2025 年七月 *15* 日星期二

問題 1. 平面上，如果一條直線與 x 軸、y 軸、直線 $x+y=0$ 都不平行，則我們稱它爲陽光的。

給定整數 $n \geqslant 3$。試決定所有非負整數 k，使得平面上存在 n 條不同的直線滿足下列兩條件：

- 對於所有滿足 $a+b \leqslant n+1$ 的正整數 a, b，點 (a, b) 落在這些直線中的至少一條上。
- 這 n 條直線中恰有 k 條是陽光的。

問題 2. 設 Ω 與 Γ 分別是以 M, N 爲圓心的圓，且圓 Ω 的半徑小於圓 Γ 的半徑。設圓 Ω 與 Γ 交於相異兩點 A, B。直線 MN 與圓 Ω 交於點 C、與圓 Γ 交於點 D，且 C, M, N, D 四點依此順序落在該直線上。令點 P 爲三角形 ACD 的外心。直線 AP 與圓 Ω 再交於 $E \neq A$，且直線 AP 與圓 Γ 再交於 $F \neq A$。令點 H 爲三角形 PMN 的垂心。

證明：通過 H 且平行於 AP 的直線，與三角形 BEF 的外接圓相切。

(三角形的垂心指的是其三條高的交點。)

問題 3. 設 $\mathbb{N}$ 爲正整數所成的集合。定義函數 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 稱爲包好的，如果

$$f(a) \quad \text{整除} \quad b^a - f(b)^{f(a)}$$

對所有正整數 a, b 均成立。

試找出最小的實數常數 c ，使得 $f(n) \leqslant cn$ 對所有包好的函數 f 以及所有正整數 n 皆成立。

2025 年七月 16 日星期三

問題 4. 正整數 N 的眞因數，指的是除了 N 自己之外的其他正因數。

無窮數列 $a_1, a_2, \ldots$ 由正整數組成，其中的每一項都有至少三個眞因數。對每個 $n \geqslant 1$，整數 a_{n+1} 是 a_n 最大的三個眞因數之和。

試求 a_1 的所有可能值。

問題 5. 某甲與某乙玩一個雙人遊戲，其規則依賴於某個雙方都知道的正實數 λ。在此遊戲的第 n 輪 (從 $n = 1$ 開始)，採取以下動作：

- 當 n 爲奇數時，甲選一個非負實數 x_n 滿足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- 當 n 爲偶數時，乙選一個非負實數 x_n 滿足

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

當其中某位玩家不能選出滿足條件的數字 x_n 時，遊戲立即結束，並宣告另一名玩家獲勝。如果此遊戲可以無限進行下去，則兩人皆不算獲勝。雙方都知道挑出來的數字。

試找出使甲有必勝策略的所有 λ 值，也找出使乙有必勝策略的所有 λ 值。

問題 6. 考慮由單位方格組成的 2025×2025 網格。豆哥想把一些長方形磁磚放在這個網格上，使得每塊磁磚的各邊落在格線上，且每個單位方格最多被一塊磁磚覆蓋。磁磚的大小可能不同。

若豆哥要讓每一行及每一列都恰有一個單位方格不被磁磚覆蓋，試求他所需使用磁磚的最小數量。