

IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Ukrainian (ukr), day 1

вівторок, 16 липня 2024

Задача 1. Знайдіть усі такі дійсні числа α , що для кожного натурального n число

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

ділиться націло на число n . Тут через $\lfloor z \rfloor$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує z . Наприклад, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ та $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.

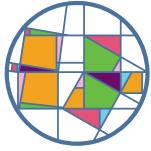
Задача 2. Знайдіть усі пари (a, b) натуральних чисел, для яких існують такі натуральні числа g та N , що рівність

$$\text{НСД}(a^n + b, b^n + a) = g$$

справджується для всіх натуральних чисел $n \geq N$. Тут через $\text{НСД}(x, y)$ позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y .

Задача 3. Нехай a_1, a_2, a_3, \dots – нескінченна послідовність натуральних чисел та нехай N – деяке натуральне число. Відомо, що для кожного натурального числа $n > N$ число a_{n-1} зустрічається серед чисел a_1, a_2, \dots, a_{n-1} рівно a_n разів.

Доведіть, що принаймні одна з послідовностей a_1, a_3, a_5, \dots або a_2, a_4, a_6, \dots є періодичною, починаючи з деякого номера. Нескінченну послідовність b_1, b_2, b_3, \dots називають *періодичною, починаючи з деякого номера*, якщо існують такі натуральні числа p та M , що $b_{m+p} = b_m$ для всіх натуральних чисел $m \geq M$.



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Ukrainian (ukr), day 2

середа, 17 липня 2024

Задача 4. Нехай ABC – трикутник, у якого $AB < AC < BC$. Точка I – центр вписаного кола ω трикутника ABC . Нехай X , де $X \neq C$, – така точка на прямій BC , що пряма, яка проходить через точку X паралельно прямій AC , дотикається кола ω . Аналогічно, нехай Y , де $Y \neq B$, – така точка на прямій BC , що пряма, яка проходить через точку Y паралельно AB , дотикається кола ω . Нехай пряма AI вдруге перетинає описане коло трикутника ABC в точці $P \neq A$. Точки K та L – середини відрізків AC та AB відповідно.

Доведіть, що $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Задача 5. Равлик Богдан грає на дошці, що має 2024 рядки та 2023 стовпці. У клітинках дошки ховаються 2022 монстри, кожний з яких займає рівно одну клітинку. Спочатку Богдан не знає розташування жодного монстра, але він знає, що в кожному рядку, крім первого і останнього, ховається рівно один монстр. Богдан також знає, що в кожному стовпчику ховається не більше, ніж один монстр.

Богдан у декілька спроб намагається перейти з первого рядка в останній. Кожна спроба починається з того, що Богдан обирає будь-яку початкову клітинку в первому рядку. Далі він рухається клітинками, послідовно переходячи з одної клітинки на сусідню, що має спільну сторону з попередньою. Під час однієї спроби Богдан може повернатися до клітинок, на яких він вже бував раніше. Якщо Богдан потрапляє на клітинку з монстром, спроба завершується і він переноситься в первый рядок для нової спроби. Монстри не рухаються дошкою, і Богдан пам'ятає, чи є монстри в клітинках, в яких він бував раніше. Якщо Богдан потрапляє в будь-яку клітинку останнього рядка, спроба та гра завершуються.

Знайдіть найменше натуральне число n , для якого Богдан має стратегію, щоб гарантовано потрапити в останній рядок на n -ій спробі або раніше незалежно від розташування монстрів.

Задача 6. Нехай \mathbb{Q} – множина раціональних чисел. Функцію $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ називають *чарівною*, якщо виконується така властивість: для будь-яких $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{або} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Доведіть, що існує таке ціле число c , що для будь-якої чарівної функції f існують не більше ніж c різних раціональних чисел виду $f(r) + f(-r)$, де $r \in \mathbb{Q}$, та знайдіть найменше значення числа c .