IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

Uzbek (uzb), day 1

Seshanba, 18 iyul, 2017 yil.

Masala 1. Har qanday $a_0 > 1$ butun son uchun $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ketma-ketlik quyidagicha aniqlansin:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{agar } \sqrt{a_n} \text{ butun son bo'lsa,} \\ a_n + 3 & \text{qolgan hollarda,} \end{cases} \qquad \text{barcha } n \geqslant 0 \text{ uchun.}$$

Quyidagi shartni qanoatlantiradigan a_0 ning barcha qiymatlarini toping: cheksiz ko'p n sonlari uchun $a_n = A$ bo'ladigan A soni mavjud.

Masala 2. $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Barcha haqiqiy x, y sonlar uchun

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

tenglikni qanoatlantiradigan barcha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarni toping.

Masala 3. Ovchi va ko'zga ko'rinmaydigan quyon tekislikda quyidagi o'yin o'ynamoqdalar. Quyonning boshlang'ich A_0 nuqtasi ovchining boshlang'ich B_0 nuqtasi bilan ustma-ust tushadi. O'yinning $n-1$ -chi raundidan keyin quyon A_{n-1} nuqtada turibdi, ovchi esa B_{n-1} nuqtada turibdi. O'yinning n-nchi raundda quyidagi tartibda uchta xarakat bajarilmoqda.

(i) Quyon ko'zga ko'rinmasdan A_{n-1} va A_n nuqtalar orasidagi masofa aynan 1 ga teng bo'ladigan A_n nuqtaga o'tadi.

(ii) Kuzatuv apparati ovchiga P_n nuqtani kursatadi. Bunda kuzatuv apparati P_n va A_n nuqtalar orasidagi masofa 1 dan oshmasligiga kafolat beradi.

(iii) Ovchi B_{n-1} va B_n nuqtalar orasida masofa aynan 1 ga teng bo'ladigan ko'zga ko'rinadigan B_n nuqtaga o'tadi.

Quyon har qanday yurishida hamda kuzatuv apparati har qanday ko'rsatishida 10^9 ta raunddan keyin ovchi va quyon orasidagi masofa 100 dan oshmasligini ta'minlash uchun ovchi doimo o'z xarakatini tanlay oladimi?

Language: Uzbek

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi

Chorshanba, 19 iyul, 2017 yil.

Masala 4. Ω aylanada RS diametr bo'lmagan R va S nuqtalar belgilangan. R nuqtadan Ω ga urinadigan ℓ to'g'ri chiziq o'tkazilgan. T nuqta shunday olinganki bunda S nuqta RT kesmaning o'rtasi bo'ladi. Ω dagi kichik RS yoyida J nuqta shunday olinganki bunda quyidagi shart bajariladi: JST uchburchakka tashqi chizilgan Γ aylana ℓ to'g'ri chiziq bilan ikkita turli nuqtalarda kesishsin. O'sha Γ aylananing ℓ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalardan R nuqtagacha eng yaqin bo'lgan nuqtasini A deb belgilaylik. AJ to'g'ri chiziq Ω ni ikkinchi marta K nuqtada kessin. KT to'g'ri chiziq Γ aylanaga urinma ekanligini isbotlang.

Masala 5. $N \geqslant 2$ butun son berilgan bo'lsin. $N(N+1)$ nafar futbolchidan tashkil topgan jamoa bir qatorga turdi, bunda xech qaysi ikki futbolchining bo'ylari teng emas. Jamoa murabbiyi $N(N-1)$ nafar futbolchini qatordan chiqarib tashladi, bunda qolgan $2N$ nafar futbolchilarning yangi qatori quyidagi N ta shartni qanoatlantiradi:

(1) bo'ylari eng baland bo'lgan ikki futbolchi orasida xech kim turmaydi,

(2) bo'ylari balandligi bo'yicha uchinchi va to'rtinchi bo'lgan futbolchilar orasida xech kim turmaydi,

$\vdots$

(N) bo'ylari eng past bo'lgan ikki futbolchi orasida xech kim turmaydi.

Buni doimo amalga oshirish mumkinligini isbotlang.

Masala 6. x va y butun sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi 1 bo'lgan (x, y) juftlik *primitiv nuqta* deyiladi. Primitiv nuqtalardan tashkil topgan S to'plam berilgan. S dagi har bir (x, y) uchun

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

bo'ladigan n natural son va a_0, a_1, …, a_n butun sonlar mavjud ekanligini isbotlang.

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi