*Utorak, 8. srpnja 2014.*

**1. zadatak**

Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Dokaži da postoji točno jedan prirodni broj $n$ takav da je

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

**2. zadatak**

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj. Dana je šahovska ploča $n \times n$ koja se sastoji od $n^2$ polja. Raspored $n$ topova na toj ploči je *miroljubiv* ako se u svakom retku i u svakom stupcu nalazi točno jedan top. Odredi najveći prirodni broj $k$ sa svojstvom da, za svaki miroljubivi raspored $n$ topova, postoji kvadrat $k \times k$ na čijih se $k^2$ polja ne nalazi niti jedan top.

**3. zadatak**

U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Točka $H$ je nožište okomice iz točke $A$ na pravac $BD$. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ odabrane su redom točke $S$ i $T$ tako da točka $H$ bude unutar trokuta $SCT$ i da vrijedi

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ\,.$$

Dokaži da pravac $BD$ dodiruje opisanu kružnicu trokuta $TSH$.



*Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*

*Srijeda, 9. srpnja 2014.*

**4. zadatak**

Točke $P$ i $Q$ leže na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutog trokuta $ABC$ tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Točke $M$ i $N$ nalaze se na pravcima $AP$ i $AQ$ redom, tako da je $P$ polovište dužine $\overline{AM}$, a $Q$ polovište dužine $\overline{AN}$. Dokaži da se pravci $BM$ i $CN$ sijeku na opisanoj kružnici trokuta $ABC$.

**5. zadatak**

Banka Cape Towna izdaje kovanice vrijednosti $\frac{1}{n}$, za svaki prirodni broj $n$. Ako je dano konačno mnogo takvih kovanica (ne nužno različitih vrijednosti) čija je ukupna vrijednost najviše $99 + \frac{1}{2}$, dokaži da je te kovanice moguće podijeliti na najviše 100 grupa, tako da ukupna vrijednost kovanica u svakoj grupi bude najviše 1.

**6. zadatak**

Za skup pravaca u ravnini kažemo da je u *općem položaju* ako nikoja dva pravca nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Svaki skup pravaca u općem položaju dijeli ravninu na područja od kojih neka imaju konačnu površinu. Takva područja zovemo *ograničenim područjima* promatranog skupa pravaca. Dokaži da je, za sve dovoljno velike $n$, u svakom skupu od $n$ pravaca u općem položaju moguće obojati barem $\sqrt{n}$ pravaca plavom bojom, tako da nijedno od ograničenih područja tog skupa pravaca nema potpuno plavi rub.

*Napomena:*
Dokaz tvrdnje u kojoj je $\sqrt{n}$ zamijenjeno s $c\sqrt{n}$ bodovat će se ovisno o vrijednosti konstante $c$.



*Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*