Sábado, 8 julho 2023

Problema 1. Determine todos os números inteiros $n > 1$ compostos que satisfazem a seguinte propriedade: se $d_1, d_2, \ldots, d_k$ são todos os divisores positivos de n com $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, então d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Seja Ω o circuncírculo de ABC. Seja S o ponto médio do arco CB de Ω contendo A. A reta perpendicular a BC que passa por A intersecta o segmento BS em D e intersecta Ω novamente em $E \neq A$. A reta paralela a BC que passa por D intersecta a reta BE em L. Denote o circuncírculo do triângulo BDL por ω. A circunferência ω intersecta Ω novamente em $P \neq B$.
Prove que a reta tangente a ω em P intersecta a reta BS num ponto sobre a bissetriz interna de $\angle BAC$.

Problema 3. Para cada inteiro $k \geqslant 2$, determine todas as sequências infinitas de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ para as quais existe um polinómio P da forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, em que $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ são inteiros não negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

para todo inteiro $n \geqslant 1$.

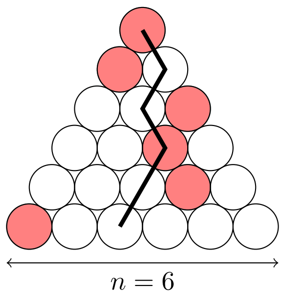
Domingo, 9 julho 2023

Problema 4. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ números reais positivos, distintos dois a dois, tais que

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

é um inteiro para todo $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Prove que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo. Um *triângulo japonês* consiste em $1 + 2 + \cdots + n$ círculos iguais formando um triângulo equilátero tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a i-ésima linha contém exatamente i círculos, com exatamente um deles pintado de vermelho. Um *caminho ninja* num triângulo japonês é uma sequência de n círculos começando com o círculo da primeira linha e indo sucessivamente de um círculo para um dos dois círculos imediatamente abaixo dele e terminando na última linha. Na figura seguinte há um exemplo de um triângulo japonês com $n = 6$, no qual há um caminho ninja contendo dois círculos vermelhos.



Em função de n, encontre o maior k tal que em qualquer triângulo japonês existe um caminho ninja contendo pelo menos k círculos vermelhos.

Problema 6. Seja ABC um triângulo equilátero. Sejam A_1, B_1, C_1 pontos no interior de ABC tais que $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ e

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°.$$

As retas BC_1 e CB_1 se intersectam em A_2, as retas CA_1 e AC_1 se intersectam em B_2 e as retas AB_1 e BA_1 se intersectam em C_2.
Prove que, se o triângulo $A_1B_1C_1$ é escaleno, então os três circuncírculos dos triângulos AA_1A_2, BB_1B_2 e CC_1C_2 possuem dois pontos em comum.

(Nota: um triângulo escaleno é um triângulo que não possui dois lados com a mesma medida.)