2010 년 7 월 7 일, 수요일

문제 1. 다음 등식을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라: 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor .$$

단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이고, 실수 z에 대하여 $\lfloor z \rfloor$는 z보다 크지 않은 정수 중 가장 큰 정수이다.

문제 2. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 외접원을 Γ라 하자. 직선 AI가 Γ와 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하자. 원호 $\widehat{BDC}$ 위의 점 E와 변 BC 위의 점 F가 조건

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC$$

를 만족한다고 하자. 선분 IF의 중점을 G라 할 때, 직선 DG, EI와 원 Γ가 한 점에서 만남을 보여라.

문제 3. 다음 조건을 만족하는 함수 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 모두 구하여라: 모든 $m, n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

이 완전제곱수이다. 단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이다.

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점

2010년 7월 8일, 목요일

문제 4. 점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 놓여 있다. 세 직선 AP, BP, CP 가 삼각형 ABC 의 외접원 Γ 와 만나는 점을 각각 $K(\neq A), L(\neq B), M(\neq C)$ 이라 하자. 점 C 에서 Γ 에 접하는 접선과 직선 AB 가 점 S 에서 만난다고 하고, $SC = SP$ 라 가정하자. 이때, $MK = ML$ 임을 보여라.

문제 5. 여섯 개의 동전함 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 각각에 동전이 하나씩 들어 있다. 이 상태에서 시작하여 다음 두 가지 형태의 시행이 가능하다고 하자.

시행 1: 동전이 들어 있는 동전함 B_j 를 하나 택하여(단, $1 \leq j \leq 5$), B_j 에서 동전을 하나 빼고 B_{j+1} 에 두 개의 동전을 넣는다.

시행 2: 동전이 들어 있는 동전함 B_k 를 하나 택하여(단, $1 \leq k \leq 4$), B_k 에서 동전을 하나 빼고 두 동전함 B_{k+1} 과 B_{k+2} 에 들어 있는 동전들을 모두(동전이 없는 경우에도) 서로 바꾸어 넣는다.

이러한 시행을 유한 번 시행하여 동전함 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 는 다 비우고, B_6 에는 정확히 $2010^{2010^{2010}}$ 개의 동전이 포함되도록 할 수 있는가?
(단, $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ 이다.)

문제 6. 양의 실수들로 이루어진 무한수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 을 생각하자. 어떤 양의 정수 s 가 존재하여, 모든 $n > s$ 에 대하여

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

를 만족한다고 하자. 이때, 다음을 만족하는 양의 정수 ℓ 과 N 이 존재함을 보여라: $\ell \leq s$ 이고, 모든 $n \geq N$ 에 대하여 $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ 이다.

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점