53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Dutch**

Day: **1**

Dinsdag 10 juli 2012

Opgave 1. Zij $\triangle ABC$ een driehoek en zij J het middelpunt van de aangeschreven cirkel tegenover het hoekpunt A. Deze aangeschreven cirkel raakt aan de zijde BC in M, en aan de lijnen AB en AC in respectievelijk K en L. De lijnen LM en BJ snijden elkaar in F, en de lijnen KM en CJ snijden elkaar in G. Zij S het snijpunt van de lijnen AF en BC, en zij T het snijpunt van de lijnen AG en BC.
Bewijs dat M het midden is van lijnstuk ST.

(De *aangeschreven cirkel* van $\triangle ABC$ tegenover het hoekpunt A is de cirkel die raakt aan het lijnstuk BC, aan de halfrechte AB voorbij B, en aan de halfrechte AC voorbij C.)

Opgave 2. Zij $n \geqslant 3$ een geheel getal en laat $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zijn zodanig dat $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Bewijs dat

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \; > \; n^n.$$

Opgave 3. Het *liegebeestspel* is een spel dat wordt gespeeld door twee spelers A en B. De spelregels hangen af van twee gehele getallen $k > 0$ en $n > 0$ die beide spelers kennen.
In het begin van het spel kiest A gehele getallen x en N met $1 \leqslant x \leqslant N$. Speler A houdt x geheim en vertelt N eerlijk aan speler B. Speler B probeert nu informatie over x te verkrijgen door speler A als volgt vragen te stellen: bij elke vraag noemt B een willekeurige verzameling S van positieve gehele getallen (mogelijk een verzameling die hij al eerder heeft genoemd) en vraagt hij aan A of x tot S behoort. Speler B mag zoveel van zulke vragen stellen als hij wil. Speler A moet elke vraag van B onmiddellijk beantwoorden met *ja* of *nee*, maar hij mag daarbij liegen zo vaak hij wil; de enige beperking is dat van elke $k+1$ opeenvolgende antwoorden ten minste één antwoord eerlijk moet zijn.
Nadat B zoveel vragen heeft gesteld als hij wil, moet hij een verzameling X van ten hoogste n positieve gehele getallen noemen. Als x tot X behoort, dan wint B; anders verliest hij.
Bewijs dat:

(a) Als $n \geqslant 2^k$, dan heeft B een winnende strategie.

(b) Voor alle voldoende grote k bestaat er een geheel getal $n \geqslant 1{,}99^k$ zodanig dat B geen winnende strategie heeft.

Woensdag 11 juli 2012

Opgave 4. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan de gelijkheid

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

voor alle gehele getallen a, b, c waarvoor $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ is de verzameling van de gehele getallen.)

Opgave 5. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $\angle BCA = 90°$ en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit C. Zij X een punt in het inwendige van het lijnstuk CD. Zij K het punt op het lijnstuk AX zodat $|BK| = |BC|$. Analoog, zij L het punt op het lijnstuk BX zodat $|AL| = |AC|$. Zij M het snijpunt van AL en BK.
Bewijs dat $|MK| = |ML|$.

Opgave 6. Bepaal alle gehele getallen $n > 0$ waarvoor er gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ bestaan zodanig dat

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard