Wtorek, 10 lipca 2012 r.

Zadanie 1. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A. Okrąg ten jest styczny do boku BC w punkcie M oraz do prostych AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste LM i BJ przecinają się w punkcie F, a proste KM i CJ przecinają się w punkcie G. Niech S będzie punktem przecięcia prostych AF i BC, a T punktem przecięcia prostych AG i BC.

Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka ST.

(*Okręgiem dopisanym do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A* nazywamy okrąg styczny do odcinka BC oraz do przedłużeń boków AB i AC.)

Zadanie 2. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, dla których $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Udowodnić, że

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Zadanie 3. Gra w *zgadującego i kłamcę* rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami A i B. Reguły gry są zależne od dwóch całkowitych dodatnich liczb k i n, które są znane obu graczom.

Na początku gracz A wybiera liczby całkowite x i N spełniające $1 \leq x \leq N$. Gracz A trzyma liczbę x w tajemnicy, natomiast liczbę N przekazuje graczowi B. Gracz B z kolei próbuje zdobyć informacje o liczbie x zadając graczowi A pytania. Przed każdym pytaniem gracz B wybiera dowolny zbiór S dodatnich liczb całkowitych, po czym pyta gracza A, czy liczba x należy do zbioru S. Gracz B może zadać tyle pytań, ile chce, może także wielokrotnie wybierać ten sam zbiór S. Na każde pytanie gracza B, gracz A musi natychmiast odpowiedzieć, odpowiadając *tak* lub *nie*. Może przy tym skłamać dowolną liczbę razy, pamiętając jednak, że odpowiadając na każde $k + 1$ kolejnych pytań, co najmniej raz musi powiedzieć prawdę.

Po zakończeniu zadawania pytań gracz B musi podać zbiór X złożony z co najwyżej n dodatnich liczb całkowitych. Jeśli liczba x należy do zbioru X, gracz B wygrywa, w przeciwnym wypadku, gracz B przegrywa. Dowieść, że

1. jeśli $n \geq 2^k$, to gracz B może zagwarantować sobie zwycięstwo,
2. dla każdej dostatecznie dużej liczby k istnieje taka liczba całkowita $n \geq 1.99^k$, przy której gracz B nie może zagwarantować sobie wygranej.

Czas: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Polish**

Day: 2

Środa, 11 lipca 2012 r.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c spełniających $a+b+c=0$ zachodzi równość

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Symbol $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.)

Zadanie 5. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\angle BCA = 90^\circ$ oraz niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Punkt X leży wewnątrz odcinka CD. Niech K będzie punktem leżącym na odcinku AX, przy czym $BK = BC$. Niech L będzie punktem leżącym na odcinku BX, przy czym $AL = AC$. Punkt M jest punktem przecięcia prostych AL i BK.

Wykazać, że $MK = ML$.

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją nieujemne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Czas: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów