Дүйсенбі, 11 шілде, 2016 ж.

Есеп 1. BCF үшбұрышында B бұрышы тік екені белгілі. $FA = FB$ болатындай CF түзуінде A нүктесі алынған, және F нүктесі A мен C нүктелерінің арасында жатады. $DA = DC$ және $\angle DAB$ биссектрисасы AC болатындай D нүктесі берілген. $EA = ED$ және $\angle EAC$ биссектрисасы AD болатындай E нүктесі берілген. M нүктесі CF қабырғасының ортасы болсын. $AMXE$ параллелограмм болатын X нүктесі алынған (мұндағы $AM \parallel EX$ және $AE \parallel MX$). BD, FX және ME түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

Есеп 2. Келесі шарттар орындалатын барлық натурал n сандарын табыңыз: $n \times n$ тақтаның әрбір шаршына I, M және O әріптерден бір әріпті жазып және

- тақтаның кез келген жолда мен мен кез келген қатарда үштен бір бөлігі I, үштен бір бөлігі M, және үштен бір бөлігі O әріптер тұрады; және
- кез келген диагональде, егер шаршының саны үшке бөлінсе, онда қайтадан үштен бір бөлігі I, үштен бір бөлігі M, және үштен бір бөлігі O әріптер тұрады.

Ескертпе: $n \times n$ тақтаның жолдары мен қатарлары 1ден nге дейін натурал ретпен реттелген. Осында әрбір шаршы (i, j) $1 \leqslant i, j \leqslant n$ индекстерге сәйкес келеді. Онда $n > 1$ үшін, тақтада екі түрлі $4n - 2$ *диагональ* бар. Бірінші түрі ол $i + j$ константа болатын (i, j) шаршыдан тұратын диагональдері, ал екінші түрі диагональдері $i - j$ константа болатын (i, j) шаршыдан тұрады.

Есеп 3. Жазықтықта $P = A_1A_2 \dots A_k$ көпбұрышы берілген. A_1, A_2, $\dots$, A_k төбелерінің координаталары бүтін болатын және олар бір шеңберінің бойында жататынын белгілі. P көпбұрышының ауданын S деп белгілейік. Берілген n тақ натурал саны үшін, P қабырғаларының ұзындықтарының квадраттары nге бөлінеді. $2S$ саны nге бөлінетін бүтін саны болатынын дәлелдеңіз.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады

Бейсенбі, 12 шілде, 2016 ж.

Есеп 4. Натурал сандардан тұратын осындай жиындарды *нәзік* деп атайық: егер жиынының ішінде кемінде екі элемент болса, және оның әрбір элементі жиынының басқа бір элементпен ортақ жай бөлгіші болса. $P(n) = n^2 + n + 1$ болсын. Егер төмендегі шарт орындалса, b натурал санының ең кіші болатын мәні кандай?

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

жиыны нәзік болатын a теріс емес бүтін саны табылады.

Есеп 5. Осындай теңдік

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

тақтада жазылған, оның әр жағында 2016 сызықтық көбейктіші бар. Егер келесі шарт орындалса, k санының ең кіші болатын мәні кандай? Осы 4032 сызықтық көбейктіштерінен дәл k көбейткішін өшірсе, әр жақта кемінде бір көбейткіш қалады және қорытынды теңдігі нақты шешімдері жоқ болады.

Есеп 6. Жазықтықта $n \geqslant 2$ кесінді берілген, олардан кез келген екеуі (ішінде) қиылысады, және кез келген үшеуі бір нүктеде қиылыспайды. Амирге әрбір кесіндінің екі шек нүктелерінен біреуін таңдап осы жағына екінші шегіне қарайтын бақаны қояу керек. Енді ол $n-1$ рет қолын шапалақтайды. Әр шапалақ кезінде әрбір бақа өзіннің кесінді бойында жататын келесі (басқа кесіндісімен) қиылысу нүктеге бірден алға секіреді. Бақалар өз секіру бағытын ешқашан өзгертпейді. Амир бақаларды осылай орналыстырып келеді: әр кезде бір қиылысу нүктесінде екі бақа бір уақытта тұрмайды.

(a) Егер n тақ болса, Амирдің қалауын орындалуға болатынын дәлелдеңіз.

(ә) Егер n жұп болса, онда Амирдің қалауынша ешқашан болмайтынын дәлелдеңіз.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады