الثّلاثاء 8 جويلية 2014

المسألة 1. لتكن $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ متتاليّة غير متهية من الأعداد الصّحيحة الموجبة. برهن أنّ هناك عددا صحيحا وحيدا $n \geq 1$ بحيث

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

المسألة 2. ليكن $n \geq 2$ عددا صحيحا. لدينا طاولة شطرنج من القياس $n \times n$ مشتملة على n^2 من الخانات. يُقَال عن تشكيلة مكوّنة من n حجرا على خانات هذه الطّاولة إنّها مسالمة إذا كان كلّ سطر وكلّ عمود يحوي حجرا واحدا فقط. ابحث عن أكبر عدد صحيح k بحيث، لكلّ تشكيلة مسالمة من n حجرا، يوجد مربّع من القياس $k \times k$ لا يحوي على حجر في أيّ من خاناته الّتي عددها k^2.

المسألة 3. لدينا رباعي محدّب $ABCD$ بحيث $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90°$. النقطة H هي قدم العمود النّازل من A على المستقيم BD. تقع النّقطتان S و T على الضّلعين AB و AD، على التّرتيب، بحيث تقع النّقطة H داخل المثلّث SCT و

$$\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = 90°, \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°\ .$$

برهن أنّ المستقيم BD مماسّ للدّائرة المحيطة بالمثلّث TSH.

Language: Arabic

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 9 جويلية 2014

المسألة 4. تقع النّقطتان P و Q على الضّلع BC للمثلّث الحادّ الزّوايا ABC بحيث $\widehat{PAB}=\widehat{BCA}$ و $\widehat{CAQ}=\widehat{ABC}$. النّقطتان M و N تقعان على المستقيمين AP و AQ، على التّوالي، بحيث تكون النّقطة P منتصف AM، والنّقطة Q منتصف AN. أثبت أنّ المستقيمين BM و CN يتقاطعان على الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC.

المسألة 5. لكلّ عدد صحيح طبيعي مخالف للصفر n، يُصدر بنك كايب تاون قطعا نقديّة قيمتها $\frac{1}{n}$. إذا كان لدينا عدد منته من هذه القطع النّقديّة (ليست بالضّرورة مختلفة القيم) بحيث يكون مجموع قيمها هو $99+\frac{1}{2}$ على الأكثر، أثبت إمكانيّة توزيع هذه القطع النّقديّة إلى 100 حفنة أو أقل، بحيث لا تزيد قيمة كلّ حفنة على 1.

المسألة 6. يقال عن مجموعة مستقيمات في المستوى إنّها في وضع عام إذا لم يتواز أيّ مستقيمين فيها ولم يتقاطع أيّ ثلاث مستقيمات فيها في نقطة واحدة. تُجزِّئ أيّ مجموعة من المستقيمات في وضع عام المستوى إلى مناطق تكون مساحة بعضها متهية. يُشَارُ إلى هذه المناطق على أنّها مناطق متهية. برهن أنّه لكلّ عدد n، كبير بما فيه الكفاية، يمكننا التّلوين بالأزرق علي الأقل $\sqrt{n}$ من المستقيمات وذلك في أيّ مجموعة مكوّنة من n مستقيما في وضع عام، بحيث لاتوجد منطقة متهية جميع حدودها مستقيمات زرقاء.

ملاحظة: تعطى درجات لمن يحصل على $c\sqrt{n}$ بدلا من $\sqrt{n}$ وذلك اعتمادا على قيمة الثّابت c.

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 نقاط لكلّ مسألة