

الاثنين 11 تموز 2016

المسألة 1: BCF مثلث قائم الزاوية في B . لتكن A نقطة من المستقيم CF بحيث يكون $FA = FB$ و F بين A و C . نأخذ نقطة D بحيث يكون $DA = DC$ ويكون AC منصفاً للزاوية $\angle DAB$. نأخذ نقطة E بحيث يكون $EA = ED$ و يكون AD منصفاً للزاوية $\angle EAC$. لتكن M منتصف القطعة المستقيمة CF . لتكن X نقطة بحيث يكون AMXE متوازي الأضلاع (حيث $AM \parallel EX$ و $AE \parallel MX$) . أثبت أن المستقيمت BD , FX , ME تتقاطع في نقطة واحدة .

المسألة 2 : أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً n التي من أجلها يمكن ملء كل خلية لجدول مؤلف من $n \times n$ خلية بأحد الحروف I , M , O بحيث يتحقق :

- في كل سطر وفي كل عمود يكون ثلث المدخلات هي I وثلثها M وثلثها O .
- في كل قطر، إذا كان عدد خلايا القطر من مضاعفات العدد 3 فإن ثلث مدخلاته هي I وثلثها M وثلثها O .

تنويه : يتم ترقيم الأسطر والأعمدة في الجدول $n \times n$ من 1 إلى n بالترتيب المألوفة . كل خلية هي عبارة عن زوج من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً (i, j) حيث $1 \leq i, j \leq n$. من أجل $n > 1$ يحوي الجدول على $4n - 2$ قطراً من نوعين . القطر من النوع الأول يتألف من الخلايا (i, j) التي لأجلها يكون $i + j$ ثابتاً ، والقطر من النوع الثاني يتألف من الخلايا (i, j) التي لأجلها يكون $i - j$ ثابتاً .

المسألة 3 : ليكن $P = A_1 A_2 \dots A_k$ مضلعاً محدباً في مستوى منسوب إلى جملة إحداثيات . رؤوسه A_1, A_2, \dots, A_k تقع على دائرة واحدة وإحداثيات هذه الرؤوس أعداد صحيحة . لتكن S مساحة المضلع P . n عدد صحيح موجب فردي بحيث يكون مربع طول كل ضلع من أضلاع المضلع P عدداً صحيحاً يقبل القسمة على n . اثبت أن $2S$ عدد صحيح يقبل القسمة على n .

الثلاثاء 12 تموز 2016

المسألة 4 : نقول عن مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً إنها عظرية إذا كانت تتألف من عنصرين على الأقل ولكل عنصر من عناصرها عامل أولي مشترك مع عنصر آخر من عناصرها على الأقل . ليكن $P(n) = n^2 + n + 1$. أوجد أصغر قيمة ممكنة لعدد صحيح موجب تماماً b بحيث يوجد عدد صحيح غير سالب a لأجله تكون المجموعة :

$$\{ P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b) \}$$

عظرية ؟ .

المسألة 5 : المعادلة

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

مكتوبة على السبورة وهي ذات 2016 عاملاً خطياً في كل طرف . ما هي أصغر قيمة ممكنة لعدد k لأجله يكون ممكناً مسح بالضبط k عاملاً من 4032 معامل خطي الموجودين في الطرفين بحيث يبقى في كل طرف معامل واحد على الأقل وتكون المعادلة الناتجة لا تقبل حلاً حقيقياً .

المسألة 6 : لدينا $n \geq 2$ قطعة مستقيمة في مستوي بحيث كل قطعتين مستقيمتين متقاطعتين في غير طرفيهما ، وكل ثلاث قطع مستقيمة لا تتلاقى في نقطة واحدة . تختار جنار أحد طرفي كل قطعة مستقيمة وتضع في كل منها ضفدعاً يمكنه القفز باتجاه الطرف الآخر ، وبعد ذلك تصفق جنار $n-1$ مرة بحيث في كل مرة تصفق فيها جنار يقفز الضفدع باتجاه الأمام إلى نقطة التقاطع التالية مباشرة على القطعة نفسها . مع العلم أن الضفادع لا تغير اتجاه حركتها أبداً . ترغب جنار في وضع الضفادع بطريقة بحيث لا يلتقي أي ضفدعين في أي نقطة تقاطع في الوقت نفسه .

(a) أثبت أن جنار تستطيع أن تحقق رغبتها دائماً إذا كان العدد n فردياً .

(b) أثبت أن جنار لا تستطيع إطلاقاً أن تحقق رغبتها إذا كان العدد n زوجياً .