

12. juli 2006

Opgave 1. Lad ABC være en trekant, og lad I være centrum i den indskrevne cirkel. Et punkt P i det indre af trekanten opfylder

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at lighed gælder hvis og kun hvis $P = I$.

Opgave 2. Lad P være en regulær 2006-kant. En diagonal i P kaldes *god* hvis dens endepunkter deler randen af P i to dele begge bestående af et ulige antal kanter fra P . Kanterne i P kaldes også *gode*.

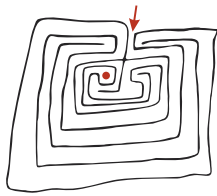
P deles op i 2003 trekanter af diagonaler der parvis ikke har skæringspunkter i det indre af P . Find det maksimale antal ligebenede trekanter med to gode sider, der kan fremkomme ved en sådan opdeling.

Opgave 3. Bestem det mindste reelle tal M sådan at uligheden

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gælder for alle reelle tal a , b og c .

*Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd*



13. juli 2006

Opgave 4. Bestem alle par af heltal (x, y) sådan at:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Opgave 5. Lad $P(x)$ være et polynomium af grad $n > 1$ med heltallige koefficienter. Lad k være et positivt heltal. Betragt polynomiummet $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, hvor P optræder k gange. Bevis at der eksisterer højst n forskellige heltal t sådan at $Q(t) = t$.

Opgave 6. Tildel til hver kant b i et konvekst polygon P det maximale areal af en trekant liggende inde i P og med b som en kant. Vis at summen af de tildelte arealer er mindst to gange arealet af P .

*Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd*