Salı, 10 Temmuz, 2012

Soru 1. Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çemberin merkezi J noktası olsun. Bu dışteğet çember BC kenarına M, AB ve AC doğrularına ise sırasıyla K ve L noktalarında teğettir. LM ve BJ doğruları F noktasında, KM ve CJ doğruları ise G noktasında kesişiyor. AF ve BC doğrularının kesişim noktası S, AG ve BC doğrularının kesişim noktası ise T olsun.

M'nin, $[ST]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.

(ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki *dışteğet çember*; BC kenarına, B'nin ötesinde $[AB$ ışınına ve C'nin ötesinde $[AC$ ışınına teğet olan çemberdir.)

Soru 2. $n \geq 3$ bir tam sayı ve $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ olsun.

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 3. *Yalancının sayısını tahmin etme oyunu*, A ve B oyuncuları arasında oynanan bir oyundur. Oyun, her iki oyuncuya da önceden bildirilen k ve n pozitif tam sayılarına göre oynanıyor.

Oyunun başında A oyuncusu $1 \leq x \leq N$ olacak şekilde x ve N tam sayılarını seçer ve N sayısının ne olduğunu B oyuncusuna dürüstçe söyler, fakat x sayısını gizli tutar. Daha sonra B oyuncusu A oyuncusuna sorular sorarak x sayısı hakkında bilgi edinmeye çalışır. Her defasında B oyuncusu pozitif tam sayılardan oluşan bir S kümesi belirler (bu küme daha önceki bir soruda geçen küme de olabilir) ve A oyuncusuna "x sayısı S kümesinin elemanı mıdır?" diye sorar. B oyuncusu istediği kadar soru sorabilir. A oyuncusu B'nin her sorusunu cevabı *evet* veya *hayır* olacak şekilde anında yanıtlar. A oyuncusu istediği kadar yalan söyleyebilir, fakat herhangi ardışık $k+1$ cevabından en az biri doğru olmak zorundadır.

B oyuncusu istediği kadar soru sorduktan sonra en fazla n pozitif tam sayıdan oluşan bir X kümesi belirlemelidir. Eğer x sayısı X kümesinin elemanı ise B oyunu kazanır, aksi durumda kaybeder.

1. $n \geq 2^k$ ise, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantileyebileceğini kanıtlayınız.

2. Yeterince büyük her k tam sayısı için, B oyuncusunun oyunu kazanmayı garantilemesinin mümkün olmadığı bir $n \geq 1.99^k$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir

Language: **Turkish**

Day: **2**

Çarşamba, 11 Temmuz, 2012

Soru 4. $a+b+c=0$ olmak üzere, tüm a, b, c tam sayıları için

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

eşitliğini sağlayan bütün $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

(Burada $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesidir.)

Soru 5. Bir ABC üçgeninde $\angle BCA = 90^o$ ve C köşesinden indirilen yükeskliğin ayağı D olsun. $[CD]$ doğru parçası üzerinde C ve D noktalarından farklı bir X noktası alınıyor. $[AX]$ doğru parçası üzerinde $|BK| = |BC|$ olacak şekilde bir K noktası ve benzer şekilde $[BX]$ doğru parçası üzerinde $|AL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası seçiliyor. AL ve BK doğrularının kesişim noktası M olsun.

$|MK| = |ML|$ olduğunu gösteriniz.

Soru 6. Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1$$

eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan tam sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir