



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Arabic (Syrian)

Day: 1

الثلاثاء 10 تموز 2012

المشكلة 1 :

مثلث ، النقطة J مركز الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع المثلث حيث تمس الضلع BC في نقطة M و تمس امتدادي الضلعين AB و AC في K و L على الترتيب . ينقطع المستقيمان LM و BJ في F ، و AF في G . لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين AF و BC ، و لتكن T نقطة تقاطع المستقيمين AG و BC . برهن أن M منتصف القطعة ST .

المشكلة 2 :

ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ولتكن $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ أعداداً حقيقة موجبة تتحقق $1 = a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$. برهن أن $(1+a_2)^2(1+a_3)^2 \cdots (1+a_n)^2 > n^n$

المشكلة 3 :

لعبة كشف الكذب هي لعبة يلعبها لاعبين اثنين A و B ، تعتمد قواعدها على عددين صحيحين موجبين k و n معلومين لكلا اللاعبين .

في بداية اللعبة يختار اللاعب A عددين صحيحين x و N بحيث $N \leq x \leq 1$ و يحتفظ سراً بالعدد x ويكشف بكل أمانة للاعب B عن العدد N . يحاول اللاعب B أن يعرف العدد x من خلال أسئلة يطرحها على اللاعب A على النحو التالي : في كل سؤال يختار اللاعب B مجموعة S من الأعداد الصحيحة الموجبة ، ويسأل فيما إذا كان العدد x يتبع إلى المجموعة S ، ويحق لللاعب B أن يسأل الكل الذي يراه مناسباً من الأسئلة وإن يغير المجموعة S كيما شاء ، أما اللاعب A ف يجب أن يجيب مباشرة على أسئلة اللاعب B بنعم أو بلا مع إمكانية الكذب ما شاء من المرات إلا أنه في كل $k+1$ من الإجابات المتتالية يجب أن تكون إجابة واحدة على الأقل صحيحة . بعد أن ينتهي اللاعب B من طرح جميع الأسئلة التي أرادها يجب عليه أن يحدد مجموعة X مؤلفة على الأكثر من n عدد صحيحًا موجب ، فإذا انتوى العدد x إلى المجموعة X فإن اللاعب B راجح ، وفي غير ذلك يكون خاسراً . برهن أن :

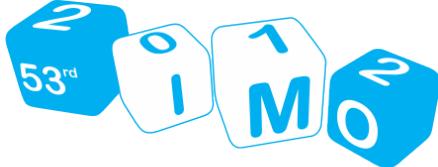
1 . إذا كان $n \leq 2^k$ فإن اللاعب B راجح أكيد .

2 . من أجل كل الأعداد k الكبيرة بما فيه الكفاية يوجد $n \geq 1.99^k$ من أجله لا يمكن للاعب B أن يضمن الربح

Language : Arabic Syrian

مدة الامتحان 4 ساعات و 30 دقيقة

لكل مسالة 7 درجات .



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Arabic (Syrian)

Day: 2

الأربعاء 11 تموز 2012

المسألة : 4

أوجد جميع التوابع $f: Z \rightarrow Z$ التي تحقق

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

من أجل جميع الأعداد الصحيحة a, b, c التي تتحقق $a + b + c = 0$

(عني بالرمز Z مجموعة الأعداد الصحيحة)

المسألة : 5

ليكن ABC مثلث فيه $\angle BCA = 90^\circ$ ولتكن D المرسوم القائم للنقطة C على الضلع AB . نأخذ نقطة X على القطعة المستقيمة CD ولتكن K نقطة على القطعة المستقيمة AX بحيث $BK = BC$ ، ولتكن L نقطة على القطعة المستقيمة BX بحيث $AL = AC$ ، ولتكن M نقطة تقاطع المستقيمين AL و BK . أثبت أن $MK = ML$.

المسألة : 6

أوجد جميع الأعداد الطبيعية n التي من أجلها توجد أعداد صحيحة غير سالبة a_1, a_2, \dots, a_n بحيث يتحقق

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

Language: Arabic Syrian

مدة الامتحان 4 ساعات و 30 دقيقة

لكل مسألة 7 درجات .