

Duşenbe, 21. Sentyabr 2020

Mesele 1. Güberçek $ABCD$ dörtburçluk berlen. $ABCD$ dörtburçlugyň içinde ýerleşýän P nokat üçin şu gatnaşyklar ýerine ýetýär:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

$\angle ADP$ burcuň bissektrisasy, $\angle PCB$ burcuň bissektrisasy hem-de AB kesimiň orta perpendikulárynyň bir nokatdan geçýändigini subut ediň.

Mesele 2. $a \geq b \geq c \geq d > 0$ we $a + b + c + d = 1$ şertleri kanagatlandyrýan a, b, c, d hakyky sanlar berlen.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

bolýandygyny subut ediň.

Mesele 3. Agramlary $1, 2, 3, \dots, 4n$ bolan $4n$ sany daşlar bar. Her reňkde dört sany daş bolar ýaly edip daşlaryň her biri n sany reňkiň biri bilen reňklenýär. Daşlaryň reňklenişine garamazdan olary aşakdaky iki şert ýerine ýeter ýaly edip iki tümmege bölüp boljakdygyny subut ediň:

- Iki tümmekdäki daşlaryň agramlarynyň jemi deň.
- Her tümkekde her reňkden iki daş bar.

Sişenbe, 22. Sentyabr 2020

Mesele 4. $n > 1$ bitin san berlen. Dagyň eňnidinde n^2 sany duralga bar, olaryň her biri dürli beýikliklerde ýerleşdirilendir. A we B asma ýoly firmalarynyň her biri k sany asma kabina işledýär; her bir asma kabina duralgalaryň birinden has ýokarrakda ýerleşyän başga bir duralga (aralykdaky duralgalarda durmazdan) gatnaw edýär. A -nyň k sany asma kabinasynyň hemmesiniň k dürli başlangyç duralgasy we k dürli ahyrky duralgasy bar, we islendik iki asma kabinadan ýokarrakda başlaýanynyň soňky duralgasy hem beýlekä garanyňda ýokarrakda bolýar. B üçin hem yaňky şertler doğrudyr. Iki sany duralganyň aşagrakda ýerleşyäninden ýokarrakda ýerleşyänine bir firmanyň asma kabilalary arkaly baryp bolýan bolsa, onda biz ol iki duralga bu firma arkaly *birikdirilen* diýyäris (duralgalaryň arasynda başga ýol ýokdur). Firmalaryň ikisi tarapyndan hem birikdirilen iki sany duralga tapylar ýaly iň kiçi natural k sany tapyň.

Mesele 5. $n > 1$ sany kartdan ybarat bolan kartlaryň dessesi berlen. Kartlaryň her birinde bir sany natural san ýazylan. Dessedäki islendik iki kartyň üstündäki ýazykly sanlaryň orta arifmetiki bahasy bir kartyň ýa-da birnäçe kartyň üstündäki sanlaryň orta geometriki bahasyna deňdir.

n -iň haýsy bahasy üçin kartlaryň üstündäki sanlaryň ählisi deň bolmaly diýilen netijä geliner?

Mesele 6. Aşakdaky şertler ýerine ýaly şeyle položitel hemişelik c sanyň bardygyny subut ediň:

$n > 1$ bitin san alalyň, we köplükdäki islendik ikisiniň arasyndaky uzaklyk iň bolmanda 1 bolar ýaly edip tekizligiň n sany nokadyndan ybarat bolan \mathcal{S} köplüğü alalyň. Onda \mathcal{S} -iň islendik nokadyndan ℓ -e çenli uzaklyk iň bolmanda $cn^{-1/3}$ -e deň bolar ýaly \mathcal{S} -i bölýän ℓ goni çzyyk tapylar.

(Eger nokatlardan ybarat bolan \mathcal{S} köplükdäki käbir iki nokady birleşdiryän kesim ℓ -i kesýän bolsa, ℓ goni çzyga \mathcal{S} -i bölýär diýilýär.)

Bellik. Ýeňilräk netijäni hemişelik $\alpha > 1/3$ sana baglylykda $cn^{-1/3}$ deregine $cn^{-\alpha}$ san üçin subut edenler ballandyrylyp bilinerler.