

วันที่ ๑๒ กุมภาพันธ์ ๒๕๔๙

**โจทย์ข้อที่ ๑** ให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี  $I$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมແນบใน จุด  $P$  เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้อง

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

จะแสดงว่า  $AP \geq AI$  และอสมการเป็นสมการก็ต่อเมื่อ  $P = I$

**โจทย์ข้อที่ ๒** ให้  $P$  เป็นรูป 2006 เหลี่ยมด้านเท่ามุ่งเท่า จะเรียกเส้นทแยงมุ่งของ  $P$  ว่า ด้านดี เมื่อจุดปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุ่งแบ่งเส้นรอบรูปของ  $P$  ออกเป็นสองส่วน ซึ่งแต่ละส่วน ประกอบด้วยด้านจำนวนคี่ด้าน นอกจากนี้ ให้ถือว่าด้านแต่ละด้านของ  $P$  เป็น ด้านดี เช่นกัน

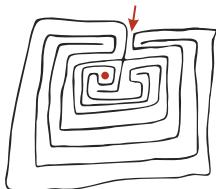
จงหาจำนวนที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี ด้านดี สองด้าน ซึ่งเกิดขึ้นจากการ ซอยแบ่ง  $P$  เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยด้วยเส้นทแยงมุ่ง 2003 เส้น โดยไม่มีเส้นทแยงมุ่งสองเส้น ได้ตัดกันภายใน  $P$

**โจทย์ข้อที่ ๓** จงหาจำนวนจริง  $M$  ค่าน้อยสุดที่ทำให้อสมการ

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง  $a, b$  และ  $c$

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที  
โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน



วันที่ ๑๓ กรกฎาคม ๒๕๔๙

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาคู่อันดับจำนวนเต็ม  $(x, y)$  ทั้งหมดซึ่ง

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้  $P(x)$  เป็นพหุนามดีกรี  $n > 1$  ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและให้  $k$  เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาพหุนาม  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$  เมื่อมี  $P$  ทั้งหมด  $k$  ตัว จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม  $t$  อย่างมาก  $n$  ตัวซึ่ง  $Q(t) = t$

โจทย์ข้อที่ ๖ กำหนดจำนวนจริงให้แต่ละด้าน  $b$  ของรูปหลายเหลี่ยมนูน  $P$  โดยที่จำนวนจริง ดังกล่าวมีค่าเท่ากับพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ภายใน  $P$  และมี  $b$  เป็นด้านหนึ่งของ รูปสามเหลี่ยม จงแสดงว่าผลรวมของพื้นที่ทั้งหมดที่กำหนดให้กับด้านของ  $P$  มีค่าอย่างน้อยสอง เท่าของพื้นที่ของ  $P$

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที  
โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน