

วันจันทร์ที่ ๙ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๑

โจทย์ข้อ ๑. ให้ Γ เป็นวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC จุด D และ E อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB และ AC ตามลำดับ โดยที่ $AD = AE$ เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของส่วนของเส้นตรง BD และ CE ตัดกับส่วนโค้งน้อย AB และ AC ของ Γ ที่จุด F และ G ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า เส้นตรง DE และ FG ขนานกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน

โจทย์ข้อ ๒. จงหาจำนวนเต็ม $n \geq 3$ ทั้งหมดที่ทำให้มีจำนวนจริง a_1, a_2, \dots, a_{n+2} ซึ่ง $a_{n+1} = a_1$ และ $a_{n+2} = a_2$ และ

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

โจทย์ข้อ ๓. รูปสามเหลี่ยมแอนติปาสกาล คือการจัดวางของจำนวนในรูปแบบสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งแต่ละจำนวนที่ไม่ได้อยู่ในแถวล่างสุดมีค่าเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของสองจำนวนที่อยู่ถัดจากมันทางด้านล่าง ตัวอย่างเช่น การจัดวางของจำนวนต่อไปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมแอนติปาสกาลที่มี 4 แถว ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็มทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 10

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & & \\ & 2 & & 6 & \\ & 5 & 7 & & 1 \\ 8 & 3 & 10 & & 9 \end{array}$$

มีรูปสามเหลี่ยมแอนติปาสกาลที่มี 2018 แถว ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็มทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง $1 + 2 + \dots + 2018$ หรือไม่?

วันอังคารที่ ๑๐ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๑

โจทย์ข้อ ๔. ฐาน คือจุด (x, y) ใด ๆ บนระนาบซึ่ง x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 20

ในตอนเริ่มต้น ฐานทั้ง 400 ฐานว่างอยู่ เอมีและเบนผลัดกันวางหินโดยเอมีเริ่มก่อน ในตาของเอมี เธอจะวางหินสีแดงก้อนใหม่บนฐานที่ยังว่างอยู่ โดยที่ระยะระหว่างสองฐานใด ๆ ที่มีหินสีแดงไม่เท่ากับ $\sqrt{5}$ ในตาของเบน เขาจะวางหินสีน้ำเงินก้อนใหม่บนฐานที่ยังว่างอยู่ (โดยฐานที่มีหินสีน้ำเงินสามารถอยู่ห่างจากฐานอื่น ๆ ที่มีหินอยู่เป็นระยะเท่าใดก็ได้) พวกเขาจะหยุดเมื่อผู้เล่นคนใดคนหนึ่งไม่สามารถวางหินได้

จงหา K ที่มากที่สุดซึ่งเอมีมั่นใจได้ว่าเธอสามารถวางหินสีแดงได้อย่างน้อย K ก้อน ไม่ว่าเบนจะวางหินสีน้ำเงินของเธออย่างไร

โจทย์ข้อ ๕. ให้ a_1, a_2, \dots เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวก สมมติว่ามีจำนวนเต็ม $N > 1$ ซึ่งแต่ละ $n \geq N$ จำนวน

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก M ซึ่ง $a_m = a_{m+1}$ สำหรับทุก $m \geq M$

โจทย์ข้อ ๖. รูปสี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ สอดคล้องกับ $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ จุด X เป็นจุดภายใน $ABCD$ โดยที่

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{และ} \quad \angle XBC = \angle XDA$$

จงพิสูจน์ว่า $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$