***الثلاثاء 23 تموز 2013***

**المسألة 1** : أثبت أنه من أجل أي زوج من الأعداد تاصحيحة الموجبة تماماً $n, k$ يوجد $k$ عدداً صحيحاً موجباً تماماً $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ( ليس بالضرورة أن تكون مختلفة ) تحقق :

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

**المسألة 2** : لدينا في المستوي تشكيلة مكونة من 4027 نقطة . نقول عن هذه التشكيلة إنها تشكيلة *كولومبية* إذا كانت مؤلفة من 2013 نقطة حمراء و 2014 نقطة زرقاء و لا تقع أي ثلاث نقط من التشكيلة على استقامة واحدة . يمكن تقسيم المستوي إلى مناطق بواسطة مستقيمات . نقول عن تقسيمٍ إنه جيد إذا تحقق ما يلي :

- لا يمر أي من المستقيمات بأي نقطة من نقاط التشكيلة .
- لا تحوي أية منطقة من مناطق التشكيلة على نقطتين ذات لونين مختلفين .

أوجد أصغر عدد $k$ للمستقيمات التي بواسطتها يمكن تقسيم تشكيلة كولومبية مكونة من 4027 نقطة تقسيماً جيداً .

**المسألة 3** : الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلث $ABC$ المقابلة للرأس $A$ تمس الضلع $BC$ في نقطة $A_1$ . النقطتان $B_1$ على الضلع $CA$ و $C_1$ على الضلع $AB$ معرّفتان بشكل مماثل ، باستعمال الدائرتين الماستين خارجاً المقابلتين للرأسين $B$ و $C$ على الترتيب . بفرض أن مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث $A_1B_1C_1$ يقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث $ABC$ . برهن أن المثلث $ABC$ قائم الزاوية .

( الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع مثلثٍ $ABC$ المقابلة للرأس $A$ هي الدائرة التي تمس الضلع $BC$ وتمس امتداد $AB$ من جهة $B$ ، وتمس امتداد الضلع $AC$ من جهة $C$ . الدائرتان الماستين خارجاً المقابلتين للرأسين $B$ و $C$ معرفتان بالطريقة نفسها ) .

**الأربعاء 24 تموز 2013**

**المسألة 4** : ليكن $ABC$ مثلثاً حاد الزوايا ، $H$ نقطة تلاقي ارتفاعاته ، ولتكن $W$ نقطة على الضلع $BC$ ، مختلفة عن النقطتين $B$ و $C$ . النقطتان $M$ و $N$ هما المرتسمان القائمان للرأسين $B$ و $C$ على الترتيب . $\omega_1$ الدائرة المارة برؤوس المثلث $BWN$ ولتكن $X$ نقطة من الدائرة $\omega_1$ بحيث يكون $WX$ قطراً للدائرة $\omega_1$ . وبالمثل ، $\omega_2$ الدائرة المارة برؤوس المثلث $CWM$ ولتكن $Y$ نقطة من الدائرة $\omega_2$ بحيث يكون $WY$ قطراً للدائرة $\omega_2$ . برهن أن النقط $X, Y, H$ تقع على استقامة واحدة .

**المسألة 5** : لتكن $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تماماً . وليكن $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ تابعاً يحقق الخواص لثلاثة التالية :

(i) من أجل جميع $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ يكون $f(x)f(y) \geq f(xy)$ .

(ii) من أجل جميع $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ يكون $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ .

(iii) يوجد عدد كسري $a > 1$ يحقق $f(a) = a$ .

برهن أن $f(x) = x$ من أجل جميع $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**المسألة 6** : ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ، لنتأمل دائرة عليها $n+1$ نقطة موزعة عليها بطريقة منتظمة ، نرقمها بالأعداد $0,1,\ldots,n$ بحيث يستعمل العدد مرة واحدة فقط . نعتبر الترقيمين متطابقين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الأخر بدوران مناسب للدائرة . يقال عن ترقيم إنه ترقيم جميل إذا كان من أجل أي أربع نقاط مرقمة بالأعداد $a < b < c < d$ التي تحقق $a + d = b + c$ يكون الوتر الواصل بين النقطتين المرقمتين بالعددين $a$ و $d$ غير متقاطع مع الوتر الواصل بين النقطتين المرقمتين بالعددين $b$ و $c$ .

ليكن $M$ عدد الترقيمات الجميلة غير المتطابقة ، وليكن $N$ عدد الأزواج المرتبة $(x, y)$ من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $x + y \leq n$ و $\gcd(x, y) = 1$ . أثبت أن

$$M = N + 1$$

المدة : 4 ساعات ونصف الساعة