otrdiena, 15. jūlijs 2025

1. uzdevums. Plaknē taisni sauc par *saulainu*, ja tā **nav** paralēla x-asij, y-asij, un taisnei $x+y=0$.

Dots naturāls skaitlis $n \geqslant 3$. Atrast visus nenegatīvus veselus skaitļus k, kuriem eksistē n dažādas taisnes, kurām vienlaicīgi izpildās:

- visiem naturāliem skaitļiem a un b, kam $a+b \leqslant n+1$, punkts (a,b) atrodas uz vismaz vienas no šīm taisnēm; un
- tieši k no n taisnēm ir saulainās.

2. uzdevums. Dotas riņķa līnijas Ω un Γ ar centriem M un N, attiecīgi, ar īpašību, ka Ω rādiuss ir mazāks nekā Γ rādiuss. Pieņemsim, ka Ω un Γ krustojas divos dažādos punktos A un B. Taisne MN krusto Ω punktā C un Γ punktā D tā, ka punkti C, M, N un D atrodas uz taisnes tieši šādā secībā. Punkts P ir trijstūra ACD apvilktās riņķa līnijas centrs. Taisne AP atkārtoti krusto Ω punktā $E \neq A$. Taisne AP atkārtoti krusto Γ punktā $F \neq A$. Punkts H ir trijstūra PMN ortocentrs.

Pierādīt, ka taisne, kas ir vilkta caur punktu H paralēli taisnei AP, pieskaras trijstūra BEF apvilktajai riņķa līnijai.

(Trijstūra *ortocentrs* ir augstumu krustpunkts.)

3. uzdevums. Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sauksim par *bonza*, ja

$$f(a) \;\text{ dala }\; b^a - f(b)^{f(a)}$$

visiem naturāliem skaitļiem a un b.

Atrast mazāko reālu skaitli c, kuram $f(n) \leqslant cn$ visiem bonza funkcijām f un visiem naturāliem skaitļiem n.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

trešdiena, 16. jūlijs 2025

4. uzdevums. Naturāla skaitļa N *patiesi dalītāji* ir skaitļa N pozitīvi dalītāji, kas nav vienādi ar N.

Dota bezgalīga skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kas satur tikai naturālus skaitļus, kuriem ir vismaz trīs patiesi dalītāji. Katram $n \geqslant 1$ skaitlis a_{n+1} ir vienāds ar skaitļa a_n trīs lielāko patiesu dalītāju summu.

Atrast visas iespējamas skaitļa a_1 vērtības.

5. uzdevums. Alise un Bazza spēlē *nekoaladības spēli*, kas tiek spēlēta divatā un kuras noteikumi ir atkarīgi no pozitīva reāla skaitļa λ, kas ir zināms abiem spēlētajiem. Sākot ar $n = 1$, n-tajā spēles gājienā notiek sekojošais:

- Ja n ir nepāra, tad Alise izvēlas tādu nenegatīvu reālu skaitļi x_n, ka
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ja n ir pāra, tad Bazza izvēlas tādu nenegatīvu reālu skaitļi x_n, ka
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ja spēlētājs nevar veikt gājienu, tad spēle beidzas un otrais spēlētājs uzvar. Ja spēle turpinās bezgalīgi, tad neviens spēlētājs neuzvar. Visi izvēlēti skaitļi ir zināmi abiem spēlētājiem.

Atrast visas skaitļa λ vērtības, kurām Alisei ir uzvārējoša stratēģija, un visas skaitļa λ vērtības, kurām Bazzam ir uzvārējoša stratēģija.

6. uzdevums. Dots 2025×2025 rūtiņu laukums. Matilda grib novietot taisnstūrveida flīzes, neobligāti vienādas, tā, lai katras flīzes katra mala iet pa rūtiņu malām, un lai katra rūtiņa ir pārklāta ne vairāk kā ar vienu flīzi.

Atrast mazāko flīžu skaitu, kas Matildai ir jānovieto, lai panāktu, ka rūtiņu laukuma katra rinda un katra kolonna satur tieši vienu rūtiņu, kas nav pārklāta ar flīzi.

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.