

Wednesday, July 15, 2009  
יום רביעי 15 ביולי, 2009

**בעיה 1.** יהי  $n$  מספר חיובי שלם, ויהיו  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) מספרים שלמים שונים זה מזה מתוך הקבוצה  $\{1, \dots, n\}$ , כך ש- $n$  מחלק את  $a_i(a_{i+1}-1)$  עבור  $i = 1, \dots, k-1$ . הוכח כי  $n$  אינו מחלק את  $a_k(a_1-1)$ .

**בעיה 2.** יהי  $ABC$  משולש שמרכז המעגל החוסם אותו הוא  $O$ . הנקודות  $P$  ו- $Q$  הן נקודות פנימיות של הצלעות  $AB$  ו- $CA$ , בהתאמה. יהיו  $K, L$  ו- $M$  נקודות האמצע של הקטעים  $BP, CQ$  ו- $PQ$ , בהתאמה. יהיה  $\Gamma$  המעגל העובר דרך  $K, L$  ו- $M$ . נניח כי הישר  $PQ$  משיק למעגל  $\Gamma$ . הוכח כי  $OP = OQ$ .

**בעיה 3.** נניח כי  $s_1, s_2, s_3, \dots$  היא סדרה עולה ממש של מספרים שלמים חיוביים, כך ששתי התת-סדרות

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ו} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

הן סדרות חשבוניות. הוכח כי הסדרה  $s_1, s_2, s_3, \dots$  היא בעצמה סדרה חשבונית.

Thursday, July 16, 2009  
יום חמישי 16 ביולי, 2009

**בעיה 4.** יהי  $ABC$  משולש שבו  $AB = AC$ . חוצי הזווית של הזווית  $\angle CAB$  ו- $\angle ABC$  פוגשים את הצלעות  $BC$  ו- $CA$  ב- $D$  וב- $E$ , בהתאמה. יהי  $K$  מרכז המעגל החסום במשולש  $ADC$ . נניח כי  $\angle BEK = 45^\circ$ . מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $\angle CAB$ .

**בעיה 5.** מצא את כל הפונקציות  $f$  מקבוצת המספרים השלמים החיוביים לקבוצת המספרים השלמים החיוביים, כך שעבור כל שני מספרים שלמים חיוביים  $a$  ו- $b$  קיים משולש לא מנוון שצלעותיו הן באורכים

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1)$$

(משולש לא מנוון הוא משולש שקודקדיו אינם נמצאים על ישר אחד)

**בעיה 6.** יהיו  $a_1, a_2, \dots, a_n$  מספרים שלמים חיוביים שונים זה מזה, ותהי  $M$  קבוצה של  $n-1$  מספרים שלמים חיוביים שאינה מכילה את  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . תָּגֵב צריך לקפוץ לאורך הציר הממשי, החל מהנקודה 0, ולבצע  $n$  קפיצות ימינה בקפיצות באורכים  $a_1, a_2, \dots, a_n$  בסדר כלשהו. הוכח ניתן לבחור את סדר אורכי הקפיצות באופן שהחגב לא ינחת לעולם על נקודה מתוך  $M$ .

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות וחצי  
כל שאלה שווה 7 נקודות