Ponedjeljak, 11. srpnja 2016.

Zadatak 1. Trokut BCF ima pravi kut u vrhu B. Neka je A točka na pravcu CF takva da je $|FA| = |FB|$ i da točka F leži između točaka A i C. Točka D je izabrana tako da je $|DA| = |DC|$ i da je pravac AC simetrala kuta $\sphericalangle DAB$. Točka E je izabrana tako da je $|EA| = |ED|$ i da je pravac AD simetrala kuta $\sphericalangle EAC$. Neka je točka M polovište dužine $\overline{CF}$. Neka je točka X takva da je četverokut $AMXE$ paralelogram ($AM \parallel EX$ i $AE \parallel MX$). Dokaži da se pravci BD, FX i ME sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svako polje tablice $n \times n$ ispuniti jednim od slova I, M i O tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- u svakom retku i svakom stupcu, jedna trećina svih slova su I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O;
- u svakoj dijagonali, ako je broj slova upisanih u tu dijagonalu višekratnik broja 3 onda su jedna trećina tih slova I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O.

Napomena: Retci i stupci tablice $n \times n$ su označeni brojevima od 1 do n na uobičajeni način. Tako je svakom polju tablice pridružen uređeni par prirodnih brojeva (i, j), pri čemu je $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ako je $n > 1$, tablica ima $4n-2$ *dijagonala* koje pripadaju jednoj od dvije vrste. Dijagonala prve vrste se sastoji od svih polja (i, j) za koje $i + j$ konstantno, a dijagonala druge vrste se sastoji od svih polja (i, j) za koje je $i - j$ konstantno.

Zadatak 3. Neka je $P = A_1A_2 \ldots A_k$ konveksni mnogokut u ravnini. Vrhovi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ imaju cjelobrojne koordinate i leže na jednoj kružnici. Neka je S površina mnogokuta P. Dan je neparni prirodni broj n takav da su kvadrati duljina svih stranica mnogokuta P prirodni brojevi djeljivi brojem n. Dokaži da je $2S$ cijeli broj koji je djeljiv brojem n.

Utorak, 12. srpnja 2016.

Zadatak 4. Skup prirodnih brojeva se naziva *mirisnim* ako sadrži barem dva elementa i ako svaki njegov element ima barem jedan zajednički prosti djelitelj s barem jednim od preostalih elemenata. Neka je $P(n) = n^2 + n + 1$. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja b takva da postoji nenegativni cijeli broj a za koji je skup

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

mirisan?

Zadatak 5. Jednadžba

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

je napisana na ploči, pri čemu se sa svake strane nalazi 2016 linearnih faktora. Koja je najmanja moguća vrijednost broja k za koju je moguće izbrisati točno k od ova 4032 linearna faktora tako da sa svake strane ostane barem jedan faktor i da dobivena jednadžba nema realnih rješenja?

Zadatak 6. U ravnini se nalazi $n \geqslant 2$ dužina tako da se svake dvije dužine sijeku u unutrašnjoj točki i da nikoje tri dužine nemaju zajedničku točku. Geoff mora izabrati po jednu krajnju točku svake dužine i na nju postaviti žabu okrenutu prema drugoj krajnjoj točki te dužine. Potom će pljesnuti rukama $n-1$ puta. Svaki put kada pljesne, svaka žaba odmah skoči prema naprijed do sljedeće točke presjeka na svojoj dužini. Žabe nikada ne mijenjaju smjer svojih skokova. Geoff želi postaviti žabe tako da nikoje dvije od njih niti u jednom trenutku ne zauzimaju istu točku presjeka.

(a) Dokaži da Geoff uvijek može ispuniti svoju želju ako je n neparan broj.

(b) Dokaži da Geoff nikada ne može ispuniti svoju želju ako je n paran broj.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.