

IMO 2024

65th International  
Mathematical Olympiad

Thai (tha), day 1

อังคาร, 16. กรกฎาคม 2024

โจทย์ข้อ 1. จงหาจำนวนจริง  $\alpha$  ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  จะได้ว่าจำนวนเต็ม

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

เป็นพหุคูณของ  $n$  (ในที่นี้  $\lfloor z \rfloor$  หมายถึงจำนวนเต็มค่ามากสุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ  $z$  ตัวอย่างเช่น  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  และ  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ )

โจทย์ข้อ 2. จงหาคู่อันดับของจำนวนเต็มบวก  $(a, b)$  ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า มีจำนวนเต็มบวก  $g$  และ  $N$  ที่ทำให้

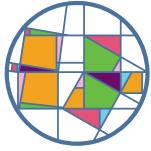
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม  $n \geq N$  (ในที่นี้  $\gcd(x, y)$  หมายถึงตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม  $x$  และ  $y$ )

โจทย์ข้อ 3. ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวก และให้  $N$  เป็นจำนวนเต็มบวก สมมุติว่า สำหรับแต่ละ  $n > N$  ค่าของ  $a_n$  เท่ากับจำนวนครั้งที่  $a_{n-1}$  ปรากฏในลำดับ  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$

จะพิสูจน์ว่าลำดับอย่างน้อยหนึ่งลำดับจาก  $a_1, a_3, a_5, \dots$  และ  $a_2, a_4, a_6, \dots$  เป็นค่าในท้ายที่สุด

(เราจะกล่าวว่าลำดับอนันต์  $b_1, b_2, b_3, \dots$  เป็นค่าในท้ายที่สุด ถ้ามีจำนวนเต็มบวก  $p$  และ  $M$  ที่ทำให้  $b_{m+p} = b_m$  สำหรับทุก  $m \geq M$ )



พุธ, 17. กรกฎาคม 2024

**โจทย์ข้อ 4.** ให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่  $AB < AC < BC$  ให้จุดศูนย์กลางวงกลมแนบในและวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  แทนด้วย  $I$  และ  $\omega$  ตามลำดับ ให้  $X$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $BC$  ที่ต่างจาก  $C$  และทำให้เส้นตรงที่ผ่าน  $X$  และนานกับ  $AC$  สัมผัสกับ  $\omega$  ในทำนองเดียวกัน ให้  $Y$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $BC$  ที่ต่างจาก  $B$  ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่าน  $Y$  นานกับ  $AB$  สัมผัสกับ  $\omega$  ให้  $AI$  ตัดกับวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  อีกครั้งที่  $P \neq A$  ให้  $K$  และ  $L$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $AC$  และ  $AB$  ตามลำดับ จงแสดงว่า  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$

**โจทย์ข้อ 5.** หอยทากนามว่าเทอร์โบเล่นเกมบนกระดานที่มี 2024 แคล และ 2023 หลัก มีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่ในช่องต่าง ๆ ทั้งหมด 2022 ช่อง ในตอนเริ่มต้น เทอร์โบไม่ทราบเลยว่าสัตว์ประหลาดเหล่านี้อยู่ในช่องไหนแต่ทราบว่าในแต่ละແรมมีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่หนึ่งตัวพอดี ยกเว้นในແรมแรกและແรมสุดท้าย และในแต่ละหลัก มีสัตว์ประหลาดซ่อนอยู่อย่างมากหนึ่งตัว

เทอร์โบพยายามที่จะเคลื่อนที่จากແรมแรกไปແรมสุดท้าย ในความพยายามแต่ละครั้ง เทอร์โบเลือกที่จะเริ่มต้นในช่องใดก็ได้ของແรมแรก จากนั้นจึงเคลื่อนที่ไปช่องใดช่องหนึ่งที่มีด้านร่วมกันกับช่องที่อยู่บน ขอนนั้น และทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ (โดยจะย้อนกลับมาช่องที่เคยผ่านไปแล้วก็ได้) ถ้าเทอร์โบไปถึงช่องที่มีสัตว์ประหลาด จะถือว่าความพยายามครั้งนั้นสิ้นสุดลง และเทอร์โบจะถูกส่งตัวกลับไปແرمแรกเพื่อเริ่มต้นความพยายามครั้งใหม่ ระหว่างนี้ สัตว์ประหลาดจะไม่ย้ายซ่อง และ เทอร์โบจำได้ว่าซ่องที่ไปมาแล้วแต่ละซ่องมีสัตว์ประหลาดอยู่หรือไม่ ถ้าเทอร์โบไปถึงช่องสักช่องในແرمสุดท้าย จะถือว่าความพยายามของเทอร์โบสิ้นสุดลงและเป็นการจบเกม จงหาค่าของ  $n$  ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้เทอร์โบมีกลยุทธ์ที่รับรองได้ว่าจะไปถึงແرمสุดท้ายในความพยายามครั้งที่  $n$  หรือก่อนหน้านั้น ไม่ว่าสัตว์ประหลาดจะอยู่ในช่องใดก็ตาม

**โจทย์ข้อ 6.** ให้  $\mathbb{Q}$  แทนเซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  เป็น ฟังก์ชันบ่อหน้าถ้าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง: สำหรับทุก  $x, y \in \mathbb{Q}$  จะได้ว่า

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{หรือ} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม  $c$  ที่ทำให้สำหรับฟังก์ชันบ่อหน้า  $f$  ได ๆ จะมีจำนวนตรรกยะที่แตกต่างกันอย่างมาก  $c$  ตัว ที่เขียนได้ในรูป  $f(r) + f(-r)$  สำหรับบางจำนวนตรรกยะ  $r$  และจงหาค่าน้อยสุดของ  $c$  ที่เป็นไปได้