ponedjeljak, 18. srpnja 2011.

1. zadatak

Za skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ koji se sastoji od četiri međusobno različita prirodna broja, neka s_A označava sumu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Neka n_A označava broj parova (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, za koje broj $a_i + a_j$ dijeli sumu s_A.

Odredi sve takve skupove A, koji se sastoje od četiri međusobno različita prirodna broja, za koje n_A postiže maksimalnu moguću vrijednost.

2. zadatak

Neka je $\mathcal{S}$ konačan skup točaka u ravnini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa $\mathcal{S}$ nisu kolinearne. Nazovimo *vjetrenjačom* postupak određen pravcem ℓ na kojem se nalazi točno jedna točka P skupa $\mathcal{S}$ na sljedeći način:

> Pravac ℓ rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke P (*središta rotacije*) do prvog trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa $\mathcal{S}$. Ta točka, nazovimo je Q, postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke Q, do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa $\mathcal{S}$. Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije $P \in \mathcal{S}$ i pravac ℓ koji prolazi kroz P, koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa $\mathcal{S}$ beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

3. zadatak

Neka $\mathbb{R}$ označava skup svih realnih brojeva. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljena nejednakost

$$f(x + y) \leqslant y f(x) + f(f(x)).$$

Dokaži da je $f(x) = 0$ za sve $x \leqslant 0$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

utorak, 19. srpnja 2011.

4. zadatak

Neka je n prirodni broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i n utega čije su težine $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu.

Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

5. zadatak

Neka je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ funkcija iz skupa cijelih brojeva u skup prirodnih brojeva, takva da je za sve cijele brojeve m, n razlika $f(m) - f(n)$ djeljiva brojem $f(m-n)$.

Dokaži da je broj $f(n)$ djeljiv brojem $f(m)$, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ za koje je $f(m) \leqslant f(n)$.

6. zadatak

Neka je ABC šiljastokutni trokut i Γ njegova opisana kružnica. Neka je ℓ bilo koja tangenta na kružnicu Γ, i neka su ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c pravci simetrični pravcu ℓ s obzirom na pravce BC, CA i AB redom.

Dokaži da kružnica opisana trokutu kojeg određuju pravci ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c dodiruje kružnicu Γ.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova