

E premte, 10 korrik, 2015

Problemi 1. Një bashkësi e fundme pikash \mathcal{S} të planit quhet e *ekuilibruar* në qoftë se për çdo dy pika të ndryshme A dhe B në \mathcal{S} , ekziston një pikë C në \mathcal{S} , e tillë që $AC = BC$. Themi që bashkësia \mathcal{S} është *jo e qendërzuar* në qoftë se për çdo tre pika të ndryshme A , B dhe C në \mathcal{S} , nuk ekziston asnjë pikë P në \mathcal{S} e tillë që $PA = PB = PC$.

- (a) Tregoni që për të gjithë numrat e plotë $n \geq 3$, ekziston një bashkësi e ekuilibruar që përbëhet nga n pika.
- (b) Përcaktoni të gjithë numrat e plotë $n \geq 3$ për të cilët ekziston një bashkësi e ekuilibruar jo e qendërzuar që përbëhet nga n pika.

Problemi 2. Përcaktoni të gjitha treshet e numrave të plotë pozitivë (a, b, c) të tillë që secili prej numrave

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

është fuqi e 2-it.

(Fuqi e 2-it është një numër i plotë i formës 2^n , ku n është një numër i plotë jonegativ.)

Problemi 3. Jepet trekëndëshi këndngushtë ABC ku $AB > AC$. Le të jetë Γ rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit, H pikëprerja e lartësive të tij dhe F këmba e lartësisë së hequr nga kulmi A . Pika M është mesi i segmentit BC . Le të jetë Q pika në rrethin Γ e tillë që $\angle HQA = 90^\circ$ dhe K pika në rrethin Γ e tillë që $\angle HKQ = 90^\circ$. Supozojmë që pikat A , B , C , K dhe Q janë të ndryshme nga njëra-tjetra dhe ndodhen në rrethin Γ në renditjen e dhënë.

Vërtetoni se rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave KQH dhe FKM janë tangentë me njëri-tjetrin.

E shtunë, 11 korrik, 2015

Problemi 4. Trekëndëshit ABC i jashtëshkruhet rrethi Ω me qendër në pikën O . Rrethi Γ me qendër në pikën A pret segmentin BC në pikat D dhe E , në mënyrë të tillë që pikat B, D, E dhe C janë të gjitha të ndryshme nga njëra-tjetra dhe ndodhen në drejtëzën BC në renditjen e dhënë. Pikat F dhe G janë pikat e prerjes së rrathëve Γ dhe Ω , në mënyrë të tillë që pikat A, F, B, C dhe G ndodhen në rrethin Ω në renditjen e dhënë. Pika K është pikëprerja e dytë e rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit BDF dhe segmentit AB . Pika L është pikëprerja e dytë e rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit CGE dhe segmentit CA .

Supozojmë se drejtëzat FK dhe GL janë të ndryshme dhe priten në pikën X . Vërtetoni se pika X ndodhet në drejtëzën AO .

Problemi 5. Le të jetë \mathbb{R} bashkësia e numrave realë. Përcaktoni të gjithë funksionet $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ që kënaqin ekuacionin

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

për të gjithë numrat realë x dhe y .

Problemi 6. Vargu i numrave të plotë a_1, a_2, \dots kënaq kushtet e mëposhtme:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ për çdo $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ për çdo $1 \leq k < \ell$.

Vërtetoni që ekzistojnë dy numra të plotë pozitivë b dhe N në mënyrë të tillë që

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

për të gjithë numrat e plotë m dhe n që kënaqin kushtin $n > m \geq N$.