

Ngày 12 Tháng 7 Năm 2006

Bài 1. Cho ABC là một tam giác với tâm đường tròn nội tiếp là I . P là một điểm ở trong tam giác thỏa mãn

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Chứng minh rằng $AP \geq AI$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P = I$.

Bài 2. Cho P là một đa giác đều 2006 cạnh. Một đường chéo của P được gọi là *đoạn tốt* nếu các đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó chia chu vi của P thành hai phần, phần nào cũng có số lẻ cạnh. Các cạnh của P cũng được coi là đoạn tốt.

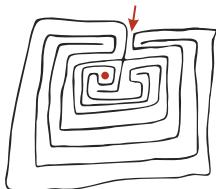
Giả sử ta chia P thành các tam giác bởi 2003 đường chéo đôi một không có điểm chung thuộc miền trong của P . Hãy tính số lớn nhất các tam giác cân có hai cạnh là đoạn tốt có thể xuất hiện trong cách chia P như trên.

Bài 3. Xác định số thực nhỏ nhất M sao cho bất đẳng thức

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

được thỏa mãn cho tất cả các số thực a, b và c .

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài được 7 điểm



Ngày 13 Tháng 7 Năm 2006

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Bài 5. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n > 1$ với hệ số nguyên và k là một số nguyên dương. Xét đa thức $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, trong đó P xuất hiện k lần. Chứng minh rằng có không quá n số nguyên t thỏa mãn $Q(t) = t$.

Bài 6. Gán cho mỗi cạnh b của một đa giác lồi P diện tích lớn nhất của tam giác nằm trong P và nhận b làm cạnh. Chứng minh rằng tổng tất cả các diện tích được gán cho các cạnh của đa giác lồi P không nhỏ hơn hai lần diện tích P .

*Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài được 7 điểm*