E martë, 18 korrik 2017

Problem 1. Për çdo numër të plotë $a_0 > 1$ përkufizojmë vargun $a_0, a_1, a_2, \ldots$ me:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{në qoftë se } \sqrt{a_n} \text{ është numër i plotë,} \\ a_n + 3 & \text{përndryshe,} \end{cases} \qquad \text{për çdo } n \geqslant 0.$$

Të përcaktohen të gjitha vlerat e a_0 për të cilat ekziston një numër A i tillë që $a_n = A$ për pafundësisht shumë vlera të n.

Problem 2. Le të jetë $\mathbb{R}$ bashkësia e numrave realë. Përcaktoni të gjitha funksionet $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tilla që për çdo numra realë x dhe y

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problem 3. Një gjuetare dhe një lepur i padukshëm luajnë një lojë në rrafshin euklidian. Pika e nisjes së lepurit, A_0, dhe pika e nisjes së gjuetares, B_0, janë të njëjta. Pas $n-1$ raundesh të lojës lepuri ndodhet në pikën A_{n-1} dhe gjuetarja ndodhet në pikën B_{n-1}. Në raundin e $n^{\text{të}}$ të lojës ndodhin tri gjëra me rradhë.

(i) Lepuri lëviz në mënyrë të padukshme në një pikë A_n të tillë që distanca ndërmjet A_{n-1} dhe A_n është saktësisht 1.

(ii) Një paisje gjurmuese i raporton gjuetares një pikë P_n. Garancia e vetme që paisja gjurmuese i ofron gjuetares është se distanca ndërmjet P_n dhe A_n është jo më e madhe se 1.

(iii) Gjuetarja lëviz në mënyrë të dukshme në një pikë B_n të tillë që distanca ndërmjet B_{n-1} dhe B_n është saktësisht 1.

A është gjithmonë e mundur që, për çfarëdo lëvizje të lepurit dhe për çfarëdo pika të raportuara nga paisja gjurmuese, gjuetarja të zgjedhë lëvizjet e saja ashtu që pas 10^9 raundesh të sigurojë se distanca ndërmjet saj dhe lepurit është jo më e madhe se 100?

E mërkurë, 19 korrik 2017

Problem 4. Le të jenë R dhe S pika të ndryshme në një rreth Ω ashtu që RS nuk është diametër. Le të jetë ℓ tangjenta e Ω nëpër R. Pika T është e tillë që S është mesi i segmentit RT. Pika J është zgjedhur në harkun e shkurtër RS të Ω ashtu që rrethi i jashtashkruar Γ i trekëndëshit JST pret ℓ në dy pika të ndryshme. Le të jetë A pika e përbashkët e Γ dhe ℓ që është më afër R. Drejtëza AJ pret Ω në një pikë tjetër K. Vërtetoni se drejtëza KT është tangjentë e Γ.

Problem 5. Është dhënë një numër $N \geqslant 2$. Një bashkësi $N(N+1)$ futbolistësh, me lartësi të ndryshme nga njëri tjetri, qëndrojnë në rresht. Trajneri i tyre dëshiron të largojë $N(N-1)$ lojtarë nga ky rresht duke lënë një rresht të ri prej $2N$ lojtarësh në të cilin vlejnë N kushtet vijuese:

(1) asnjë nuk qëndron ndërmjet dy lojtarëve më të lartë,

(2) asnjë nuk qëndron ndërmjet lojtarit të tretë dhe lojtarit të katërtë më të lartë,

$\vdots$

(N) asnjë nuk qëndron ndërmjet dy lojtarëve më të shkurtër.

Të vërtetohet se kjo është gjithmonë e mundur.

Problem 6. Një çift i renditur (x, y) numrash të plotë është *pikë primitive* në qoftë se pjesëtuesi më i madh i përbashkët i x dhe y është 1. Për një bashkësi S të dhënë të fundme pikash primitive vërtetoni se ekziston një numër i plotë pozitiv n dhe numrat e plotë $a_0, a_1, \ldots, a_n$ të tillë që për çdo (x, y) në S, kemi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Albanian (Kosovo)

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë