Երեքշաբթի, հուլիսի 18, 2017թ.

Խնդիր 1: *$a_0 > 1$ կամայական բնական թվի համար սահմանենք $a_0, a_1, a_2, \cdots$ հաջորդականությունը հետևյալ ձևով.*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{եթե } \sqrt{a_n} - \text{ը ամբողջ թիվ է,} \\ a_n + 3, & \text{հակառակ դեպքում,} \end{cases}$$

կամայական $n \geq 0$ դեպքում:
Գտեք a_0–ի բոլոր արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի A թիվ այնպես, որ $a_n = A$–ն տեղի ունենա n–ի անվերջ շատ արժեքների դեպքում:

Խնդիր 2: *Դիցուք $\mathbb{R}$–ը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է:Գտեք բոլոր $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ֆունկցիաները այնպես, որ բոլոր իրական x և y թվերի համար տեղի ունենա*

$$f\left(f(x) f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

հավասարությունը:

Խնդիր 3: *Որսորդը և անտեսանելի ճագարը հարթության մեջ խաղում են հետևյալ խաղը: Ճագարի մեկնարկային A_0 կետը և որսորդի մեկնարկային B_0 կետը համընկնում են: Դիցուք $n-1$ փուլերից հետո ճագարը գտնվում է A_{n-1} կետում, իսկ որսորդը՝ B_{n-1} կետում: Այդ դեպքում խաղի n–րդ փուլում հերթագայությամբ կատարվում են հետևյալ երեք գործողությունները.*

(i) Ճագարը մնալով անտեսանելի տեղաշարժվում է այնպիսի A_n կետ, որ A_{n-1} և A_n կետերի հեռավորությունը հավասար է ուղիղ 1:

(ii) Հետևող սարքը որսորդին հաղորդում է ինչ-որ P_n կետ: Ընդ որում հետևող սարքը երաշխավորում է միայն այն, որ P_n և A_n կետերի հեռավորությունը չի գերազանցում 1-ը:

(iii) Որսորդը մնալով տեսանելի, տեղաշարժվում է B_n կետը այնպես, որ B_{n-1} և B_n կետերի հեռավորությունը հավասար է ուղիղ 1:

Կարո՞ղ է արդյոք որսորդը, ճագարի կամայական տեղաշարժերի դեպքում և, որից հետո հետևող սարքի հաղորդած կամայական կետի դեպքում, ընտրել իր տեղաշարժերը այնպես, որ 10^9 փուլերից հետո կարողանա երաշխավորել,որ իր և ճագարի հեռավորությունը չի գերազանցի 100-ը:

Language: Armenian

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր

Չորեքշաբթի, հուլիսի 19, 2017թ.

Խնդիր 4: *Դիցուք R –ը և S -ը Ω շրջանագծի իրարից տարբեր կետեր են այնպես, որ RS –ը տրամագիծ չէ: Դիցուք ℓ ուղիղը շոշափում է Ω շրջանագիծը R կետում: T կետը վերցրել են այնպես, որ S –ը RT հատվածի միջնակետն է: J կետը վերցրել են Ω -ի RS փոքր աղեղի վրա այնպես, որ JST եռանկյան արտագծած Γ շրջանագիծը հատում է ℓ ուղիղը իրարից տարբեր երկու կետում: Դիցուք A –ն R -ին ավելի մոտ գտնվող Γ –ի և ℓ -ի ընդհանուր կետն է: AJ ուղիղը երկրորդ անգամ հատում Ω -ն K կետում: Ապացուցեք, որ KT ուղիղը շոշափում է Γ շրջանագիծը:*

Խնդիր 5: *Տրված է $N \geq 2$ ամբողջ թիվը: $N(N+1)$ ֆուտբոլիստներից բաղկացած թիմը, որոնցից կամայական երկուսը տարբեր հասակի են կանգնած են շարքով: Մարզիչը ցանկանում է շարքից հեռացնել $N(N-1)$ ֆուտբոլիստ այնպես, որ շարքում մնացած $2N$ ֆուտբոլիստների համար տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.*

(1) երկու ամենաբարձրահասակ ֆուտբոլիստների միջև ոչ ոք կանգնած չի:

(2) ըստ հասակի երրորդ և չորրորդ ֆուտբոլիստների միջև ոչ ոք կանգնած չի:

$\vdots$

(N) երկու ամենացածրահասակ ֆուտբոլիստների միջև ոչ ոք կանգնած չի:

Ապացուցեք, որ դա միշտ հնարավոր է:

Խնդիր 6: *Ամբողջ թվերի կարգավորված (x, y) զույգը կանվանենք հասարակ կետ, եթե x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 1: Տրված է հասարակ կետերի S վերջավոր բազմությունը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի n բնական և $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ամբողջ թվեր այնպես, որ S –ին պատկանող յուրաքանչյուր (x, y) հասարակ կետի համար տեղի ունի*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

հավասարությունը:

Language. Armenian

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր