Pondělí, 18. července, 2011

Úloha 1. Pro libovolnou množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (po dvou různých) přirozených čísel označme s_A součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Dále nechť n_A značí počet dvojic (i, j), kde $1 \leq i < j \leq 4$ a $a_i + a_j$ dělí s_A. Určete všechny čtyřprvkové množiny A přirozených čísel, pro které je hodnota n_A největší možná.

Úloha 2. Nechť $\mathcal{S}$ je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in \mathcal{S}$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se *středem otáčení* P dokud „nenarazí" na další bod množiny $\mathcal{S}$, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny $\mathcal{S}$, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in \mathcal{S}$ a přímku ℓ, procházející bodem P, tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý bod z S nekonečně mnohokrát.

Úloha 3. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel splňující nerovnost

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

pro všechna reálná x a y. Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \leq 0$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů

Úterý, 19.července, 2011

Úloha 4. Nechť n je celé kladné číslo. Máme dány rovnoramenné váhy a n závaží o hmotnostech $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na vahách, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou misku vah ale vždy tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje?

Úloha 5. Nechť f je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá m a n je rozdíl $f(m) - f(n)$ dělitelný číslem $f(m-n)$. Dokažte, že pro libovolná celá m a n, taková, že $f(m) \le f(n)$, je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$.

Úloha 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a Γ kružnice jemu opsaná. Dále nechť ℓ je tečna kružnice Γ a ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c jsou po řadě obrazy přímky ℓ v osové symetrii podle přímek BC, CA, AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká kružnice Γ.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu můžete získat až 7 bodů