E hënë, 11 Korrik, 2016

Problemi 1. Trekëndëshi BCF ka një kënd të drejtë me kulm në B. Pika A ndodhet në drejtëzën CF në mënyrë të tillë që $FA = FB$ dhe pika F ndodhet ndërmjet pikave A dhe C. Pika D zgjidhet e tillë që $DA = DC$ dhe AC është përgjysmore e $\angle DAB$. Pika E zgjidhet e tillë që $EA = ED$ dhe AD është përgjysmore e $\angle EAC$. Le të jetë M mesi i CF. Pika X është e tillë që katërkëndëshi $AMXE$ është paralelogram (ku $AM \parallel EX$ dhe $AE \parallel MX$). Vërtetoni që drejtëzat BD, FX, dhe ME priten në të njëjtën pikë.

Problemi 2. Gjeni të gjithë numrat e plotë pozitivë n për të cilët çdo qelizë e një tabele katrore me përmasa $n \times n$ mund të plotësohet me një nga gërmat I, M dhe O në mënyrë të tillë që:

- në çdo rresht dhe në çdo shtyllë, një e treta e gërmave të vendosura në to të jenë I, një e treta të jenë M and një e treta të jenë O; dhe
- në çdo diagonale, në qoftë se numri i gërmave të vendosura në diagonale është shumëfish i numrit tre, atëherë një e treta e gërmave të vendosura në to janë I, një e treta janë M dhe një e treta janë O.

Shënim: Rreshtat dhe shtyllat e një tabele me përmasa $n \times n$ numërtohen duke filluar nga 1 tek n në rendin rritës. Në këtë mënyrë çdo qelizë i koorespodon një çifti numrash të plotë pozitivë (i, j) ku $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Për $n > 1$, tabela ka $4n - 2$ *diagonale* të të dy tipeve. Një diagonale e tipit të parë përbëhet nga të gjitha qelizat (i, j) për të cilat $i + j$ është kostante, një diagonale e tipit të dytë përbëhet nga të gjitha qelizat (i, j) për të cilat $i - j$ është kostante.

Problemi 3. Në plan jepet shumëkëndëshi i mysët $P = A_1A_2 \dots A_k$. Kulmet e tij A_1, A_2, ..., A_k ndodhen në të njëjtin rreth dhe secili prej tyre ka koordinata numra të plotë. Shënohet me S syprina e P. Jepet numri i plotë pozitiv n i tillë që katrorët e gjatësive të brinjëve të P janë numra të plotë që plotëpjestohen nga numri n. Vërtetoni se $2S$ është numër i plotë që plotpjestohet nga numri n.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem ka vlerën e 7 pikëve

E martë, 12 Korrik, 2016

Problemi 4. Një bashkësi numrash të plotë pozitivë quhet *aromatike* në qoftë se ajo përmban të paktën dy elementë dhe secili prej elementëve të saj ka një faktor të thjeshtë të përbashkët me të paktën një nga elementët e tjerë të saj. Jepet $P(n) = n^2 + n + 1$. Cila është vlera më e vogël e mundshme e numrit të plotë pozitiv b të tillë që gjendet një numër i plotë jo-negativ a për të cilin bashkësia

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

është aromatike?

Problemi 5. Në dërrasën e zezë, shkruhet ekuacioni

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

i cili ka 2016 faktorë linearë në secilën nga të dyja anët e tij. Cila është vlera më e vogël e mundshme e k për të cilën është e mundur të fshihen ekzaktësisht k prej këtyre 4032 faktorëve linearë në mënyrë të tillë që të ngelet të paktën një faktor në secilën nga dy anët e tij dhe ekuacioni që rezulton nuk ka rrënjë reale?

Problemi 6. Në plan gjenden $n \geqslant 2$ segmente drejtëzash në mënyrë të tillë që çdo dy nga këto segmente priten në pika të brendshme të tyre dhe asnjë treshe prej segmenteve të dhëna nuk priten në të njëjtën pikë. Geoff duhet të zgjedhë njërin nga dy skajet e secilit segment dhe të vendosë në të një bretkosë, me fytyrë të drejtuar nga skaji tjetër i segmentit. Në vijim ai përplas duart $n-1$ herë. Çdo herë që përplas duart, secila nga bretkosat do të kërcejë menjëherë në të njëjtin drejtim duke u pozicionuar në pikën e prerjes që vijon në segmentin përkatës. Bretkosat nuk ndryshojnë kurrë drejtimin e lëvizjes. Geoff dëshiron të vendosë bretkosat në mënyrë të tillë që asnjë çift bretkosash të mos pozicionohet njëherësh në të njëjtën pikë prerjeje.

(a) Tregoni se është gjithmonë e mundur që Geoff të plotësojë dëshirën e tij në qoftë se n është numër i plotë tek.

(b) Tregoni se kurrë nuk është e mundur që Geoff të plotësojë dëshirën e tij në qoftë se n është numër i plotë çift.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem ka vlerën e 7 pikëve.