понеделник, 11. юли 2022

Задача 1. Банката на Осло разполага с два вида монети: алуминиеви (означени с A) и бронзови (означени с B). Петър разполага с n алуминиеви и n бронзови монети, наредени в редица по произволен начин. Ще наричаме *верига* последователност от монети от един и същи вид. За предварително зададено естествено число $k \leqslant 2n$ Петър повтаря многократно следната операция: определя най-дългата верига, съдържаща $k^{\text{тата}}$ монета отляво надясно, и премества всички монети от тази верига в левия край на редицата. Например, при $n = 4$, $k = 4$ и първоначална наредба $AABBBABA$, Петър ще получи:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Да се намерят всички двойки (n, k), $1 \leqslant k \leqslant 2n$, такива, че независимо от първоначалната наредба на монетите, ще се стигне до момент, в който n-те най-леви монети ще бъдат от един и същи вид.

Задача 2. Да означим с $\mathbb{R}^+$ множеството на положителните реални числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, при които за всяко $x \in \mathbb{R}^+$, съществува точно едно $y \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяващо

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Нека k е естествено число, а S е крайно множество от нечетни прости числа. Да се докаже, че съществува най-много един начин (с точност до ротация и отражение) да разположим елементите на S в кръг, така че произведението на всеки две съседни числа да е от вида $x^2 + x + k$ за някое естествено число x.

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

вторник, 12. юли 2022

Задача 4. Даден е изпъкнал петоъгълник $ABCDE$, за който $BC = DE$. Точката T, вътрешна за $ABCDE$, е такава, че $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Нека правата AB пресича правите CD и CT съответно в точки P и Q, като точките P, B, A, Q върху правата са в такава последователност. Аналогично, нека правата AE пресича правите CD и DT съответно в точки R и S, като точките R, E, A, S върху правата са в такава последователност. Да се докаже, че точките P, S, Q, R лежат на една окръжност.

Задача 5. Да се намерят всички тройки (a, b, p) от естествени числа, за които p е просто и

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Дадено е естествено число n. Таблица $n \times n$, чиито клетки са номерирани по произволен начин с числата от 1 до n^2 ще наричаме *Северен квадрат* . Две клетки са съседни, ако имат обща страна. Ако всичките съседи на една клетка са с номера, по-големи от нейния, тя се нарича *долина*. *Изкачване* е последователност от една или повече клетки, такива че:

(i) първата клетка е долина,

(ii) всяка следваща клетка в изкачването е съседна на предходната,

(iii) номерата на клетките в последователността нарастват.

Да се намери, като функция на n, най-малкия брой на всички възможни изкачвания в Северен квадрат.