الثلاثاء 16 يوليو 2019م

المسألة رقم 1

لتكن $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة. أوجد جميع الدوال $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ بحيث أنه لكل الأعداد الصحيحة a,b

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b))$$

المسألة رقم 2

في المثلث ABC النقطة A_1 تقع على الضلع BC والنقطة B_1 تقع على الضلع AC. لتكن P,Q نقطتين تقعان على القطعتين AA_1,BB_1 على الترتيب، بشرط PQ يوازي AB. لتكن P_1 نقطة على المستقيم PB_1 حيث B_1 تقع بين P,P_1 بحيث $\angle PP_1C=\angle BAC$. وبالمثل لتكن Q_1 نقطة على المستقيم QA_1 حيث A_1 تقع بين Q,Q_1 بحيث $\angle CQ_1Q=\angle CBA$. برهن أن النقاط P,Q,P_1,Q_1 تقع على دائرة واحدة.

المسألة رقم 3

لدينا شبكة اتصالات اجتماعية فيها 2019 مستخدم، بعض الثنائيات منهم أصدقاء. فعندما يكون A صديقاً لـ B يكون B صديقاً لـ A. الأحداث من النوع التالي يمكن أن تتكرر في كل حادثة مرة واحدة:

عندما يكون لدينا ثلاثة مستخدمين A,B,C بحيث أن A صديق لكل من B,C ولكن B,C ليسا صديقين فإن هذا يتغير إلى الحالة التالية والتي فيها B,C يصبحان صديقين ولكن A لايعود صديقاً لـ B ولا لـ C. كل علاقات الصداقة الأخرى لا تتغير.

ابتداءً لدينا 1010 مستخدماً كل منهم صديق لـ 1009 من المستخدمين، و 1009 مستخدماً كل واحد منهم له 1010 صديق. برهن أنه توجد متوالية من الأحداث بحيث يكون لكل شخص صديق واحد على الأكثر.

الزمن 4.5 ساعة
لكل سؤال 7 درجات

الأربعاء 17 يوليو 2019م

المسألة رقم 4

أوجد جميع الأزواج الصحيحة الموجبة (k,n) التي تحقق المعادلة:

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1})$$

المسألة رقم 5

يُصدر البنك في مدينة باث قطعاً من النقود عليها الحرف H على أحد الوجهين والحرف T على الوجه الآخر. يمتلك هاني n من هذه القطع مرتبة على شكل خط مستقيم من اليسار إلى اليمين. يقوم هاني بتكرار العملية التالية:

إذا كان لدينا بالضبط $k > 0$ من النقود على وجهها الحرف H فإنه يقوم بقلب القطعة التي ترتيبها k من اليسار، وتتوقف العملية عندما تكون أوجه كل النقود T. على سبيل المثال إذا كان $n = 3$ فإن العملية التي تبدأ بالتشكيلة THT تصبح كالتالي:

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT$$

أي أن عدد العمليات هنا 3 ثم تتوقف.

a) أثبت أنه لكل تشكيلة ممكنة سيتمكن هاني من التوقف بعد عدد منتهي من العمليات.

b) لكل تشكيلة ممكنة C ترمز $L(C)$ لعدد العمليات التي سيجريها هاني قبل أن يتوقف. على سبيل المثال $L(THT) = 3$، $L(TTT) = 0$. احسب متوسط قيمة $L(C)$ على كل التشكيلات الممكنة لـ C والتي عددها 2^n.

المسألة رقم 6

الدائرة ω التي مركزها I هي الدائرة الداخلية للمثلث الحاد الزوايا ABC الذي فيه $AB \neq AC$. الدائرة ω تمس أضلاع المثلث BC, CA, AB على الترتيب في D, E, F. المستقيم المار بالنقطة D عمودي على EF يقطع الدائرة ω مرة أخرى في R. المستقيم AR يلاقي الدائرة ω مرة أخرى في النقطة P. الدائرتان المحيطيتان للمثلثين PCE, PBF يتقاطعان في نقطة أخرى Q. اثبت أن المستقيمين DI, PQ يتقاطعان في نقطة تقع على المستقيم المار بالرأس A وعمودي على AI.

الزمن 4.5 ساعة
لكل سؤال 7 درجات