e martë, 16. korrik 2024

Problem 1. Gjeni të gjithë numrat realë α të tillë që për çdo numër të plotë pozitiv n, numri i plotë

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

plotpjesëtohet me n. (Shënim: $\lfloor z \rfloor$ paraqet numrin më të madh të plotë që është më i vogël ose i barabartë me z. Për shembull, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dhe $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Problem 2. Gjeni të gjithë çiftet e numrave të plotë pozitivë (a, b) për të cilët ekzistojnë numrat e plotë pozitivë g dhe N të tillë që

$$pmp(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

vlen për të gjithë numrat e plotë pozitivë $n \geqslant N$. (Shënim: $pmp(x, y)$ paraqet pjesëtuesin më të madh të përbashkët të numrave të plotë pozitivë x dhe y.)

Problem 3. Le të jetë $a_1, a_2, a_3, \ldots$ një varg i pafundëm numrash të plotë pozitivë, dhe le të jetë N një numër i plotë pozitiv. Supozojmë se, për çdo $n > N$, a_n është e barabartë me numrin e herëve që a_{n-1} paraqitet në listën $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Vërtetoni se të paktën një nga vargjet $a_1, a_3, a_5, \ldots$ dhe $a_2, a_4, a_6, \ldots$ është eventualisht periodik.

(Një varg i pafundëm $b_1, b_2, b_3, \ldots$ është *eventualisht periodik* nëse ekzistojnë numrat e plotë pozitivë p dhe M të tillë që $b_{m+p} = b_m$ për çdo $m \geqslant M$.)

e mërkurë, 17. korrik 2024

Problem 4. Le të jetë ABC një trekëndësh me $AB < AC < BC$. Le të jenë I dhe ω përkatësisht qendra e rrethit të brendashkruar dhe rrethi i brendashkruar i trekëndëshit ABC. Le të jetë X pika në drejtëzën BC, e ndryshme nga C, e tillë që drejtëza paralele me AC që kalon në pikën X, është tangjente me ω. Në mënyrë të ngjashme, le të jetë Y pika në drejtëzën BC, e ndryshme nga B, e tillë që drejtëza paralele me AB që kalon në pikën Y, është tangjente me ω. Drejtëza AI pret rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit ABC përsëri në pikën $P \neq A$. Le të jenë K dhe L përkatësisht meset e segmenteve AC dhe AB. Vërtetoni se $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problem 5. Kërmilli Turbo luan një lojë në tabelën me 2024 rreshta dhe 2023 shtylla. Në 2022 kutia të tabelës janë të fshehur nga një përbindësh. Fillimisht, Turbo nuk e di vendndodhjen e asnjë prej përbindëshave, por ai di se ndodhet saktësisht një përbindësh në secilin rresht, përveç rreshtit të parë dhe të fundit, si dhe në secilën shtyllë ndodhet jo më shumë se një përbindësh.

Turbo bën një seri përpjekjesh për të shkuar nga rreshti i parë në rreshtin e fundit. Në secilën përpjekje, ai zgjedh që të fillojë në cilëndo kuti të rreshtit të parë, pastaj në mënyrë të përsëritur lëviz në një kuti fqinje që ka një brinjë të përbashkët. (Atij i lejohet që të kthehet në kutitë që ka vizituar më parë.) Nëse ai arrin në një kuti ku ndodhet një përbindësh, përpjekja e tij përfundon dhe ai rikthehet në rreshtin e parë për të filluar një përpjekje të re. Përbindëshat nuk lëvizin, dhe Turbo mban mend për çdo kuti që ka vizituar nëse ndodhet ndonjë përbindësh apo jo. Nëse ai arrin në cilëndo kuti në rreshtin e fundit, përpjekja përfundon me sukses dhe loja mbaron.

Gjeni vlerën më të vogël të n për të cilën Turbo ka një strategji që garanton arritjen e rreshtit të fundit në jo më shumë se n përpjekje, pavarësisht vendndodhjeve të përbindëshave.

Problem 6. Le të jetë $\mathbb{Q}$ bashkësia e numrave racionalë. Një funksion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ quhet *fantastik* nëse plotësohet vetia në vijim: për çdo $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ose} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Vërtetoni se ekziston një numër i plotë c i tillë që për çdo funksion fantastik f janë më së shumti c numra racionalë të ndryshëm të formës $f(r) + f(-r)$ për ndonjë numër racional r, si dhe gjeni vlerën më të vogël të mundshme të c.