

2006. gada 12. jūlijā

**1. uzdevums.** Trijstūrī  $ABC$  ievilktais riņķa līnijas centrs ir  $I$ . Punkts  $P$  atrodas trijstūra iekšpusē un apmierina sakarību

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Pierādiet, ka  $AP \geq AI$  un ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja punkts  $P$  sakrīt ar punktu  $I$ .

**2. uzdevums.** Pieņemsim, ka  $P$  ir regulārs 2006-stūris. Daudzstūra  $P$  diagonāli sauc par *labu*, ja tās galapunkti sadala  $P$  kontūru divās daļās, katra no kurām satur nepāra skaitu daudzstūra  $P$  malu. Arī daudzstūra  $P$  malas sauc par *labām*.

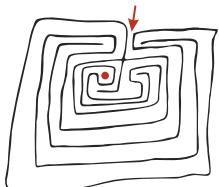
Pieņemsim, ka daudzstūris  $P$  ir sadalīts trijstūros, novelkot 2003 diagonāles, nekādām divām no kurām nav kopīgu punktu daudzstūra  $P$  iekšpusē. Kāds ir lielākais šādā sadalījumā iespējamais tādu vienādsānu trijstūru skaits, kuriem ir pa divām *labām* malām?

**3. uzdevums.** Noskaidrojet, kāds ir vismazākais reālais skaitlis  $M$ , ar kuru nevienādība

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

ir spēkā visiem reāliem skaitļiem  $a, b$  un  $c$ .

*Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes  
Katrums uzdevums ir 7 punktus vērts*



2006. gada 13. jūlijā

**4. uzdevums.** Noskaidrojet, kuriem veselu skaitļu pāriem  $(x,y)$  ir spēkā vienādība

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**5. uzdevums.** Pieņemsim, ka  $P(x)$  ir  $n$ -tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem,  $n > 1$ . Pieņemsim, ka  $k$  ir pozitīvs vesels skaitlis. Aplūkosim polinomu  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ , kur  $P$  parādās  $k$  reizes. Pierādiet, ka ir ne vairāk kā  $n$  tādu veselu skaitļu  $t$ , kuriem  $Q(t) = t$ .

**6. uzdevums.** Katrai izliekta daudzstūra  $P$  malai  $b$  piekārtojam maksimālo tāda trijstūra laukumu, kurš ietilpst daudzstūrī  $P$  un kuram  $b$  ir viena no malām. Pierādiet, ka visām daudzstūra  $P$  malām piekārtoto laukumu summa nav mazāka par divkāršotu daudzstūra  $P$  laukumu.

*Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes  
Katrā uzdevums ir 7 punktus vērts*