



Language: **Estonian**

Day: **1**

Reede, 10. juuli, 2015

Ülesanne 1. Ütleme, et lõplik tasandi punktide hulk \mathcal{S} on *tasakaalus*, kui iga hulga \mathcal{S} kahe erineva punkti A ja B korral leidub selline hulga \mathcal{S} punkt C , et $AC = BC$. Ütleme, et hulk \mathcal{S} on *keskpunktideta*, kui hulga \mathcal{S} mitte mingi kolme erineva punkti A , B ja C korral ei leidu sellist hulga \mathcal{S} punkti P , mille korral $PA = PB = PC$.

- (a) Näidata, et iga täisarvu $n \geq 3$ korral leidub n punktist koosnev tasakaalus hulk.
- (b) Leida kõik sellised täisarvud $n \geq 3$, mille korral leidub n punktist koosnev keskpunktideta tasakaalus hulk.

Ülesanne 2. Leida kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c) , mille korral arvud

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

on kahe astmed.

(*Kahe aste on täisarv kujul 2^n , kus n on mittenenegatiive täisarv.*)

Ülesanne 3. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kus $AB > AC$. Olgu selle kolmnurga ümberingjoon Γ , tema kõrguste lõikepunkt H ning punktist A tõmmatud kõrguse aluspunkt F . Olgu külje BC keskpunkt M . Olgu Q selline punkt ringjoonel Γ , et $\angle HQA = 90^\circ$, ja olgu K selline punkt ringjoonel Γ , et $\angle HKQ = 90^\circ$. Eeldame, et A, B, C, K ja Q on kõik erinevad ja paiknevad ringjoonel Γ täpselt selles järjekorras.

Näidata, et kolmnurkade KQH ja FKM ümberringjooned puutuvad teineteist.



Language: **Estonian**

Day: **2**

Laupäev, 11. juuli 2015

Ülesanne 4. Kolmnurga ABC ümberringjoon on Ω keskpunktiga O . Ringjoon Γ keskpunktiga A lõikub küljega BC punktides D ja E , nii et punktid B , D , E and C on kõik erinevad ja asuvad sirgel BC selles järjekorras. Olgu F ja G ringjoonte Γ ja Ω lõikepunktid, nii et A , F , B , C ja G asuvad ringjoonel Ω selles järjekorras. Olgu K kolmnurga BDF ümberringjoone ja lõigu AB teine lõikepunkt. Olgu L kolmnurga CGE ümberringjoone ja lõigu CA teine lõikepunkt.

Eeldame, et sirged FK ja GL on erinevad ja lõikuavad punktis X . Näidata, et X asub sirgel AO .

Ülesanne 5. Olgu \mathbb{R} kõigi reaalarvude hulk. Leida kõik funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrrandit

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

kõigi reaalarvude x ja y korral.

Ülesanne 6. Täisarvude jada a_1, a_2, \dots rahuldab järgmisi tingimusi:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ kõigi $j \geq 1$ korral;
- (ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ kõigi $1 \leq k < \ell$ korral.

Näidata, et leiduvad positiivsed täisarvud b ja N nii, et

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

kõigi täisarvude m ja n korral, mis rahuldavad võrratust $n > m \geq N$.