

יום שני, 21 בספטמבר 2020

שאלה 1. יהא מרובע קמור. הנקודה P נמצאת בפנים המרובע $ABCD$. נתון כי מתקיימים שוויונות היחסים הבאים:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

הוכיחו כי שלושת היישרים הבאים נפגשים בנקודה: חוצה הזווית הפנימית של $\angle ADP$, חוצה הזווית הפנימית של $\angle PCB$ והאנך האמצעי של הקטע AB .

שאלה 2. המספרים הממשיים a, b, c, d מקיימים $0 < a, b, c, d$ וכנ $a \geq b \geq c \geq d > 0$. הוכיחו כי

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

שאלה 3. נתנות $4n$ אבני בעלות משקלים $n, n+1, n+2, \dots, 4n$. כל אחת מהאבני צבועה באחד מ- n צבעים, ויש בדיקוק ארבע אבני מכל צבע. הראו כי ניתן לחלק את האבני לשתי ערים, כך שנייה התנאים הבאים מתקיימים:

- המקלים הכלולים של שתי הערים שוים זה לזה.
- בכל עירימה יש בדיקוק שתי אבני מכל צבע.

יום שלישי, 22 בספטמבר 2020

שאלה 4. יהא $n > 1$ שלם. על צלע הר ממוקמות n^2 תחנות, כולם בגבהים שונים. ישנן שתי חבורות רכבלים, A ו- B , שכל אחת מהן מתפעלת k רכבלים. כל רכבל מובילносעים מאחת התחנות לתחנה אחרת, גבולה יותר (לא עצירות ביניים). ל- k -הרכבלים של A יש k נקודות התחלה שונות ו- k נקודות סיום שונות, ולכל שניים מהם, הרכבל שמתחיל גובה יותר גם מסיים גובה יותר. אולם התנאים הללו גם עבור הרכבלים של B . נאמר ששתי תחנות הן מקושرات על ידי חיבור מסוימת אם ניתן להגיע מהתחנה הנמוכה מהשתתיים אל הגבוהה על ידי שימוש ברכבל אחד או יותר של החיבור (מעברים אחרים בין תחנות אסורים).

מצאו את השלים החובי הקטן ביותר k עבורו בהכרח קיימות שתי תחנות אשר מקושرات על ידי שתי החבורות.

שאלה 5. נתונה חפיסה של $1 < n$ קלפים. על כל קלף כתוב מספר שלם חיובי. החפיסה מקיימת את התוכונה שהמוצע החשבוני של המספרים על כל זוג קלפים הוא גם המוצע ההנדסי של המספרים על אוסף כלשהו של קלפים המכיל קלף אחד לפחות.

עבור אילו ערכי n נובע שהמספרים על כל הקלפים בהכרח שוויים זה זה?

שאלה 6. הוכחו כי קיימים קבוע חיובי c עבורו הטענה הבאה נכונה:

לכל מספר שלם $1 < n$, ולכל קבוע S של n נקודות במישור שכל שתים מהן נמצאות למרחק לפחות 1 זו מזו, קיימים ישר ℓ המחלק את S ועבורו מתקיים שהמרחב של כל נקודה ב- S מ- ℓ הוא לפחות $cn^{-1/3}$.

(אומרים כי ישר ℓ מחלק קבוצת נקודות S אם קטע כלשהו המחבר זוג נקודות מ- S נחתך עם ℓ .)

הערה. תוצאות חישות יותר בהן $cn^{-1/3}$ מוחלף ב- $cn^{-\alpha}$ עשויה לזכות ב証明 בהתאם לערך הקבוע $1/3 > \alpha$.