

12 липня 2006 року

Задача 1. Точка I - центр вписаного кола трикутника ABC. Усередині трикутника вибрано точку P таку, що

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Доведіть, що  $AP \geq AI$ , при цьому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли точка P співпадає з I.

Задача 2. Діагональ правильного 2006-кутника Р називається доброю, якщо її кінці падають міжу P на дві частини, кожна з яких містить непарне число сторін. Сторони P такоже називаються добродими.

Якщо P розділяється на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних сторін, то яке усередині P.

Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожний з яких має дві добре сторони, може містити таке розбиття?

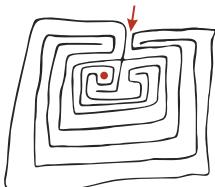
Задача 3. Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел a, b, c.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.



13 липня 2006 року  
Задача 4. Знайдіть усі пари  $(x, y)$  усіх  
чисел такі, що

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Узведіть  $P(x)$  - многочлен степеня  
 $n > 1$  з усіми коєфіцієнтами, к - довільне  
натуральне число. Розкладено многочлен

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$$

(тут  $P$  застосовується  $n$  разів).  
Доведіть, що існує не більше, ніж  $n$  усіх  
чисел  $t$  таких, що  $Q(t) = t$ .

Задача 6. Кожний стороні в опуклого  
многоокутника  $P$  поставлено у відповідність  
найбільшу з площ трикутників, які містяться  
в  $P$  і одна із сторін яких співпадає з в.  
Доведіть, що сума площ, які відповідають  
усім сторонам  $P$ , не менша за подвоєну  
площу многоокутника  $P$ .

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.