Montag, 11. Juli 2016

Aufgabe 1. Das Dreieck BCF habe einen rechten Winkel in B. Es sei A der Punkt auf der Geraden CF, für den $FA = FB$ gilt und F zwischen A und C liegt. Der Punkt D sei so gewählt, dass $DA = DC$ gilt und AC den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert. Der Punkt E sei so gewählt, dass $EA = ED$ gilt und AD den Winkel $\sphericalangle EAC$ halbiert. Es sei M der Mittelpunkt von CF. Ferner sei X derjenige Punkt, für den $AMXE$ ein Parallelogramm (mit $AM \parallel EX$ und $AE \parallel MX$) ist.

Man beweise, dass sich BD, FX und ME in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die jedes Feld einer $n \times n$ Tabelle so mit einem der Buchstaben I, M und O gefüllt werden kann, dass:

- in jeder Zeile und in jeder Spalte ein Drittel der Einträge I, ein Drittel M und ein Drittel O sind, und
- in jeder Diagonale, in der die Anzahl der Einträge ein Vielfaches von drei ist, ein Drittel der Einträge I, ein Drittel M und ein Drittel O sind.

Bemerkung: Die Zeilen und Spalten der $n \times n$ Tabelle sind in üblicher Reihenfolge von 1 bis n nummeriert. Damit entspricht jedes Feld einem Paar positiver ganzer Zahlen (i, j) mit $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Für $n > 1$ hat die Tabelle $4n - 2$ *Diagonalen*, die sich in zwei Arten aufteilen. Eine Diagonale der ersten Art besteht aus allen Feldern (i, j), für die $i + j$ eine Konstante ist. Eine Diagonale der zweiten Art besteht aus allen Feldern (i, j), für die $i - j$ eine Konstante ist.

Aufgabe 3. Es sei $P = A_1A_2 \ldots A_k$ ein ebenes konvexes Vieleck. Die Eckpunkte A_1, A_2, ..., A_k haben ganzzahlige Koordinaten und liegen auf einem Kreis. Es sei S der Flächeninhalt von P. Ferner sei eine ungerade positive ganze Zahl n gegeben, sodass die Quadrate der Seitenlängen von P durch n teilbare ganze Zahlen sind.

Man beweise, dass $2S$ eine durch n teilbare ganze Zahl ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 12. Juli 2016

Aufgabe 4. Eine Menge von positiven ganzen Zahlen heiße *duftend*, wenn sie mindestens zwei Elemente enthält und jedes ihrer Elemente mit wenigstens einem anderen ihrer Elemente mindestens einen Primfaktor gemeinsam hat. Es sei $P(n) = n^2 + n + 1$. Man bestimme die kleinstmögliche positive ganze Zahl b, für die eine nicht-negative ganze Zahl a existiert, sodass die Menge

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

duftend ist.

Aufgabe 5. Die Gleichung

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

mit 2016 Linearfaktoren auf jeder Seite, steht auf einer Tafel. Man bestimme das kleinstmögliche k, für das genau k dieser 4032 Linearfaktoren gelöscht werden können, sodass auf jeder Seite mindestens ein Linearfaktor verbleibt und die entstehende Gleichung keine reelle Lösung besitzt.

Aufgabe 6. In der Ebene seien $n \geqslant 2$ Strecken so gegeben, dass sich je zwei Strecken kreuzen und keine drei durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Lisa soll von jeder Strecke einen ihrer Endpunkte auswählen und dort einen Frosch so hinsetzen, dass er zum anderen Endpunkt blickt. Dann wird sie $n-1$ mal in die Hände klatschen. Jedes Mal, wenn sie klatscht, springt jeder Frosch sofort vorwärts auf den nächsten Schnittpunkt auf seiner Strecke. Die Frösche wechseln nie die Sprungrichtung. Lisa möchte die Frösche so hinsetzen, dass sich niemals zwei Frösche gleichzeitig auf dem gleichen Schnittpunkt befinden.

(a) Man beweise, dass Lisa dies immer erreichen kann, wenn n ungerade ist.

(b) Man beweise, dass Lisa dies niemals erreichen kann, wenn n gerade ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.