الإثنين, 11. جويلية 2022

مسألة 1. يصدر بنك أوسلو نوعين من العملات المعدنية: ألومونيوم (يرمز لها A)، وبرونز (يرمز لها B) . تملك ماريان n من عملات الألومنيوم و n من عملات البرونز، قامت بوضعها في صف بترتيب عشوائي. لتكن "السلسلة" هي أي مجموعة متتالية من العملات من نفس النوع. معطى أن $k \leqslant 2n$ عدد صحيح موجب محدد. تقوم ماريان بالعملية التالية بشكل متكرر:

تحدد أطول سلسلة تحتوي على العملة رقم k من اليسار ثم تقوم بتحريك جميع العملات في تلك السلسلة إلى نهاية الطرف الأيسر من الصف. على سبيل المثال: إذا كان $n = 4$ و $k = 4$، وليكن الوضع الابتدائي للعملات $AABBBABA$ فان تتابع العمليات ينبغي أن يكون كالتالي:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$$

أوجد جميع الأزواج المرتبة (n, k) بحيث $1 \leqslant k \leqslant 2n$ التي تحقق أنه لأي ترتيب ابتدائي، بعد وقت ما أثناء العملية، ستكون جميع العملات التي عددها n من اليسار من نفس النوع.

مسألة 2. لتكن $\mathbb{R}_+^*$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة قطعا. أوجد كل الدوال $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ بحيث: لكل $x \in \mathbb{R}_+^*$ يوجد عدد واحد بالضبط $y \in \mathbb{R}_+^*$ تحقق أن:

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

مسألة 3. ليكن k عدداً صحيحاً موجباً قطعا ولتكن S مجموعة منتهية من الأعداد الأولية الفردية. أثبت أنه يوجد على الأكثر طريقة واحدة (باعتبار الدوران والانعكاس لا تعطي ترتيب جديد) لوضع عناصر S على دائرة بحيث حاصل ضرب أي عددين متجاورين يكون على الصورة $x^2 + x + k$ لقيمة صحيحة موجبة x.

الثلاثاء, 12. جوييه 2022

مسألة 4. ليكن $ABCDE$ خماسياً محدباً بحيث $BC = DE$. لتكن النقطة T تقع داخل $ABCDE$ بحيث $TB = TD$ ، $TC = TE$ وَ $\angle ABT = \angle TEA$. ليكن المستقيم AB يقطع المستقيمين CD و CT في النقطتين P و Q على التوالي. لتكن النقاط P, B, A, Q تقع على مستقيم بهذا الترتيب. ليكن المستقيم AE يقطع المستقيمين CD و DT في النقطتين R و S على التوالي. لتكن النقاط R, E, A, S تقع على مستقيم بهذا الترتيب. أثبت أن النقاط P, S, Q, R تقع على دائرة واحدة.

مسألة 5. أوجد جميع الثلاثيات المرتبة (a, b, p) من الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر حيث p عدد أولي، والتي تحقق:

$$a^p = b! + p$$

مسألة 6. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. "المربع الشمالي" هو جدول $n \times n$ يحتوي على جميع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n^2 بحيث تحتوي كل خانة على عدد واحد بالضبط. نعتبر الخانتين المختلفتين متجاورتين إذا كان لهما ضلع مشترك. يقال لخانة بأنها "وادي" إذا كانت مجاورة لخانات تحتوي على أعداد أكبر من العدد الذي تحتويه. نعرف "المسار الشاق" على أنه سلسلة تتكون من خانة واحدة أو أكثر تحقق:

(i) الخانة الأولى في المسار هي "وادي"،

(ii) أي خانة تالية في السلسلة تكون مجاورة لخانة سابقة،

(iii) الأعداد المكتوبة في الخانات المتتابعة في السلسلة تكون في ترتيب تصاعدي.

أوجد بدلالة n أصغر عدد ممكن من "المسارات الشاقة" في "المربع الشمالي".