Ponedjeljak, 11. jul, 2016

Zadatak 1. U trouglu BCF ugao u tjemenu B je prav. Neka je A tačka na pravoj CF takva da je $FA = FB$ i tačka F leži između A i C. Biramo tačku D tako da je $DA = DC$ i AC je simetrala ugla $\angle DAB$. Tačku E biramo tako da je $EA = ED$ i AD je simetrala ugla $\angle EAC$. Neka je M središte duži CF. Biramo tačku X tako da je $AMXE$ paralelogram (gdje je $AM \parallel EX$ i $AE \parallel MX$). Pokazati da se prave BD, FX, i ME sijeku u jednoj tački.

Zadatak 2. Tabela dimenzija $n \times n$ se popunjava slovima I, M i O. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće popuniti tabelu tako da važe sljedeći uslovi:

- u svakoj vrsti i svakoj koloni, po jedna trećina slova su I, M i O;
- u svakoj dijagonali, u kojoj je broj elemenata djeljiv sa tri, po jedna trećina slova su I, M i O.

Note: Vrste i kolone tabele $n \times n$ su numerisane brojevima od 1 do n. Tako svakom polju u tabeli odgovara par (i, j) gdje je $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ako je $n > 1$, tabela ima $4n - 2$ *dijagonale* dva tipa. Dijagonale prvog tipa se sastoje od polja (i, j) za koje je $i + j$ konstantno, dok se dijagonale drugog tip sastoje od polja (i, j) za koje je $i - j$ konstantno.

Zadatak 3. Neka je $P = A_1A_2 \ldots A_k$ konveksan mnogougao u ravni. Tjemena A_1, A_2, $\ldots$, A_k imaju cjelobrojne koordinate i leže na jednoj kružnici. Neka je S površina mnogougla P. Neka je n neparan prirodan broj takav da su kvadrati dužina svih stranica mnogougla P cijeli brojevi djeljivi sa n. Dokazati da je $2S$ cijeli broj djeljiv sa n.

Vrijeme: 4 časa i 30 minuta
Svaki zadatak nosi 7 bodova

Utorak, 12. jul, 2016

Zadatak 4. Skup prirodnih brojeva nazivamo *mirišljavim* ako sadrži barem dva elementa i svaki njegov element ima zajednički prost djelilac sa makar još jednim elementom. Označimo $P(n) = n^2 + n + 1$. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja b za koju postoji prirodan broj a takav da je skup

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

mirišljav?

Zadatak 5. Na tabli je napisana jednačina

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

sa po 2016 linearnih množilaca na svakoj strani. Koja je najmanja vrijednost k za koju je moguće obrisati tačno k od ovih 4032 linearnih množilaca, tako da na svakoj strani ostane bar jedan množilac i da pritom dobijena jednačina nema realnih rješenja?

Zadatak 6. U ravni je dato $n \geqslant 2$ duži tako da se svake dvije duži sijeku u unutrašnjoj tački i nikoje tri duži se ne sijeku u istoj tački. Džef bira po jedan kraj na svakoj duži i na njega postavi žabu okrenutu ka drugom kraju duži. Nakon toga pljesne rukama $n-1$ puta. Svaki put kada on pljesne, svaka žaba odmah skoči u sljedeću presječnu tačku na svojoj duži. Pri tome žabe nikad ne mijenjaju smjer u kome skaču. Džef bi želio da postavi žabe tako da se ni u jednom trenutku dvije žabe nikad ne nađu u istoj presječnoj tački.

(a) Dokazati da Džef uvijek može postaviti žabe tako da postigne svoj cilj ako je n neparno.

(b) Dokazati da Džef ne može postaviti žabe tako da postigne svoj cilj ako je n parno.

Vrijeme: 4 časa i 30 minuta
Svaki zadatak nosi 7 bodova