Þirðjudagur, 16. júlí, 2019

Dæmi 1. Látum $\mathbb{Z}$ vera mengi heiltalnanna. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ þannig að fyrir allar heiltölur a og b gildi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Dæmi 2. Í þríhyrningi ABC liggja punkturinn A_1 á hliðinni BC og punkturinn B_1 á hliðinni AC. Látum P og Q vera punkta á strikunum AA_1 og BB_1, í þeirri röð, þannig að PQ sé samsíða AB. Látum P_1 vera punkt á línunni PB_1 þannig að B_1 liggur á milli P og P_1 og $\angle PP_1C = \angle BAC$. Látum einnig Q_1 vera punkt á línunni QA_1 þannig að A_1 liggur á milli Q og Q_1 og $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Sannið að punktarnir P, Q, P_1 og Q_1 liggi á sama hring.

Dæmi 3. Á samfélagsmiðli eru 2019 notendur þar sem sum pör af notendum eru vinir. Alltaf þegar notandi A er vinur notanda B þá er notandi B einnig vinur notanda A. Atburðir af eftirfarandi toga geta verið endurteknir hver á eftir öðrum:

> Þrír notendur A, B og C þannig A er bæði vinur B og C en B og C eru ekki vinir, breyta vinskap sýnum þannig að B og C eru nú vinir, en A er ekki lengur vinur B og ekki lengur vinur C. Öll önnur vinatengsli eru óbreytt.

Í upphafi eru 1010 notendur sem eiga 1009 vini hver og 1009 notendur sem eiga 1010 vini hver. Sannið að til sé röð slíkra atburða þannig að að henni lokinni sé hver notandi í mesta lagi vinur eins annars notanda.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er 7 stiga virði

Miðvikudagur, 17. júlí, 2019

Dæmi 4. Finnið öll pör (k, n) af jákvæðum heiltölum þannig að

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Dæmi 5. Bankinn í Bath slær mynt sem hefur H á annarri hliðinni og T á hinni. Harry er með n slíkar myntir raðaðar í röð frá vinstri til hægri. Hann endurtekur eftirfarandi aðgerðir: Ef fjöldi mynta þannig að H snýr upp er nákvæmlega $k > 0$ þá snýr hann við myntinni sem er sú k-ta frá vinstri; Annars snýr T upp á öllum myntunum og hann hættir. Til dæmis ef $n = 3$ og hann byrjar með THT verða aðgerðirnar $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ sem hættir eftir þrjár aðgerðir.

(a) Sýnið að fyrir sérhverja upphafsstöðu mun Harry hætta eftir endanlega margar aðgerðir.

(b) Fyrir sérhverja upphafsstöðu C látum við $L(C)$ vera fjölda aðgerða áður en Harry hættir. Til dæmis er $L(THT) = 3$ og $L(TTT) = 0$. Ákvarðið meðaltalið af $L(C)$ yfir allar 2^n mögulegar upphafsstöður C.

Dæmi 6. Látum I vera miðju innritaðs hrings í hvasshyrndum þríhyrningi ABC með $AB \neq AC$. Innritaði hringurinn ω í ABC snertir hliðarnar BC, CA og AB í D, E og F, í þeirri röð. Línan í gegnum D hornrétt á EF sker ω aftur í R. Línan AR sker ω aftur í P. Umrituðu hringir þríhyrninganna PCE og PBF skerast aftur í Q.

Sannið að línurnar DI og PQ skerast á línu í gegnum A hornrétt á AI.