Wtorek, 23. lipca 2013

Zadanie 1. Wykazać, że dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych k oraz n istnieje k (niekoniecznie różnych) dodatnich liczb całkowitych $m_1, m_2, \ldots, m_k$ spełniających równość

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Zadanie 2. Konfigurację 4027 punktów na płaszczyźnie nazwiemy *kolumbijską*, jeśli składa się ona z 2013 czerwonych punktów i 2014 niebieskich punktów, oraz żadne trzy punkty należące do konfiguracji nie leżą na jednej prostej. Zbiór prostych na płaszczyźnie dzieli płaszczyznę na pewną liczbę obszarów. Powiemy, że zbiór prostych jest *dobry* dla pewnej kolumbijskiej konfiguracji, jeśli następujące dwa warunki są spełnione:

- żadna prosta nie przechodzi przez żaden punkt należący do konfiguracji;
- żaden obszar nie zawiera punktów obu kolorów.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k taką, że dla każdej kolumbijskiej konfiguracji 4027 punktów istnieje dobry zbiór k prostych.

Zadanie 3. Okrąg dopisany do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A jest styczny do boku BC w punkcie A_1. Punkt B_1, leżący na boku CA, oraz punkt C_1, leżący na boku AB, są zdefiniowane analogicznie przy użyciu okręgów dopisanych naprzeciwko wierzchołków B oraz C, odpowiednio. Przypuśćmy, że środek okręgu opisanego na trójkącie $A_1B_1C_1$ leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Wykazać, że wówczas trójkąt ABC jest prostokątny.

Okręgiem dopisanym *do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A nazywamy okrąg styczny do odcinka BC oraz do przedłużeń boków AB i AC ze strony B i C, odpowiednio. Okręgi dopisane naprzeciwko wierzchołków B i C są zdefiniowane analogicznie.*

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Środa, 24. lipca, 2013

Zadanie 4. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Punkt W leży na boku BC oraz jest różny od punktów B i C. Niech M oraz N będą spodkami wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z B oraz z C. Niech ω_1 będzie okręgiem opisanym na trójkącie BWN, zaś X takim punktem na ω_1, że odcinek WX jest średnicą okręgu ω_1. Analogicznie, niech ω_2 będzie okręgiem opisanym na trójkącie CWM, zaś Y takim punktem na ω_2, że odcinek WY jest średnicą okręgu ω_2. Udowodnić, że punkty X, Y oraz H leżą na jednej prostej.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{Q}_{>0}$ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Niech $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą następujące trzy warunki:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) istnieje liczba wymierna $a > 1$ dla której $f(a) = a$.

Wykazać, że $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Zadanie 6. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Na okręgu zaznaczono $n+1$ punktów dzielących okrąg na łuki równej długości. Rozważmy wszystkie możliwe etykietowania tych punktów liczbami $0, 1, 2, \ldots, n$ takie, że każda z tych liczb jest użyta dokładnie raz. Dwa etykietowania uznajemy za jednakowe, jeśli jedno z nich można otrzymać z drugiego poprzez obrót okręgu. Etykietowanie nazwiemy *pięknym*, jeśli dla każdej czwórki etykiet $a < b < c < d$ spełniających $a + d = b + c$, cięciwa łącząca punkty o etykietach a oraz d nie przecina cięciwy łączącej punkty o etykietach b oraz c.

Niech M będzie liczbą pięknych etykietowań. Niech N będzie liczbą uporządkowanych par (x, y) dodatnich liczb całkowitych spełniających $x + y \leq n$ oraz $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$. Udowodnić, że

$$M = N + 1.$$

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów