

الثلاثاء 23 تموز 2013

المشأة 1 : أثبت أنه من أجل أي زوج من الأعداد تاصححة الموجبة تماماً n, k يوجد k عدداً صحيحاً موجباً تماماً m_1, m_2, \dots, m_k (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة) تتحقق :

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

المشأة 2 : لدينا في المستوى تشيكية مكونة من 4027 نقطة . تقول عن هذه التشيكية إنها تشيكية كولومبية إذا كانت مؤلفة من نقطة حمراء و 2014 نقطة زرقاء ولا تقع أي ثلات نقط من التشيكية على استقامة واحدة . يمكن تقسيم المستوى إلى مناطق بواسطة مستقيمات . تقول عن تقسيم إنه جيد إذا تتحقق ما يلي :

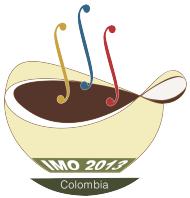
• لا يمر أي من المستقيمات بأي نقطة من نقاط التشيكية .

• لا تحوى أية منطقة من مناطق التشيكية على نقطتين ذات لونين مختلفين .

أوجد أصغر عدد k للمستقيمات التي بواسطتها يمكن تقسيم تشيكية كولومبية مكونة من 4027 نقطة تقسياً جيداً .

المشأة 3 : الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلث ABC المقابلة للرأس A تمس الضلع BC في نقطة A_1 . النقطتان B_1 على الضلع CA و C_1 على الضلع AB معرفتان بشكل ماثل ، باستعمال الدائريتين الماستين خارجاً المقابلتين للرأسين B و C على الترتيب . بفرض أن مركز الدائرة الماسة ببؤوس المثلث $A_1B_1C_1$ يقع على الدائرة الماسة ببؤوس المثلث ABC . برهن أن المثلث ABC قائم الزاوية .

(الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلث ABC المقابلة للرأس A هي الدائرة التي تمس الضلع BC وتتساوى AB من جهة B ، وتتساوى AC من جهة C . الدائريتان الماسيتين خارجاً المقابلتين للرأسين B و C معرفتان بالطريقة نفسها) .



الأربعاء 24 تموز 2013

المشكلة 4: ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا ، H نقطة تلاقي ارتفاعاته ، وليكن W نقطة على الضلع BC ، مختلفة عن النقطتين B و C .
النقطتان M و N هما المرسман القائمان للرؤسين B و C على الترتيب . ω_1 الدائرة المارة برؤوس المثلث BWN وليكن X نقطة من BC بحيث يكون WX قطر للدائرة ω_1 . وبالمثل ، ω_2 الدائرة المارة برؤوس المثلث CWM وليكن Y نقطة من BC بحيث يكون WY قطر للدائرة ω_2 . يبرهن أن النقط X, Y, H تقع على استقامة واحدة .

المشكلة 5: ليكن $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تماماً . ولتكن $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$: f تابعاً يتحقق الخواص لثلاثة التالية:

$$\text{(i) من أجل جميع } x, y \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ يكون } f(x)f(y) \geq f(xy)$$

$$\text{(ii) من أجل جميع } x, y \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ يكون } f(x+y) \geq f(x)+f(y)$$

$$\text{(iii) يوجد عدد كسري } a > 1 \text{ يتحقق } f(a) = a$$

$$\text{برهن أن } x = f(x) \text{ من أجل جميع } x \in \mathbb{Q}_{>0}$$

المشكلة 6: ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ، لتأمل دائرة عليها $n+1$ نقطة موزعة عليها بطريقة منتظمة ، ترقمها بالأعداد $0, 1, 2, \dots, n$ بحيث يستعمل العدد مرة واحدة فقط . نعتبر الترقيمين مطابقين إذاً أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بدوران مناسب للدائرة . يقال عن ترقيم إنه ترقيم جميل إذاً كان من أجل أي أربع نقاط مرتبة بالأعداد $a < b < c < d$ يكون الوتر الواصل بين النقطتين المترقمتين بالعددين a و d غير متقاطع مع الوتر الواصل بين النقطتين المترقمتين بالعددين b و c .

ليكن M عدد الترقيمات الجميلة غير المتطابقة ، ولتكن N عدد الأزواج المرتبة (x, y) من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث

$$\gcd(x, y) = 1 \text{ و } x + y \leq n . \text{ أثبت أن}$$

$$M = N + 1$$