IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

Khmer (khm), day 1

Tuesday, July 18,2017

Problem 1.
គ្រប់ចំនួនគត់ $a_0 > 1$ បង្កើត $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ជាចំនួនគត់រៀបតាមលំដាប់ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \text{បើ } \sqrt{a_n} \text{ ជាចំនួនគត់} \\ a_n + 3, \quad \text{ផ្សេងពីនេះ} \end{cases} \qquad \text{គ្រប់តំលៃ } n \geq 0$$

កំណត់រកគ្រប់តំលៃនៃ a_0 ដែលក្នុងនោះមានតំលៃ A មួយដែល $a_n = A$ សំរាប់គ្រប់តំលៃទាំងអស់នៃ n ។

Problem 2.
គេអោយ R ជាសំណុំចំនួនពិត ។ កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : R \to R$ ដែល ចំពោះគ្រប់តំលៃ $x, y \in R$

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x + y) = f(xy)$$

Problem 3.
មានអ្នកប្រមាញ់ម្នាក់ និង ទន្សាយអាថ៌កំបាំងមួយក្បាលបានលេងល្បែងនៅលើប្លង់អឺគ្លីត (Euclidian plane)។ ចំនុចចាប់ផ្តើមរបស់ទន្សាយគឺ A_0 និងចំនុចចាប់ផ្តើមរបស់អ្នកប្រមាញ់គឺ B_0 ត្រួតស៊ីគ្នា ។ ក្រោយពីល្បែងនេះចាប់ផ្តើមអស់ $n-1$ ជុំមក ទន្សាយបានបំលាស់ទីដល់ចំនុច A_{n-1} ហើយអ្នកប្រមាញ់បានបំលាស់ទីដល់ចំនុច B_{n-1} ។ នៅទី n ជុំនៃល្បែងនេះ មានព្រឹត្តិការណ៍បីកើតឡើងតាមលំដាប់ដូចខាងក្រោម:

(1) ទន្សាយនេះបានធ្វើការផ្លាស់ទីយ៉ាងស្ងាត់ស្ងៀមដល់ចំនុច A_n ដែលចំងាយពី A_{n-1} ដល់ A_n គឺស្មើ 1។
(2) ឧបករណ៍តាមដានបានផ្តល់របាយការណ៍ដល់អ្នកប្រមាញ់នៅត្រង់ចំនុច P_n។អ្វីដែលឧបករណ៍តាមដាននេះបញ្ជាក់បានដល់អ្នកប្រមាញ់គឺថាចំងាយរវាង P_nនិង A_nមានចំងាយច្រើនបំផុតស្មើ 1។
(3) អ្នកប្រមាញ់ក៏បានធ្វើការបំលាស់ដល់ចំនុច B_n ហើយដែលចំងាយពី B_{n-1} ដល់ B_n គឺស្មើ 1។

ដោយមិនគិតថាទន្សាយបំលាស់ទីរបៀបណាទេ
ហើយដោយមិនគិតថាឧបករណ៍តាមដានផ្តល់របាយការណ៍នៅត្រង់ចំនុចណាគេនោះទេ
ហើយបើអ្នកប្រមាញ់ជ្រើសរើសយកការបំលាស់ទីរបស់គាត់ធ្វើយ៉ាងណាអោយក្រោយការលេង 10^9 ជុំ ចំងាយរវាងគាត់ និង ទន្សាយមានគំលាតយ៉ាងឆ្ងាយបំផុត 100។
តើករណីនេះអាចមានការកើតឡើងជានិច្ចជាកាលដែរឬទេ?

Language: Khmer

រយៈពេល ៤ម៉ោង ៣០នាទី
លំហាត់មួយទទួលបាន ៧ពិន្ទុ

Wednesday, July 19, 2017

Problem 4.
គេមាន R និង S ជាចំនុចពីរខុសគ្នាស្ថិតនៅលើរង្វង់ Ω ហើយដែល RS មិនមែនជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់។ គេមាន l ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង Ω ត្រង់ R ។ គេមាន T ជាចំនុចដែល S ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ RT។ ចំនុច J ត្រូវបានជ្រើសរើសនៅលើផ្នែកតូចជាងគេនៃអង្កត់ធ្នូ RS នៃរង្វង់ Ω ហើយដែល Γ ជារង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ JST ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ l ត្រង់ពីរចំនុចខុសគ្នា។ តាង Aជាចំនុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ Γ និង បន្ទាត់ l ហើយដែលនៅជិតជាងគេនឹងចំនុច R ។បន្ទាត់ AJ ប្រសព្វនឹង Ω ត្រង់ K។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ KT ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ Γ ។

Problem 5.
គេអោយ $N \geq 2$ ហើយដែល N ជាចំនួនគត់។ គេមានក្រុមអ្នកលេងបាល់ទាត់ចំនួន N(N+1) នាក់ដែលអ្នកទាំងនោះមានកំពស់ខុសៗគ្នាហើយដែលអោយឈរនៅលើខ្សែបន្ទាត់មួយ។ លោក Alex មានបំណងដកកីឡាករចំនួន N(N-1)នាក់ពីខ្សែបន្ទាត់នេះដើម្បីអោយកីឡាករដែលនៅសល់ 2Nនាក់អាចឈរលើខ្សែបន្ទាត់ថ្មីដែលបំពេញ N លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម :

(1) គ្មានកីឡាករណាម្នាក់ឈរនៅចន្លោះពីរនាក់ដែលមានកំពស់ខ្ពស់ជាងគាត់ក្នុងក្រុម
(2) គ្មានកីឡាករណាម្នាក់ឈរនៅចន្លោះអ្នកខ្ពស់ជាងគេទី៣និងទី៤ក្នុងក្រុម
.
.
.
(N) គ្មានកីឡាករណាម្នាក់ឈរនៅចន្លោះអ្នកទាបជាងគេពីរនាក់ក្នុងក្រុម

បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌខាងលើអាចកើតឡើងជានិច្ច។

Problem 6.
ទ្វេធាតុចំនួនគត់ (x, y) ជា "*primitive point* " កាលណា x និង y មានតួចែករួមធំបំផុត 1។ ដោយអោយសំនុំរាប់អស់ S ដែលជា *primitive point* , បង្ហាញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនគត់
$a_0, a_1, \ldots, a_n$ ដែលចំពោះទ្វេធាតុ (x,y) នីមួយៗក្នុង S យើងមាន:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1 \quad ។$$

Language: Khmer

រយះពេល ៤ម៉ោង ៣០នាទី
លំហាត់មួយទទួលបាន ៧ពិន្ទុ