Chorshanba, 7 iyul 2010 yil

1-masala. Barcha $x, y \in R$ lar uchun

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

shartni qanoatlantiradigan $f : R \to R$ funksiyalar hammasi topilsin. (Bu yerda $[z]$ orqali z dan katta bo'lmagan eng katta butun son belgilangan).

2-masala. I nuqta ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi, Γ esa shu uchburchakka tashqi chizilgan aylana bo'lsin. AI to'g'ri chiziq Γ aylanani A va D nuqtalarda kesadi. E nuqta BDC yoyda, F nuqta esa BC tomonda shunday tanlanganki, ular uchun

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

munosabat bajariladi. IF kesmaning o'rtasi G nuqta bo'lsin. DG va EI to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi Γ aylanada yotishini isbotlang.

3-masala. N deb barcha musbat butun sonlar to'plamini belgilaylik. Shunday $g : N \to N$ funksiyalar barchasi topilsinki, bunda ixtiyoriy $m, n \in N$ uchun

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

son to'la kvadrat bo'lsin.

Ishga ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut.
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi.

Language: **Uzbek**

Day: **2**

Payshanba, 8 iyul 2010 yil

4-masala. P nuqta ABC uchburchakning ichida yotsin. AP, BP va CP to'g'ri chiziqlar ABC uchburchakka tashqi chizilgan Γ aylanani ikkinchi marta mos ravishda K, L va M nuqtalarda kessin. Γ aylanaga C nuqtasidan o'tkazilgan urinma va AB to'g'ri chiziq S nuqtada kesishadi. Ma'lumki, $SC = SP$ tenglik bajariladi. $MK = ML$ tenglik bajarilishini isbotlang.

5-masala. Eng boshida $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ qutilarning har birida aynan bittadan tanga bor. Quyidagi ikki turdagi amallarni bajarishga imkon berilmoqda :

1-tur: Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan B_j (bu yerda $1 \le j \le 5$) qutini tanlash, undan bitta tangani olib tashlash va B_{j+1} qutiga ikkita tangani solish.

2-tur: Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan B_k (bu yerda $1 \le k \le 4$) qutini tanlash, undan bitta tangani olib tashlash va B_{k+1} quti ichidagi tanglar to'plamini (u bo'sh bo'lishi mumkin) B_{k+2} quti ichidagi tangalar to'plami (u ham bo'sh bo'lishi mumkin) bilan almashtirish.

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 qutilar hammasi bo'sh, B_6 quti ichida esa aynan $2010^{2010^{2010}}$ ta tanga bo'ladigan holatga olib keladigan bunday amallar chekli ketma-ketligi mavjudmi? (Ta'rifga ko'ra: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$).

6-masala. Musbat haqiqiy sonlardan iborat $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ketma-ketlik berilgan. Ma'lumki, qandaydir ma'lum fiksirlangan musbat butun s son uchun barcha $n > s$ larda

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

tengliklar o'rinli.

Barcha $n \ge N$ sonlar uchun $l \le s$ va $a_n = a_l + a_{n-l}$ munosabatlarni qanoatlantiradigan musbat butun l va N sonlar mavjudligini isbotlang.

Ishga ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut.
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi.