

Уторак, 8. јул 2014.

Задатак 1. Нека је $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ бесконачан низ природних бројева. Доказати да постоји тачно један природан број n такав да важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Задатак 2. Дат је природан број $n \geq 2$. Посматрајмо шаховску таблу $n \times n$ која се састоји од n^2 поља. Распоред n топова на табли зовемо *мирољубивим* ако се у свакој врсти и у свакој колони, налази тачно један топ. Наћи највећи природан број k такав да, за сваки мирољубив распоред n топова, постоји квадрат $k \times k$ који не садржи топа ни на једном од својих k^2 поља.

Задатак 3. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Тачка H је подножје нормале из тачке A на праву BD . Тачке S и T су одабране на страницама AB и AD , редом, тако да је тачка H унутар троугла SCT и важи

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ \quad \text{и} \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Доказати да права BD додирује описани круг троугла TSH .

Сриједа, 9. јул 2014.

Задатак 4. Тачке P и Q на страници BC оштроуглог троугла ABC су такве да важи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BSA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Тачке M и N на правим AP и AQ , редом, су такве да је тачка P средиште дужи AM , а тачка Q средиште дужи AN . Доказати да се праве BM и CN сијеку на описаном кругу троугла ABC .

Задатак 5. За сваки природан број n , Кејптаунска банка издаје новчиће вриједности $\frac{1}{n}$. Ако имамо коначно много таквих новчића (не обавезно различитих вриједности), чија укупна вриједност није већа од $99 + \frac{1}{2}$, доказати да можемо да их подијелимо у највише 100 група тако да свака група има укупну вриједност не већу од 1.

Задатак 6. За скуп правих у равни кажемо да су у *општем положају* ако никоје двије нису паралелне и никоје три не пролазе кроз исту тачку. Скуп правих у општем положају дијели раван на области; оне области које имају коначну површину називамо *ограниченим областима*. Доказати да за свако довољно велико n важи сљедеће тврђење: у сваком скупу од n правих у општем положају можемо обојити у плаво бар \sqrt{n} правих тако да ниједна од ограничених области нема потпуно плаву границу.

Напомена: Докази тврђења у којима је \sqrt{n} замијењено са $c\sqrt{n}$ биће бодовани у зависности од вриједности константе c .