

*Kolmapäev, 15. juuli 2009*

**Ülesanne 1.** Olgu  $n$  positiivne täisarv ja olgu  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) sellised erinevad täisarvud hulgast  $\{1, \dots, n\}$ , et arv  $n$  jagab arvu  $a_i(a_{i+1} - 1)$  iga  $i = 1, \dots, k - 1$  korral. Tõesta, et arv  $n$  ei jaga arvu  $a_k(a_1 - 1)$ .

**Ülesanne 2.** Olgu  $ABC$  kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga  $O$ . Olgu  $P$  ja  $Q$  kolmnurga tipudest erinevad punktid vastavalt külgedel  $CA$  ja  $AB$ . Olgu  $K$ ,  $L$  ja  $M$  vastavalt lõikude  $BP$ ,  $CQ$  ja  $PQ$  keskpunktid ning olgu  $\Gamma$  ringjoon, mis läbib punkte  $K$ ,  $L$  ja  $M$ . Oletame, et sirge  $PQ$  puutub ringjoont  $\Gamma$ . Tõesta, et  $|OP| = |OQ|$ .

**Ülesanne 3.** Olgu  $s_1, s_2, s_3, \dots$  selline rangelt kasvav positiivsete täisarvude jada, et jada

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ja} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

on mõlemad aritmeetilised. Tõesta, et jada  $s_1, s_2, s_3, \dots$  on ise aritmeetiline.

*Neljapäev, 16. juuli 2009*

**Ülesanne 4.** Olgu  $ABC$  kolmnurk, kus  $|AB| = |AC|$ . Nurkade  $CAB$  ja  $ABC$  poolitajad lõikavad külgi  $BC$  ja  $CA$  vastavalt punktides  $D$  ja  $E$ . Olgu  $K$  kolmnurga  $ADC$  siseringjoone keskpunkt. Oletame, et  $\angle BEK = 45^\circ$ . Leia kõik võimalused, milline saab olla  $\angle CAB$ .

**Ülesanne 5.** Leia kõik sellised funktsioonid  $f$  positiivsete täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, et mistahes positiivsete täisarvude  $a$  ja  $b$  korral leidub kolmnurk küljepikkustega

$$a, f(b) \text{ ja } f(b + f(a) - 1).$$

**Ülesanne 6.** Olgu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  erinevad positiivsed täisarvud ja olgu  $M$  hulk  $n - 1$  positiivsest täisarvust, kuhu ei kuulu arv  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Rohutirts alustab hüppamist piki arvtelge punktist 0 ja teeb  $n$  hüpet paremale pikkustega  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mingis järjekorras. Tõesta, et järjekorra saab valida nii, et rohutirts ei maandu kunagi hulka  $M$  kuuluvas punktis.