

*Þriðjudagur, 16. júlí 2024*

**Dæmi 1.** Ákvarðið allar rauntölur  $\alpha$  þannig að fyrir sérhverja jákvæða heiltölu  $n$  sé heiltalan

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

margfeldi af  $n$ . (Athugið að  $\lfloor z \rfloor$  táknar stærstu heiltöluna sem er minni eða jöfn  $z$ . Til dæmis er  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  og  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$ .)

**Dæmi 2.** Finnið allar tvenndir  $(a, b)$  af jákvæðum heiltölum þannig að til séu jákvæðar heiltölur  $g$  og  $N$  þannig að

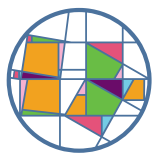
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

fyrir öll  $n \geq N$ . (Athugið að  $\gcd(x, y)$  táknar stærsta samdeili  $x$  og  $y$ .)

**Dæmi 3.** Látum  $a_1, a_2, a_3, \dots$  vera óendanlega runu af jákvæðum heiltölum og látum  $N$  vera jákvæða heiltölu. Við gerum ráð fyrir að fyrir sérhvert  $n > N$ , þá sé  $a_n$  jöfn fjölda skipta sem talan  $a_{n-1}$  kemur fyrir meðal talnanna  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .

Sýnið að allavega önnur af rununum  $a_1, a_3, a_5, \dots$  og  $a_2, a_4, a_6, \dots$  sé að endingu lotubundin.

(Óendanleg runa  $b_1, b_2, b_3, \dots$  er að endingu lotubundin ef til eru jákvæðar heiltölur  $p$  og  $M$  þannig að  $b_{m+p} = b_m$  fyrir öll  $m \geq M$ .)



miðvikudagur, 17. júlí 2024

**Dæmi 4.** Látum  $ABC$  vera þríhyrning þannig að  $AB < AC < BC$ . Látum  $\omega$  vera innritaðan hring  $ABC$  og  $I$  vera miðju þessa hrings. Látum  $X$  vera punktinn á línu  $BC$ , annan en  $C$ , þannig að línan um  $X$  sem er samsíða línu  $AC$  sé snertill við  $\omega$ . Með sama hætti látum við  $Y$  vera punktinn á línu  $BC$ , annan en  $B$ , þannig að línan um  $Y$  samsíða línu  $AB$  sé snertill við  $\omega$ . Lína  $AI$  sker umhring  $ABC$  öðru sinni í  $P \neq A$ . Látum  $K$  og  $L$  vera miðpunkta strikanna  $AC$  og  $AB$ , í sömu röð.

Sannið að  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**Dæmi 5.** Snigillinn Þytur spilar á leikborði sem hefur 2024 línur og 2023 dálka. Forynjur hafa falið sig á 2022 reitanna. Í upphafi er Þytur glórulaus um felustaði forynjanna en hann veit að það er nákvæmlega ein forynja í hverri röð, fyrir utan þá fyrstu og síðustu, auk þess að í mesta lagi ein þeirra er í hverjum dálki.

Þytur gerir runu atrenna til að komast frá fyrstu línunni til þeirrar síðustu. Í hverri atrennu kemur hann sér fyrir á reit að eigin vali í fyrstu línu og eftir það færir hann sig skref fyrir skref í aðlægan reit með sameiginlega hlið. (Hann má súa aftur á reiti sem hann hefur komið við á áður.) Ef hann lendir á reit með forynju lýkur þeirri atrennu hans og hann er færður til baka í fyrstu röð til þessa hefja næstu atrennu. Forynjurnar færa sig ekki og Þytur man hvort forynja var í sérhverjum reit sem hann hefur komið við á áður. Ef hann kemst á einhvern reit í síðustu röðinni þá endar sú atrenna hans og leiknum lýkur.

Ákvarðið minnsta gildið á  $n$  þannig að Þytur hafi leikátælan sem tryggir að hann komist í síðustu röðina í síðasta lagi í  $n$ -tu atrennu, sama hvernig forynjurnar hafa komið sér fyrir.

**Dæmi 6.** Látum  $\mathbb{Q}$  vera mengi ræðu talnanna. Fall  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  kallast *akvaesúlískt* ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt: Fyrir sérhver  $x, y \in \mathbb{Q}$  þá er

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{eða} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Sýnið að til sé jákvæð heiltala  $c$  þannig að fyrir hvaða akvaesúlíska fall  $f$  sem er megi finna  $c$  ólíkar ræðar tölur á forminu  $f(r) + f(-r)$  fyrir einhverja ræða tölu  $r$  og ákvarðið minnsta gildið sem  $c$  getur verið.