

Selasa, 18 Julai 2017

Soalan 1. Bagi setiap integer $a_0 > 1$, takrifkan jujukan a_0, a_1, a_2, \dots dengan:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{jika } \sqrt{a_n} \text{ adalah suatu integer,} \\ a_n + 3 & \text{selainnya,} \end{cases} \quad \text{bagi setiap } n \geq 0.$$

Tentukan semua nilai a_0 supaya terdapat suatu nombor A dengan $a_n = A$ bagi tak terhingga banyaknya nilai n .

Soalan 2. Katakan \mathbb{R} ialah set semua nombor nyata. Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supaya bagi semua nombor nyata x dan y ,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Soalan 3. Seorang pemburu dan seekor arnab halimunan bermain suatu permainan pada satah Euclidan. Titik permulaan arnab tersebut, A_0 , dan titik permulaan pemburu tersebut, B_0 , adalah sama. Selepas $n-1$ pusingan permainan tersebut, arnab tersebut berada di titik A_{n-1} dan pemburu tersebut berada di titik B_{n-1} . Pada pusingan ke- n permainan tersebut, tiga perkara berlaku mengikut urutan.

- (i) Arnab tersebut bergerak secara halimunan ke suatu titik A_n dengan jarak antara A_{n-1} dan A_n adalah bersamaan 1.
- (ii) Suatu alat penjejakan melaporkan kedudukan suatu titik P_n kepada pemburu tersebut. Hanya satu jaminan diberikan oleh alat tersebut kepada pemburu tersebut iaitu jarak antara P_n dan A_n adalah tidak lebih daripada 1.
- (iii) Pemburu tersebut bergerak secara nampak ke suatu titik B_n dengan jarak antara B_{n-1} dan B_n adalah bersamaan 1.

Adakah sentiasa mungkin, tidak kira bagaimanapun arnab tersebut bergerak, dan tidak kira apapun titik-titik yang dilaporkan oleh alat penjejakan tersebut, bagi pemburu tersebut untuk memilih pergerakan beliau supaya selepas 10^9 pusingan, beliau dapat memastikan bahawa jarak antara beliau dengan arnab tersebut adalah tidak lebih daripada 100?



IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL

58th International Mathematical Olympiad

Malay (may), day 2

Rabu, 19 Julai 2017

Soalan 4. Katakan R dan S ialah titik berbeza pada suatu bulatan Ω sehingga RS bukan suatu diameter. Katakan ℓ ialah garis tangen kepada Ω pada R . Titik T ialah suatu titik supaya S ialah titik tengah bagi tembereng garis RT . Titik J dipilih pada lengkuk minor RS bagi Ω supaya bulatan lilit Γ bagi segitiga JST bersilang dengan ℓ pada dua titik berbeza. Katakan A ialah titik sepunya bagi Γ dan ℓ yang terletak lebih hampir dengan R . Garis AJ bersilang dengan Ω sekali lagi pada K . Buktikan bahawa garis KT adalah tangen kepada Γ .

Soalan 5. Suatu integer $N \geq 2$ diberikan. Seramai $N(N+1)$ pemain bola sepak berdiri dalam satu barisan, dengan tiada dua pemain mempunyai ketinggian yang sama. Sir Alex ingin menyingkirkan $N(N-1)$ pemain daripada barisan tersebut, supaya $2N$ pemain yang tinggal pada barisan yang baru memenuhi N syarat berikut:

- (1) tiada pemain yang berdiri di antara dua pemain yang paling tinggi,
- (2) tiada pemain yang berdiri di antara pemain ketiga dan keempat paling tinggi,
- ⋮
- (N) tiada pemain yang berdiri di antara dua pemain yang paling rendah.

Buktikan bahawa beliau sentiasa boleh berbuat sedemikian.

Soalan 6. Suatu pasangan tertib integer (x, y) ialah suatu *titik primitif* jika faktor sepunya terbesar bagi x dan y ialah 1. Diberi suatu set terhingga S yang mengandungi beberapa titik primitif, buktikan bahawa terdapat suatu integer positif n dan integer a_0, a_1, \dots, a_n supaya bagi setiap (x, y) dalam S , kita mempunyai:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$