

*tiistai, 15. heinäkuuta 2025*

**Tehtävä 1.** Tasossa oleva suora on *aurinkoinen*, jos se **ei ole** yhdensuuntainen  $x$ -akselin,  $y$ -akselin tai suoran  $x + y = 0$  kanssa.

Olkoon  $n \geq 3$  kokonaisluku. Määritä kaikki epänegatiiviset kokonaisluvut  $k$  siten, että tasosta löytyy  $n$  eri suoraa, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$ , joilla  $a + b \leq n + 1$ , piste  $(a, b)$  sijaitsee vähintään yhdellä suorista
- suorista täsmälleen  $k$  ovat aurinkoisia.

**Tehtävä 2.** Olkoon  $\Omega$  ympyrä, jonka keskipiste on  $M$ , ja olkoon  $\Gamma$  ympyrä, jonka keskipiste on  $N$ . Oletetaan lisäksi, että ympyrän  $\Omega$  säde on pienempi kuin ympyrän  $\Gamma$  säde. Ympyrät  $\Omega$  ja  $\Gamma$  leikkaavat pisteissä  $A$  ja  $B$ , missä  $A \neq B$ . Suora  $MN$  leikkaa ympyrän  $\Omega$  pisteessä  $C$ , ja ympyrän  $\Gamma$  pisteessä  $D$  siten, että pisteet  $C$ ,  $M$ ,  $N$  ja  $D$  ovat suoralla  $MN$ , tässä järjestyksessä. Olkoon  $P$  kolmion  $ACD$  ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Suora  $AP$  leikkaa ympyrän  $\Omega$  jälleen pisteessä  $E \neq A$ . Suora  $AP$  leikkaa ympyrän  $\Gamma$  jälleen pisteessä  $F \neq A$ . Olkoon  $H$  kolmion  $PMN$  ortokeskus.

Osoita, että pisteen  $H$  kautta kulkeva, suoran  $AP$  kanssa yhdensuuntainen suora sivuaa kolmion  $BEF$  ympäri piirrettyä ympyrää.

(Kolmion *ortokeskus* on tämän korkeusjanojen leikkauspiste.)

**Tehtävä 3.** Olkoon  $\mathbb{N}$  positiivisten kokonaislukujen joukko. Funktio  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  on *nasta*, jos

$$f(a) \text{ jakaa luvun } b^a - f(b)^{f(a)}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$ .

Määritä pienin reaaliluku  $c$  siten, että  $f(n) \leq cn$  kaikilla nastoilla funktioilla  $f$  ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ .

*keskiviikko, 16. heinäkuuta 2025*

**Tehtävä 4.** Positiivisen kokonaisluvun  $N$  *aito jakaja* on luvun  $N$  positiivinen jakaja, joka ei ole  $N$  itse.

Äärettömän positiivisten kokonaislukujen jonon  $a_1, a_2, \dots$  jokaisella jäsenellä on vähintään kolme aitoa jakajaa. Kaikilla  $n \geq 1$  luku  $a_{n+1}$  on luvun  $a_n$  kolmen suurimman aidon jakajan summa.

Määritä mahdolliset lukujonon jäsenen  $a_1$  arvot.

**Tehtävä 5.** Alisa ja Bazza pelaavat *koalarajapeliä*. Kaksinpelin säännöt riippuvat kummankin pelaajan tiedossa olevasta positiivisesta reaaliluvusta  $\lambda$ . Pelin vuorolla  $n$  (peli alkaa vuorosta  $n = 1$ ) toimitaan seuraavasti:

- Jos  $n$  on pariton, Alisa valitsee epänegatiivisen reaaliluvun  $x_n$  siten, että

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Jos  $n$  on parillinen, Bazza valitsee epänegatiivisen reaaliluvun  $x_n$  siten, että

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Jos jompikumpi pelaajista ei voi valita sopivaa lukua  $x_n$ , peli loppuu muun pelaajan voittoon. Jos peli jatkuu loputtomasti, kumpikaan pelaajista ei voita. Kaikki valitut luvut ovat kummankin pelaajan tiedossa.

Määritä ne luvun  $\lambda$  arvot, joilla Alisalla on voittostrategia, ja ne luvun  $\lambda$  arvot, joilla Bazzalla on voittostrategia.

**Tehtävä 6.** Tarkastellaan  $2025 \times 2025$ -ruudukkoa. Matilda asettaa ruudukolle vaihtelevankokoisia suorakulmion muotoisia laattoja siten, että jokaisen laatan reunat asettuvat ruudukon viivoille ja että jokaisen ruudun peittää enintään yksi laatta.

Määritä pienin laattojen lukumäärä, jolla Matilda voi asettaa laatat siten, että ruudukon jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ruutu, jota ei peitä mikään laatta.