

*Esmaspäev, 21. september 2020*

**Ülesanne 1.** Vaatleme kumerat nelinurka  $ABCD$ . Punkt  $P$  asub nelinurga  $ABCD$  sisepiirkonnas. Kehtivad järgmised seosed:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Tõesta, et järgmised kolm sirget lõikuvad ühes punktis: nurkade  $\angle ADP$  ja  $\angle PCB$  sisenurgapoolitajad ning lõigu  $AB$  keskristsirge.

**Ülesanne 2.** Reaalarvud  $a, b, c, d$  rahuldavad tingimusi  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  ning  $a + b + c + d = 1$ . Tõesta, et

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

**Ülesanne 3.** On antud  $4n$  kivikest kaaludega  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Iga kivike on värvitud ühega  $n$  värvist ning igat värvi kivikesi on neli tükki. Näita, et kõik kivikesed on võimalik jagada kahte hunnikusse selliselt, et on täidetud mõlemad järgmised tingimused:

- Hunnikute kogukaalud on võrdsed.
- Kummaski hunnikus on igast värvist täpselt kaks kivikest.

*Teisipäev, 22. september 2020*

**Ülesanne 4.** Antud on täisarv  $n > 1$ . Mäenõlval on  $n^2$  jaama, igaüks erineval kõrgusel. Kaks köisraudteefirmat,  $A$  ja  $B$ , opereerivad kumbki  $k$  gondliga; iga gondliga saab sõita mingist kindlast jaamast mingisse kindlasse kõrgemal asuvasse jaama (ilma vahepeatusteta). Firma  $A$  kõigil  $k$  gondlil on kokku  $k$  erinevat algus- ja  $k$  erinevat lõppjaama ning gondel, mis alustab kõrgemalt, ka lõpetab kõrgemal. Samad tingimused kehtivad firma  $B$  jaoks. Me ütleme, et kaks jaama on firma poolt *ühendatud*, kui on võimalik alustada madalamast jaamast ja jõuda kõrgemasse, kasutades ühte või rohkemat selle firma gondlit (muud liikumised jaamade vahel pole lubatud).

Leia vähim positiivne täisarv  $k$ , mille jaoks on garanteeritud, et leiduvad kaks jaama, mis on ühendatud mõlema firma poolt.

**Ülesanne 5.** Antud on pakk  $n > 1$  kaardiga. Igale kaardile on kirjutatud positiivne täisarv. Pakil on järgmine omadus: iga kaardipaari arvude aritmeetiline keskmine on mingi hulga (ühe või enama) kaartide arvude geomeetriline keskmine.

Milliste  $n$  väärtuste korral tähendab see, et kõik arvud kaartidel on võrdsed?

**Ülesanne 6.** Tõesta, et leidub positiivne konstant  $c$ , mille korral kehtib järgmine väide:

Vaatleme täisarvu  $n > 1$  ja  $n$  punktist koosnevat hulka  $\mathcal{S}$  tasandil, mille puhul mistahes kahe hulga  $\mathcal{S}$  punkti vaheline kaugus on vähemalt 1. Siis leidub hulka  $\mathcal{S}$  jagav sirge  $\ell$ , nii et hulga  $\mathcal{S}$  iga punkti kaugus sirgest  $\ell$  on vähemalt  $cn^{-1/3}$ .

(Sirge  $\ell$  jagab punktihulka  $\mathcal{S}$ , kui hulga  $\mathcal{S}$  mingeid kahte punkti ühendav lõik lõikub sirgega  $\ell$ .)

*Märkus.* Nõrgemad tulemused, kus  $cn^{-1/3}$  on asendatud suurusega  $cn^{-\alpha}$ , võivad saada punkte olenevalt konstandi  $\alpha > 1/3$  väärtusest.