Вторник, Јули 16, 2019

Задача 1. Нека $\mathbb{Z}$ е множеството од сите цели броеви. Најди ги сите функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ така што за сите цели броеви a и b, важи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Задача 2. Во триаголникот ABC, точката A_1 лежи на страната BC и точката B_1 лежи на страната AC. Нека P и Q се точки од отсечките AA_1 и BB_1, соодветно, така што PQ е паралелна на AB. Нека P_1 е точка од правата PB_1, така што B_1 лежи помеѓу P и P_1, и важи $\angle PP_1C = \angle BAC$. Слично, нека Q_1 е точка од правата QA_1, така што A_1 лежи помеѓу Q и Q_1, и важи $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Докажи дека точките P, Q, P_1 и Q_1 лежат на иста кружница.

Задача 3. Една социјална мрежа има 2019 корисници. Некои од корисниците се пријатели, при што ако корисникот A е пријател со корисникот B, тогаш корисникот B е исто така пријател со корисникот A. Следниве настани се случуваат еден по еден, но не и истовремено:

> три корисници A, B и C така што A е пријател со корисниците B и C, но B и C не се пријатели, ги менуваат своите пријателски статуси така што B и C се сега пријатели, но сега A не е пријател со B и не е пријател со C. Сите други пријателски статуси не се променети.

На почетокот, 1010 корисници имаат по 1009 пријатели и 1009 корисници имаат по 1010 пријатели. Докажи дека постои низа од вакви настани, после кои секој корисник е пријател со најмногу еден корисник.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени

Среда, Јули 17, 2019

Задача 4. Најди ги сите парови (k, n) од позитивни цели броеви такви што

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Задача 5. Банката на градот Бат пуштила во употреба монети, такви што на едната страна има напишано H, а на другата T. Хари има n такви монети наредени во редица од лево кон десно. Тој последователно ја изведува следнава операција: ако има точно $k > 0$ монети чија горна страна е H, тогаш тој ја превртува k-тата монета од лево кон десно; инаку ако на сите монети горната страна е T, тој запира. На пример, ако $n = 3$, процесот кој почнува со конфигурацијата THT ќе биде $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ и запира после три операции.

(а) Докажи дека за било која почетна конфугурација, Хари ќе запре после конечен број на операции.

(б) За секоја почетна конфигурација C, нека со $L(C)$ го означиме бројот на операции потребни да Хари запре со процесот. На пример, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Најди ја аритметичката средина на броевите $L(C)$, за сите 2^n можни почетни конфигурации C.

Задача 6. Нека I е центарот на вписаната кружница во остроаголниот триаголник ABC, за кој $AB \neq AC$. Вписаната кружница ω во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA и AB во D, E и F, соодветно. Правата која минува низ D и е нормална на EF ја сече кружницата ω повторно во точка R. Правата AR ја сече кружницата ω повторно во P. Опишаните кружници околу триаголниците PCE и PBF се сечат повторно во Q.

Докажи дека правите DI и PQ се сечат на правата која минува низ A и е нормална на AI.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени