

Seshanba, Iyul 16, 2019

Masala 1. Hamma butun sonlar to'plami \mathbb{Z} bo'lsin. Barcha $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funksiyalarni topingki, ixtiyoriy a va b butun sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsin:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Masala 2. ABC uchburchakda A_1 nuqta BC tomonda va B_1 nuqta AC tomonda yotsin. Aytaylik P va Q nuqtalar, mos ravishda AA_1 va BB_1 kesmalarida, PQ parallel AB bo'ladigan qilib tanlangan bo'lsin. PB_1 to'g'ri chiziqda shunday P_1 nuqta tanlansin, B_1 nuqta P va P_1 nuqtalari orasida qat'iy ravishda yotsin va $\angle PP_1C = \angle BAC$ bo'lsin. Xuddi shunday Q_1 nuqta QA_1 to'g'ri chiziqda tanlansin, bunda A_1 qat'iy ravishda Q va Q_1 orasida yotib, $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ bo'lsin.

Isbot qiling, P , Q , P_1 , va Q_1 nuqtalar bir aylanada yotadi.

Masala 3. Bir ijtimoiy tarmoqda 2019 ta foydalanuvchi bor, ayrimlari bir-birlari bilan do'st. Agar A foydalanuvchi B foydalanuvchining do'sti bo'lsa, unda B ham A foydalanuvchining do'stidir. Quyidagicha aniqlangan hodisa ketma-ket ravishda ro'y berishi mumkin (faqat bir paytda bir hodisa):

A , B va C foydalanuvchilar uchligi shunday bo'lsinki, A foydalanuvchi B va C bilan do'st bo'lib, B va C esa bir-biri bilan do'st bo'lmasin. U holda, endi B va C o'zaro do'stlashib olib, A foydalanuvchi esa B hamda C bilan bo'lgan do'stligini yuqotsin. Boshqa barcha do'stliklar o'zgarmasdan qolsin.

Boshlanishida 1010 ta foydalanuvchining har birida 1009 ta do'st bor, va 1009 ta foydalanuvchining har birida 1010 ta do'st bor. Shunday hodisalar ketma-ketligi mavjud ekanligini isbot qilinki, ulardan keyin har bir foydalanuvchining ko'pi bilan bir dona do'sti qoladi.

Chorshanba, Iyul 17, 2019

Masala 4. Barcha (k, n) musbat butun sonlar juftliklarini topingki, quyidagi o‘rinli bo‘lsin:

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Masala 5. Bath banki bir tomini H , ikkinchi tomoni T bo‘lgan tangalar zabt etgan. Abdulla n ta shunday tanglarni chapdan o‘nga bir chiziqda yoyib chiqdi. U ketma-ket quyidagicha amal bajaradi: agar H ko‘rsatib turgan tangalar soni aynan $k > 0$ bo‘lsa, u holda chapdan sanaganda k -inchi tangani olib, uni teskarisini o‘girib quyadi; aks holda, barcha tangalar T ko‘rsatib turibdi va u to‘htaydi. Misol uchun, agar $n = 3$ bo‘lsa, THT bilan boshlanadigan konfiguratsiya $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ bilan uchta amalda tugaydi.

- (a) Har qanday boshlang‘ich konfiguratsiya uchun Abdulla chekli sondagi amallardan keyin to‘xtashini isbotlang.
- (b) Har bir boshlang‘ich C konfiguratsiya uchun, Abdulla to‘xtashi uchun zarur amallar soni $L(C)$ bo‘lsin. Misol uchun $L(THT) = 3$ va $L(TTT) = 0$. Barcha 2^n ta bo‘lishi mumkin bo‘lgan C konfiguratsiyalar uchun $L(C)$ sonlarining o‘rtacha qiymatini toping.

Masala 6. O‘tkir burchakli $AB \neq AC$ bo‘lgan ABC uchburchakka ichki chizilgan ω aylananing markazi I bo‘lsin. Bu ω aylana ABC uchburchakning BC , CA va AB tomonlariga mos ravishda D , E va F nuqtalarida urinsin. D nuqtadan EF ga perpendikulyar to‘g‘ri chiqiz ω aylanani yana R nuqtada kesib o‘tsin. AR to‘g‘ri chiziq ω aylanani yana P nuqtada kesib o‘tsin. PCE va PBF uchburchaklariga tashqi chiqizilgan aylanalar yana Q nuqtada kesishsin.

DI va PQ to‘g‘ri chiziqlari kesishish nuqtasi, A nuqtadan o‘tuvchi va AI ga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.