



Сређења, 7. Јул 2010.

1. задатак. Одредити све функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{R}$ вриједи

$$f([x]y) = f(x)[f(y)].$$

($[z]$ је највећи цијели број не већи од z .)

2. задатак. Нека је I центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, и нека је Γ описана кружница том троуглу. Нека права AI сијече Γ у тачкама A и D . Нека је E тачка на луку \widehat{BDC} , а F тачка на дужи BC тако да је

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \cdot \angle BAC.$$

Нека је G средиште дужи IF . Доказати да пресјек правих DG и EI припада Γ .

3. задатак. Нека је \mathbb{N} скуп свих природних бројева. Одредити све функције $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ тако да је

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

квадрат природног броја за све $m, n \in \mathbb{N}$.



Четвртак, 8. Јул 2010.

4. задатак. Нека је P тачка у унутрашњости троугла $\triangle ABC$. Нека праве AP , BP и CP сијеку описану кружницу Γ троугла $\triangle ABC$ по други пут у тачкама K , L и M респективно. Тангента кружнице Γ у тачки C сијече праву AB у S . Претпоставимо да је $SC = SP$. Доказати да је тада $MK = ML$.

5. задатак. У свакој од шест кутија $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетку се налази тачно један новчић. Дозвољене су двије врсте потеза:

- 1° Изаберемо непразну кутију B_j за $1 \leq j \leq 5$. Уклонимо један новчић из B_j и додамо два новчића у B_{j+1} .
- 2° Изаберемо непразну кутију B_k за $1 \leq k \leq 4$. Уклонимо један новчић из B_k и замјенимо садржаје (могуће празних) кутија B_{k+1} и B_{k+2} .

Испитати постоји ли коначан низ дозвољених потеза такав да су на крају кутије B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 празне, а кутија B_6 садржи тачно $2010^{2010^{2010}}$ новчића. (Важи $a^{bc} = a^{(bc)}$.)

6. задатак. Нека је a_1, a_2, a_3, \dots низ позитивних реалних бројева. Претпоставимо да за неки природан број s важи

$$a_n = \max \{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

за све $n > s$. Доказати да постоје природни бројеви ℓ и N , такви да је $\ell \leq s$ и за које важи $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за све $n \geq N$.