subota, 8. jul 2023

Zadatak 1. Odredi sve složene prirodne brojeve $n > 1$ koji imaju sljedeće svojstvo: ako su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ svi pozitivni djelioci broja n pri čemu je $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, tada d_i dijeli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za svako $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Zadatak 2. Neka je ABC oštrougli trougao i neka je $AB < AC$. Neka je Ω opisana kružnica trougla ABC. Neka je S središte luka CB kružnice Ω koji sadrži tačku A. Normala iz tačke A na pravu BC siječe pravu BS u tački D i ponovo siječe kružnicu Ω u $E \neq A$. Prava koja prolazi kroz tačku D i paralelna je pravoj BC siječe pravu BE u tački L. Označimo sa ω opisanu kružnicu trougla BDL. Neka kružnica ω ponovo siječe Ω u tački $P \neq B$.
Dokazati da presječna tačka tangente na kružnicu ω u tački P i prave BS pripada simetrali unutrašnjeg ugla $\angle BAC$.

Zadatak 3. Za svaki prirodan broj $k \geqslant 2$ odredi sve beskonačne nizove prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ za koje postoji polinom P oblika $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, gdje su $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nenegativni cijeli brojevi, takav da je

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

za svaki prirodan broj $n \geqslant 1$.

Language: Montenegrin

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.

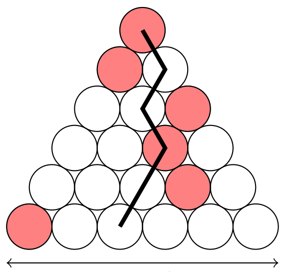
nedjelja, 9. jul 2023

Zadatak 4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ u parovima različiti pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

cio broj za svako $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokazati da je $a_{2023} \geqslant 3034$.

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. *Japanski trougao* se sastoji od $1 + 2 + \cdots + n$ krugova koji su raspoređeni u obliku jednakostraničnog trougla tako da za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, i-ta vrsta sadrži tačno i krugova, od kojih je tačno jedan obojen crvenom bojom. *Nindža staza* u japanskom trouglu je niz od n krugova koji se dobija tako što krenemo od kruga iz prve vrste, a zatim u svakom koraku prelazimo sa trenutnog kruga na jedan od dva kruga koja su direktno ispod njega i završavamo kad stignemo u posljednju vrstu. Dajemo primjer jednog japanskog trougla za $n = 6$, i jedne nindža staze u tom trouglu koji sadrži dva crvena kruga.



U zavisnosti od n, naći najveću vrijednost k tako da u svakom japanskom trouglu postoji nindža staza koja sadrži najmanje k crvenih krugova.

Zadatak 6. Neka je ABC jednakostranični trougao. Neka su A_1, B_1, C_1 unutrašnje tačke trougla ABC takve da je $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ i

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Neka se prave BC_1 i CB_1 sijeku u tački A_2, prave CA_1 i AC_1 sijeku u tački B_2, i prave AB_1 i BA_1 sijeku u tački C_2.

Ako je $A_1B_1C_1$ raznostraničan trougao, dokazati da sve tri opisane kružnice trouglova AA_1A_2, BB_1B_2 i CC_1C_2 prolaze kroz dvije zajedničke tačke.

(Komentar: raznostraničan trougao je trougao kod koga ne postoje dvije stranice jednake dužine.)

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 poena.