Selasa, 8 Julai 2014

Masalah 1. Andaikan $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ ialah suatu jujukan integer positif yang tak terhingga. Buktikan bahawa wujud suatu integer unik $n \geq 1$ sehinggakan

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Masalah 2. Andaikan $n \geq 2$ ialah suatu integer. Pertimbangkan suatu papan catur bersaiz $n \times n$ yang terdiri daripada n^2 petak unit. Suatu konfigurasi yang terdiri daripada n buah catur pada papan tersebut dikatakan *tenteram* jika setiap baris dan setiap lajur mengandungi tepat satu buah catur. Tentukan integer positif terbesar k sehinggakan, bagi setiap konfigurasi tenteram dengan n buah catur, terdapat satu segiempat sama bersaiz $k \times k$ yang tidak mengandungi buah catur pada mana-mana k^2 petak unit tersebut.

Masalah 3. Sisiempat cembung $ABCD$ mempunyai sifat $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Titik H ialah kaki garis serenjang dari A ke BD. Titik S dan T masing-masing terletak pada sisi AB dan AD, sehinggakan H terletak di dalam segitiga SCT dan

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Buktikan bahawa garis BD adalah tangen kepada bulatan lilit bagi segitiga TSH.

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah

Rabu, 9 Julai 2014

Masalah 4. Titik P dan Q terletak pada sisi BC bagi segitiga bersudut tirus ABC sehinggakan $\angle PAB = \angle BCA$ dan $\angle CAQ = \angle ABC$. Titik M dan N masing-masing terletak pada garis AP dan AQ, sehinggakan P ialah titik tengah bagi AM, dan Q ialah titik tengah bagi AN. Buktikan bahawa garis BM dan CN bersilang pada bulatan lilit bagi segitiga ABC.

Masalah 5. Bagi setiap integer positif n, Bank of Cape Town mengeluarkan beberapa syiling bernilai $\frac{1}{n}$. Diberi suatu himpunan terhingga syiling-syiling tersebut (tidak semestinya dengan nilai berlainan) dengan jumlah nilai yang tidak melebihi $99 + \frac{1}{2}$. Buktikan bahawa himpunan ini boleh dibahagikan kepada beberapa kumpulan, sehinggakan bilangan kumpulan adalah tidak melebihi 100, dan jumlah nilai bagi setiap kumpulan adalah tidak melebihi 1.

Masalah 6. Suatu set yang terdiri daripada garis-garis pada suatu satah dikatakan berada pada *kedudukan am* jika tiada dua garis yang selari dan tiada tiga garis yang melalui titik yang sama. Suatu set yang terdiri daripada garis-garis pada kedudukan am membahagikan satah tersebut kepada beberapa rantau. Terdapat beberapa rantau yang mempunyai luas yang terhingga; kita gelarkan rantau-rantau ini *rantau-rantau terhingga* bagi set tersebut. Buktikan bahawa bagi semua n yang cukup besar, bagi setiap set yang terdiri daripada n garis-garis pada kedudukan am, sekurang-kurangnya $\sqrt{n}$ garis tersebut boleh diwarnakan biru sehinggakan tiada satu pun daripada rantau-rantau terhingga bagi set tersebut mempunyai keseluruhan sempadan berwarna biru.

Nota: Hasil kerja dengan $\sqrt{n}$ digantikan dengan $c\sqrt{n}$ akan dianugerahkan markah berdasarkan nilai pemalar c.

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah