

2019 年 7 月 16 日，星期二

問題 1. 令 \mathbb{Z} 代表所有整數所成的集合。試找出所有的函數 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ，使得對所有整數 a, b ，都有

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

問題 2. 在三角形 ABC 中，點 A_1 在邊 BC 上，而點 B_1 在邊 AC 上。點 P, Q 分別在線段 AA_1 及 BB_1 上，滿足 PQ 平行於 AB 。在直線 PB_1 上取點 P_1 使得 B_1 嚴格介於 P, P_1 之間，且滿足 $\angle PP_1C = \angle BAC$ ；又在直線 QA_1 上取點 Q_1 使得 A_1 嚴格介於 Q, Q_1 之間，且滿足 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ 。

試證： P, Q, P_1, Q_1 共圓。

問題 3. 一個社群網路中有 2019 位用戶，其中某些用戶之間是朋友。不論何時，只要用戶 A 是用戶 B 的朋友，用戶 B 也會是用戶 A 的朋友。下面的事件會重複發生，但同時間只會發生一個事件：

三位用戶 A, B, C ，其中 A 同時與 B, C 都是朋友，但 B, C 不是朋友，他們之間的朋友狀態改變為： B, C 成為朋友，同時 A 與 B 不再是朋友，且 A 與 C 也不再是朋友。其他的朋友狀態皆不變。

一開始，有 1010 位用戶，每人都有 1009 位朋友；且有 1009 位用戶，每人都有 1010 位朋友。證明：存在一系列如上述的事件，其依序發生後，會使得每一位用戶最多只有一位朋友。

2019 年 7 月 17 日，星期三

問題 4. 試找出所有的正整數數對 (k, n) 讓下列等式成立：

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

問題 5. 巴斯銀行發行的硬幣上，一面寫了 H ，另一面寫了 T 。哈利有 n 枚這樣的硬幣，並將它們由左至右排成一列。哈利重複進行以下操作：如果恰有 $k > 0$ 枚 H 面朝上的硬幣，他就把從左邊數來第 k 枚硬幣翻過來；否則，所有的硬幣皆為 T 面朝上，於是他就停止了。舉例而言，當 $n = 3$ 時，由初始狀態 THT 開始的操作過程為 $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ ，總共有三次操作。

- (a) 證明：對於任一種初始狀態，哈利進行有限次操作就得停止。
- (b) 對每一種初始狀態 C ，令 $L(C)$ 表示哈利由開始到停止前所進行的操作次數，例如 $L(THT) = 3$, $L(TTT) = 0$ 。試求所有 2^n 種可能的初始狀態 C 所得到的 $L(C)$ 之平均值。

問題 6. 設點 I 為銳角三角形 ABC 的內心，其中 $AB \neq AC$ 。三角形 ABC 的內切圓 ω 與三邊 BC, CA, AB 分別相切於點 D, E, F 。過 D 並與 EF 垂直的直線與 ω 再交於另一點 R ，而直線 AR 與 ω 再交於另一點 P 。設三角形 PCE 的外接圓與三角形 PBF 的外接圓再交於另一點 Q 。

證明：直線 DI 與 PQ 相交於過 A 且與 AI 垂直的直線上。