



briðjudagur, 16. júlí 2024

Dæmi 1. Ákvarðið allar rauntölur α þannig að fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n sé heiltalan

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

margfeldi af n . (Athugið að $\lfloor z \rfloor$ táknað stærstu heiltöluna sem er minni eða jöfn z . Til dæmis er $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ og $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Dæmi 2. Finníð allar tvenndir (a, b) af jákvæðum heiltöllum þannig að til séu jákvæðar heiltölur g og N þannig að

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

fyrir öll $n \geq N$. (Athugið að $\gcd(x, y)$ táknað stærsta samdeili x og y .)

Dæmi 3. Látum a_1, a_2, a_3, \dots vera óendanlega runu af jákvæðum heiltöllum og látum N vera jákvæða heiltölu. Við gerum ráð fyrir að fyrir sérhvert $n > N$, þá sé a_n jöfn fjölda skipta sem talan a_{n-1} kemur fyrir meðal talnanna a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Sýnið að allavega önnur af rununum a_1, a_3, a_5, \dots og a_2, a_4, a_6, \dots sé að endingu lotubundin.

(Óendanleg runa b_1, b_2, b_3, \dots er að *endingu lotubundin* ef til eru jákvæðar heiltölur p og M þannig að $b_{m+p} = b_m$ fyrir öll $m \geq M$.



miðvikudagur, 17. júlí 2024

Dæmi 4. Látum ABC vera þríhyrning þannig að $AB < AC < BC$. Látum ω vera innritaðan hrинг ABC og I vera miðju þessa hrings. Látum X vera punktinn á línu BC , annan en C , þannig að línan um X sem er samsíða línu AC sé snertill við ω . Með sama hætti látum við Y vera punktinn á línu BC , annan en B , þannig að línan um Y samsíða línu AB sé snertill við ω . Lína AI sker umhring ABC öðru sinni í $P \neq A$. Látum K og L vera miðpunktta strikanna AC og AB , í sömu röð.

Sannið að $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Dæmi 5. Snigillinn Þytur spilar á leikborði sem hefur 2024 línur og 2023 dálka. Forynjur hafa falið sig á 2022 reitanna. Í upphafi er Þytur glórulaus um felustaði forynjanna en hann veit að það er nákvæmlega ein forynja í hverri röð, fyrir utan þá fyrstu og síðustu, auk þess að í mesta lagi ein þeirra er í hverjum dálki.

Þytur gerir runu atrenna til að komast frá fyrstu línumni til þeirrar síðustu. Í hverri atrennu kemur hann sér fyrir á reit að eigin vali í fyrstu línu og eftir það færir hann sig skref fyrir skref í aðlægan reit með sameiginlega hlið. (Hann má súa aftur á reiti sem hann hefur komið við á áður.) Ef hann lendir á reit með forynju lýkur þeirri atrennu hans og hann er færður til baka í fyrstu röð til þessa hefja næstu atrennu. Forynjurnar færa sig ekki og Þytur man hvort fornynja var í sérhverjum reit sem hann hefur komið við á áður. Ef hann kemst á einhvern reit í síðustu röðinni þá endar sú atrenna hans og leiknum lýkur.

Ákvarðið minnsta gildið á n þannig að Þytur hafi leikátælun sem tryggir að hann komist í síðustu röðina í síðasta lagi í n -tu atrennu, sama hvernig forynjurnar hafa komið sér fyrir.

Dæmi 6. Látum \mathbb{Q} vera mengi ræðu talnanna. Fall $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ kallast *akvaesúlískt* ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt: Fyrir sérhver $x, y \in \mathbb{Q}$ þá er

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{eða} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Sýnið að til sé jákvæð heiltala c þannig að fyrir hvaða akvaesúlíska fall f sem er megi finna c ólíkar ræðar tölur á forminu $f(r) + f(-r)$ fyrir einhverja ræða tölu r og ákvarðið minnsta gildið sem c getur verið.