

الثلاثاء 23 تموز 2013

المسألة 1 : أثبت أنه من أجل أي زوج من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً n, k يوجد k عدداً صحيحاً موجباً تماماً

m_1, m_2, \dots, m_k (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة) تحقق :

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

المسألة 2 : لدينا في المستوى تشكيلة مكونة من 4027 نقطة . نقول عن هذه التشكيلة إنها تشكيلة كولومبية إذا كانت مؤلفة من

2013 نقطة حمراء و 2014 نقطة زرقاء ولا تقع أي ثلاث نقط من التشكيلة على استقامة واحدة . يمكن تقسيم المستوى إلى مناطق

بواسطة مستقيمات . نقول عن تقسيم إنه جيد إذا تحقق ما يلي :

- لا يمر أي من المستقيمات بأي نقطة من نقاط التشكيلة .
- لا تحوي أية منطقة من مناطق التشكيلة على نقطتين ذات لونين مختلفين .

أوجد أصغر عدد k للمستقيمات التي بواسطتها يمكن تقسيم تشكيلة كولومبية مكونة من 4027 نقطة تقسيماً جيداً .

المسألة 3 : الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلث ABC المقابلة للرأس A تمس الضلع BC في نقطة A_1 . النقطتان B_1 على

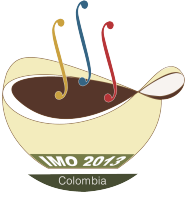
الضلع CA و C_1 على الضلع AB معرفتان بشكل مماثل ، باستعمال الدائرتين الماسيتين خارجاً للمقابلتين للرأسين B و C على

الترتيب . بفرض أن مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث $A_1B_1C_1$ يقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC . برهن أن المثلث

ABC قائم الزاوية .

(الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلث ABC المقابلة للرأس A هي الدائرة التي تمس الضلع BC وتمس امتداد AB من جهة B ،

وتمس امتداد الضلع AC من جهة C . الدائرتان الماسيتان خارجاً للمقابلتين للرأسين B و C معرفتان بالطريقة نفسها) .



الأربعاء 24 تموز 2013

المسألة 4: ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا ، H نقطة تلاقي ارتفاعاته ، وليكن W نقطة على الضلع BC ، مختلفة عن النقطتين B و C .
النقطتان M و N هما المرسمان القائمان للرأسين B و C على الترتيب . ω_1 الدائرة المارة برؤوس المثلث BWN وليكن X نقطة من
الدائرة ω_1 بحيث يكون WX قطعاً للدائرة ω_1 . وبالمثل ، ω_2 الدائرة المارة برؤوس المثلث CWM وليكن Y نقطة من الدائرة ω_2 بحيث
يكون WY قطعاً للدائرة ω_2 . برهن أن النقط X, Y, H تقع على استقامة واحدة .

المسألة 5: لتكن $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تماماً . وليكن $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعاً يحقق الخواص الثلاثة التالية :

(i) من أجل جميع $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ يكون $f(x)f(y) \geq f(xy)$.

(ii) من أجل جميع $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ يكون $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

(iii) يوجد عدد كسري $a > 1$ يحقق $f(a) = a$.

برهن أن $f(x) = x$ من أجل جميع $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

المسألة 6: ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ، لنأمل دائرة عليها $n+1$ نقطة موزعة عليها بطريقة منتظمة ، نرقمها بالأعداد $0, 1, \dots, n$ بحيث
يستعمل العدد مرة واحدة فقط . نعتبر الترتيبين متطابقين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بدوران مناسب للدائرة . يقال عن ترقيم إنه
ترقيم جميل إذا كان من أجل أي أربع نقاط مرقمة بالأعداد $a < b < c < d$ التي تحقق $a+d = b+c$ يكون الوتر الواصل بين النقطتين
المرقمتين بالعددين a و d غير متقاطع مع الوتر الواصل بين النقطتين المرقمتين بالعددين b و c .

ليكن M عدد الترتيبات الجميلة غير المتطابقة ، وليكن N عدد الأزواج المرتبة (x, y) من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث
 $x+y \leq n$ و $\gcd(x, y) = 1$. أثبت أن

$$M = N + 1$$