Montag, 11. Juli 2022

Aufgabe 1. Die Osloer Bank gibt Münzen aus Aluminium (mit A bezeichnet) und aus Bronze (mit B bezeichnet) heraus. Marianne hat n Aluminiummünzen und n Bronzemünzen beliebig in einer Reihe angeordnet. Eine *Kette* sei eine Teilfolge aufeinanderfolgender Münzen aus gleichem Material. Für eine gegebene positive ganze Zahl $k \leqslant 2n$ führt Marianne wiederholt die folgende Operation durch: Sie identifiziert die längste Kette, die die k-te Münze von links enthält, und verschiebt alle Münzen dieser Kette an das linke Ende der Reihe. Zum Beispiel erhält sie für $n = 4$ und $k = 4$ ausgehend von der Konfiguration $AABBBABA$ nacheinander

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Man bestimme alle Paare (n, k) mit $1 \leqslant k \leqslant 2n$, sodass für jede Ausgangskonfiguration zu irgendeinem Zeitpunkt im Verlauf des Prozesses die n am weitesten links liegenden Münzen aus dem gleichen Material sind.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die es zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Aufgabe 3. Es seien k eine positive ganze Zahl und S eine endliche Menge ungerader Primzahlen. Man beweise, dass es (bis auf Drehung und Spiegelung) höchstens eine Möglichkeit gibt, die Elemente von S entlang eines Kreises so anzuordnen, dass das Produkt zweier beliebiger Nachbarn in der Form $x^2 + x + k$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x dargestellt werden kann.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 12. Juli 2022

Aufgabe 4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit $BC = DE$. Weiterhin sei angenommen, dass T ein Punkt im Inneren von $ABCDE$ mit $TB = TD$, $TC = TE$ und $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$ ist. Die Gerade AB schneide die Geraden CD und CT in den Punkten P bzw. Q. Wir nehmen an, dass die Punkte P, B, A, Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Die Gerade AE schneide die Geraden CD und DT in den Punkten R bzw. S. Wir nehmen an, dass die Punkte R, E, A, S in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen.
Man beweise, dass die Punkte P, S, Q, R auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Tripel (a, b, p) positiver ganzer Zahlen mit Primzahl p und

$$a^p = b! + p.$$

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Ein *Nordisches Quadrat* ist ein Spielbrett der Größe $n \times n$, in dessen Feldern alle Zahlen von 1 bis n^2 stehen, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält. Zwei verschiedene Felder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite besitzen. Jedes Feld, das nur benachbarte Felder mit größeren Zahlen hat, heißt *Talfeld*. Ein *ansteigender Pfad* ist eine Folge von einem oder mehreren Feldern mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Das erste Feld in der Folge ist ein Talfeld.

(ii) Jedes weitere Feld der Folge ist benachbart zum vorigen Feld.

(iii) Die Zahlen in den Feldern der Folge sind in ansteigender Reihenfolge.

Man bestimme in Abhängigkeit von n die kleinstmögliche Gesamtzahl ansteigender Pfade in einem Nordischen Quadrat.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.