الثلاثاء 16 جويلية 2019

مسألة 1.

لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة. عين كل الدوال $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ بحيث ،
من أجل كل الأعداد الصحيحة a و b ، $f(2a)+2f(b)=f(f(a+b))$

مسألة 2.

في المثلث ABC ، A_1 نقطة من الضلع $[BC]$ و B_1 نقطة من الضلع $[AC]$. لتكن P ، Q نقطتين من القطعتين المستقيمتين $[AA_1]$ ، $[BB_1]$ على الترتيب بحيث المستقيم (PQ) يوازي (AB) . لتكن P_1 نقطة من المستقيم (PB_1) بحيث B_1 موجودة تماما بين P و P_1 و $\angle PP_1C=\angle BAC$. بالمثل لتكن Q_1 نقطة من المستقيم (QA_1) بحيث A_1 موجودة تماما بين Q و Q_1 و $\angle CQ_1Q=\angle CBA$.
أثبت ان النقط P ، Q ، P_1 و Q_1 تنتمي لنفس الدائرة.

مسألة 3.

على شبكة التواصل الاجتماعي هناك 2019 عضوا بعض الازواج (الثنائيات) منهم اصدقاء .كلما كان العضو A صديقا للعضو B فان B صديق لـ A . الوضعيات التالية يمكن ان تتكرر تحدث بصفة متتالية الواحدة بعد الاخرى:
اذا كان ثلاثة اعضاء A ، B و C حيث A صديق لكل من B و C لكن B و C ليسا صديقين فإ ن هذا يتغير إلى الحالة التي يصبح فيها B و C صديقين و A ليس صديقا لكل منهما .كل علاقات الصداقة بين بقية الأعضاء لا تتغير .
في البداية 1010 عضوا كل واحد منهم له 1009 صديق و 1009 عضوا كل واحد منهم له 1010 صديقا.
برهن انه توجد سلسلة من هذه الوضعيات تؤدي في النهاية الى ان كل عضو له على الاكثر صديق واحد.

Language : Arabic (Algerian)

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسأل

الاربعاء 17 جويلية 2019

المسألة 4.

عين كل الازواج (k,n) من الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق المعادلة

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1})$$

المسألة 5.

يصدر بنك المدينة باث قطعا نقدية تحمل على وجه حرف H وعلى الوجه الآخر حرف T.
رامي له n من هذه القطع مرتبة في صف من اليسار الى اليمين . يقوم رامي عدّة مرات بالعملية التالية :

إذا كان بالضبط $k \geq 1$ قطعة نقدية تظهر الحرف H فإنه يقوم بقلب القطعة النقدية التي ترتيبها k بدءا من اليسار وتتوقف العملية عندما يظهر على كلّ القطع النقدية الحرف T.
فمثلا إذا كان $n = 3$ و وضعية البداية هي THT تكون العمليات كالتالي :
$THT \to HHT \to HTT \to TTT$ وتوقفت بعد ثلاث عمليات.

أ) أثبت أنه مهما كانت وضعية البداية فإن رامي يتوقف بعد عدد منته من العمليات.

ب) لكلّ وضعية بداية C ترمز $L(C)$ لعدد العمليات التي سيقوم بها رامي قبل أن يتوقف . فمثلا $L(\text{THT}) = 3$ و $L(\text{TTT}) = 0$. احسب معدّل (متوسط حسابي) قيم $L(C)$ من أجل كل وضعيات البداية الممكنة C والتي عددها 2^n.

المسألة 6.

لتكن النقطة I مركز الدائرة ω المحاطة بمثلث حاد الزوايا ABC حيث $AB \neq AC$
الدائرة ω تمسّ الأضلاع $[BC]$، $[CA]$ ، $[AB]$ في D ، E ، F على الترتيب. المستقيم الذي يشمل D ويعامد (EF) يقطع ω ثانية في النقطة R . المستقيم (AR) يقطع ω ثانية في P. الدائرتان المحيطتان بالمثلثين PCE و PBF تتقاطعان في Q. اثبت أن المستقيمين (DI) و (PQ) يتقاطعان في نقطة تنتمي إلى المستقيم الذي يشمل A و يعامد المستقيم (AI).

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة

Language Arabic (Algerian)