

سه‌شنبه، ۱۶ جولای ۲۰۱۹

مسئله‌ی ۱. فرض کنید \mathbb{Z} مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد. همه‌ی توابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ را بیابید که برای هر دو عدد صحیح a و b داشته باشیم:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

مسئله‌ی ۲. در مثلث ABC ، نقطه‌ی A_1 روی ضلع BC قرار دارد و نقطه‌ی B_1 روی ضلع AC قرار دارد. فرض کنید نقاط P و Q به ترتیب روی پاره‌خط‌های AA_1 و BB_1 به گونه‌ای قرار دارند که PQ موازی با AB است. فرض کنید P_1 نقطه‌ای روی خط PB_1 باشد به طوری که B_1 کاملاً بین P و P_1 است، و $\angle PP_1C = \angle BAC$. به طور مشابه فرض کنید Q_1 نقطه‌ای روی خط QA_1 باشد به طوری که A_1 کاملاً بین Q و Q_1 است، و $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. ثابت کنید نقاط Q_1 ، P_1 ، Q ، P هم‌دایره‌اند.

مسئله‌ی ۳. یک شبکه‌ی اجتماعی ۲۰۱۹ عضو دارد، که برخی از آنها با هم دوست هستند. وقتی عضو A با عضو B دوست است، عضو B هم با عضو A دوست است. هر بار یک اتفاق به صورت زیر می‌تواند بیفتد:

سه عضو A ، B و C که A با هر دوی B و C دوست است ولی B و C باهم دوست نیستند، روابط دوستی خود را تغییر می‌دهند به این صورت که B و C با هم دوست می‌شوند ولی A دیگر با B دوست نیست و A دیگر با C دوست نیست.

در ابتدا، ۱۰۱۰ عضو هرکدام ۱۰۰۹ دوست دارند، و ۱۰۰۹ عضو هرکدام ۱۰۱۰ دوست دارند. ثابت کنید دنباله‌ای از اتفاقات مذکور وجود دارد که بعد از آن هر عضو با حداکثر یک عضو دیگر دوست باشد.

چهارشنبه، ۱۷ جولای ۲۰۱۹

مسئله ۴. همهی اعداد صحیح مثبت (k, n) را بیابید به طوری که:

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})$$

مسئله ۵. بانک شهر بٹ سکه‌هایی با حرف H روی یک طرف و حرف T روی طرف دیگر چاپ می‌کند. حسام n تا از این سکه‌ها دارد که از چپ به راست در یک ردیف چیده شده‌اند. او در هر مرحله چنین حرکتی انجام می‌دهد: اگر دقیقاً $0 < k$ سکه به طرف H باشند، او سکه‌ی k ام از چپ را برمی‌گرداند، درغیراین صورت یعنی در صورتی که همهی سکه‌ها به طرف T باشند، فرآیند متوقف می‌شود. مثلاً اگر $n = 3$ باشد فرآیندی که از رشته‌ی THT آغاز می‌شود به صورت $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ است و پس از سه حرکت متوقف می‌شود.

الف) ثابت کنید برای هر رشته‌ی اولیه، حسام پس از متناهی حرکت متوقف می‌شود.

ب) برای هر رشته‌ی اولیه مثل C ، فرض کنید $L(C)$ تعداد حرکات لازم برای متوقف کردن فرآیند باشد. مثلاً $L(THT) = 3$ و $L(TTT) = 0$. میانگین $L(C)$ های مربوط به همهی 2^n حالت ممکن برای C را بیابید.

مسئله ۶. فرض کنید I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC با شرط $AB \neq AC$ باشد. ω دایره‌ی محاطی داخلی ABC بر اضلاع BC ، CA و AB به ترتیب در نقاط D ، E و F مماس است. خط گذرا از D و عمود بر EF دایره‌ی ω را مجدداً در نقطه‌ی R قطع می‌کند. خط AR دایره‌ی ω را مجدداً در نقطه‌ی P قطع می‌کند. دوائر محیطی مثلث‌های PCE و PBF یکدیگر را مجدداً در نقطه‌ی Q قطع می‌کنند.

ثابت کنید خطوط DI و PQ یکدیگر را روی خط گذرنده از A و عمود بر AI قطع می‌کنند.