الأثنين 9 يوليو 2018

المسألة 1.

لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث الحاد الزاويا ABC . النقطتان D و E تقعان على القطعتين AB و AC على الترتيب بحيث $AD = AE$. العمودان المنصفان للقطعتين BD و CE يتقاطعان مع القوسين الصغيرين AB و AC من الدائرة Γ في النقطتين F و G على الترتيب. أثبت أن المستقيمين DE و FG متوازيان.

المسألة 2.

أوجد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 3$ بحيث توجد أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ ، تحقق $a_{n+1} = a_1$ و $a_{n+2} = a_2$ و

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

المسألة 3.

نعرّف مثلث باسكال العكسي بأنه صفيف من الأعداد على هيئة مثلث متساوي الأضلاع بحيث كل عدد يساوي الفرق الموجب للعددين اللذين يقعان تحته مباشرة ماعدا، الصف الأخير. المثال أدناه هو مثلث باسكال عكسي بأربعة صفوف و يحوي الأعداد من 1 إلى 10

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

هل من الممكن إيجاد مثلث باسكال عكسي يحوي 2018 من الصفوف بحيث توجد فيه جميع الأعداد من 1 إلى $1 + 2 + \ldots + 2018$؟

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال

الثلاثاء 10 يوليو 2018

المسألة 4.

نعرّف الموقع بأنه نقطة (x,y) في المستوي بحيث x,y عددان صحيحان موجبان أقل من أو يساوي 20.

بدايةً جميع المواقع و التي عددها 400 خالية. أحلام و بدر يتبادلان الأدوار في اللعب حيث البداية لأحلام. عندما يأتي الدور على أحلام فإنها تقوم بوضع حجر جديد لونه أحمر على موقع خالٍ بحيث أن المسافة بين أي موقعين يحويان حجراً أحمراً لا تساوي $\sqrt{5}$. عندما يأتي الدور على بدر فإنه يضع حجراً جديداً لونه أزرق في أي موقع خالٍ (لا توجد قيود على المسافة بين موقع الحجر الأزرق الجديد و أي مواقع أخرى فيها أحجار مهما كان اللون). اللعبة تنتهي عندما لا يستطيع أي من اللاعبين أن يضيف حجراً جديداً.

أوجد أكبر قيمة للعدد K بحيث تضمن أحلام أنها تستطيع أن تضع على الأقل K من الأحجار الحمراء بغض النظر عن الأماكن التي يضع فيها بدر أحجاره الزرقاء.

المسألة 5.

لتكن $a_1, a_2, \ldots$ متتابعة غير منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة. لنفرض وجود عدد صحيح $N > 1$ بحيث لكل $n \geq N$، يكون المقدار

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

عدداً صحيحاً. أثبت وجود عدد صحيح موجب M بحيث $a_m = a_{m+1}$ لكل $m \geq M$.

المسألة 6.

ليكن $ABCD$ رباعياً محدباً فيه $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. النقطة X تقع داخل الرباعي $ABCD$ بحيث:

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ و } \angle XBC = \angle XDA$$

أثبت أن $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال