torek, 8. julij 2014

Naloga 1. Naj bo $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ neskončno zaporedje naravnih števil. Dokaži, da obstaja enolično določeno naravno število n, tako da velja

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Naloga 2. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Dana je šahovnica velikosti $n \times n$, ki jo sestavlja n^2 enotskih kvadratov. Postavitev n trdnjav na tej šahovnici je *miroljubna*, če je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena trdnjava. Poišči največje naravno število k, tako da za vsako miroljubno postavitev n trdnjav obstaja tak kvadrat velikosti $k \times k$, da na nobenem od njegovih k^2 enotskih kvadratov ni nobene trdnjave.

Naloga 3. V konveksnem štirikotniku $ABCD$ je $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Točka H je nožišče pravokotnice iz točke A na premico BD. Točki S in T, pri čemer točka S leži na stranici AB in točka T na stranici AD, sta taki, da točka H leži znotraj trikotnika SCT in da velja

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Dokaži, da je premica BD tangenta trikotniku TSH očrtane krožnice.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

sreda, 9. julij 2014

Naloga 4. Točki P in Q ležita na stranici BC ostrokotnega trikotnika ABC, tako da velja $\angle PAB = \angle BCA$ in $\angle CAQ = \angle ABC$. Točka M leži na premici AP in točka N na premici AQ, tako da je P razpolovišče stranice AM in Q razpolovišče stranice AN. Dokaži, da se premici BM in CN sekata na trikotniku ABC očrtani krožnici.

Naloga 5. Za vsako naravno število n Banka Cape Town izdaja kovance, katerih vrednost je $\frac{1}{n}$. Za dano zbirko končno mnogo takih kovancev, katerih skupna vrednost je največ $99 + \frac{1}{2}$ (vrednosti kovancev v zbirki niso nujno različne), dokaži, da jo je mogoče razdeliti na 100 ali manj skupin, tako da je skupna vrednost kovancev v vsaki izmed teh skupin največ 1.

Naloga 6. Množica premic v ravnini je v *splošni legi*, če nobeni dve premici iz te množice nista vzporedni in se nobene tri premice iz te množice ne sekajo v isti točki. Množica premic v splošni legi razdeli ravnino na območja, od katerih imajo nekatera končno ploščino; ta imenujemo *končna območja* te množice premic. Dokaži, da lahko za vsak dovolj velik n v katerikoli množici n premic v splošni legi pobarvamo vsaj $\sqrt{n}$ premic z modro barvo na tak način, da nobeno od končnih območij te množice premic nima povsem modrega roba.

Opomba: Točkovane bodo tudi rešitve, pri katerih bo $\sqrt{n}$ nadomeščen s $c\sqrt{n}$, število točk bo odvisno od vrednosti konstante c.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.