уторак, 15. јул 2025

Zadatak 1. Pravu u ravni nazivamo *sunčanom* ako **nije** paralelna ni sa x-osom, ni sa y-osom, ni sa pravom $x+y=0$.

Neka je $n \geqslant 3$ zadati cio broj. Odrediti sve nenegativne cijele brojeve k takve da postoji n različitih pravih u ravni koje zadovoljavaju oba sljedeća uslova:

- za sve pozitivne cijele brojeve a i b takve da je $a+b \leqslant n+1$, tačka (a,b) leži na bar jednoj od pravih; i
- tačno k od tih n pravih su sunčane.

Zadatak 2. Neka su Ω i Γ kružnice sa centrima M i N, respektivno, takve da je poluprečnik Ω manji od poluprečnika Γ. Pretpostavimo da se kružnice Ω i Γ sijeku u dvijema različitim tačkama A i B. Prava MN siječe kružnicu Ω u tački C i kružnicu Γ u tački D, tako da tačke C, M, N i D leže na pravoj tim redom. Neka je tačka P centar opisane kružnice trougla ACD. Prava AP opet siječe kružnicu Ω u tački $E \neq A$. Prava AP opet siječe kružnicu Γ u tački $F \neq A$. Neka je tačka H ortocentar trougla PMN.

Dokazati da je prava, koja prolazi kroz tačku H i paralelna je duži AP, tangenta na opisanu kružnicu trougla BEF.

(*Ortocentar* trougla je presječna tačka visina trougla.)

Zadatak 3. Označimo sa $\mathbb{N}$ skup pozitivnih cijelih brojeva. Za funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kažemo da je *vrhunska* ako

$$f(a) \text{ dijeli } b^a - f(b)^{f(a)}$$

za sve pozitivne cijele brojeve a i b.

Odrediti najmanju realnu konstantu c takvu da je $f(n) \leqslant cn$ za sve vrhunske funkcije f i sve pozitivne cijele brojeve n.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.

среда, 16. јул 2025

Zadatak 4. *Pravi djelilac* pozitivnog cijelog broja N je pozitivni djelilac broja N koji je različit od samog N.

Beskonačan niz $a_1, a_2, \ldots$ sadrži pozitivne cijele brojeve, od kojih svaki ima bar tri prava djelioca. Za svaki $n \geqslant 1$, cio broj a_{n+1} je zbir tri najveća prava djelioca broja a_n.

Odrediti sve moguće vrijednosti a_1.

Zadatak 5. Ana i Balša igraju *Australijsku igru*, igru dva igrača čija pravila zavise od pozitivnog realnog broja λ koji znaju oba igrača. U n-tom krugu igre (počevši od $n = 1$) dešava se sljedeće:

- Ako je n neparan broj, Ana bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ako je n paran broj, Balša bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ako igrač ne može izabrati odgovarajući broj x_n, igra se završava i drugi igrač pobjeđuje. Ako igra traje u nedogled, nijedan igrač ne pobjeđuje. Igrači znaju sve izabrane brojeve.

Odrediti sve vrijednosti λ za koje Ana ima pobjedničku strategiju i sve one za koje Balša ima pobjedničku strategiju.

Zadatak 6. Posmatramo mrežu od 2025×2025 jediničnih kvadratića. Marija želi da na mrežu stavi pravougaone ploče, koje mogu biti različitih veličina, tako da svaka strana svake ploče leži na liniji mreže i tako da je svaki jedinični kvadratić pokriven najviše jednom pločom.

Odrediti najmanji broj ploča koje Marija mora da postavi tako da u svakom redu i svakoj koloni mreže tačno jedan jedinični kvadratić nije pokriven nijednom pločom.