الإثنين, 19. جويه 2021

مسألة 1. ليكن $n \geqslant 100$ عددا صحيحا، كتب محمد الأعداد $n, n+1, \ldots, 2n$ كلّ واحد على بطاقة مختلفة، وبعدها خلط هذه الـ $n+1$ بطاقة، ثم قسمها إلى كومتين. أثبت أنّ إحدى الكومتين على الأقل تحتوي على بطاقتين مجموع العددين المكتوبين عليهما مربّع تامّ.

مسألة 2. أثبت أنّ المتباينة

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

محققة من أجل كلّ الأعداد الحقيقيّة $x_1, \ldots, x_n$.

مسألة 3. ليكن ABC مثلثا حادّ الزّوايا حيث $AB > AC$، ولتكن D نقطة داخله تحقق $\angle DAB = \angle CAD$. النّقطة E من القطعة AC تحقّق $\angle ADE = \angle BCD$ ،والنّقطة F من القطعة AB تحقّق $\angle FDA = \angle DBC$ ، والنّقطة X من المستقيم AC تحقّق $CX = BX$. لتكن O_1 و O_2 مركزا الدّائرتين المحيطتين بالمثلّثين ADC و EXD ، على التّرتيب. أثبت أنّ المستقيمات BC، EF، و O_1O_2 تتلاقى في نقطة واحدة.

الزمن: 4 ساعات و30 دقيقة
سبع درجات لكل مسألة

الثلاثاء, 20. جويه 2021

مسألة 4. لتكن Γ دائرة مركزها I, و $ABCD$ رباعيا دائريا محدبا حيث كل ضلع من أضلاعه AB، BC، CD و DA يمس الدائرة Γ. لتكن Ω الدائرة المحيطة بالمثلث AIC. امتداد الضلع BA من جهة A يقطع Ω في X ، ويقطع امتداد الضلع BC من جهة C الدائرة Ω في Z.

نصفا المستقيمين $[AD)$ و $[CD)$ يقطعان Ω في Y و T على الترتيب. أثبت أن

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

مسألة 5. جمع السنجابان دحرور وفرفور 2021 بندقة تحضيراً للشتاء. رقّم فرفور البندقات من 1 إلى 2021، وحفر 2021 حفرة صغيرة في الأرض على مسار دائري حول شجرتهما المفضلة. لاحظ فرفور في صباح اليوم التالي أنّ دحرور قد وضع بندقة في كل حفرة، دون الانتباه إلى أرقامها. فقرر فرفور منزعجا إعادة ترتيب البندقات بإجراء 2021 تبديلة، في التبديلة رقم k، يُبادل بين البندقتين المجاورتين للبندقة رقم k. أثبت وجود قيمة لـ k، بحيث أنّه في النقلة رقم k يُبادل فرفور بين بندقتين a وb تحققان $a < k < b$.

مسألة 6. ليكن $m \geqslant 2$ عددا صحيحا، A مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة (ليست بالضرورة موجبة)، و $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ مجموعات جزئية لـ A. نفرض أنه لكل $k = 1, 2, \ldots, m$ مجموع عناصر B_k هو m^k. أثبت أن A تحوي على الأقل $m/2$ عنصرا.

Language: Arabic (Algerian)

الزمن: 4 ساعات و30 دقيقة
سبع درجات لكلّ مسألة