

2009년 7월 15일, 수요일

문제 1. 양의 정수 n 에 대하여, a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$)는 1 이상이고 n 이하인 서로 다른 정수들이며, 모든 $i = 1, \dots, k-1$ 에 대하여 $a_i(a_{i+1}-1)$ 이 n 의 배수라고 한다. 이 때, $a_k(a_1-1)$ 은 n 의 배수가 될 수 없음을 보여라.

문제 2. 삼각형 ABC 의 외심을 O 라 하고, 점 P, Q 는 각각 변 CA, AB 위의 양끝점이 아닌 점이라 하자. 점 K, L, M 을 각각 선분 BP, CQ, PQ 의 중점이라 하고, 세 점 K, L, M 을 지나는 원을 Γ 라 하자. 직선 PQ 가 원 Γ 에 접한다고 가정하자. 이 때, $OP = OQ$ 임을 보여라.

문제 3. 양의 정수들로 이루어진 단조증가하는(항상 커지는) 무한수열 s_1, s_2, s_3, \dots 의 두 무한부분수열

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{과} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

이 각각 등차수열이면, 무한수열 s_1, s_2, s_3, \dots 도 역시 등차수열임을 보여라.

2009년 7월 16일, 목요일

문제 4. 삼각형 ABC 에서 $AB = AC$ 이다. 각 CAB 의 이등분선과 변 BC 의 교점을 D , 각 ABC 의 이등분선과 변 CA 의 교점을 E 라 하자. 삼각형 ADC 의 내심을 K 라 하고, $\angle BEK = 45^\circ$ 라 가정하자. 이 때, $\angle CAB$ 의 가능한 값들을 모두 구하여라.

문제 5. 다음의 조건을 만족시키는, 양의 정수 전체의 집합에서 정의되고 양의 정수들을 함수값으로 갖는 함수 f 를 모두 구하여라:

[조건] 모든 양의 정수 a, b 에 대하여 $a, f(b), f(b + f(a) - 1)$ 을 세 변의 길이로 갖는 삼각형이 존재한다. (세 꼭지점이 일직선 상에 있는 퇴화삼각형은 삼각형이 아닌 것으로 본다.)

문제 6. 주어진 서로 다른 양의 정수 a_1, a_2, \dots, a_n 에 대하여, $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 을 제외한 임의의 $n - 1$ 개의 서로 다른 양의 정수들로 이루어진 집합 M 이 있다. 메뚜기 한 마리가 수직선 위의 원점 0에서 시작하여 매번 양의 방향으로 총 n 번의 점프를 하는데, 점프 거리를 순서대로 나열한 것이 a_1, a_2, \dots, a_n 의 재배열이 되도록 점프한다. 이 메뚜기가 M 의 원소를 좌표로 갖는 수직선 상의 점들을 하나도 밟지 않고 n 번의 점프를 할 수 있는 a_1, a_2, \dots, a_n 의 재배열이 존재함을 보여라.