Mandag d. 11. juli 2016

Opgave 1. Trekant BCF har en ret vinkel i B. Lad A være punktet på linjen CF så $|FA| = |FB|$ og F ligger mellem A og C. Punktet D er valgt så $|DA| = |DC|$ og AC er vinkelhalveringslinjen til $\angle DAB$. Punktet E er valgt så $|EA| = |ED|$ og AD er vinkelhalveringslinjen til $\angle EAC$. Lad M være midtpunktet af CF. Lad X være et punkt så $AMXE$ er et parallellogram (hvor $AM \parallel EX$ og $AE \parallel MX$). Vis at linjerne BD, FX og ME går gennem samme punkt.

Opgave 2. Bestem alle positive heltal n for hvilke hver celle i en $n \times n$ tabel kan udfyldes med et af bogstaverne I, M og O så følgende to betingelser er opfyldt

- I hver række og hver søjle er en tredjedel af bogstaverne I, en tredjedel M og en tredjedel O.
- I enhver diagonal, hvor antallet af bogstaver i diagonalen er et multiplum af tre, er en tredjedel af bogstaverne I, en tredjedel M og en tredjedel O.

Bemærkning: Rækkerne og søjlerne i en $n \times n$ tabel betegnes 1 til n i en naturlig orden. Dermed svarer hver celle til et par af positive heltal (i, j), hvor $1 \leqslant i, j \leqslant n$. For $n > 1$ har tabellen $4n - 2$ *diagonaler* af to typer. En diagonal af første type består af alle celler (i, j) for hvilke $i + j$ er konstant, og en diagonal af den anden type består af alle celler (i, j) for hvilke $i - j$ er konstant.

Opgave 3. Lad $P = A_1A_2 \ldots A_k$ være en konveks polygon i planen. Hjørnerne A_1, A_2, $\ldots$, A_k har heltallige koordinater og ligger på en cirkel. Lad S være arealet af P. Et ulige positivt heltal n er givet så kvadraterne på hver af sidelængderne i P er hele tal som er delelige med n. Vis at $2S$ er et helt tal som er deleligt med n.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 points.

Tirsdag d. 12. juli 2016

Opgave 4. En mængde af positive heltal kaldes *velduftende* hvis den består af mindst to elementer, og hvert af dens elementer har en primfaktor tilfælles med mindst et andet element i mængden. Lad $P(n) = n^2 + n + 1$. Hvad er den mindst mulige værdi af det positive heltal b så der findes et ikke-negativt heltal a så mængden

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

er velduftende?

Opgave 5. Ligningen

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

som står skrevet på en tavle, har 2016 lineære faktorer på hver sin side. Hvad er den mindste positive værdi af k for hvilken det er muligt at slette præcis k af disse 4032 lineære faktorer så der er mindst en faktor tilbage på hver side, og så den ligning som står tilbage, ikke har en reel løsning?

Opgave 6. Der er $n \geqslant 2$ linjestykker i planen så vilkårlige to linjestykker skærer hinanden i et indre punkt, og så der ikke findes tre linjestykker som går gennem samme punkt. Georg skal for hvert linjestykke vælge et endepunkt og placere en frø på det med front mod det andet endepunkt. Derefter vil han klappe $n-1$ gange. Hver gang han klapper, vil hver frø øjeblikkeligt hoppe fremad til det næste skæringspunkt på dets linjestykke. Frøerne ændrer aldrig retningen af deres hop. Georg ønsker at placere frøerne så hvert par af to frøer på intet tidspunkt vil opholde sig i samme skæringspunkt.

(a) Bevis at Georg altid kan opfylde sit ønske når n er ulige.

(b) Bevis at Georg aldrig kan opfylde sit ønske når n er lige.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 points.