2017 年 *7* 月 *18* 日，星期二

問題 1. 對於每個整數 $a_0 > 1$，用以下方法定義數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ：

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{若}\sqrt{a_n}\text{為整數} \\ a_n + 3 & \text{其他情況} \end{cases} \quad \text{對於所有}n \geqslant 0\text{皆成立}$$

試求所有可能值 a_0，滿足存在一個數 A，使得有無窮多個 n 讓 $a_n = A$。

問題 2. 令 $\mathbb{R}$ 表示所有實數所成的集合。試求所有函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足對於所有實數 x 和 y

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

皆成立。

問題 3. 一位獵人和一隻隱形的兔子在歐氏平面上玩一場遊戲。兔子的起點 A_0 和獵人的起點 B_0 為同一點。在遊戲的 $n-1$ 回合後，兔子所在的位置為 A_{n-1}，獵人所在的位置為 B_{n-1}。在遊戲的第 n 回合，以下三件事情會依序發生。

(i) 兔子會在不可被看到的情況下移動到一個點 A_n，使得 A_{n-1} 與 A_n 之間的距離恰為 1。

(ii) 一個追蹤裝置會回報一個點 P_n 給獵人。對獵人而言，裝置只保證 P_n 與 A_n 之間的距離至多為 1。

(iii) 獵人會在可被看到的情況下移動到一個點 B_n，使得 B_{n-1} 與 B_n 之間的距離恰為 1。

試問是否無論兔子如何移動，且無論裝置回報的點為何，獵人總是可以適當的選取她的移動，使得她可以保證在經過 10^9 個回合後她和兔子之間的距離至多為 100？

2017 年 7 月 19 日，星期三

問題 4. 令 R 和 S 為圓 Ω 上相異兩點使得 RS 不是直徑。令 ℓ 為 Ω 在 R 的切線。平面上一點 T 使得 S 為 RT 線段的中點。點 J 在圓 Ω 的劣弧 RS 上，使得三角形 JST 的外接圓 Γ 和 ℓ 相交於兩相異點。令 A 為 Γ 與 ℓ 的交點中較接近 R 者。直線 AJ 與 Ω 交於另一點 K。試證 KT 與 Γ 相切。

問題 5. 給定整數 $N \geqslant 2$。有 $N(N+1)$ 位身高兩兩不同的足球員以某種順序排成一列。教練想要從這列中移除 $N(N-1)$ 個人，使得剩下 $2N$ 個人所形成的一列，滿足以下 N 個條件：

(1) 沒有人站在他們當中最高的兩位球員之間

(2) 沒有人站在他們當中第三與第四高的兩位球員之間

$\vdots$

(N) 沒有人站在他們當中最矮的兩位球員之間

證明這總是可做到的。

問題 6. 一個有序整數對 (x, y) 被稱為**互質格點**若 x 和 y 的最大公因數為 1。給定一個由互質格點所組成的有限集 S，證明存在一個正整數 n 以及整數 $a_0, a_1, ..., a_n$，使得對於所有在 S 中的 (x, y)，我們都有：

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$