53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Macedonian**

Day: **1**

Вторник, 10.07.2012

Задача 1. За триаголникот ABC, точката J е центар на надворешната допирна кружница спроти темето A. Оваа надворешна допирна кружница ја допира страната BC во точката M, а продолженијата на страните AB и AC ги допира во точките K и L, соодветно. Правите LM и BJ се сечат во точката F, а правите KM и CJ се сечат во точката G. Нека S е пресечната точка на правите AF и BC, а T е пресечната точка на правите AG и BC.

Докажи дека M е средина на отсечката ST.

(*Надворешна допирна кружница* за триаголник ABC спроти темето A се нарекува кружницата која што ги допира страната BC, продолжението на страната AB преку темето B и продолжението на страната AC преку темето C.)

Задача 2. Нека $n \geqslant 3$ е природен број и нека $a_2, a_3, \ldots, a_n$ се позитивни реални броеви за кои важи $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Докажи дека важи

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n \; > \; n^n.$$

Задача 3. *Игра на погодување* е игра која ја играат двајца играчи, A и B. Правилата на играта зависат од два природни броја k и n, и тие броеви им се познати на секој од играчите.

На почетокот на играта играчот A избира природни броеви x и N такви да $1 \leqslant x \leqslant N$. Играчот A го држи во тајност бројот x, а точната вредност на бројот N чесно му ја соопштува на играчот B. Играчот B се обидува да добие информација за бројот x поставувајќи му на играчот A прашања од следниот облик: во секое прашање, играчот B избира произволно подмножество S од множеството на природни броеви (може да избере исто подмножество S кое што веќе го користел во некое претходно прашање) и го прашува играчот A дали бројот x припаѓа на множеството S. Играчот B може да постави онолку прашања колку што сака. После секое прашање, играчот A мора веднаш да одговори со *да* или *не*, но притоа, му е дозволено да лаже онолку пати колку што сака; единственото ограничување што го има е дека, од било кои $k+1$ последователни одговори барем еден одговор мора да е вистинит.

Откако B поставил онолку прашања колку што сметал дека е потребно, тој мора да избере множество X кое содржи најмногу n природни броеви. Ако бројот x припаѓа на множеството X тогаш играчот B победува; во спротивно, тој губи. Докажи дека:

1. Ако $n \geqslant 2^k$ тогаш играчот B може да си гарантира победа.
2. За секој доволно голем k, постои природен број $n \geqslant 1{,}99^k$ таков да играчот B не може да си гарантира победа.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 поени

Среда, 11.07.2012

Задача 4. Најди ги сите функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такви да, за сите цели броеви a, b, c кои задоволуваат $a+b+c=0$, важи еднаквоста:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Множеството $\mathbb{Z}$ е множество на целите броеви.)

Задача 5. Нека ABC е триаголник во кој $\sphericalangle BCA = 90°$ и нека D е подножјето на висината спуштена од темето C. Нека X е точка која што припаѓа на внатрешноста на отсечката CD. Нека K е точка која што лежи на отсечката AX таква да $BK = BC$. Слично, нека L е точка која што лежи на отсечката BX таква да $AL = AC$. Нека M е пресечната точка на правите AL и BK.

Докажи дека $MK = ML$.

Задача 6. Најди ги сите природни броеви n за кои постојат ненегативни цели броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ така да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 поени