Maandag 9 juli 2018

Opgave 1. Zij Γ de omgeschreven cirkel van een scherphoekige driehoek ABC. De punten D en E liggen respectievelijk op de lijnstukken AB en AC zodanig dat $|AD| = |AE|$. De middelloodlijn van BD snijdt de boog AB van Γ die C niet bevat in het punt F. De middelloodlijn van CE snijdt de boog AC van Γ die B niet bevat in het punt G.
Bewijs dat de lijnen DE en FG evenwijdig zijn (of samenvallen).

Opgave 2. Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 3$ waarvoor er reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ bestaan zodanig dat $a_{n+1} = a_1$ en $a_{n+2} = a_2$ en

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

voor alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Opgave 3. Een *anti-driehoek van Pascal* is een plaatsing van getallen in de vorm van een gelijkzijdige driehoek zodanig dat het volgende geldt: op de getallen in de onderste rij na, is elk getal de absolute waarde van het verschil van de twee getallen er direct onder. Bijvoorbeeld, de volgende plaatsing van getallen is een anti-driehoek van Pascal met vier rijen die elk geheel getal van 1 tot en met 10 bevat.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Bestaat er een anti-driehoek van Pascal met 2018 rijen die elk geheel getal van 1 tot en met $1 + 2 + \cdots + 2018$ bevat?

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

Dinsdag 10 juli 2018

Opgave 4. Een *plek* is een punt (x, y) in het vlak zodat x en y beide gehele getallen zijn met $1 \leqslant x, y \leqslant 20$.
Bij aanvang zijn alle 400 plekken leeg. Albert en Beatrix plaatsen om de beurt een steen, waarbij Albert begint. Als Albert aan de beurt is, plaatst hij een nieuwe rode steen op een lege plek zodanig dat de afstand tussen elke twee plekken met een rode steen niet gelijk is aan $\sqrt{5}$. Als Beatrix aan de beurt is, plaatst zij een nieuwe blauwe steen op een lege plek. (Een plek met een blauwe steen mag op willekeurige afstand van een andere niet-lege plek liggen.) Ze stoppen zodra een speler geen steen meer kan plaatsen.
Bepaal de grootste K zodanig dat Albert gegarandeerd minstens K rode stenen kan plaatsen, hoe Beatrix haar blauwe stenen ook plaatst.

Opgave 5. Zij $a_1, a_2, \ldots$ een oneindige rij (strikt) positieve gehele getallen. Veronderstel dat er een geheel getal $N > 1$ bestaat zodanig dat, voor elke $n \geqslant N$, het getal

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

een geheel getal is.
Bewijs dat er een (strikt) positief geheel getal M bestaat zodat $a_m = a_{m+1}$ voor alle $m \geqslant M$.

Opgave 6. Een convexe vierhoek $ABCD$ voldoet aan $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Het punt X ligt binnen $ABCD$ zodanig dat

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{en} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Bewijs dat $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard