53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Arabic**

Day: **1**

الثلاثاء، 10 يوليو 2012

المسألة 1. ليكن ABC مثلّثا والنقطة J هي مركز دائرته الخارجيّة المقابلة للرأس A . هذه الدائرة الخارجيّة تمس الضلع BC في النقطة M ، وتمس المستقيمين AB و AC في النقطتين K و L ، على الترتيب. المستقيمان LM و BJ يتقاطعان في F ، والمستقيمان KM و CJ يتقاطعان في G . لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين AF و BC ، ولتكن T نقطة تقاطع المستقيمين AG و BC .

برهن أنّ M تقع في منتصف القطعة المستقيمة ST .

(الدائرة الخارجيّة للمثلّث ABC والمقابلة للرأس A هي الدائرة الّتي تمس كلا من الضلع BC ، وامتداد الضلع AB من جهة B ، وامتداد الضلع AC من جهة C .)

المسألة 2. ليكن $n \geq 3$ عددا صحيحا، و $a_2, a_3, \ldots, a_n$ أعدادا حقيقيّة موجبة بحيث $a_2a_3 \cdots a_n = 1$.

برهن أنّ

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \; > \; n^n.$$

المسألة 3. لعبة تخمين الكذب هي لعبة بين لاعبين A و B . قواعد هذه اللّعبة تعتمد على عددين صحيحين موجبين k و n . هذان العددان معروفان لكلا اللّاعبين.

في بداية اللّعبة يختار A عددين صحيحين x و N بحيث $1 \leq x \leq N$. اللّاعب A يحتفظ سرا بالعدد x ، وبكلّ أمانة يكشف عن العدد N للاعب B . يحاول اللّاعب B التعرّف على العدد x من خلال أسئلة يوجّهها للاعب A على النحو التالي: في كلّ سؤال يختار B مجموعة عشوائيّة S من الأعداد الصحيحة الموجبة، ثمّ يسأل A إذا كان x ينتمي لـ S . يمكن للّاعب B أن يكرّر هذا النوع من الأسئلة عددا من المرّات حسب رغبته، سواء بالاحتفاظ بالمجموعة S أو بتغييرها. على اللّاعب A أن يجيب لحظيّا على أسئلة اللّاعب B بنعم أو لا، مع إمكانية الكذب في الإجابة ما شاء من المرّات. القيد الوحيد أنّه في كلّ $k+1$ من الإجابات المتتالية، تكون على الأقل واحدة منها صحيحة.

بعد أن ينتهي B من طرح العدد الذي يرغب من أسئلته، عليه أن يحدّد مجموعة X تحوي ما لا يزيد عن n من الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا انتمت x إلى X فيكون B فائزا، وبعكس ذلك فهو خاسر. برهن أنّ:

1. إذا كان $n \geq 2^k$ ، فإنّه يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.
2. لكلّ الأعداد k الكبيرة بما فيه الكفاية يوجد عدد صحيح $n \geq 1.99^k$ بحيث لا يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.

Language: Arabic

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Arabic**

Day: **2**

الأربعاء، 11 يوليو 2012

المسألة 4. جد جميع الدوال $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ التي تحقّق المساواة التالية:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

لكلّ الأعداد الصحيحة a ، b ، c بحيث $a+b+c=0$.

(نعني بالرمز $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة.)

المسألة 5. ليكن ABC مثلّثا فيه $\angle BCA = 90°$ ، و D قدم الارتفاع النازل من C . لتكن X نقطة داخل القطعة المستقيمة CD . النقطة K تقع على القطعة المستقيمة AX بحيث $BK = BC$. بصورة مشابهة النقطة L تقع على القطعة المستقيمة BX بحيث $AL = AC$.

إذا كانت M نقطة تقاطع المستقيمين AL و BK ، فبرهن أنّ $MK = ML$.

المسألة 6. حدّد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي لأجلها توجد أعداد صحيحة غير سالبة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ تحقّق

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة