제 48 차 국제수학올림픽

2007년 7월 25일 (제 1 일)

Hanoi, VIETNAM　　　　　　DPRK Ver.

---

1. 실수렬 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 이 주어졌다. 매 i $(1 \le i \le n)$에 대하여,

$$d_i := \max\{\, a_j : 1 \le j \le i \,\} - \min\{\, a_j : i \le j \le n \,\}$$

으로 정의하고, $d := \max\{\, d_i : 1 \le i \le n \,\}$ 로 놓자.

(a) 임의의 실수렬 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 에 대하여

$$\max\{\, |x_i - a_i| : 1 \le i \le n \,\} \ge \frac{d}{2} \qquad (*)$$

임을 증명하여라.

(b) 식 $(*)$이 등식으로 되는 실수렬 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 의 실례를 드시오.

2. 다섯 개의 점 A, B, C, D, E 를 생각하자. 4각형 $ABCD$ 는 평행4변형이고, 볼록4각형 $BCED$ 는 원에 내접한다고 하자. 점 A를 지나는 직선 ℓ이 선분 DC 의 내부와 점 F 에서 사귀고, 직선 BC 와 점 G 에서 사귄다고 하자. $EF = EG = EC$ 일 때 직선 ℓ 이 $\angle DAB$ 의 2등분선임을 증명하여라.

3. 한 수학 경연에서, 어떤 참가자들은 서로 친구사이이다. 여기서 친구사이란 항상 호상 대칭적인 관계이다. 참가자들의 어떤 부분모임에 대하여 그 모임에 속하는 임의의 두 명이 서로 친구사이이면 그 모임을 '완전모임'이라 부르자. (특히, 1명 혹은 빈모임도 완전모임으로 간주한다.) 완전모임의 '크기'를 그 모임에 속하는 참가자들의 수로서 정의하자.

전체 참가자들의 모임에서 가장 큰 완전모임의 크기가 짝수라는 것이 알려졌다. 이때, 전체 참가자들을 두 개의 방에 나누어 배치하되, 한 방의 가장 큰 완전모임의 크기가 다른 방의 가장 큰 완전모임의 크기와 같도록 배치할 수 있다는 것을 증명하여라.

$*$ 제한시간: 4시간 30분 $*$
$*$ 문제당 7점 $*$

제 48 차 국제수학올림픽

2007년 7월 26일 (제 2 일)

Ha Noi, VIETNAM　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　DPRK Ver.

---

4. $\triangle ABC$ 에서, $\angle BCA$ 의 2등분선이, $\triangle ABC$ 의 외접원과 사귀는 또 다른 점을 R, 변 BC 의 수직2등분선과 사귀는 점을 P, 변 AC 의 수직2등분선과 사귀는 점을 Q 라고 하자. 변 BC 의 가운데점을 K, 변 AC 의 가운데점을 L 이라고 할 때, $\triangle RPK$ 와 $\triangle RQL$ 의 면적이 같다는 것을 증명하여라.

5. 정의 옹근수 a, b 에 대하여, $(4a^2-1)^2$ 이 $4ab-1$ 로 나누어지면, $a=b$ 임을 증명하여라.

6. n 이 정의 옹근수일 때 3차원 공간의 $(n+1)^3-1$ 개의 점들의 모임

$$S = \{\,(x,y,z) \,:\, x,y,z \in \{0,1,\ldots,n\}, x+y+z>0\,\}$$

을 생각하자. 매개가 원점 $(0,0,0)$ 을 포함하지 않는 몇개의 평면들로서 그 합모임이 모임 S 를 포함하도록 하려고 한다. 이것이 가능한 평면들의 최소 개수를 구하여라.

$*$ 제한시간: 4시간 30분 $*$

$*$ 문제당 7점 $*$