poniedziałek, 19 lipca 2021 r.

Zadanie 1. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 100$. Iwan pisze każdą z liczb $n, n+1, \ldots, 2n$ na innej karcie. Następnie tasuje te $n+1$ kart i rozdziela je na dwa stosy. Udowodnić, że co najmniej jeden ze stosów zawiera dwie karty o tej własności, że suma zapisanych na nich liczb jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Zadanie 3. Punkt D leży we wnętrzu trójkąta ostrokątnego ABC, w którym $AB > AC$, w taki sposób, że $\angle DAB = \angle CAD$. Punkt E leżący na odcinku AC spełnia $\angle ADE = \angle BCD$, punkt F leżący na odcinku AB spełnia $\angle FDA = \angle DBC$, a punkt X leżący na prostej AC spełnia $CX = BX$. Punkty O_1 i O_2 są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ADC i EXD. Udowodnić, że proste BC, EF, O_1O_2 mają punkt wspólny.

Language: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

wtorek, 20 lipca 2021 r.

Zadanie 4. Niech Γ będzie okręgiem o środku I, a $ABCD$ takim czworokątem wypukłym, że każdy z odcinków AB, BC, CD, DA jest styczny do okręgu Γ. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie AIC. Półprosta $BA^{\rightarrow}$ przecina okrąg Ω w punkcie X leżącym poza odcinkiem AB, a półprosta $BC^{\rightarrow}$ przecina okrąg Ω w punkcie Z leżącym poza odcinkiem BC. Półproste $AD^{\rightarrow}$ i $CD^{\rightarrow}$ przecinają okrąg Ω odpowiednio w punktach Y i T, leżących poza odcinkami AD i CD. Udowodnić, że

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Zadanie 5. Dwie wiewiórki, Baśka oraz Jolka, zebrały na zimę zapas 2021 orzechów. Jolka ponumerowała orzechy liczbami od 1 do 2021 i wykopała w ziemi 2021 małych dziur położonych wzdłuż okręgu wokół ich ulubionego drzewa. Następnego ranka Jolka zauważyła, że Baśka umieściła w każdej z dziur jeden z orzechów, bez zwracania uwagi na ich numerowanie. Sfrustrowana Jolka postanowiła zmienić położenie orzechów za pomocą ciągu 2021 ruchów. W k-tym ruchu Jolka zamieni miejscami dwa orzechy sąsiadujące z orzechem o numerze k. Wykazać, że istnieje k o tej własności, że w k-tym ruchu Jolka zamieni miejscami takie dwa orzechy a i b, że $a < k < b$.

Zadanie 6. Dana jest liczba całkowita $m \geqslant 2$. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych (niekoniecznie dodatnich), a $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ będą podzbiorami zbioru A. Przypuśćmy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ suma elementów zbioru B_k jest równa m^k. Wykazać, że zbiór A zawiera co najmniej $m/2$ elementów.

Language: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.