International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Arabic (Syrian)**

Day: **1**

الاثنين 18 تموز 2011

المسألة 1 :

لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ مجموعة مؤلفة من أربعة أعداد صحيحة موجبة تماماً ومختلفة مثنى مثنى . وليكن $S_A=a_1+a_2+a_3+a_4$. وليكن n_A عدد الأزواج (i,j) بحيث $1\le i<j\le 4$ والتي من أجل كل منها يكون العدد a_i+a_j قاسماً للعدد S_A . أوجد جميع المجموعات المؤلفة من أربعة أعداد صحيحة موجبة تماماً ومختلفة مثنى مثنى بحيث يكون n_A أكبر ما يمكن .

المسألة 2 :

لتكن S مجموعة منتهية من نقط المستوي ، تحتوي على نقطتين على الأقل. ولنفرض أنه لا توجد في S ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة . نعني *بالطاحونة* العملية التالية : تبدأ العملية بمستقيم ℓ يمر بنقطة واحدة $P\in S$ نعتبرها مركزاً لدوران المستقيم ℓ وندوّر المستقيم ℓ حول النقطة P باتجاه دوران عقارب الساعة حتى يلاقي نقطةً أخرى Q من S . ثم نجعل Q مركزاً جديداً لدوران المستقيم ℓ ، ونستمر على هذا النهج عدداً غير منته من المرات على أن تكون جميع مراكز الدوران من S . بيّن أنه يمكن اختيار نقطة مناسبة $P\in S$ ومستقيم مناسب ℓ يمر من P بحيث *الطاحونة* التي تبدأ بالمستقيم ℓ تجعل كل نقطة من نقاط S مركزاً للدوران عدداً غير منته من المرات .

المسألة 3 :

ليكن f تابعاً عددياً من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى نفسها يحقق :

$$f(x+y)\le y\,f(x)+f(f(x))$$

وذلك من أجل كل الأعداد الحقيقية x,y . برهن أن $f(x)=0$ من أجل كل $x\le 0$.

مدة الامتحان أربع ساعات ونصف الساعة

لكل مسألة 7 درجات

Language Arabic Syrian

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Arabic (Syrian)**

Day: 2

الثلاثاء 19 تموز 2011

المسألة 4 :

ليكن $n>0$ عدداً صحيحاً . لدينا ميزان ذو كفتين و n من الأوزان ، قيمها $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. نريد وضع هذه الأوزان التي عددها n واحداً تلو الآخر في إحدى كفتي الميزان بحيث لا يزيد وزن الكفة اليمنى عن وزن الكفة اليسرى . في كل خطوة نختار أحد الأوزان التي لم يتم وضعها في الميزان ونضعه في أحدى كفتي الميزان حتى يتم الانتهاء من جميع الأوزان . عيّن عدد الطرائق التي يمكن من خلالها تحقيق ذلك .

المسألة 5 :

ليكن f تابعاً عددياً من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً . لنفرض أنه من أجل كل عددين صحيحين m و n يكون المقدار $f(m)-f(n)$ قابلاً للقسمة على $f(m-n)$. برهن أنه من أجل كل عددين صحيحين m,n يحققان $f(m)\le f(n)$ يكون $f(n)$ قابلاً للقسمة على $f(m)$.

المسألة 6 :

ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا ولتكن Γ الدائرة المارة برؤوسه وليكن ℓ مماساً للدائرة Γ ولتكن المستقيمات ℓ_a و ℓ_b و ℓ_c صور انعكاس المستقيم ℓ (نظائر المستقيم ℓ) بالنسبة إلى المستقيمات BC و CA و AB على الترتيب . بيّن أن الدائرة المارة برؤوس المثلث المعيّن بالمستقيمات ℓ_a و ℓ_b و ℓ_c تمس الدائرة Γ .

مدة الامتحان أربع ساعات ونصف الساعة

لكل مسألة 7 درجات

Language Arabic Syrian