



*Ponedeljek, 18. julij 2011*

**Naloga 1.** Za vsako množico  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  štirih različnih naravnih števil označimo s  $s_A$  vsoto  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Naj bo  $n_A$  število tistih parov  $(i, j)$ , kjer je  $1 \leq i < j \leq 4$ , za katere  $a_i + a_j$  deli  $s_A$ . Določite vse množice  $A$  štirih različnih naravnih števil, za katere je vrednost  $n_A$  največja možna.

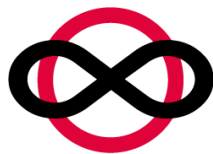
**Naloga 2.** Naj bo  $\mathcal{S}$  končna množica vsaj dveh točk v ravnini. Denimo, da nobene tri točke iz  $\mathcal{S}$  niso kolinearne. Z izrazom *mlin na veter* poimenujemo postopek, pri katerem na začetku izberemo premico  $\ell$ , ki gre skozi točko  $P \in \mathcal{S}$  in na kateri ne leži nobena druga točka iz  $\mathcal{S}$ . Premica se vrti v smeri urnega kazalca okrog *središča vrtenja*  $P$  vse do takrat, dokler premica prvič ne gre skozi še neko drugo točko iz  $\mathcal{S}$ . Ta točka, ki jo označimo s  $Q$ , nato postane novo središče vrtenja in premica se sedaj vrti v smeri urnega kazalca okrog  $Q$  vse do takrat, dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz  $\mathcal{S}$ . Ta postopek se nikoli ne konča, središče vrtenja je vedno točka iz  $\mathcal{S}$ .

Pokažite, da lahko vedno izberemo točko  $P$  iz  $\mathcal{S}$  in premico  $\ell$ , ki gre skozi  $P$ , tako da bo pri pripadajočem mlinu na veter vsaka točka iz  $\mathcal{S}$  središče vrtenja neskončno mnogokrat.

**Naloga 3.** Naj bo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, za katero velja

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

za vsa realna števila  $x$  in  $y$ . Dokažite, da je  $f(x) = 0$  za vse  $x \leq 0$ .



*Torek, 19. julij 2011*

**Naloga 4.** Naj bo  $n$  naravno število. Na voljo imamo primerjalno tehtnico in  $n$  uteži, ki tehtajo  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Vseh  $n$  uteži želimo položiti na primerjalno tehtnico v  $n$  zaporednih korakih na tak način, da v vsakem izmed korakov izberemo eno izmed uteži, ki še ni na primerjalni tehtnici, in jo položimo bodisi v levo bodisi v desno posodo primerjalne tehtnice, pri čemer uteži v desni posodi po nobenem izmed  $n$  korakov niso težje od uteži v levi posodi. Določite, na koliko načinov lahko to storimo.

**Naloga 5.** Naj bo  $f$  funkcija, ki slika iz množice celih števil v množico naravnih števil. Denimo, da je za poljubni celi števili  $m$  in  $n$  razlika  $f(m) - f(n)$  deljiva s  $f(m - n)$ . Dokažite, da je za vsa cela števila  $m$  in  $n$ , za katera velja  $f(m) \leq f(n)$ , število  $f(n)$  deljivo s  $f(m)$ .

**Naloga 6.** Naj bo  $ABC$  ostrokotni trikotnik in naj bo  $\Gamma$  trikotniku  $ABC$  očrtana krožnica. Naj bo  $\ell$  tangenta na krožnico  $\Gamma$  in naj bodo  $\ell_a, \ell_b$  in  $\ell_c$  premice, ki jih dobimo, če prezrcalimo  $\ell$  po vrsti prek premic  $BC, CA$  in  $AB$ . Pokažite, da se krožnica, ki je očrtana trikotniku, določenim s premicami  $\ell_a, \ell_b$  in  $\ell_c$ , ter krožnica  $\Gamma$  dotikata.