الأربعاء ٧ يوليو ٢٠١٠ م

Wednesday , July 7, 2010

المسألة 1 :

أوجد جميع الدوال $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ التي تحقق المساواة

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

لكل $x\,,y\in\mathbb{R}$. (حيث $\lfloor z\rfloor$ هو صحيح العدد z و هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي العدد z).

المسألة 2 :

ليكن I مركز الدائرة الداخلية التي تمس أضلاع المثلث ABC ولتكن Γ الدائرة المارة برؤوسه. المستقيم AI يقطع الدائرة Γ في النقطة D . لتكن E نقطة على القوس BDC و F نقطة على الضلع BC بحيث :

$$\angle BAF=\angle CAE<\tfrac{1}{2}\angle BAC$$

أخيراً ، لتكن G منتصف القطعة المستقيمة IF . برهن أن المستقيمين DG و EI يتقاطعان في نقطة على الدائرة Γ .

المسألة 3 :

لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة . أوجد جميع الدوال $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ التي تجعل العدد

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

مربعاً كاملاً لكل $n,m\in\mathbb{N}$.

الزمن : ٤ ساعات و ٣٠ دقيقة

٧ درجات لكل مسألة

Language: **Arabic**

Day: **2**

الخميس ٨ يوليو ٢٠١٠ م

Thursday, July 8, 2010

المسألة 4:

لتكن P نقطة داخل المثلث ABC و Γ الدائرة المارة من رؤوسه. المستقيمات AP, BP, CP تقطع الدائرة Γ في النقط K, L, M على الترتيب . المماس للدائرة Γ في النقطة C يقطع المستقيم AB في S. إذا كان $SC = SP$ ، فبرهن أن $MK = ML$.

المسألة 5:

لدينا ستة صناديق $B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , B_6$. في البداية يوجد في كل صندوق قطعة نقدية واحدة . هناك صنفين من العمليات المسموح بها :

الصنف الأول : نختار صندوق غير فارغ B_j حيث $1 \le j \le 5$. نسحب قطعة نقدية واحدة من الصندوق B_j ونضيف قطعتين نقديتين إلى الصندوق B_{j+1} .

الصنف الثاني : نختار صندوق غير فارغ B_k حيث $1 \le k \le 4$. نسحب قطعة نقدية واحدة من B_k ونبادل بين محتوى الصندوقين (ممكن أن يكونا فارغين) B_{k+1} و B_{k+2}. هل من الممكن بعد سلسلة منتهية من هذه العمليات أن نحصل على النتيجة التالية : الصناديق $B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5$ فارغة والصندوق B_6 يحتوي بالضبط على $2010^{2010^{2010}}$ من قطع النقود (لاحظ أن $a^{b^c} = a^{(b^c)}$) ؟

المسألة 6 :

لتكن $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة . ليكن s عدداً صحيحاً موجباً ، و لنجعل

$$a_n = \max \{ a_k + a_{n-k} : 1 \le k \le n-1 \}$$

لكل $n > s$. برهن على وجود عددين صحيحين موجبين N و ℓ ، بحيث $\ell \le s$ و $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ لكل $n \ge N$.

الزمن : ٤ ساعات و ٣٠ دقيقة

٧ درجات لكل مسألة