Esmaspäev, 9. juuli 2018

Ülesanne 1. Olgu Γ teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoon. Lõikudel AB ja AC asuvad vastavalt sellised punktid D ja E, et $|AD| = |AE|$. Lõikude BD ja CE keskristsirged lõikavad Γ lühemaid kaari AB ja AC vastavalt punktides F ja G. Tõesta, et sirged DE ja FG on paralleelsed (või langevad kokku).

Ülesanne 2. Leia kõik täisarvud $n \geqslant 3$, mille jaoks leiduvad reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, nii et $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, ning

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral.

Ülesanne 3. *Anti-Pascali kolmnurk* on arvude võrdkülgne kolmnurkne tabel, milles iga arv, välja arvatud kõige alumises reas, on temast vahetult allpool asuva kahe arvu vahe absoluutväärtus. Näiteks järgmine tabel on anti-Pascali kolmnurk nelja reaga, mis sisaldab kõik täisarvud 1 kuni 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Kas leidub anti-Pascali kolmnurk 2018 reaga, mis sisaldab kõik täisarvud 1 kuni $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Aega: 4 tundi ja 30 minutit
Iga ülesanne annab 7 punkti

Teisipäev, 10. juuli 2018

Ülesanne 4. *Lahtriks* nimetame igat tasandi punkti (x, y), kus x ja y on mõlemad positiivsed täisarvud, mis on väiksemad või võrdsed kui 20.

Alghetkel on kõik 400 lahtrit hõivamata. Anna ja Brigitta panevad kordamööda lahtritesse kivisid, alustab Anna. Igal omal käigul paneb Anna uue punase kivi hõivamata lahtrisse, nii et ühegi kahe punase kiviga hõivatud lahtri vahekaugus ei oleks võrdne $\sqrt{5}$. Brigitta paneb omal käigul uue sinise kivi suvalisse hõivamata lahtrisse. (Lahter, mis on hõivatud sinise kiviga, tohib asuda suvalisel kaugusel igast teisest hõivatud lahtrist.) Mäng peatub, kui üks tüdrukutest ei saa enam uut kivi panna.

Leia suurim arv K, mille korral saab Anna kindlustada, et tal võimalik panna K punast kivi sõltumata sellest, kuidas paneb oma sinised kivid Brigitta.

Ülesanne 5. Olgu $a_1, a_2, \ldots$ positiivsete täisarvude lõpmatu jada. Eeldame, et leidub selline täisarv $N > 1$, et iga $n \geqslant N$ korral on arv

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

täisarv. Tõesta, et leidub positiivne täisarv M, nii et $a_m = a_{m+1}$ kõigi $m \geqslant M$ korral.

Ülesanne 6. Kumer nelinurk $ABCD$ rahuldab tingimust $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Nelinurga $ABCD$ sees asub selline punkt X, et

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ja} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Tõesta, et $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.