Language: **Thai**

Day: **1**

วันอังคารที่ ๒๓ กรกฎาคม ๒๕๕๖

โจทย์ข้อที่ 1. จงพิสูจน์ว่า สำหรับคู่ของจำนวนเต็มบวก k และ n ใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวก k ตัว $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน) ซึ่ง

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

โจทย์ข้อที่ 2. โครงแบบของจุด 4027 จุดในระนาบเรียกว่า *โคลอมเบียน* ถ้าโครงแบบประกอบด้วยจุดสีแดง 2013 จุด และจุดสีน้ำเงิน 2014 จุด โดยไม่มีจุดสามจุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เมื่อลากเส้นตรงจำนวนหนึ่งบนระนาบ ระนาบจะถูกแบ่งออกเป็นบริเวณหลาย ๆ บริเวณ การจัดวางของเส้นตรงบนระนาบสำหรับโครงแบบโคลอมเบียน เรียกว่าการจัดวาง *ดี* ถ้าการจัดวางของเส้นตรงสอดคล้องเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

- ไม่มีเส้นตรงผ่านจุดใด ๆ ในโครงแบบ
- ไม่มีบริเวณใดมีทั้งจุดสีแดงและจุดสีน้ำเงิน

จงหา k ที่มีค่าน้อยสุดซึ่งทำให้โครงแบบโคลอมเบียนใด ๆ ของจุด 4027 จุด มีการจัดวางดีของเส้นตรง k เส้น

โจทย์ข้อที่ 3. ให้วงกลมสัมผัสนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ตรงข้ามจุดยอด A สัมผัสด้าน BC ที่จุด A_1 ในทำนองเดียวกัน นิยามจุด B_1 บน CA และ C_1 บน AB โดยใช้วงกลมสัมผัสนอกตรงข้าม B และ C ตามลำดับ สมมติว่า จุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ อยู่บนวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วงกลมสัมผัสนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ตรงข้ามจุดยอด A *คือ วงกลมที่สัมผัสด้าน BC, สัมผัสรังสี AB ส่วนที่เลย B และสัมผัสรังสี AC ส่วนที่เลย C นิยามวงกลมสัมผัสนอกตรงข้ามกับ B และ C ในทำนองเดียวกัน*

เวลาที่ใช้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนน ๗ คะแนน

วันพุธที่ ๒๔ กรกฎาคม ๒๕๕๖

โจทย์ข้อที่ 4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมที่มี H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ และให้ W เป็นจุดบนด้าน BC ระหว่าง B และ C ที่ไม่ใช่จุดปลายทั้งสอง จุด M และ N เป็นจุดปลายส่วนสูงจาก B และ C ตามลำดับ ให้ ω_1 เป็นวงกลมล้อมรอบของ BWN และให้ X เป็นจุดบน ω_1 ซึ่ง WX เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของ ω_1 ในทำนองเดียวกัน ให้ ω_2 เป็นวงกลมล้อมรอบของ CWM และ ให้ Y เป็นจุดบน ω_2 ซึ่ง WY เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของ ω_2 จงพิสูจน์ว่า X, Y และ H อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

โจทย์ข้อที่ 5. ให้ $\mathbb{Q}_{>0}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะบวกทั้งหมด ให้ $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไขสามข้อต่อไปนี้

(i) สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ จะได้ $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ จะได้ $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) มีจำนวนตรรกยะ $a > 1$ ซึ่ง $f(a) = a$

จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{Q}_{>0}$

โจทย์ข้อที่ 6. ให้ $n \geq 3$ เป็นจำนวนเต็ม และพิจารณาวงกลมที่มีจุด $n+1$ จุดบนเส้นรอบวงโดยที่จุดเหล่านั้นแบ่งเส้นรอบวงออกเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากัน พิจารณาการให้หมายเลข $0, 1, \ldots, n$ แก่แต่ละจุด โดยใช้แต่ละหมายเลขเพียงครั้งเดียว การให้หมายเลขสองวิธีจะถือว่าเหมือนกัน ถ้าวิธีหนึ่งได้จากอีกวิธีหนึ่งโดยการหมุนของวงกลม เรียกการให้หมายเลขว่าการให้หมายเลขแบบ *สวย* ถ้าสำหรับหมายเลข $a < b < c < d$ ใด ๆ ซึ่ง $a + d = b + c$ จะได้ว่า คอร์ดของวงกลมที่เชื่อมจุดหมายเลข a และ d ไม่ตัดกับคอร์ดของวงกลมที่เชื่อมจุดหมายเลข b และ c

ให้ M เป็นจำนวนวิธีของการให้หมายเลขแบบสวย และ N เป็นจำนวนคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนเต็มบวกซึ่ง $x + y \leq n$ และ $\gcd(x, y) = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$M = N + 1$$

เวลาที่ใช้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนน ๗ คะแนน