



18 iyul 2011. Bazarertəsi

**Məsələ 1.** Dörd fərqli müsbət tam ədədlərdən ibarət  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  çoxluğu üçün  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  cəmini  $s_A$  ilə işarə edək.  $n_A$  ilə isə, elə  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$  cütlərinin sayı işarə olunmuşdur ki,  $s_A$  cəmi  $a_i + a_j$ -yə bölünür. Dörd fərqli müsbət tam ədədlərdən ibarət bütün elə  $A$  çoxluqlarını tapın ki, onlar üçün  $n_A$  mümkün ən böyük qiymətini alsın.

**Məsələ 2.**  $S$ - müstəvi üzərində ən azı 2 nöqtəsi olan sonlu sayda nöqtələr çoxluğu olsun. Məlumdur ki,  $S$  çoxlununun hər hansı ixtiyari üç nöqtəsi bir düz xətt üzərində yerləşirlər. Aşağıdakı əməliyyatı *Dəyirman* adlandıraraq. Əvvəlcə üzərində ancaq bir  $P \in S$  nöqtəsi olan  $l$  düz xətti seçilir.  $l$  düz xətti dönmə mərkəzi  $P$  nöqtəsi olmaqla  $S$  çoxluginə başqa bir nöqtədən keçdiyi ana qədər saat əqrəbi istiqamətində dönməkdədir. Bundan sonra həmin başqa nöqtəni  $Q$  ilə işarə etsək düz xətt dönmə mərkəzi  $Q$  olmaqla təkrar  $S$  çoxluginə başqa bir nöqtədən keçdiyi ana qədər saat əqrəbi istiqamətində dönəcəkdir. Bu hadisə sonsuz sayda davam edəcəkdir.

İsbat edin ki  $S$  çoxluginə götürülmüş elə bir  $P$  nöqtəsi və bu  $P$  nöqtəsindən keçən elə bir  $l$  düz xətti seçmək olar ki,  $l$  düz xətti ilə başlayan *dəyirman* üçün  $S$  çoxlununun hər bir nöqtəsi dönmə mərkəzi olaraq sonsuz sayda iştirak etsin.

**Məsələ 3.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu həqiqi ədələr çoxluginə ibarət olan və həqiqi  $x, y$  ədədləri üçün

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

şərtini ödəyən funksiya olsun. İsbat edin ki, bütün  $x \leq 0$  ədədləri üçün  $f(x) = 0$  olar.



19 iyul 2011. Çərşənbə axşamı

**Məsələ 4.**  $n > 0$  bir tam ədəddir. İki gözlü tərəzi və ağırlıqları  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  olan  $n$  sayda çəki daşları verilmişdir. Bütün bu çəki daşlarını  $n$  addımda növbə ilə və heç bir addımda tərəzinin sağ gözüünün sol gözüündən daha ağır olmayacaq şəkildə tərəzinin gözlərinə qoymamız lazım. Bütün bu çəki daşları tərəziyə qoyulana qədər hər addımda əvvəlcədən tərəziyə qoyulmamış bir çəki daşı seçilir və tərəzinin ya sağ və ya sol gözüne qoyulur.

Bu addımlar ardıcılığını neçə fərqli şəkildə edə biləcəyimizi müəyyənləsdirin.

**Məsələ 5.** Təyin oblastı tam ədədlər çoxluğu və qiymətlər oblastı müsbət tam ədədlər çoxluğu olan  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$  funksiyası verilmişdir. Məlumdur ki, istənilən  $m$  və  $n$  tam ədədləri üçün  $f(m) - f(n)$  fərqi  $f(m - n)$ -ə bölünür. İsbat edin ki,  $f(m) \leq f(n)$  şərtini ödəyən bütün  $m$  və  $n$  tam ədədləri üçün  $f(n)$  ədədi  $f(m)$  - ə bölünür.

**Məsələ 6.**  $ABC$  – itibucaq üçbucaq və  $\Gamma$ - onun xaricinə çəkilmiş çevrə olsun.  $l$  düz xətti  $\Gamma$ - çevrəsinə toxunan düz xəttidir.  $l_a, l_b, l_c$  - isə uyğun olaraq  $BC$ ,  $CA$  və  $AB$  düz xətlərinə nisbətən  $l$  düz xəttinə simmetrik olan düz xətlərdir. İsbat edin ki,  $l_a, l_b, l_c$  düz xətlərindən əmələ gələn üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrə,  $\Gamma$ -çevrəsinə toxunur.