Language: **Kazakh**

Day: **1**

Сәрсенбі, 7-ші шілде, 2010-шы жыл

Есеп 1. Кез келген $x, y \in R$ үшін

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

теңдігін қанағаттандыратын барлық $f : R \to R$ функцияларын табыңыз. (мұндағы $[z]$ арқылы z -тен аспайтын ең үлкен бүтін сан белгіленген.)

Есеп 2. I нүктесі – ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбер центрі, ал Γ – осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер. AI түзуі Γ шеңберін A және D нүктелерінде қиып өтеді.

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

болатындай BDC доғасының бойынан E нүктесі, ал BC қабырғасының бойынан F нүктесі таңдап алынған. G нүктесі – IF кесіндісінің ортасы. DG және EI түзулері Γ шеңберінің бойында жататын нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

Есеп 3. N арқылы барлық оң бүтін сандар жиынын белгілейік.

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

саны кез келген $m, n \in \mathrm{N}$ үшін қандай-да бір бүтін санның квадраты болатындай барлық $g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ функцияларын табыңыз.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпаймен бағаланады

Language: **Kazakh**

Day: **2**

Бейсенбі, 8-ші шілде, 2010-шы жыл

Есеп 4. ABC үшбұрышының ішінен P нүктесі алынған. AP, BP және CP түзулері ABC үшбұрышына сырттай сызылған Γ шеңберін екінші рет сәйкесінше K, L және M нүктелерінде қиып өтеді. C нүктесінен Γ шеңберіне жүргізілген жанама AB түзуін S нүктесінде қиып өтеді. $SC = SP$ екені белгілі. $MK = ML$ болатынын дәлелдеңіз.

Есеп 5. Бастапқыда $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ алты жәшіктің әрқайсысының ішінде тура бір тиыннан бар. Келесі екі типті операцияларды жүзеге асыруға рұқсат:

1-*ші тип*: $1 \le j \le 5$ үшін кез келген бос емес B_j жәшігін таңдап, оның ішінен бір тиынды алып тастауға және сонымен қатар B_{j+1} жәшігіне екі тиын салуға болады.

2-*ші тип*: $1 \le k \le 4$ үшін кез келген бос емес B_k жәшігін таңдап, оның ішінен бір тиынды алып тастауға және сонымен қатар B_{k+1} жәшігінің құрамын (мүмкін бос) B_{k+2} жәшігінің құрамымен (мүмкін бос) орын алмастыруға болады.

Осы операцияларды шектеулі рет қолданып, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 жәшіктері бос, ал B_6 жәшігінің ішінде тура $2010^{2010^{2010}}$ тиын болатындай жағдайға әкелуге бола ма? (Анықтама бойынша $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Есеп 6. Оң нақты сандардан құралған $a_1, a_2, a_3, \ldots$ тізбегі берілген. Қандай-да бір белгіленген оң бүтін s саны үшін келесі теңдік

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

кез келген $n > s$ үшін орындалатыны белгілі. $l \le s$ және барлық $n \ge N$ үшін $a_n = a_l + a_{n-l}$ болатындай оң бүтін l және N сандары табылатынын дәлелдеңіз.

Language: Kazakh

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпаймен бағаланады