



Language: Chinese (Traditional)

Day: 1

2016 年 7 月 11 日，星期一

**問題 1.** 三角形  $BCF$  中， $\angle B$  是直角。設點  $A$  在直線  $CF$  上，滿足  $FA = FB$ 、且  $F$  位於  $A$  和  $C$  之間。選取點  $D$  使得  $DA = DC$ 、且  $AC$  是  $\angle DAB$  的角平分線。再選點  $E$  使得  $EA = ED$ 、且  $AD$  是  $\angle EAC$  的角平分線。設點  $M$  為  $CF$  的中點，另有一點  $X$  滿足  $AMXE$  為平行四邊形 (其中  $AM \parallel EX$ 、 $AE \parallel MX$ )。

證明：直線  $BD$ 、 $FX$ 、 $ME$  三線共點。

**問題 2.** 找出所有的正整數  $n$ ，使得我們可以在  $n \times n$  表格的每一方格中各填入字母  $I$ 、 $M$ 、 $O$  其中之一，並且符合下列條件：

- 在任一行及任一列中，有三分之一的方格填入字母  $I$ 、三分之一的方格填入  $M$ 、三分之一的方格填入  $O$ ；並且
- 對任一條對角線而言，如果它的格子數是三的倍數，則在該對角線中有三分之一的方格填入字母  $I$ 、三分之一的方格填入  $M$ 、三分之一的方格填入  $O$ 。

**註：**一個  $n \times n$  表格的各行各列，可以按自然順序用 1 至  $n$  標號。由此，任一方格可對應到一組正整數  $(i, j)$ ，其中  $1 \leq i, j \leq n$ 。當  $n > 1$  時，表格會有  $4n - 2$  條**對角線**，分成兩類：第一類對角線係由  $i + j$  為定值的所有方格  $(i, j)$  所組成；而第二類是由  $i - j$  為定值的所有方格  $(i, j)$  所組成。

**問題 3.** 設  $P = A_1A_2 \dots A_k$  為平面上的凸多邊形。頂點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $\dots$ 、 $A_k$  坐標中的所有數字都是整數，並且都落在一個圓上。令  $P$  的面積為  $S$ 。給一個正奇數  $n$ ，使得  $P$  的每一條邊之長度平方皆為整數，並且可被  $n$  整除。

證明： $2S$  為整數，並且可被  $n$  整除。



Language: Chinese (Traditional)

Day: 2

2016 年 7 月 12 日，星期二

**問題 4.** 對一個由正整數所組成的集合而言，如果它至少包含兩個元素，且每一個元素至少與另一個元素有共同的質因數，則稱此集合為一個**芳香集**。設  $P(n) = n^2 + n + 1$ 。請找出最小的正整數  $b$ ，使得我們可以找到非負整數  $a$ ，讓集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

成為一個芳香集。

**問題 5.** 黑板上寫著方程式

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016),$$

其中等號兩邊各有 2016 個一次因式。請找出最小的正整數  $k$ ，使得：在這 4032 個一次因式中，我們能夠恰好擦掉  $k$  個，讓等號兩邊至少各留下一個一次因式，且所得到的方程式沒有實數解。

**問題 6.** 平面上有  $n \geq 2$  條線段，其中任兩條線段都交叉，並且任三條線段不共點。小杰要對每條線段各選一個端點放一隻青蛙，並且讓青蛙面對另一個端點。然後他會拍  $n-1$  次手；他每拍一次手，每隻青蛙都馬上向前跳到它所在的線段上的下一個交點。青蛙永遠不改變它前進的方向。小杰的願望是存在某種擺放青蛙的方法，使得任意兩隻青蛙總是不會同時停在同一個交點上。

(a) 證明：如果  $n$  是奇數，小杰一定可以實現他的願望。

(b) 證明：如果  $n$  是偶數，小杰一定無法實現他的願望。