

Trečiadienis, 2009-07-15

1 uždavinys. Tegul n yra natūralusis skaičius, o a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) yra tokie skirtingi aibės $\{1, \dots, n\}$ skaičiai, kad $a_i(a_{i+1} - 1)$ dalijasi iš n kiekvienam $i = 1, \dots, k - 1$. Įrodykite, kad $a_k(a_1 - 1)$ nesidalija iš n .

2 uždavinys. Tegul O yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Taškai P ir Q atitinkamai yra atkarpų CA ir AB vidiniai taškai. Tegul Γ yra apskritimas, einantis per atkarpų BP , CQ ir PQ vidurio taškus K , L ir M , o tiesė PQ yra apskritimo Γ liestinė. Įrodykite, kad $OP = OQ$.

3 uždavinys. Griežtai didėjančios natūraliųjų skaičių sekos

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

posekiai

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ir} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

yra aritmetinės progresijos. Įrodykite, kad pati seka s_1, s_2, s_3, \dots taip pat yra aritmetinė progresija.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.

Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.

Language: Lithuanian.

Ketvirtadienis, 2009-07-16

4 uždavinys. Tegul ABC yra lygiašonis trikampis, kuriame $AB = AC$. Kampas CAB pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D , o kampo ABC pusiaukampinė kerta kraštinę CA taške E . Taškas K yra įbrėžto į trikampį ADC apskritimo centras, o $\angle BEK = 45^\circ$. Raskite visas įmanomas $\angle CAB$ reikšmes.

5 uždavinys. Raskite visas tokias funkcijas f , atvaizduojančias natūraliųjų skaičių aibę į natūraliųjų skaičių aibę, kad su visais natūraliaisiais a ir b egzistuoja neišsigimęs trikampis, kurio kraštinės yra

$$a, \quad f(b) \quad \text{ir} \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trikampis yra *neišsigimęs*, jei jo viršūnės nepriklauso vienai tiesei.)

6 uždavinys. Duoti n skirtingų natūraliųjų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n . Taip pat duota aibė M , sudaryta iš bet kurių $n - 1$ natūraliųjų skaičių, tik skaičius $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nepriklauso aibei M . Žiogas šokinėja ant realiųjų skaičių ašies į dešinę pusę, pradeda nuo taško 0 ir tam tikra tvarka atlieka n šuolių, kurių ilgiai a_1, a_2, \dots, a_n . Įrodykite, kad žiogas gali atlikti savo šuolius tokia tvarka, kad jis niekada neatsidurs jokiame aibės M taške.

*Darbai skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.*

Language: Lithuanian.