Version: Danish

Første dag

25. juli 2007

Opgave 1. Reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er givet. For ethvert i $(1 \leq i \leq n)$ sæt

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

og lad

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Bevis at der for alle reelle tal $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gælder

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Vis at der findes reelle tal $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ så der gælder lighedstegn i $(*)$.

Opgave 2. Betragt fem punkter A, B, C, D og E sådan at firkant $ABCD$ er et parallelogram og firkant $BCED$ har en omskreven cirkel. Lad ℓ være en linje gennem A. Antag at ℓ skærer det indre af linjestykket DC i F og linjen BC i G. Antag derudover at $EF = EG = EC$. Bevis at ℓ er vinkelhalveringslinje for vinkel DAB.

Opgave 3. I en matematikkonkurrence er nogen af deltagerne venner. Venskab er altid gensidigt. Kald en samling af deltagere for en *klike* hvis ethvert par af dem er venner. (Specielt, er enhver samling af mindre end to deltagere en klike.) Antallet af personer i en klike kaldes dens *størrelse*.

Det er givet at den maksimale klike-størrelse i denne konkurrence er lige. Bevis at deltagerne kan fordeles i to rum sådan at den maksimale størrelse af kliker indeholdt i det ene rum er den samme som den maksimale størrelse af kliker indeholdt i det andet rum.

Tid til rådighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd

Version: Danish

Anden dag

26. juli 2007

Opgave 4. Betragt trekant ABC. Vinkel BCA's vinkelhalveringslinje skærer trekantens omskrevne cirkel i R ($R \neq C$), BC's midtnormal i P og AC's midtnormal i Q. Midtpunktet af BC kaldes K, og midtpunktet af AC kaldes L. Bevis at trekanterne RPK og RQL har samme areal.

Opgave 5. Lad a og b være positive heltal. Vis at hvis $4ab - 1$ går op i $(4a^2 - 1)^2$, så er $a = b$.

Opgave 6. Lad n være et positivt heltal. Betragt

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

som en mængde af $(n+1)^3 - 1$ punkter i det tre-dimensionelle rum. Bestem det mindst mulige antal planer der tilsammen dækker S uden at dække $(0, 0, 0)$.

Tid til rådighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd