Tirsdag d. 10. juli 2012

Opgave 1. Givet en trekant ABC lad punktet J være centrum for den ydre røringscirkel modsat vinkel A. Denne ydre røringscirkel er tangent til siden BC i M og til linjerne AB og AC i henholdsvis K og L. Linjerne LM og BJ skærer hinanden i punktet F, og linjerne KM og CJ skærer hinanden i punktet G. Lad yderligere S være skæringspunktet mellem linjerne AF og BC, og lad T være skæringspunktet mellem linjerne AG og BC.

Vis at M er midtpunktet af ST.

(Den *ydre røringscirkel* til trekant ABC modsat vinkel A er cirklen som er tangent til linjestykket BC, til forlængelsen af linjestykket AB tættest på B og til forlængelsen af linjestykket AC tættest på C).

Opgave 2. Lad $n \geq 3$ være et helt tal, og lad $a_2, a_3, \ldots, a_n$ være positive reelle tal så $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Vis at

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Opgave 3. *Løgnerens gætteleg* er et spil for to spillere A og B. Spillets regler bygger på to positive heltal k og n som begge spillere kender.

Ved spillets start vælger A hele tal x og N, så $1 \leq x \leq N$. Spiller A holder x hemmelig, men fortæller sandfærdigt spiller B hvad N er. Derefter prøver spiller B at få information om x ved at stille spiller A spørgsmål på følgende måde: Hvert spørgsmål består af at B vælger en vilkårlig mængde S af positive heltal (evt. en som han allerede har valgt før) og spørger A om x tilhører S. Spiller B må stille så mange spørgsmål han vil. Efter hvert spørgsmål skal spiller A omgående svare *ja* eller *nej*, men hun må lyve så mange gange hun har lyst til. Den eneste begrænsning er at der blandt vilkårlige $k + 1$ på hinanden følgende svar skal være mindst et svar som er sandt.

Efter at B har stillet så mange spørgsmål som han vil, skal han angive en mængde X med højst n positive heltal. Hvis x tilhører X, vinder B; og hvis ikke, taber han. Vis at:

1. Hvis $n \geq 2^k$, da har B en vindende strategi.
2. For alle tilpas store k findes der et heltal $n \geq 1{,}99^k$, så B ikke har en vindende strategi.

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give op til 7 point

Onsdag d. 11. juli 2012

Problem 4. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som opfylder ligningen

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

for alle hele tal a, b, c, hvor $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ betegner mængden af hele tal).

Problem 5. Lad ABC være en trekant hvor $\angle BCA = 90°$, og lad D være fodpunktet af højden fra C. Lad X være et punkt på det indre af linjestykket CD. Lad desuden K være punktet på linjestykket AX så $|BK| = |BC|$, og lad L være punktet på linjestykket BX så $|AL| = |AC|$. Lad yderligere M være skæringspunktet mellem AL og BK.

Vis at $|MK| = |ML|$.

Problem 6. Bestem alle positive heltal n for hvilke der findes ikke-negative heltal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ så

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give op til 7 point