*Onsdagen, den 15 juli 2009*

**Problem 1.** Låt $n$ vara ett positivt heltal och låt $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ vara olika heltal från mängden $\{1, \ldots, n\}$, sådana att $n$ är en delare till $a_i(a_{i+1} - 1)$ för $i = 1, \ldots, k-1$.

Visa att $n$ inte är en delare till $a_k(a_1 - 1)$.

**Problem 2.** Låt $O$ vara centrum för den på triangeln $ABC$ omskrivna cirkeln. Punkterna $P$ och $Q$ ligger inne på sidorna $CA$ och $AB$, respektive. Låt $K$, $L$ och $M$ vara mittpunkter på segmenterna $BP$, $CQ$ och $PQ$, respektive, samt låt $\Gamma$ vara cirkeln som passerar genom $K$, $L$ och $M$. Anta att linjen $PQ$ tangerar cirkeln $\Gamma$.

Visa att $|OP| = |OQ|$.

**Problem 3.** Anta att $s_1, s_2, s_3, \ldots$ är en strikt växande följd av positiva heltal. Anta vidare att delföljderna

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{och} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

utgör två aritmetiska talföljder.

Visa att följden $s_1, s_2, s_3, \ldots$ också är en aritmetisk talföljd.



*Tid: 4 timmar och 30 minuter*
*För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng*

*Torsdagen, den 16 juli 2009*

**Problem 4.** Låt $ABC$ vara en triangel med $|AB| = |AC|$. Bisektrisserna till $\angle CAB$ och $\angle ABC$ skär sidorna $BC$ och $CA$ i punkterna $D$ och $E$, respektive. Låt $K$ vara centrum för den i triangeln $ADC$ inskrivna cirkeln. Anta att $\angle BEK = 45°$.

Bestäm alla möjliga värden på $\angle CAB$.

**Problem 5.** Bestäm alla funktioner $f$ från mängden av de positiva heltalen till mängden av de positiva heltalen och som är sådana att, för alla positiva heltalen $a$ och $b$, det finns en icke-degenerad triangel med sidorna vars längder är

$$a,\ f(b)\ \text{ och }\ f(b + f(a) - 1).$$

(En triangel är *icke-degenerad* om dess hörn inte är kolinjära.)

**Problem 6.** Låt $n$ vara ett positivt heltal och låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara $n$ olika positiva heltal. Låt vidare $M$ vara en mängd av $n-1$ positiva heltal som inte innehåller talet $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En gräshoppa hoppar längs den reella tallinjen. Den startar i origo och gör $n$ hopp till höger. Längderna av gräshoppans hopp är $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i någon ordning.

Visa att ordningen kan väljas så att gräshoppan aldrig landar på någon punkt från $M$.



*Tid: 4 timmar och 30 minuter*
*För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng*