



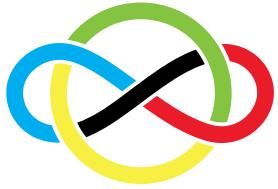
월요일, 19. 7 월 2021

문제 1. n 은 100 이상의 정수이다. 민수는 숫자 $n, n+1, \dots, 2n$ 을 서로 다른 $(n+1)$ 장의 카드에 각각 하나씩 적고, 이 카드들을 섞은 후에 두 개의 뮤음으로 나눴다. 이 때 적어도 한 뮤음에는 카드에 적힌 숫자의 합이 완전제곱수가 되는 두 장의 카드가 존재함을 보여라.

문제 2. 모든 실수 x_1, \dots, x_n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

문제 3. 삼각형 ABC 는 $AB > AC$ 인 예각 삼각형이고, 점 D 는 삼각형 ABC 의 내부의 점으로 $\angle DAB = \angle CAD$ 를 만족한다. 점 E 는 선분 AC 위의 점으로 $\angle ADE = \angle BCD$ 를 만족하고, 점 F 는 선분 AB 위의 점으로 $\angle FDA = \angle DBC$ 를 만족하고, 점 X 는 직선 AC 위의 점으로 $CX = BX$ 를 만족한다. 삼각형 ADC 와 삼각형 EXD 의 외심을 각각 O_1, O_2 라하자. 세 개의 직선 BC, EF, O_1O_2 가 한 점에서 만남을 보여라.



화요일, 20. 7 월 2021

문제 4. 사각형 $ABCD$ 는 볼록사각형이고, 중심이 I 인 원 Γ 는 선분 AB, BC, CD, DA 에 접한다. 삼각형 AIC 의 외접원을 Ω 라고 하자. 선분 BA 의 A 쪽 연장선이 원 Ω 와 점 X 에서 만나고, 선분 BC 의 C 쪽 연장선이 원 Ω 와 점 Z 에서 만난다. 선분 AD 와 CD 의 D 쪽 연장선들이 원 Ω 와 만나는 점을 각각 Y 와 T 라 하자. 다음이 성립함을 보여라.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

문제 5. 두 마리의 다람쥐 갑과 을이 2021 개의 도토리를 모았다. 을은 2021 개의 도토리에 1부터 2021 까지의 숫자를 적었고, 2021 개의 구멍을 원형 배열로 팠다. 다음 날 갑이 각각의 구멍에 임의로 도토리를 하나씩 집어넣었다. 을은 2021 번의 시행을 통하여 도토리를 재배열하는데, k -번째 시행에서는 숫자 k 가 적혀있는 도토리에 인접한 두 도토리의 위치를 서로 바꾼다. 이때 다음을 만족하는 k 가 존재함을 보여라: k -번째 시행에서 위치를 바꾸는 두 도토리에 적힌 숫자 a, b 가 $a < k < b$ 를 만족한다.

문제 6. m 은 2 이상의 정수이다. A 는 (양수일 필요가 없는) 정수들로 구성된 유한 집합이고, $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ 은 A 의 부분집합들이다. 각각의 $k = 1, 2, \dots, m$ 에 대하여 B_k 의 모든 원소의 합이 m^k 이다. 이때 A 가 적어도 $m/2$ 개의 원소를 포함함을 보여라.