შაბათი, 8. ივლისი 2023

ამოცანა 1. იპოვეთ ყველა შედგენილი მთელი რიცხვი $n > 1$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: თუ $d_1, d_2, \ldots, d_k$, სადაც $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ არის n-ის ყველა დადებითი გამყოფი, მაშინ d_i ყოფს $d_{i+1} + d_{i+2}$, ყოველი $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

ამოცანა 2. მახვილკუთხა ABC სამკუთხედში AB გვერდის სიგრძე ნაკლებია AC გვერდის სიგრძეზე. ვთქვათ Ω არის ABC-ზე შემოხაზული წრეწირი და ვთქვათ S არის Ω-ს იმ CB რკალის შუაწერტილი, რომელიც A წვეროს შეიცავს. A წერტილზე BC წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი BS-ს კვეთს D წერტილში, ხოლო Ω-ს მეორედ კვეთს $E \neq A$ წერტილში. D წერტილზე გამავალი BC-ს პარალელური წრფე BE წრფეს კვეთს L წერტილში. ვთქვათ ω არის სამკუთხედ BDL-ზე შემოხაზული წრეწირი და ვთქვათ ω მეორედ კვეთს Ω წრეწირს $P \neq B$ წერტილში.
დაამტკიცეთ, რომ P წერტილზე ω-ს მიმართ გავლებული მხები BS წრფესთან იკვეთება $\angle BAC$-ს შიდა ბისექტრისაზე.

ამოცანა 3. ყოველი მთელი $k \geqslant 2$-თვის, იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა უსასრულო მიმდევრობა $a_1, a_2, \ldots,$ რომლისთვისაც არსებობს ისეთ პოლინომი $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, რომ

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

ყოველი მთელი $n \geqslant 1$.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

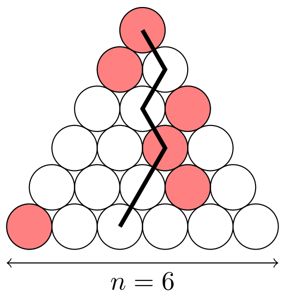
კვირა, 9. ივლისი 2023

ამოცანა 4. ვთქვათ $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ ისეთი ნამდვილი დადებითი რიცხვებია, რომ ყოველი ორი მათგანი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

არის მთელი რიცხვი ყოველი $n = 1, 2, \ldots, 2023$. დაამტკიცეთ, რომ $a_{2023} \geqslant 3034$.

ამოცანა 5. ვთქვათ n მთელი დადებითი რიცხვია. *იაპონური სამკუთხედი* ვუწოდოთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმაში ისეთნაირად განლაგებულ $1 + 2 + \cdots + n$ ცალ წრეს, რომ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, n$ -თვის, $i-$ური სტრიქონი შეიცავს ზუსტად i ცალ წრეს, რომელთაგან მხოლოდ ერთი წრეა წითლად გაფერადებული. *ნინძას ბილიკი* ვუწოდოთ იაპონურ სამკუთხედში ისეთ n წრის მიმდევრობას, რომელიც იწყება სამკუთხედის თავში მდებარე წრიდან და ყოველი მომდევნო წრე არის წინა წრის უშუალოდ ქვემოდ მდგომი ორი წრიდან ერთ-ერთი. სურათზე მოცემულია იაპონური სამკუთხედის მაგალითი, როცა $n = 6$ და ამ სამკუთხედში ნინძას ბილიკი, რომელიც ორ წითელ წრეს შეიცავს.



მოცემული n-თვის, იპოვეთ k-ს უდიდესი მნიშვნელობა ისეთი, რომ ყოველ იაპონურ სამკუთხედში არსებობს ნინძას ბილიკი, რომელიც სულ მცირე k ცალ წითელ წრეს შეიცავს.

ამოცანა 6. ვთქვათ ABC ტოლგვერდა სამკუთხედია და ვთქვათ A_1, B_1, C_1 არის ABC სამკუთხედის ისეთი შიგა წერტილები, რომ $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ და

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

ვთქვათ BC_1 და CB_1 იკვეთება A_2 წერტილში, ხოლო CA_1 და AC_1 იკვეთება B_2 წერტილში და AB_1 და BA_1 იკვეთება C_2 წერტილში.
დაამტკიცეთ, რომ თუ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძე ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ სამივე წრეწირი, შემოხაზული შესაბამისად AA_1A_2, BB_1B_2 და CC_1C_2 სამკუთხედებზე, გადის ორ საერთო წერტილზე.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით