Петак, 10. јули 2015.

1. задатак. Коначан скуп $\mathcal{S}$ тачака у равни зовемо *уравнотеженим* ако за сваке двије различите тачке A и B скупа $\mathcal{S}$ постоји тачка C у скупу $\mathcal{S}$ таква да је $\overline{AC} = \overline{BC}$. Скуп $\mathcal{S}$ зовемо *бесцентричним* ако ни за које три различите тачке A, B и C скупа $\mathcal{S}$ не постоји тачка P у $\mathcal{S}$ таква да је $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

(а) Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ постоји уравнотежен скуп који се састоји од n тачака.

(б) Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоји уравнотежен бесцентричан скуп од n тачака.

2. задатак. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да је сваки од бројева

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

степен броја 2.

(*Степен броја* 2 *је број облика* 2^n, *гдје је* n *ненегативан цио број.*)

3. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека је Γ његова описана кружница, H ортоцентар, а F подножје висине из тјемена A. Тачка M је средиште дужи BC. Нека је Q тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HQA = 90^\circ$, а K тачка на кружници Γ таква да је $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Сматрамо да су тачке A, B, C, K и Q међусобно различите и да леже на кружници Γ тим редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова KQH и FKM додирују.

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова

Субота, 11. јули 2015.

4. задатак. Нека је Ω описана кружница троугла ABC и O њен центар. Кружница Γ са центром у тачки A сијече дуж BC у тачкама D и E тако да су тачке B, D, E и C међусобно различите и леже на правој BC тим редом. Нека су F и G тачке пресјека кружница Γ и Ω, при чему тачке A, F, B, C и G леже на кружници Ω тим редом. Нека је K друга тачка пресјека описане кружнице троугла BDF и дужи AB. Нека је L друга тачка пресјека описане кружнице троугла CGE и дужи CA.

Претпоставимо да су праве FK и GL различите и да се сијеку у тачки X. Доказати да тачка X лежи на правој AO.

5. задатак. Са $\mathbb{R}$ је означен скуп свих реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

за све реалне бројеве x и y.

6. задатак. Низ цијелих бројева $a_1, a_2, \ldots$ задовољава сљедеће услове:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ за све $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за све $1 \leqslant k < \ell$.

Доказати да постоје природни бројеви b и Nтакви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

за све цијеле бројеве m и n за које је $n > m \geqslant N$.

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова