

Martedì 23 Luglio 2013

**Problema 1.** Dimostrare che, per ogni coppia di interi positivi  $k$  ed  $n$ , esistono  $k$  interi positivi  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (non necessariamente distinti) tali che

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**Problema 2.** Una configurazione di 4027 punti nel piano si dice *colombiana* se è costituita da 2013 punti rossi e 2014 punti blu, ed i punti della configurazione sono a 3 a 3 non allineati. Il piano viene suddiviso in varie regioni tracciando delle rette. Un insieme di rette si dice *buono* per una configurazione colombiana se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

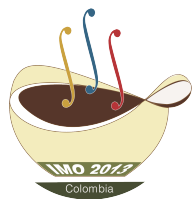
- nessuna delle rette passa per punti della configurazione;
- nessuna regione contiene punti di entrambi i colori.

Determinare il minimo valore di  $k$  tale che, per ogni configurazione colombiana di punti, esiste un insieme buono di  $k$  rette.

**Problema 3.** Sia  $ABC$  un triangolo. L'excerchio del triangolo  $ABC$  opposto al vertice  $A$  è tangente al lato  $BC$  nel punto  $A_1$ . Definiamo il punto  $B_1$  su  $CA$  ed il punto  $C_1$  su  $AB$  in maniera analoga, usando gli excerchi opposti a  $B$  e  $C$ , rispettivamente. Supponiamo che il circocentro del triangolo  $A_1B_1C_1$  appartenga alla circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ .

Dimostrare che il triangolo  $ABC$  è rettangolo.

(L'excerchio del triangolo  $ABC$  opposto al vertice  $A$  è la circonferenza tangente al segmento  $BC$ , alla semiretta  $AB$  dalla parte di  $B$ , e alla semiretta  $AC$  dalla parte di  $C$ . Gli excerchi opposti a  $B$  e  $C$  sono definiti in maniera analoga.)



Mercoledì 24 Luglio 2013

**Problema 4.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo con ortocentro  $H$ , e sia  $W$  un punto del segmento  $BC$ , strettamente compreso tra  $B$  e  $C$ . I punti  $M$  ed  $N$  sono i piedi delle altezze condotte da  $B$  e  $C$ , rispettivamente. Indichiamo con  $\omega_1$  la circonferenza circoscritta a  $BWN$ , e con  $X$  il punto di  $\omega_1$  tale che  $WX$  è un diametro di  $\omega_1$ . Analogamente, indichiamo con  $\omega_2$  la circonferenza circoscritta a  $CWM$ , e con  $Y$  il punto di  $\omega_2$  tale che  $WY$  è un diametro di  $\omega_2$ .

Dimostrare che i punti  $X$ ,  $Y$  e  $H$  sono allineati.

**Problema 5.** Sia  $\mathbb{Q}_{>0}$  l'insieme dei numeri razionali positivi. Sia  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che soddisfa le seguenti tre condizioni:

- (i) per ogni  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  si ha che  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) per ogni  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  si ha che  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) esiste un numero razionale  $a > 1$  tale che  $f(a) = a$ .

Dimostrare che  $f(x) = x$  per ogni  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Problema 6.** Sia  $n \geq 3$  un numero intero, e consideriamo una circonferenza sulla quale sono stati segnati  $n + 1$  punti equispaziati. Consideriamo tutte le *etichettature* di questi punti mediante i numeri  $0, 1, \dots, n$  in cui ogni etichetta è usata esattamente una volta; due di queste etichettature sono considerate la stessa se una può essere ottenuta dall'altra mediante una rotazione della circonferenza. Una etichettatura si dice *magnifica* se, comunque si scelgano 4 etichette  $a < b < c < d$  con  $a + d = b + c$ , la corda congiungente i punti etichettati  $a$  e  $d$  non interseca la corda congiungente i punti etichettati  $b$  e  $c$ .

Sia  $M$  il numero delle etichettature magnifiche, e sia  $N$  il numero delle coppie ordinate  $(x, y)$  di interi positivi tali che  $x + y \leq n$  e  $\text{MCD}(x, y) = 1$ . Dimostrare che

$$M = N + 1.$$