понеделник, 11. јули 2022

Задача 1. Банката во Осло кова два типови од монети: алуминиумски (обележуваме A) и бронзени (обележуваме B). Маријана има n алуминиумски монети и n бронзени монети, подредени во ред во некој произволен почетен редослед. *Синџир* е произволна подниза од последователни монети од ист тип. За даден позитивен цел број $k \leqslant 2n$, Маријана ја повторува следната постапка: таа го наоѓа најдолгиот синџир кој ја содржи k-тата монета гледано од лево, и ги поместува сите парички од овој синџир на левата страна од редот. На пример за $n = 4$ и $k = 4$, постапката почнувајќи од подредувањето $AABBBABA$ ќе биде

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Најди ги сите парови (n, k) каде $1 \leqslant k \leqslant 2n$ такви што за секое почетно подредување, во некој момент во постапката, првите n монети од лево ќе бидат сите од ист тип.

Задача 2. Нека $\mathbb{R}^+$ го означува множеството на позитивни реални броеви. Најди ги сите функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за секој $x \in \mathbb{R}^+$, постои точно еден $y \in \mathbb{R}^+$ за кој важи

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Нека k е позитивен цел број и S е конечно множество од непарни прости броеви. Докажи дека постои најмногу еден начин (до ротација и осна симетрија) да се поставaт елементите од S околу кружница така што производот од било кои два соседи на кружницата е од облик $x^2 + x + k$ за некој позитивен цел број x.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

вторник, 12. јули 2022

Задача 4. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $BC = DE$. Претпоставуваме дека постои точка T во внатрешноста на $ABCDE$ за која $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Нека правата AB ги сече правите CD и CT во точки P и Q, соодветно. Претпоставуваме дека точките P, B, A, Q се поставени на правата во овој редослед. Нека правата AE ги сече правите CD и DT во точки R и S, соодветно. Претпоставуваме дека точките R, E, A, S се поставени на правата во овој редослед. Докажи дека точките P, S, Q, R лежат на кружница.

Задача 5. Најди ги сите тројки (a, b, p) од позитивни цели броеви, каде p е прост број и важи

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Нека n е позитивен цел број. *Нордиски квадрат* е $n \times n$ табла на која се напишани сите цели броеви од 1 до n^2 така што на секое поле е напишан точно еден број. Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна. Секое поле кое е соседно само со полиња на кои се напишани поголеми броеви го нарекуваме *котлина*. *Нагорница* е низа од едно или повеќе полиња таква што:

(i) првото поле во низата е котлина,

(ii) секое следно поле во низата е соседно со претходното поле, и

(iii) броевите кои се напишани во полињата од низата се во растечки редослед.

Најди го, како функција од n, најмалиот можен вкупен број на нагорници во Нордиски квадрат.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.