Lunedì, 9 Luglio 2018

Problema 1. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo acutangolo ABC. I punti D ed E stanno sui segmenti AB ed AC, rispettivamente, e sono tali che $AD = AE$. Gli assi di BD e CE intersecano gli archi minori AB e AC di Γ nei punti F e G, rispettivamente.

Dimostrare che le rette DE ed FG sono parallele (o coincidenti).

Problema 2. Determinare tutti gli interi $n \geq 3$ per cui esistono numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tali che $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 3. Un *anti-triangolo di Tartaglia* è una tabella di numeri a forma di triangolo equilatero tale che, a parte i numeri dell'ultima riga, ogni numero è il valore assoluto della differenza dei due numeri immediatamente al di sotto di esso.

Per esempio, la tabella qui sotto è un anti-triangolo di Tartaglia con 4 righe che contiene ogni intero da 1 a 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Determinare se esiste un anti-triangolo di Tartaglia con 2018 righe che contenga ogni intero da 1 a $1 + 2 + \cdots + 2018$.

Language: Italian

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Martedì, 10 Luglio 2018

Problema 4. Una *posizione* è un qualunque punto (x, y) nel piano tale che x e y sono entrambi interi positivi minori o uguali a 20.

All'inizio, ognuna delle 400 posizioni è libera. Alessandra e Bobo a turno piazzano delle pietre, iniziando da Alessandra. Quando tocca a lei, Alessandra piazza una nuova pietra rossa in una posizione libera, in modo che la distanza tra le posizioni occupate da due qualunque pietre rosse sia sempre diversa da $\sqrt{5}$. Quando tocca a lui, Bobo piazza una nuova pietra blu in una qualunque posizione libera. (Una posizione occupata da una pietra blu può essere a qualunque distanza da qualunque altra posizione occupata). Essi smettono non appena uno dei due non può più piazzare una pietra.

Determinare il più grande K tale che Alessandra è certa di piazzare almeno K pietre rosse, indipendentemente da come Bobo piazza le sue pietre blu.

Problema 5. Sia a_1, a_2, $\ldots$ una successione infinita di interi positivi. Supponiamo che esista un intero $N > 1$ tale che, per ogni $n \geq N$, il numero

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

è un intero.

Dimostrare che esiste un intero positivo M tale che $a_m = a_{m+1}$ per ogni $m \geq M$.

Problema 6. Un quadrilatero convesso $ABCD$ soddisfa $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Un punto X all'interno di $ABCD$ è tale che

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{e} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Dimostrare che $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti