torek, 18. julij 2017

Naloga 1. Za vsako celo število $a_0 > 1$ definiramo zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ s predpisom:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{če je } \sqrt{a_n} \text{ celo število,} \\ a_n + 3 & \text{sicer,} \end{cases} \qquad \text{za vsak } n \geqslant 0.$$

Določi vse vrednosti a_0, za katere obstaja tako število A, da je $a_n = A$ za neskončno mnogo vrednosti n.

Naloga 2. Naj bo $\mathbb{R}$ množica realnih števil. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x in y velja

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Naloga 3. Lovec in nevidni zajec igrata igro v evklidski ravnini. Zajčeva začetna točka A_0 in lovčeva začetna točka B_0 sta isti. Po $n-1$ krogih igre je zajec v točki A_{n-1} in lovec v točki B_{n-1}. V n-tem krogu igre se zgodijo tri stvari v naslednjem vrstnem redu:

(i) Zajec se nevidno premakne v točko A_n, tako da je razdalja med A_{n-1} in A_n natanko 1.

(ii) Sledilna naprava sporoči lovcu točko P_n. Edino, kar sledilna naprava zagotavlja lovcu, je, da je razdalja med P_n in A_n največ 1.

(iii) Lovec se vidno premakne v točko B_n, tako da je razdalja med B_{n-1} in B_n natanko 1.

Ali je vedno mogoče, ne glede na to, kako se zajec premika, in ne glede na to, katere točke sledilna naprava sporoči lovcu, da se lovec premika tako, da je po 10^9 krogih razdalja med njim in zajcem največ 100?

sreda, 19. julij 2017

Naloga 4. Naj bosta R in S različni točki na krožnici Ω, tako da RS ni premer. Naj bo ℓ tangenta na krožnico Ω v točki R. Naj bo T taka točka, da je S razpolovišče daljice RT. Točka J je taka točka na krajšem loku RS krožnice Ω, da se očrtana krožnica Γ trikotnika JST in ℓ sekata v dveh različnih točkah. Naj bo A tisto presečišče Γ in ℓ, ki je bližje R. Premica AJ seka Ω še v točki K. Dokaži, da je premica KT tangenta na krožnico Γ.

Naloga 5. Dano je celo število $N \geqslant 2$. Skupina $N(N+1)$ nogometnih igralcev, od katerih nobena dva nista enako visoka, stoji v vrsti. Srečko želi odstraniti $N(N-1)$ igralcev iz te vrste, tako da bo za novo vrsto $2N$ igralcev veljalo naslednjih N pogojev:

(1) nihče ne stoji med najvišjima igralcema,

(2) nihče ne stoji med tretjim in četrtim najvišjim igralcem,

$\vdots$

(N) nihče ne stoji med najnižjima igralcema.

Dokaži, da je to vedno mogoče.

Naloga 6. Urejeni par (x, y) celih števil je *primitivna točka*, če je največji skupni delitelj x in y enak 1. Za dano končno množico S primitivnih točk dokaži, da obstaja pozitivno celo število n in cela števila a_0, a_1, …, a_n, tako da za vsak (x, y) iz S velja:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$