12. červenec 2006

Úloha 1. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

Úloha 2. Nechť P je pravidelný 2006-úhelník. Jeho úhlopříčka se nazývá *dobrá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku P na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku P je rovněž *dobrá*.

Předpokládejme, že P je rozdělen na trojúhelníky 2003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě nemají společný bod uvnitř P. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku P mají dvě dobré strany.

Úloha 3. Určete nejmenší reálné číslo M takové, že nerovnost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, c.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.

13. červenec 2006

Úloha 4. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Úloha 5. Nechť $P(x)$ je polynom stupně $n > 1$ s celočíselnými koeficienty a k nechť je kladné celé číslo. Uvažujme polynom $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P je uvažováno k-krát. Dokažte, že existuje nejvýše n celých čísel t takových, že $Q(t) = t$.

Úloha 6. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.