2023 оны 7 сарын 8, Бямба

Бодлого 1. Дараах нөхцөлийг хангах бүх $n > 1$ зохиомол тоог ол: n тооны $d_1, d_2, \ldots, d_k$ натурал тоон хуваагчдыг $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ гэж жагсаахад, дурын $1 \leqslant i \leqslant k-2$ хувьд d_i тоо $d_{i+1} + d_{i+2}$ нийлбэрийг хуваана.

Бодлого 2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны хувьд $AB < AC$ байв. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Ω гэе. Ω тойргийн A цэгийг агуулсан CB нумын дундаж цэгийг S гэе. A цэгээс BC талд буулгасан өндөр BS хэрчмийг D цэгт огтлох ба Ω тойргийг дахин $E \neq A$ цэгт огтолно. D цэгийг дайрсан BC шулуунтай параллель шулуун BE шулууныг L цэгт огтолно. BDL гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэж тэмдэглэе. ω тойрог Ω тойрогтой дахин $P \neq B$ цэгт огтлолцоно.

ω тойргийг P цэгт шүргэдэг шулуун BS шулуунтай $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектрис дээр огтлолцохыг батал.

Бодлого 3. Бүхэл $k \geqslant 2$ тоо бүрийн хувьд дараах чанартай бүх натурал тоон $a_1, a_2, \ldots$ дарааллыг ол: сөрөг биш бүхэл $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ тоонуудын хувьд $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ гэж бичигдэх ямар нэг P олон гишүүнт олдоод, дурын $n \geqslant 1$ хувьд

$$P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

байна.

Language: Mongolian

Хугацаа: 4 цаг 30 минут.
Бодлого бүр 7 оноотой.

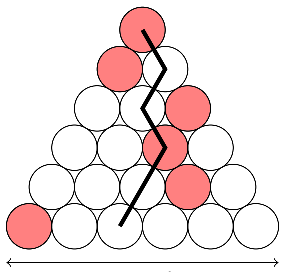
2023 оны 7 сарын 9, Ням

Бодлого 4. Хос хосоороо ялгаатай эерэг бодит $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ тоонууд өгөгдөв.
Дурын $n = 1, 2, \ldots, 2023$ хувьд

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

бүхэл байдаг бол $a_{2023} \geqslant 3034$ гэж батал.

Бодлого 5. Натурал n тоо өгөгдөв. $i = 1, 2, \ldots, n$ дугаар бүрийн хувьд дээрээсээ i-р мөрөнд яг нэг нь улаанаар будагдсан i ширхэг тойрог байрласан байхаар зөв гурвалжин хэлбэртэй байрлуулсан $1 + 2 + \cdots + n$ тойргийг *Япон гурвалжин* гэнэ. Япон гурвалжны эхний мөрнөөс эхлээд, нэг тойргоос түүний яг доор байрлах хоёр тойргийн аль нэг рүү шилжсээр, хамгийн доод мөр хүрдэг n тойргийн дараалльг *нинжа зам* гэнэ. Зурагт $n = 6$ хувьд Япон гурвалжин ба хоёр улаан тойрог агуулсан нинжа замын жишээ үзүүлэв.



Япон гурвалжин бүрийн хувьд ядаж k ширхэг улаан тойрог агуулсан нинжа зам оршин байдаг байх хамгийн их k тоог n-ээс хамааруулж ол.

Бодлого 6. ABC зөв гурвалжны A_1, B_1, C_1 дотоод цэгүүдийн хувьд $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ ба

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

байв. BC_1, CB_1 шулуунууд A_2 цэгт огтлолцдог, CA_1, AC_1 шулуунууд B_2 цэгт огтлолцдог, AB_1, BA_1 шулуунууд C_2 цэгт огтлолцдог гэе.
$A_1B_1C_1$ гурвалжин элдэв талт бол AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд бүгд хоёр ерөнхий цэгийг дайрна гэж батал.

(Тайлбар: аль ч хоёр талын урт нь ялгаатай гурвалжныг элдэв талт гэнэ.)

Language: Mongolian

Хугацаа: 4 цаг 30 минут.
Бодлого бүр 7 оноотой.