Fredag d. 10. juli 2015

Opgave 1. Vi kalder en endelig mængde $\mathcal{S}$ af punkter i planen *balanceret* hvis der for vilkårlige to forskellige punkter A og B i $\mathcal{S}$ findes et punkt C i $\mathcal{S}$ så $|AC| = |BC|$. Vi kalder $\mathcal{S}$ *center-fri* hvis der for vilkårlige tre forskellige punkter A, B og C i $\mathcal{S}$ ikke findes et punkt P i $\mathcal{S}$ så $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Vis at der for alle hele tal $n \geqslant 3$ findes en balanceret mængde som består af n punkter.

(b) Bestem alle hele tal $n \geqslant 3$ for hvilke der findes en balanceret center-fri mængde som består af n punkter.

Opgave 2. Bestem alle tripler (a, b, c) af positive hele tal så hvert af tallene

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

er potenser af 2.

(*En potens af* 2 *er et helt tal på formen* 2^n, *hvor* n *er et ikke-negativt helt tal.*)

Opgave 3. Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor $|AB| > |AC|$. Lad Γ være dens omskrevne cirkel, H højdernes skæringspunkt og F fodpunktet for højden fra A. Lad M være midtpunktet af BC. Lad Q være punktet på Γ så $\angle HQA = 90°$, og lad K være punktet på Γ så $\angle HKQ = 90°$. Antag at punkterne A, B, C, K og Q alle er forskellige og ligger på Γ i denne rækkefølge.

Vis at de omskrevne cirkler til trekanterne KQH og FKM tangerer hinanden.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

Lørdag d. 11. juli 2015

Opgave 4. Cirklen Ω med centrum O er den omskrevne cirkel til trekant ABC. En cirkel Γ med centrum A skærer linjestykket BC i punkterne D og E så B, D, E og C alle er forskellige og ligger på linjen BC i denne rækkefølge. Lad F og G være skæringspunkterne mellem Γ og Ω så A, F, B, C og G ligger på Ω i denne rækkefølge. Lad K være det andet skæringspunkt mellem den omskrevne cirkel til trekant BDF og linjestykket AB. Lad L være det andet skæringspunkt mellem den omskrevne cirkel til trekant CGE og linjestykket CA.

Antag at linjerne FK og GL er forskellige og skærer hinanden i punktet X. Vis at X ligger på linjen AO.

Opgave 5. Lad $\mathbb{R}$ være mængden af de reelle tal. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder ligningen

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 6. Følgen $a_1, a_2, \ldots$ af hele tal opfylder følgende betingelser:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ for alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ for alle $1 \leqslant k < \ell$.

Vis at der eksisterer to positive hele tal b og N så

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

for alle hele tal m og n hvor $n > m \geqslant N$.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.