

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

به نام او

چهارشنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۸

مساله ۱. در مثلث حاده‌الزاویه $HABC$ مرکز ارتفاعی است. دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط BC خط BC را در A_1 و A_2 قطع می‌کند. به طور مشابه دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AC ، خط AC را در B_1 و B_2 قطع می‌کند و دایره‌ی گذرنده از H به مرکز وسط پاره خط AB ، خط AB را در C_1 و C_2 قطع می‌کند. نشان دهید $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ روی یک دایره هستند.

مساله ۲. الف) نشان دهید نامساوی $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$ برقرار است.
 مخالف یک و با شرط $xyz = 1$ برقرار است.

ب) نشان دهید تساوی برای بینهایت سه تایی x, y, z از اعداد گویای مخالف یک با شرط $xyz = 1$ رخ می‌دهد.

مساله ۳. نشان دهید تعداد اعداد طبیعی مانند n به طوری که $1 + n^2$ عامل اولی بزرگتر از $\sqrt{2n} + 2n$ دارد نامتناهی است.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

به نام او

پنج شنبه، ۱۷ جولای ۲۰۰۸

مساله ۴. تمام توابع $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ را بباید به طوری که برای هر w, x, y, z مثبت با شرط $wx = yz$ داشته باشیم

$$\frac{f(w)^{\gamma} + f(x)^{\gamma}}{f(y^{\gamma}) + f(z^{\gamma})} = \frac{w^{\gamma} + x^{\gamma}}{y^{\gamma} + z^{\gamma}}$$

مساله ۵. دو عدد طبیعی n و k با زوجیت یکسان و شرط $k \geq n$ داده شده اند. فرض کنید $2n$ لامپ با شماره های $1, 2, \dots, 2n$ داریم که هر کدام می توانند روشن یا خاموش باشند و در ابتدا همه لامپ ها خاموش هستند. منظور از دنباله، دنباله ای مشکل از چند مرحله است که در هر مرحله دقیقا یکی از لامپ ها را تغییر وضعیت می دهیم (از روشن به خاموش یا از خاموش به روشن).

را تعداد دنباله های $_k$ مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن $_k$ مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $1+n$ تا $2n$ خاموش باشد. متناظرا M را تعداد دنباله های $_k$ مرحله ای بگیرید که پس از انجام آن $_k$ مرحله، وضعیت لامپ های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ های $1+n$ تا $2n$ خاموش باشد با این محدودیت که وضعیت لامپ های $1+n+1$ تا $2n$ را در هیچ مرحله ای تغییر ندهیم. حاصل $\frac{N}{M}$ را بباید.

مساله ۶. فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب با شرط $AB \neq BC$ باشد. دایره های محاطی مثلث های ADC و ABC را به ترتیب با ω_1 و ω_2 نشان می دهیم. فرض کنید دایره های ω وجود داشته باشد به طوری که بر امتداد BA از طرف A و بر امتداد BC از طرف C مماس باشد و همچنین بر خطوط AD و CD نیز مماس باشد. ثابت کنید مماس های خارجی مشترک دو دایره ω_1 و ω_2 با یکدیگر روی ω برخورد می کنند.