Language: **Korean (North Korea)**

Day: **1**

53rd International Mathematical Olympiad

MAR DEL PLATA - ARGENTINA

제 1 일 2012 년 7 월 10 일 화요일 9.00-13.30

문제 1. 삼각형 ABC 에서 점 J 는 정점 A 에 관한 방접원의 중심이고 이 방접원은 변 BC 와 점 M 에서 접하고 두 직선 AB, AC 와 각각 점 K, L 에서 접한다. 직선 LM 와 BJ 는 F 에서 사귀고 직선 KM 와 CJ 는 G 에서 사귄다.

점 S 는 직선 AF 와 BC 의 사귐점이고 점 T 는 직선 AG 와 BC 의 사귐점이다.

이때 점 M 이 선분 ST 의 가운데점이라는것을 증명하여라.

문제 2. $n \geq 3$ 이 옹근수이고 $a_2, a_3, ..., a_n$ 은 정의 실수들로서 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ 을 만족한다. 이때 다음의 부등식을 증명하여라

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n .$$

문제 3. 두 사람 A 와 B 가 경기를 한다. 경기규칙은 두 사람이 모두 알고있는 두개의 정의 옹근수 k 와 n 에 의해 결정된다. 경기가 시작될때 A 는 $1 \leq x \leq N$ 인 옹근수 x 와 N 를 선택한다. A 는 B 에게 x 는 감추고 N 은 무엇인지 정직하게 알려준다. B 는 A 에게 다음과 같은 방법으로 질문하면서 x 에 대한 정보를 얻으려고 한다. 매 질문은 B 가 정의 옹근수로 이루어진 모임 S (이전에 택한 모임과 같을수도 있다.)를 임의로 택하고 A 에게 x 가 S 에 속하는가를 물어보는것이다.

B 는 이러한 질문을 자기가 하고싶은대로 많이 할수 있다. A 는 B 의 매 질문에 즉시 '예' 혹은 '아니'로 대답해야 하지만 자기가 바라는대로 얼마든지 거짓으로 대답할수 있다.

그러나 A 는 대답하던중 $k+1$번을 련속해서 거짓으로 대답할수는 없다.

B 는 하고싶은것만큼 충분히 여러번 질문한후 n 개 이하의 정의 옹근수로 이루어진 모임 X 를 지적해야 한다. 이때 x 가 X 에 속하면 B 가 이기고 그렇지 않으면 B 가 진다. 이때 다음의 사실들을 증명하여라.

1. $n \geq 2^k$ 이라면 B 의 필승전략이 존재한다.
2. 충분히 큰 모든 k 에 대하여 B 의 필승전략이 존재하지 않는 어떤 옹근수 $n \geq 1.99^k$ 이 존재한다.

Language : Korean

제한시간 : 4 시간 30 분

문제당 7 점

제 2 일 2012 년 7 월 11 일 수요일 9.00-13.30

문제 4. 다음의 조건을 만족하는 함수 $f: Z \to Z$ 를 모두 구하여라.

조건: $a+b+c=0$ 을 만족하는 모든 옹근수 a, b, c 에 대하여

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

여기서 Z 는 옹근수전체의 모임이다.

문제 5. 삼각형 ABC 에서 $\angle BCA = 90^0$ 이고 점 D 는 C 에서 변 AB 에 그은 수직선의 밑점이며 X 는 선분 CD 의 내부점이다.

K 를 선분 AX 우에서 $BK = BC$ 인 점, L 을 선분 BX 우에서 $AL = AC$ 인 점이라고 하고 M 을 직선 AL 과 BK 의 사귐점이라고 하자.

이때 $MK = ML$ 이라는것을 증명하여라.

문제 6. 다음의 조건을 만족하는 정의 옹근수 n 을 모두 구하여라.

조건: 부아닌 옹근수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 이 존재하여 등식

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$$

이 선다.

Language : Korean

제한시간 : 4 시간 30 분

문제당 7 점