*Środa, 15 lipca 2009r.*

**Zadanie 1.** Dana jest dodatnia liczba całkowita $n$ oraz parami różne liczby całkowite $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geqslant 2$), będące elementami zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Ponadto, dla każdego $i = 1, \ldots, k-1$, liczba $n$ jest dzielnikiem liczby $a_i(a_{i+1} - 1)$. Udowodnić, że $n$ nie jest dzielnikiem liczby $a_k(a_1 - 1)$.

**Zadanie 2.** Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $P$ oraz $Q$ są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków $CA$ oraz $AB$. Niech $K$, $L$ oraz $M$ będą odpowiednio środkami odcinków $BP$, $CQ$ oraz $PQ$. Niech ponadto $\Gamma$ będzie okręgiem przechodzącym przez punkty $K$, $L$ oraz $M$. Załóżmy, że prosta $PQ$ jest styczna do okręgu $\Gamma$. Wykazać, że $OP = OQ$.

**Zadanie 3.** Ściśle rosnący ciąg $s_1, s_2, s_3, \ldots$, którego wyrazy są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma tę własność, że jego podciągi

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{oraz} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

są ciągami arytmetycznymi. Dowieść, że ciąg $s_1, s_2, s_3, \ldots$ również jest ciągiem arytmetycznym.



*Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut*
*Punktacja: 7 punktów za zadanie*

*Czwartek, 16 lipca 2009r.*

**Zadanie 4.** W trójkącie $ABC$ zachodzi równość $AB = AC$. Dwusieczne kątów $CAB$ oraz $ABC$ przecinają jego boki $BC$ oraz $AC$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Punkt $K$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ADC$. Załóżmy ponadto, że $\angle BEK = 45^\circ$. Wyznaczyć możliwe wartości $\angle CAB$.

**Zadanie 5.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f$ przekształcające zbiór dodatnich liczb całkowitych w zbiór dodatnich liczb całkowitych takie, że dla każdych dwóch dodatnich liczb całkowitych $a$ oraz $b$ istnieje niezdegenerowany trójkąt, którego boki mają długości

$$a,\ f(b)\ \text{ oraz }\ f(b + f(a) - 1).$$

(Trójkąt *niezdegenerowany* to taki, którego wierzchołki nie leżą na jednej prostej.)

**Zadanie 6.** Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, zaś $M$ jest zbiorem $n-1$ dodatnich liczb całkowitych, przy czym $M$ nie zawiera liczby $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Konik polny skacze wzdłuż osi liczbowej w dodatnim jej kierunku. Zaczyna w punkcie 0 i wykonuje $n$ skoków, których długościami są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wzięte w pewnej kolejności. Udowodnić, że kolejość tę można wybrać w taki sposób, by po żadnym ze skoków konik polny nie wylądował w punkcie należącym do zbioru $M$.



*Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut*
*Punktacja: 7 punktów za zadanie*