

2025-yil 15-iyul, seshanba

1-Masala: Agar tekislikda to‘g‘ri chiziq Ox o‘qi, Oy o‘qi va $x + y = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning hech qaysiga parallel **bo‘lmasa**, bunday to‘g‘ri chiziqni *qirg‘oq chizig‘i* deb ataymiz. $n \geq 3$ butun son berilgan. k nomanifiy butun sonning barcha qiymatlarini toping, bunda tekislikda quyidagi ikkala shartni ham qanoatlantiradigan n ta turli to‘g‘ri chiziqlar mavjud bo‘lsin:

- $a + b \leq n + 1$ shartni qanoatlantiradigan barcha a va b musbat butun sonlar uchun (a, b) nuqta ushbu n ta to‘g‘ri chiziqlarning kamida bittasida yotadi;
- ushbu n ta to‘g‘ri chiziqning aynan k tasi qirg‘oq chizig‘i.

2-Masala: Markazlari mos ravishda M va N nuqtalarda bo‘lgan Ω va Γ aylanalar berilgan. Bunda Ω aylananing radiusi Γ aylananing radiusidan kichik. Ω va Γ aylanalar ikkita turli A va B nuqtalarda kesishsin. MN to‘g‘ri chiziq Ω aylanani C nuqtada va Γ aylanani esa D nuqtada kesadi, bunda C, M, N va D nuqtalar to‘g‘ri chiziqda ko‘rsatilgan tartibda joylashgan. ACD uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi P nuqta bo‘lsin. AP to‘g‘ri chiziq Ω aylanani ikkinchi marta $E \neq A$ nuqtada kesadi. AP to‘g‘ri chiziq Γ aylanani ikkinchi marta $F \neq A$ nuqtada kesadi. H nuqta PMN uchburchakning balandliklari kesishish nuqtasi bo‘lsin. H nuqtadan o‘tuvchi hamda AP to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq BEF uchburchakka tashqi chizilgan aylanaga urinma ekanini isbotlang.

3-Masala: \mathbb{N} musbat butun sonlar to‘plami bo‘lsin. Barcha a va b musbat butun sonlar uchun quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funksiyani *dahshat* funksiya deb ataymiz:

$$b^a - f(b)^{f(a)} \quad \text{ifoda } f(a) \text{ ifodaga bo‘linadi.}$$

c o‘zgarmas haqiqiy sonning eng kichik qiymatini aniqlang, bunda barcha dahshat funksiyalar va barcha musbat butun n sonlar uchun $f(n) \leq cn$ o‘rinli.

2025-yil, 16-iyul, chorshanba

4-Masala: N musbat butun sonning N ga teng bo‘lmagan musbat bo‘luvchisini to‘liqmas bo‘luvchi deb ataymiz. a_1, a_2, \dots musbat butun sonlardan tashkil topgan cheksiz ketma-ketlik bo‘lsin, bunda har bir had kamida uchta to‘liqmas bo‘luvchiga ega. Har bir $n \geq 1$ uchun, a_{n+1} butun son a_n sonining eng katta uchta to‘liqmas bo‘luvchilarining yig‘indisiga teng. a_1 sonining qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini toping.

5-Masala: Alisa va Bazza inekoalaty o‘yinini o‘ynamoqda. Ushbu o‘yin ikki-kishilik o‘yin bo‘lib, o‘yin qoidalari ikkala o‘yinchiga ham avvaldan ma’lum bo‘lgan musbat haqiqiy son λ soniga bog‘liqdir. O‘yinning $n - 1$ dan boshlab) quyidagi sodir bo‘ladi:

- Agar n toq son bo‘lsa, Alisa x_n nomanfiy haqiqiy sonni shunday tanlaydiki, bunda quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Agar n juft son bo‘lsa, Bazza x_n nomanfiy haqiqiy sonni shunday tanlaydiki, bunda quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Agar o‘yinchi mos x_n sonni tanlay olmasa, o‘yin tugaydi va narigi o‘yinchi g‘olib deb hisoblanadi. Agar o‘yin cheksiz davom etsa, hech qaysi o‘yinchi yutmagan hisoblanadi. Barcha tanlanadigan sonlar ikkala o‘yinchiga ham ma’lum. Alisada o‘yinda g‘olib bo‘lish strategiyasi mavjud bo‘lgan λ sonining barcha qiymatlarini toping, hamda Bazzada o‘yinda g‘olib bo‘lish strategiyasi mavjud bo‘lgan λ sonining barcha qiymatlarini toping.

6-Masala: 2025×2025 o‘lchamdagи birlik kvadratchalardan tashkil topgan setkani qaraylik. Matilda ushbu setkaga to‘g‘ri-to‘rtburchak shaklidagi plitkalarni yotqizib chiqmoqchi, bunda plitkalar o‘lchamlari har xil bo‘lishi mumkin. Har bir plitkaning har bir tomoni setkaning chiziqlarida yotadi hamda har bir birlik kvadratcha ko‘pi bilan bitta plitka bilan qoplanlangan. Har bir qator va har bir ustunda aynan bittadan birlik kvadratcha hech qaysi plitka bilan qoplanmay qolishi uchun Matildaga kerak bo‘ladigan plitkalar sonining eng kam miqdorini toping.