

Version Croatian

Srijeda, 25. srpnja 2007.

**Zadatak 1.** Dani su realni brojevi  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Za svako  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), definirano je

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

i

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokaži da za svake realne brojeve  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , vrijedi

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Pokaži da postoje realni brojevi  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  takvi da u  $(*)$  vrijedi jednakost.

**Zadatak 2.** Promatraj pet točaka  $A, B, C, D$  i  $E$  takvih da je  $ABCD$  paralelogram a  $BCED$  tetivni četverokut. Neka je  $\ell$  pravac koji prolazi točkom  $A$ . Pretpostavi da  $\ell$  siječe dužinu  $\overline{CD}$  u unutrašnjoj točki  $F$  i pravac  $BC$  u  $G$ . Pretpostavimo da je  $|EF| = |EG| = |EC|$ . Dokaži da je  $\ell$  simetrala kuta  $DAB$ .

**Zadatak 3.** Na matematičkom natjecanju neki natjecatelji su prijatelji. Prijateljstvo je uzajamno obostrano. Grupu natjecatelja zvat ćemo *družina* ako su svaka dva među njima prijatelji. (Specijalno, grupa s manje od dva natjecatelja je družina.) Broj članova družine zvat ćemo njezinom *veličinom*.

Ako je na tom natjecanju najveća veličina družine paran broj, dokaži da se natjecatelji mogu smjestiti u dvije prostorije tako da najveća veličina družinâ u jednoj prostoriji bude jednaka najvećoj veličini družinâ u drugoj.

*Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta  
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*

Croatian Version

Četvrtak, 26. srpnja 2007.

**Zadatak 4.** U trokutu  $ABC$  simetrala kuta  $BCA$  siječa opisanu mu kružnicu ponovo u točki  $R$ , simetralu stranice  $\overline{BC}$  u  $P$ , a simetralu strane  $\overline{AC}$  u  $Q$ . Polovište stranice  $\overline{BC}$  je  $K$ , a polovište stranice  $\overline{AC}$  je  $L$ . Dokaži da su površine trokuta  $RPK$  i  $RQL$  jednake.

**Zadatak 5.** Neka su  $a$  i  $b$  pozitivni cijeli brojevi. Pokaži da ako  $4ab - 1$  dijeli  $(4a^2 - 1)^2$ , tada je  $a = b$ .

**Zadatak 6.** Neka je  $n$  pozitivan cijeli broj. Promatraj

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kao skup od  $(n+1)^3 - 1$  točaka u trodimenzionalnom prostoru. Odredi najmanji mogući broj ravnina, čija unija sadrži sve točke skupa  $S$ , ali ne sadrži točku  $(0, 0, 0)$ .

*Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta  
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*