

Language: Thai (ภาษาไทย)

วันที่ ๒๕ กรกฎาคม ๒๕๕๐

(First Day)

โจทย์ข้อที่ ๑ กำหนดให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนจริง

สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม i ($1 \leq i \leq n$) นิยาม

$$d_i = \max \{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min \{a_j : i \leq j \leq n\}$$

และให้

$$d = \max \{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

(a) จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนจริง $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ใดๆ

$$\max \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

(b) จงแสดงว่ามีจำนวนจริง $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ที่ทำให้สมการ (*) เป็นสมการ

โจทย์ข้อที่ ๒ พิจารณาจุดห้าจุด A, B, C, D และ E ซึ่ง $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $BCED$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่วงกลมล้อมรอบได้ ให้ ℓ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด A สมมติว่า ℓ ตัดภายในส่วนของเส้นตรง DC ที่จุด F และตัดเส้นตรง BC ที่จุด G สมมติด้วยว่า $EF = EG = EC$ จงพิสูจน์ว่า ℓ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม DAB

โจทย์ข้อที่ ๓ ในการแข่งขันคณิตศาสตร์ครั้งหนึ่ง ผู้เข้าแข่งขันบางคนเป็นเพื่อนกัน ความเป็นเพื่อนเป็นความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันเสมอ เรียกกลุ่มของผู้เข้าแข่งขันว่า *clique* เมื่อสองคนใด ๆ ในกลุ่มนี้เป็นเพื่อนกัน (ให้ถือว่ากลุ่มที่มีผู้เข้าแข่งขันน้อยกว่าสองคนเป็น clique ด้วย) เรียกจำนวนสมาชิกของ clique ว่า ขนาด ของ clique

กำหนดให้ขนาดที่ใหญ่ที่สุดของ clique ในการแข่งขันนี้เป็นจำนวนคู่ จงพิสูจน์ว่าสามารถจัดผู้เข้าแข่งขันทั้งหมดให้อยู่ในห้องสองห้อง โดยที่ขนาดที่ใหญ่ที่สุดของ clique ในห้องหนึ่งมีค่าเท่ากับขนาดที่ใหญ่ที่สุดของ clique ในอีกห้องหนึ่งได้

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที

โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน

Language: Thai (ภาษาไทย)

วันที่ ๒๖ กรกฎาคม ๒๕๕๐

(Second Day)

โจทย์ข้อที่ ๔ ในรูปสามเหลี่ยม ABC เส้นแบ่งครึ่งมุม BCA ตัดวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนี้อีกครั้งที่จุด R , ตัดเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน BC ที่จุด P , ตัดเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AC ที่จุด Q

ให้ K เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และให้ L เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC

จงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม RPK และรูปสามเหลี่ยม RQL มีพื้นที่เท่ากัน

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่าถ้า $4ab - 1$ หาร $(4a^2 - 1)^2$ ลงตัว แล้ว $a = b$

โจทย์ข้อที่ ๖ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณา

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

เป็นเซตของจุด $(n+1)^3 - 1$ จุดในปริภูมิสามมิติ จงหาจำนวนระนาบที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ซึ่งเมื่อยูเนียนกันทั้งหมดแล้วจะบรรจุ S แต่ไม่รวมจุด $(0, 0, 0)$

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที

โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน