Language: **Vietnamese**

Day: **1**

Thứ Sáu, 10 tháng Bảy 2015

Bài 1. Ta nói tập $\mathcal{S}$ gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng là tập *cân đối* nếu với hai điểm phân biệt A và B tùy ý thuộc $\mathcal{S}$, tồn tại điểm C thuộc $\mathcal{S}$ sao cho $AC = BC$. Ta nói $\mathcal{S}$ là tập *vô tâm* nếu với ba điểm phân biệt A, B, C tùy ý thuộc $\mathcal{S}$, không tồn tại điểm P thuộc $\mathcal{S}$ sao cho $PA = PB = PC$.

(a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 3$, tồn tại tập cân đối gồm n điểm.

(b) Hãy tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại tập cân đối và vô tâm gồm n điểm.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho mỗi số trong các số

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

là lũy thừa của 2.

(*Lũy thừa của 2 là một số nguyên có dạng* 2^n, *với n là số nguyên không âm.*)

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC với $AB > AC$. Ký hiệu Γ là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm và F là chân đường cao hạ từ A của tam giác đó. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi Q là điểm nằm trên Γ sao cho $\angle HQA = 90^\circ$, và gọi K là điểm nằm trên Γ sao cho $\angle HKQ = 90^\circ$. Giả sử rằng các điểm A, B, C, K và Q đôi một phân biệt, và nằm trên Γ theo thứ tự đó.

Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KQH và FKM tiếp xúc với nhau.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm

Thứ Bảy, 11 tháng Bảy 2015

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω tâm O. Đường tròn Γ tâm A cắt đoạn thẳng BC tại các điểm D và E sao cho B, D, E và C đôi một phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo thứ tự đó. Gọi F và G là các giao điểm của Γ và Ω, sao cho A, F, B, C và G nằm trên Ω theo thứ tự đó. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và đoạn thẳng AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và đoạn thẳng CA.

Giả sử các đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại điểm X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Bài 5. Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Hãy tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

với mọi số thực x và y.

Bài 6. Dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $1 \le a_j \le 2015$ với mọi $j \ge 1$;

(ii) $k + a_k \ne \ell + a_\ell$ với mọi $1 \le k < \ell$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N sao cho

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2$$

với mọi số nguyên m và n thỏa mãn $n > m \ge N$.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm.