2006년 7월 12일

Problem 1. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하자. 삼각형 내부의 한 점 P 에 대하여,

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

이 성립한다. 이때, $AP \geq AI$ 임을 보이고, 등호가 성립할 필요충분조건은 $P = I$ 임을 보여라.

Problem 2. 정 2006 각형 P 에서, 어떤 대각선의 양쪽에 있는 변들의 개수가 각각 홀수일 때, 그 대각선을 '홀대각선'이라 부르자. 단, P 의 변들은 모두 홀대각선으로 간주한다.

정 2006 각형 P 가 2003 개의 대각선에 의해 삼각형들로 분할되었다고 하자. 단, 어떤 두 대각선도 P 의 내부에서 교차하지 않는다. 이러한 분할에 의해 생기는 삼각형들 중, 두 개의 홀대각선을 변으로 갖는 이등변삼각형의 최대 개수를 구하여라.

Problem 3. 모든 실수 a, b, c 에 대하여 다음의 부등식을 만족하는 실수 M 의 최소값을 구하여라.

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점

2006년 7월 13일

Problem 4. 다음의 방정식을 만족하는 정수쌍 (x, y) 를 모두 구하여라.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. 정수 계수를 갖는 n 차 다항식 $P(x)$ 와 임의의 양의 정수 k 에 대하여, 다항식 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$ 를 생각하자. 단, $n > 1$ 이고, P 는 k 번 나타난다. 이때, $Q(t) = t$ 를 만족하는 정수 t 의 개수는 n 개 이하임을 보여라.

Problem 6. 볼록다각형 P 의 각 변 b 에 대하여, b 를 한 변으로 가지면서 P 에 포함되는 삼각형의 최대넓이를 대응시키자. 볼록다각형 P 의 각 변에 대응되는 최대넓이들을 모두 더한 값은 P 의 넓이의 두 배 이상임을 보여라.

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점