الثلاثاء، 23 يوليو 2013

المسألة 1. لكلّ عددين صحيحين موجبين k و n ، أثبت وجود k من الأعداد الصّحيحة الموجبة $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ليست بالضّرورة مختلفة) تحقّق

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

المسألة 2. لدينا تشكيلة مكوّنة من 4027 نقطة في المستوي. تسمّى هذه التّشكيلة كولومبيّة إذا كانت 2013 من نقطها حمراء، و 2014 من نقطها زرقاء، ولا تكون أيّ ثلاث نقاط من التّشكيلة على استقامة واحدة. يمكن تقسيم المستوي إلى مناطق بواسطة خطوط مستقيمة. يوصف هذا التّقسيم بالخطوط المستقيمة للتّشكيلة الكولبيّة بأنّه جيّد إذا تحقّق فيه ما يلي:

- لا يمرّ أي من الخطوط المستقيمة بأيّ نقطة من التّشكيلة.
- لا تحوي أيّ من المناطق على نقطتين بلونين مختلفين.

جد أصغر قيمة للعدد k بحيث يوجد لأيّ تشكيلة كولومبيّة من 4027 نقطة، تقسيم جيّد بواسطة k من الخطوط المستقيمة.

المسألة 3. في المثلّث ABC ، الدّائرة الخارجيّة المقابلة للرّأس A تمسّ الضّلع BC في النقطة A_1 . النقطتان، B_1 على الضّلع CA ، و C_1 على الضّلع AB ، معرّفتان بطريقة مماثلة، باستعمال الدّائرتين الخارجيّتين المقابلتين للرّأسين B و C على التّرتيب. لنفرض أنّ مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث $A_1B_1C_1$ يقع على الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC . أثبت أنّ المثلّث ABC قائم الزّاوية.

(الدّائرة الخارجيّة للمثلّث ABC والمقابلة للرأس A هي الدائرة الّتي تمس كلا من الضلع BC ، وامتداد الضلع AB من جهة B ، وامتداد الضلع AC من جهة C . الدّائرتان الخارجيّتان المقابلتان للرّأسين B و C معرّفتان بنفس الطّريقة.)

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة

الأربعاء، 24 يوليو 2013

المسألة 4. ليكن ABC مثلّثا حاد الزّاوية، و H نقطة التقاء ارتفعاته. النّقطة W تقع على الضّلع BC ، وهي مختلفة عن B و C . النقطتان M و N هما قدما الارتفاعين النّازلين من B و C على التّرتيب. الدّائرة ω_1 هي الدّائرة المحيطة بالمثلّث BWN ، و X نقطة على الدّائرة ω_1 بحيث يكون WX قطرا للدّائرة ω_1 . بالمثل، ω_2 هي الدّائرة المحيطة بالمثلّث CWM ، و Y نقطة على الدّائرة ω_2 بحيث يكون WY قطرا للدّائرة ω_2 . أثبت أنّ النّقط X و Y و H على استقامة واحدة.

المسألة 5. لتكن $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعة الأعداد النسبيّة الموجبة. الدّالّة $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ تحقّق الشّروط الثّلاثة التّالية:

(i) لكلّ $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ، لدينا $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ؛

(ii) لكلّ $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ، لدينا $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ؛

(iii) يوجد عدد نسبيّ $a > 1$ يحقّق $f(a) = a$.

برهن أنّ $f(x) = x$ لكلّ $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

المسألة 6. ليكن $n \geq 3$ عددا صحيحا. لدينا $n+1$ نقطة موزّعة بطريقة منتظمة على دائرة. لنعتبر كلّ التّرقيمات الممكنة لهذه النقط بواسطة الأعداد 0 ، 1 ، $\ldots$ ، n بحيث يُستخدم كلّ عدد مرّة واحدة. نعتبر التّرقيمين متطابقين إذا أمكننا الحصول على أحدهما من الآخر بواسطة دوران حول مركز الدّائرة. يقال عن ترقيم إنّه جميل إذا كان لكلّ أربع نقاط مرقّمة بالأعداد $a < b < c < d$ التّي تحقّق $a + d = b + c$ ، الوتر الواصل بين النّقطتين المرقّمتين بالعددين a و d ، لا يقطع الوتر الواصل بين النّقطتين المرقّمتين بالعددين b و c .

ليكن M عدد التّرقيمات الجميلة غير المتطابقة، و N عدد الأزواج المرتّبة (x, y) من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $x + y \leq n$ و $\gcd(x, y) = 1$. أثبت أنّ

$$M = N + 1.$$

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة