Miðvikudagur 15. júlí 2009

Dæmi 1. Látum n vera jákvæða heiltölu og látum $a_1,\ldots,a_k$ $(k \geq 2)$ vera ólíkar heiltölur í menginu $\{1,\ldots,n\}$ þannig að n gangi upp í $a_i(a_{i+1}-1)$ fyrir $i=1,\ldots,k-1$. Sannið að n gangi ekki upp í $a_k(a_1-1)$.

Dæmi 2. Gefinn er þríhyrningur ABC og miðja umritaðs hrings hans er O. Punktar P og Q eru innri punktar á hliðunum CA og AB. Látum K, L og M vera miðjupunkta strikanna BP, CQ og PQ og látum Γ vera hring sem liggur um punktana K, L og M. Gerum ráð fyrir að línan PQ sé snertill við hringinn Γ. Sannið að þá gildi $OP = OQ$.

Dæmi 3. Gerum ráð fyrir að $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sé strangvaxandi runa jákvæðra heiltalna þannig að hlutarunurnar

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{og} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

séu báðar jafnmunarunur. Sannið að þá sé runan $s_1, s_2, s_3, \ldots$ einnig jafnmunaruna.

Tími: 4 klst. og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig

Fimmtudagur 16. júlí 2009

Dæmi 4. Látum ABC vera þríhyrning þannig að $AB = AC$. Helmingalínur hornanna $\angle CAB$ og $\angle ABC$ skera hliðarnar BC og CA í D og E. Látum K vera miðju innritaðs hrings þríhyrningsins ADC. Enn fremur er $\angle BEK = 45^\circ$. Finnið öll hugsanleg gildi $\angle CAB$.

Dæmi 5. Finnið öll föll f sem varpa jákvæðum heiltölum yfir í jákvæðar heiltölur þannig að fyrir allar jákvæðar heiltölur a og b sé til eðlilegur þríhyrningur með hliðarlengdir

$$a,\ f(b) \text{ og } f(b + f(a) - 1).$$

(Eðlilegur þríhyrningur er þríhyrningur sem hefur ekki alla hornpunktana á sömu línu.)

Dæmi 6. Látum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vera ólíkar jákvæðar heiltölur og látum M vera mengi af $n-1$ jákvæðum heiltölum þannig að talan $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sé ekki í M. Engispretta stekkur eftir talnalínunni og byrjar í 0. Hún hoppar n sinnum til hægri og lengdir stökkanna eru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ í einhverri röð. Sannið að engisprettan geti valið röð stökkanna þannig að hún lendi aldrei á tölu í M.