E hënë, 9 Korrik, 2018

Problemi 1. Le të jetë Γ rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit këndngushtë ABC. Pikat D dhe E ndodhen në segmentet AB dhe AC, respektivisht, në mënyrë të tillë që $AD = AE$. Përmesoret e segmenteve BD dhe CE presin harqet më të vogla AB dhe AC të rrethit Γ në pikat F dhe G, respektivisht. Vërtetoni se drejtëzat DE dhe FG janë paralele ose përputhen.

Problemi 2. Gjeni të gjithë numrat e plotë $n \geq 3$ për të cilët ekzistojnë numrat realë $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, të tillë që $a_{n+1} = a_1$ dhe $a_{n+2} = a_2$, dhe

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problemi 3. Një *trekëndësh anti-Pascal* është një tabelë numrash, e cila ka formën e një trekëndëshi barabrinjës, e tillë që, me përjashtim të numrave të vendosur në rreshtin e poshtëm në fund të tabelës, secili numër është sa vlera absolute e diferencës së dy numrave që ndodhen menjëherë poshtë tij. Për shembull, tabela e mëposhtme është një trekëndësh anti-Pascal me katër rreshta i cili përmban çdo numër nga 1 tek 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

A ekziston një trekëndësh anti-Pascal me 2018 rreshta i cili përmban çdo numër të plotë nga 1 tek $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Albanian

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë

E martë, 10 Korrik , 2018

Problemi 4. Një *vendndodhje* është çdo pikë (x, y) në plan e tillë që x dhe y janë që të dy numra të plotë pozitivë më të vegjël ose të barabartë me 20.

Fillimisht, secila nga 400 vendndodhjet është e lirë. Ana dhe Beni luajnë njëri pas tjetrit sipas radhës duke vendosur gurë dhe lëvizja e parë kryhet nga Ana. Kur ka radhën e saj, Ana vendos një gur të ri me ngjyrë të kuqe në një vendndodhje të lirë në mënyrë të tillë që distanca ndërmjet çdo dy vendndodhjeve jo të lira që përmbajnë gurë me ngjyrë të kuqe nuk është e barabartë me $\sqrt{5}$. Kur ka radhën e tij, Beni vendos një gur të ri me ngjyrë blu në një vendodhje të lirë të çfarëdoshme. (Një vendndodhje jo e lirë në të cilën është vendosur një gur me ngjyrë blu është e lejuar të jetë në distancë të çfarëdoshme nga çdo vendndodhje tjetër jo e lirë.) Ata ndalojnë të kryejnë lëvizje në momentin kur një prej lojtarëve nuk mund të vendosë më gurë.

Gjeni vlerën më të madhe të K të tillë që Ana mund të garantojë që ajo vendos të paktën K gurë me ngjyrë të kuqe, sido që të vendos Beni gurët e tij me ngjyrë blu.

Problemi 5. Le të jetë $a_1, a_2, \ldots$ një varg i pafundëm numrash të plotë pozitivë. Supozojmë se gjendet një numër i plotë $N > 1$ i tillë që, për çdo $n \geq N$, numri

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

është një numër i plotë. Vërtetoni se ekziston një numër i plotë pozitiv M i tillë që $a_m = a_{m+1}$ për çdo $m \geq M$.

Problemi 6. Një katërkëndësh i mysët $ABCD$ kënaq kushtin $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Pika X ndodhet në brendësi të katërkëndëshit $ABCD$ në mënyrë të tillë që

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{dhe} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Tregoni që $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Language: Albanian

Time: 4 orë dhe 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë