të mira.

**Problem 2.** Le të jenë  $\Omega$  dhe  $\Gamma$  rrathët me qendra  $M$  dhe  $N$ , përkatësisht, të tillë që rrezja e  $\Omega$  është më e vogël se rrezja e  $\Gamma$ . Supozojmë se rrathët  $\Omega$  dhe  $\Gamma$  priten në dy pika të ndryshme  $A$  dhe  $B$ . Drejtëza  $MN$  pret  $\Omega$  në  $C$  dhe  $\Gamma$  në  $D$ , të tilla që pikat  $C$ ,  $M$ ,  $N$  dhe  $D$  ndodhen në drejtëz në këtë renditje. Le të jetë  $P$  qendra e rrethit të jashtëshkruar  $ACD$ . Drejtëza  $AP$  pret  $\Omega$  përsëri në  $E \neq A$ . Drejtëza  $AP$  pret  $\Gamma$  përsëri në  $F \neq A$ . Le të jetë  $H$  ortogendra e trekëndëshit  $PMN$ .

Tregoni që drejtëza që kalon nëpër pikën  $H$  dhe paralele me  $AP$  është tangjente në rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit  $BEF$ .

(*Ortogendër* e një trekëndëshi është pikëprerja e lartësive të tij.)

**Problem 3.** Le të shënojmë me  $\mathbb{N}$  bashkësinë e numrave natyrorë. Një funksion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  quhet *fantastik* nëse

$$f(a) \text{ e pjesëton } b^a - f(b)^{f(a)}$$

për të gjithë numrat natyrorë  $a$  dhe  $b$ .

Gjeni konstanten më të vogël reale  $c$  të tillë që  $f(n) \leq cn$  për të gjitha funksionet fantastike  $f$  dhe të gjithë numrat natyrorë  $n$ .

*e mërkurë, 16. korrik 2025*

**Problem 4.** Një *pjesëtues i duhur* i një numri natyror  $N$  është një pjesëtues pozitiv i  $N$  i ndryshëm nga vetë  $N$ .

Vargu i pafundëm  $a_1, a_2, \dots$  përbëhet nga numra natyrorë, ku secili prej tyre ka të paktën tre pjesëtues të duhur. Për çdo  $n \geq 1$ , termi  $a_{n+1}$  është i barabartë me shumën e tre pjesëtuesëve të duhur më të mëdhenj të  $a_n$ .

Gjeni të gjitha vlerat e mundshme të  $a_1$ .

**Problem 5.** Ana dhe Beni po luajnë *lojën inekoalaty*, një lojë me dy lojtarë, ku rregullat varen nga numri pozitiv real  $\lambda$  që është i njohur për të dy lojtarët. Në hapin e  $n$ -të të lojës (duke filluar me  $n = 1$ ) ndodh si në vijim:

- Nëse  $n$  është tek, Ana zgjedh një numër real jonegativ  $x_n$  të tillë që

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Nëse  $n$  është çift, Beni zgjedh një numër real jonegativ  $x_n$  të tillë që

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Nëse njëri lojtar nuk mundet të zgjedhë një numër të përshtatshëm  $x_n$ , loja përfundon dhe lojtari tjetër fiton. Nëse loja vazhdon pafundësisht, asnjëri nga lojtarët nuk fiton. Të gjithë numrat e zgjedhur janë të njohur nga dy lojtarët.

Gjeni të gjitha vlerat e  $\lambda$  për të cilat Ana ka strategji fituese dhe të gjitha vlerat e  $\lambda$  për të cilat Beni ka strategji fituese.

**Problem 6.** Konsiderojmë tabelën  $2025 \times 2025$  të përbërë nga katrorë njësi. Matilda dëshiron që të vendosë në tabelë disa pllaka drejtkëndore, jo detyrimisht me përmasa të njejta, të tilla që brinjët e pllakës janë paralele me brinjët e tabelës dhe çdo kulm i pllakës ndodhet në kulmin e një prej katrorëve njësi, si dhe çdo katror njësi të mbulohet nga e shumta një pllakë.

Gjeni numrin më të vogël të pllakave që Matilda duhet të vendosë në mënyrë që çdo rresht dhe çdo shtyllë të ketë saktësisht një katror njësi që nuk është mbuluar nga ndonjë pllakë.