

Даваа, 11. 7 дугаар сарын 2022

Бодлого 1. Осло хотын банк хоёр төрлийн зоос гаргадаг: хөнгөн цагаан (A гэж тэмдэглэе) ба зэс (B гэж тэмдэглэе). Мариана n ширхэг хөнгөн цагаан, n ширхэг зэс зоостой ба зооснуудаа анх ямар нэг санамсаргүй дарааллаар нэг мөрөнд этнүүлэн байрлуулжээ. Дэс дараалсан нэг ижил төрлийн зоосны дэд дарааллыг *гинж* гэж нэрлэе. Бэхлэгдсэн $k \leq 2n$ тооны хувьд Мариана дараах үйлдлийг давтан хийнэ: зүүн талаасаа k дахь зоосыг агуулсан хамгийн урт гинжийг олж, тус гинжний бүх зоосыг мөрний хамгийн зүүн тал руу зөөнө. Жишээлбэл, $n = 4$ ба $k = 4$ үед анх *AABBBABA* гэсэн байрлалаас эхлэхэд

$$AAB\cancel{B}BABA \rightarrow BB\cancel{B}AAABA \rightarrow AAAB\cancel{B}BBA \rightarrow BBB\cancel{B}AAAA \rightarrow BBB\cancel{B}AAAA \rightarrow \dots \quad (1)$$

болно. Анх ямар ч байрлалаас эхэлсэн хэдэн үйлдэл хийсний дараа зүүн талаасаа n ширхэг зоос нь бүгд ижил төрлийн байх байрлал руу шилждэг $1 \leq k \leq 2n$ байх бүх (n, k) хосыг ол.

Бодлого 2. Бүх эерэг бодит тооны олонлогийг \mathbb{R}^+ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$xf(y) + yf(x) \leq 2 \quad (2)$$

байх яг нэг $y \in \mathbb{R}^+$ оршин байдаг байх бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

Бодлого 3. k эерэг бүхэл тоо ба S сондгой анхны тоонуудаас тогтох төгсгөлөг олонлог байг. S олонлогийн гишүүдийг тойрог дээр дурын хөрш хоёр тооны үржвэр нь ямар нэг эерэг бүхэл x тооны хувьд $x^2 + x + k$ хэлбэртэй байхаар (эргүүлэлт болон толин тэгш хэмийг эс тооцвол) хамгийн олондоо нэг янзаар байрлуулж болно гэж батал.



Mongolian (mon), day 2

Мягмар, 12. 7 дугаар сарын 2022

Бодлого 4. $ABCDE$ гүдгэр таван өнцөгтийн хувьд $BC = DE$ байв. $ABCDE$ дотор T цэг $TB = TD$, $TC = TE$ ба $\angle ABT = \angle TEA$ байхаар өгөгдсөн гэе. AB шулуун CD ба CT шулуунуудыг харгалзан P ба Q цэгт огтолно. P , B , A , Q цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. AE шулуун CD ба DT шулуунуудыг харгалзан R ба S цэгт огтолдог гэе. R , E , A , S цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. P , S , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлого 5. Дараах нөхцөлийг хангах эерэг бүхэл тоон бүх (a, b, p) гурвалыг ол. Энд p анхны тоо ба

$$a^p = b! + p.$$

Бодлого 6. n эерэг бүхэл тоо гэе. Нүд бүр нь яг нэг тоо агуулдаг байхаар 1-ээс n^2 хүртэлх бүх тоог агуулдаг $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийг *Nordik квадрат* гэе. Ялгаатай хоёр нүдийг ерөнхий талтай бол хөрш гэнэ. Хөрш нүднүүд нь бүгд өөрөөс нь том тоо агуулдаг нүдийг хонхор гэе. Дараах нөхцөлүүдийг хангах нэг болон түүнээс олон нүдний дарааллыг өгсүүр зам гэнэ:

- (i) дарааллын эхний нүд хонхор,
- (ii) дарааллын дараагийн нүд бүр өмнөх нүдтэйгээ хөрш,
- (iii) дарааллын нүднүүдэд бичигдсэн тоонууд өсдөг.

Нордик квадрат доторх боломжит хамгийн бага нийт хэдэн өгсүүр замын тоог n -ээр илэрхийл.