Երկուշաբթի, 19. հուլիսի 2021

Խնդիր 1. Դիցուք տրված է $n \geq 100$ բնական թիվը: Լևոնը $n+1$ քարտերի վրա գրեց $n, n+1, \ldots, 2n$ բնական թվերը, ընդ որում յուրաքանչյուրը ճիշտ մեկ անգամ: Այնուհետև նա քարտերը խառնեց և բաժանեց երկու խմբերի: Ապացուցել, որ խմբերից գոնե մեկում կգտնվեն երկու քարտեր, որոնց վրա գրված թվերի գումարը բնական թվի քառակուսի է:

Խնդիր 2. Ապացուցել, որ ցանկացած $x_1, \ldots, x_n$ իրական թվերի համար տեղի ունի

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

անհավասարությունը:

Խնդիր 3. Դիցուք $AB > AC$ պայմանին բավարարող $ABC$ սուրանկյուն եռանկյան ներսում նշված է $D$ կետն այնպես, որ $\angle DAB = \angle CAD$: Դիցուք $AC$ հատվածի վրա նշել են $E$ կետն այնպես, որ $\angle ADE = \angle BCD$, իսկ $AB$ կողմի վրա նշել են $F$ կետն այնպես, որ $\angle FDA = \angle DBC$: Դիցուք $AC$ ուղղի վրա նշել են $X$ կետն այնպես, որ $CX = BX$: Դիցուք $O_1$ և $O_2$ կետերը համապատասխանաբար $ADC$ և $EXD$ եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի կենտրոններն են: Ապացուցել, որ $BC$, $EF$ և $O_1O_2$ ուղիղները հատվում են մեկ կետում:



Աշխատաժամանակը՝ $4$ ժամ $30$ րոպե.
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը $7$ միավոր.

Երեքշաբթի, 20. հուլիսի 2021

Խնդիր 4. Դիցուք $I$ կենտրոնով $\Gamma$ շրջանագիծը շոշափում է $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան $AB$, $BC$, $CD$ և $DA$ կողմերը: Դիցուք $\Omega$-ն $AIC$ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծն է: Դիցուք $BA$ ճառագայթը $A$ կետից այն կողմ $\Omega$ շրջանագիծը հատում է $X$ կետում, իսկ $BC$ ճառագայթը $C$ կետից այն կողմ $\Omega$-ն հատում է $Z$ կետում: Դիցուք $AD$ և $CD$ ճառագայթները $D$ կետից այն կողմ $\Omega$-ն հատում են համապատասխանաբար $Y$ և $T$ կետերում: Ապացուցել, որ

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC:$$

Խնդիր 5. Ձմեռվան պատրաստվելիս Չիպն ու Դեյլը հավաքեցին $2021$ հատ կաղին, որոնք Չիպը համարակալեց $1$-ից մինչև $2021$ և իրենց սիրելի ծառի շուրջը փորեց $2021$ հատ փոս: Հաջորդ առավոտյան նա բացահայտեց, որ Դեյլը հոգ չտանելով հերթականության մասին յուրաքանչյուր փոսի մեջ մեկական կաղին է դրել: Տխրելով, Չիպը հաջորդաբար կատարեց $2021$ քայլ. $k$-րդ քայլին նա տեղերով փոխեց $k$ համարով կաղինի հարևան երկու կաղինները: Ապացուցել, որ կգտնվի որևէ $k$ թիվ, որ $k$-րդ քայլի ընթացքում նա տեղերով փոխել է $a$ և $b$ համարներով կաղիններ, որոնց համար $a < k < b$:

Խնդիր 6. Դիցուք տրված է $m \geqslant 2$ բնական թիվը: Դիցուք ամբողջ թվերից (պարտադիր չէ դրական) բաղկացած $A$ վերջավոր բազմությունն ունի այնպիսի $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$, ենթաբազմություններ, որ ցանկացած $k = 1, 2, \ldots, m$ թվի համար $B_k$ բազմության էլեմենտների գումարը հավասար է $m^k$: Ապացուցել, որ $A$ բազմությունը պարունակում է առնվազն $m/2$ էլեմենտ:

Language: Armenian

Աշխատաժամանակը՝ $4$ ժամ $30$ րոպե.
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը $7$ միավոր.