Venerdì 10 luglio 2015

Problema 1. Diciamo che un insieme finito $\mathcal{S}$ di punti del piano è *equilibrato* se, dati comunque due punti distinti A e B in $\mathcal{S}$, esiste un punto C in $\mathcal{S}$ tale che $AC = BC$. Diciamo che $\mathcal{S}$ è *privo di centri* se, comunque si scelgano tre punti distinti A, B e C in $\mathcal{S}$, non esiste nessun punto P in $\mathcal{S}$ tale che $PA = PB = PC$.

(a) Dimostrare che per tutti gli interi $n \geqslant 3$ esiste un insieme equilibrato costituito da n punti.

(b) Determinare tutti gli interi $n \geqslant 3$ per i quali esiste un insieme equilibrato e privo di centri costituito da n punti.

Problema 2. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri interi positivi per cui ciascuno dei numeri

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

è una potenza di 2.

(*Una potenza di* 2 *è un intero della forma* 2^n, *dove* n *è un intero non negativo.*)

Problema 3. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB > AC$. Siano Γ la sua circonferenza circoscritta, H il suo ortocentro, e F il piede dell'altezza condotta da A. Sia M il punto medio di BC. Sia Q il punto di Γ tale che $\angle HQA = 90^\circ$, e sia K il punto di Γ tale che $\angle HKQ = 90^\circ$. Supponiamo che i punti A, B, C, K e Q siano tutti distinti, e giacciano su Γ in quest'ordine.

Dimostrare che le circonferenza circoscritte ai triangoli KQH e FKM sono tangenti tra di loro.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Sabato 11 luglio 2015

Problema 4. Il triangolo ABC ha come circonferenza circoscritta Ω e come circocentro O. Una circonferenza Γ con centro in A interseca il segmento BC nei punti D ed E, in modo tale che B, D, E e C siano tutti diversi e giacciano sulla retta BC in quest'ordine. Siano F e G i punti di intersezione tra Γ e Ω, in modo tale che A, F, B, C e G giacciano su Ω in quest'ordine. Sia K la seconda intersezione tra la circonferenza circoscritta al triangolo BDF ed il segmento AB. Sia L la seconda intersezione tra la circonferenza circoscritta al triangolo CGE ed il segmento CA.

Supponiamo che le rette FK e GL siano diverse e che si intersechino nel punto X. Dimostrare che X giace sulla retta AO.

Problema 5. Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

per tutti i numeri reali x e y.

Problema 6. La successione a_1, a_2, ... di numeri interi soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ per ogni $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ per ogni $1 \leqslant k < \ell$.

Dimostrare che esistono due interi positivi b ed N tali che

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

per tutti gli interi m ed n tali che $n > m \geqslant N$.

Tempo a disposizione 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti