

Version: Dutch

Eerste dag
Woensdag 25 juli 2007

Opgave 1. Gegeven zijn reële getallen a_1, a_2, \dots, a_n . Definieer

$$d_i = \max \{ a_j \mid 1 \leq j \leq i \} - \min \{ a_j \mid i \leq j \leq n \}$$

voor elke i ($1 \leq i \leq n$) en zij

$$d = \max \{ d_i \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

(a) Bewijs dat voor alle reële getallen $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ het volgende geldt:

$$\max \{ |x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n \} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Bewijs dat er reële getallen $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ zijn zodanig dat gelijkheid geldt in (*).

Opgave 2. Gegeven zijn vijf punten A, B, C, D en E zodanig dat $ABCD$ een parallellogram is en $BCED$ een koordenvierhoek. Zij ℓ een lijn (een rechte) door A , die het inwendige van het lijnstuk DC snijdt in F en die de lijn BC snijdt in G . Veronderstel dat $|EF| = |EG| = |EC|$.

Bewijs dat ℓ de bissectrice is van hoek DAB .

Opgave 3. Bij een wiskundewedstrijd zijn sommige deelnemers met elkaar bevriend. Vriendschap is altijd wederkerig. Noem een groep deelnemers een *kliëk* als binnen die groep iedereen met ieder ander bevriend is. (In het bijzonder is elke groep van minder dan twee deelnemers een kliëk.) Noem het aantal personen in een kliëk de *omvang* van die kliëk. Veronderstel dat de grootste omvang van de kliëken bij deze wedstrijd even is.

Bewijs dat de deelnemers over twee zalen kunnen worden verdeeld zodanig dat de grootste omvang van de kliëken in de ene zaal gelijk is aan de grootste omvang van de kliëken in de andere zaal.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten

Version: Dutch

Tweede dag
Donderdag 26 juli 2007

Opgave 4. Gegeven is een driehoek ABC . De bissectrice van hoek BCA snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in het punt R ($R \neq C$), de middelloodlijn van de zijde BC in het punt P en de middelloodlijn van de zijde AC in het punt Q . Het midden van BC is K en het midden van AC is L .

Bewijs dat de driehoeken RPK en RQL dezelfde oppervlakte hebben.

Opgave 5. Laat a en b gehele getallen zijn, $a, b > 0$, zodanig dat $4ab - 1$ een deler is van $(4a^2 - 1)^2$.

Bewijs dat $a = b$.

Opgave 6. Laat n een geheel getal zijn, $n > 0$. Beschouw

$$S = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0 \}$$

als een verzameling van $(n + 1)^3 - 1$ punten in de driedimensionale ruimte.

Bepaal het kleinst mogelijke aantal vlakken zodanig dat deze vlakken samen wel alle punten van S bevatten, maar niet het punt $(0, 0, 0)$.

*Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten*