Խնդիր 1: Դիցուք $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$-ը դրական ամբողջ թվերի անվերջ հաջորդականություն է: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի $n \geq 1$ միակ ամբողջ թիվ այնպես, որ

$$a_n < \frac{a_o + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1} :$$

Խնդիր 2: Դիցուք $n \geq 2$ –ը ամբողջ թիվ է: Տրված է $n \times n$ չափի շախմատային տախտակ, որը բաղկացած է n^2 հատ միավոր քառակուսիներից: Տրված շախմատային տախտակում n հատ նավակների դասավորությունը կանվանենք խաղաղ, եթե յուրաքանչյուր հորիզոնական և յուրաքանչյուր ուղղահայաց շարքում կա ուղիղ մեկ հատ նավակ : Գտեք մեծագույն դրական ամբողջ k թիվը այնպես, որ n հատ նավակների կամայական խաղաղ դասավորության դեպքում կգտնվի $k \times k$ չափի վանդակավոր քառակուսի, որի կամայական k^2 հատ վանդակներում նավակ չկա:

Խնդիր 3: Տրված է $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյունը, ընդ որում $\angle ABC = \angle CDA = 90^{\circ}$: H կետը A կետից BD ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքն է: AB և AD հատվածների վրա համապատասխանաբար վերցրել են S և T կետեր այնպես, որ H-ը գտնվում է SCT եռանկյան ներսում և

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^{\circ}, \angle THC - \angle DTC = 90^{\circ}:$$

Ապացուցեք, որ BD ուղիղը շոշափում է TSH եռանկյան արտագծած շրջանագիծը:

Աշխատաժամանակը. 4 Ժամ 30 րոպե:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավորով:

Խնդիր 4: ABC սուրանկյուն եռանկյան BC կողմի վրա վերցրել են P և Q կետեր այնպես, որ $\angle PAB = \angle BCA$ և $\angle CAQ = \angle ABC$: AP և AQ ճառագայթների վրա վերցրել են համապատասխանաբար M և N կետեր այնպես, որ P–ն AM հատվածի միջնակետն է, իսկ Q–ն AN հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ BM և CN ուղիղների հատման կետը պատկանում է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծին:

Խնդիր5: Քեյփթունի բանկը թողարկում է $1/n$ արժողությամբ մետաղադրամներ յուրաքանչյուր դրական ամբողջ n թվի համար: Տրված է այնպիսի մետաղադրամների վերջավոր հավաքածու,որոնց արժողությունների գումարը չի գերազանցում $99+\frac{1}{2}$ թիվը(հավաքածուի մետաղադրամների արժողությունները պարտադիր չէ լինեն տարբեր): Ապացուցեք, որ այդ հավաքածուն կարելի է բաժանել 100 կամ ավելի փոքր քանակությամբ խմբերի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում գտնվող մետաղադրամների արժողությունների գումարը չգերազանցի 1-ը:

Խնդիր 6: Կասենք, որ հարթության մեջ գտնվող ուղիղները ընդհանուր դրվածքի են, եթե նրանցից ոչ մի երկուսը զուգահեռ չեն և ոչ մի երեքը չեն անցնում մեկ կետով: Ընդհանուր դրվածքի կամայական մի քանի ուղիղներ հարթությունը բաժանում են մասերի: Սահմանափակ կանվանենք այն մասերը, որոնք ունեն վերջավոր մակերես: Բոլոր բավականաչափ մեծ n թվերի համար ապացուցեք հետևյալ պնդումը. ընդհանուր դրվածքի n ուղիղներից բաղկացած կամայական բազմությունում կարելի է կապույտ գույնով ներկել ամենաքիչը $\sqrt{n}$ ուղիղներ այնպես, որ կամայական սահմանափակ մասի սահմանները ամբողջությամբ ներկված չլինեն կապույտ գույնով:

Դիտողություն. Խնդրի այն ապացույցի համար, որում $\sqrt{n}$–ը փոխարինված է $c\sqrt{n}$–ով, կտրվեն միավորներ, կախված c–ի արժեքից:

Աշխատաժամանակը. 4 ժամ 30 րոպե:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավորով: