Utorak, 23. srpnja, 2013.

Zadatak 1. Dokaži da za svaka dva prirodna broja k i n postoji k prirodnih brojeva $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nužno različitih) takvih da je

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Zadatak 2. Konfiguraciju od 4027 točaka u ravnini zovemo *kolumbijskom* ako se sastoji od 2013 crvenih i 2014 plavih točaka, pri čemu nikoje tri točke iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravaca ravnina se dijeli na nekoliko dijelova. Kažemo da je raspored pravaca *dobar* za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

- nijedan od pravaca ne prolazi nijednom točkom konfiguracije;
- nijedan od dijelova ne sadrži točke obiju boja.

Nađi najmanji broj k takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 točaka postoji dobar raspored k pravaca.

Zadatak 3. Pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrhu A dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki A_1. Analogno se definiraju točke B_1 na $\overline{CA}$ i C_1 na $\overline{AB}$, kao dodirne točke pripisanih kružnica nasuprot vrhovima B i C, redom. Pretpostavimo da središte kružnice opisane trokutu $A_1B_1C_1$ leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.

(*Pripisana kružnica* trokuta ABC nasuprot vrhu A je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$, produžetak stranice $\overline{AB}$ preko točke B i produžetak stranice $\overline{AC}$ preko točke C. Slično se definiraju pripisane kružnice nasuprot vrhovima B i C.)

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Srijeda, 24. srpnja, 2013.

Zadatak 4. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC, a W točka na stranici $\overline{BC}$, različita od točaka B i C. Točke M i N su redom nožišta visina iz vrhova B i C. Neka je ω_1 kružnica opisana trokutu BWN, a X točka na ω_1 takva da je $\overline{WX}$ promjer kružnice ω_1. Analogno, neka je ω_2 kružnica opisana trokutu CWM, a Y točka na ω_2 takva da je $\overline{WY}$ promjer kružnice ω_2. Dokaži da su točke X, Y i H kolinearne.

Zadatak 5. Neka je $\mathbb{Q}_{>0}$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Neka funkcija $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

(i) za sve $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ vrijedi $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) za sve $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ vrijedi $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) postoji racionalni broj $a > 1$ takav da je $f(a) = a$.

Dokaži da je $f(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Zadatak 6. Neka je $n \geq 3$ prirodni broj. Na kružnici je dano $n+1$ točaka koje je dijele na lukove jednake duljine. Promatrajmo sva moguća označavanja tih točaka brojevima $0, 1, \ldots, n$ u kojima se svaka oznaka koristi točno jednom; dva takva označavanja smatraju se istima ako se jedno može dobiti od drugog rotacijom dane kružnice. Označavanje zovemo *lijepim* ako za svake četiri oznake $a < b < c < d$ za koje je $a + d = b + c$ tetiva koja spaja točke označene s a i d ne siječe tetivu koja spaja točke označene s b i c.

Neka je M broj lijepih označavanja, a N broj uređenih parova (x, y) prirodnih brojeva za koje je $x + y \leq n$ i $M(x, y) = 1$. Dokaži da je

$$M = N + 1.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova