יום שישי, 10 ביולי, 2015

שאלה 1. קבוצה סופית $\mathcal{S}$ של נקודות במישור נקראת **מאוזנת** אם לכל שתי נקודות שונות A ו-B ב-$\mathcal{S}$ קיימת נקודה C ב-$\mathcal{S}$ כך שמתקיים $AC = BC$. $\mathcal{S}$ נקראת **נטולת-מרכזים** אם לכל שלוש נקודות שונות A, B ו-C ב-$\mathcal{S}$, לא קיימת אף נקודה P ב-$\mathcal{S}$ כך שמתקיים $PA = PB = PC$.

(א) הוכיחו כי לכל מספר שלם $n \geq 3$, קיימת קבוצה מאוזנת המורכבת מ-n נקודות בדיוק.

(ב) מצאו את כל המספרים השלמים $n \geq 3$ עבורם קיימת קבוצה מאוזנת ונטולת-מרכזים המורכבת מ-n נקודות בדיוק.

שאלה 2. מצאו את כל השלשות (a, b, c) של מספרים שלמים חיוביים כך שכל המספרים

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

הם חזקות של 2.

(מספר נקרא חזקה של 2 אם הוא מהצורה 2^n, באשר n הינו שלם אי-שלילי.)

שאלה 3. יהא ABC משולש חד-זוויות בו מתקיים $AB > AC$. יהיו Γ המעגל החוסם שלו, H מפגש הגבהים שלו, ו-F עקב הגובה מ-A. נסמן ב-M את אמצע הצלע BC. תהא Q הנקודה על Γ המקיימת $\sphericalangle HQA = 90°$, ותהא K הנקודה על Γ המקיימת $\sphericalangle HKQ = 90°$. נניח כי הנקודות A, B, C, K, Q שונות זו מזו, ומופיעות ב-Γ בסדר זה.

הוכיחו כי המעגלים החוסמים של המשולשים KQH ו-FKM משיקים זה לזה.

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

יום שבת, 11 ביולי, 2015

שאלה 4. נסמן את המעגל החוסם של המשולש ABC ב-Ω, ואת מרכז המעגל ב-O. מעגל Γ עם מרכז ב-A חותך את הקטע BC בנקודות D ו-E כך שהנקודות B, D, E, C כולן שונות זו מזו ומופיעות על הישר BC בסדר זה. תהיינה F ו-G נקודות החיתוך של Γ ו-Ω כך שהנקודות A, F, B, C, G מופיעות על Ω בסדר זה. תהא K נקודת החיתוך השנייה של המעגל החוסם של המשולש BDF ושל הקטע AB. תהא L נקודת החיתוך השנייה של המעגל החוסם של המשולש CGE ושל הקטע CA.

נניח כי הישרים FK ו-GL שונים זה מזה ונחתכים בנקודה X. הוכיחו כי X נמצאת על הישר AO.

שאלה 5. נסמן ב-$\mathbb{R}$ את קבוצת המספרים הממשיים. מצאו את כל הפונקציות $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימות את המשוואה

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

לכל זוג מספרים ממשיים x ו-y.

שאלה 6. סדרת המספרים השלמים $a_1, a_2, \dots$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

(i) $1 \le a_j \le 2015$ לכל $j \ge 1$;

(ii) $k + a_k \ne l + a_l$ לכל $1 \le k < l$.

הוכיחו כי קיימים שני שלמים חיוביים b ו-N כך שמתקיים

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2$$

לכל זוג מספרים שלמים m ו-n המקיימים $n > m \ge N$.

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות