E martë, 23 korrik, 2013

Problemi 1. Tregoni se për çdo dy numra natyralë k dhe n, ekzistojnë k numra natyralë $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (jo medoemos të ndryshëm) ashtu që:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problemi 2. Një konfiguracion prej 4027 pikash në rrafsh quhet *kolumbien* nëse ai përmban 2013 pika të kuqe dhe 2014 pika të kaltërta, ashtu që asnjë treshe prej tyre nuk është kolineare. Duke tërhequr disa drejtëza, rrafshi ndahet në disa regjione. Një bashkësi e tillë e drejtëzave quhet e *mirë* për një konfiguracion kolumbien, nëse plotësohen kushtet në vijim:

- asnjëra nga drejtëzat nuk kalon nëpër ndonjë pikë të konfiguracionit;
- asnjë nga regjionet nuk përmban pika të dy ngjyrave.

Gjeni vlerën më të vogël të k ashtu që për një konfiguracion kolumbien prej 4027 pikash, ekziston një bashkësi e mirë prej k drejtëzash.

Problemi 3. Rrethi i brendashkruar nga jashtë i trekëndëshit ABC përballë kulmit A e takon brinjën BC në pikën A_1. Në mënyrë analoge janë fituar pika B_1 në CA dhe pika C_1 në AB, duke shfrytëzuar rrathët e brendashkruar nga jashtë përballë kulmeve B dhe C, respektvisht. Supozojmë se qendra e rrethit të jashtëshkruar rreth trekëndëshit $A_1B_1C_1$ i takon rrethit të jashtëshkruar rreth trekëndëshit ABC. Të vërtetohet se trekëndëshi ABC është kënddrejtë.

Rrethi i brendashkruar nga jashtë i trekëndëshit ABC përballë kulmit A është rrethi i cili takon brinjën BC, si dhe gjysmëdrejtëzën AB përtej kulmit B dhe gjysmëdrejtëzën AC përtej kulmit C. Ngashëm përkufizohen rrathët e brendashkruar nga jashtë përballë kulmeve B dhe C.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlerësohet me 7 pikë

Language: **Albanian**

Day: **2**

E mërkurë, 24 korrik, 2013

Problemi 4. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngushtë me ortoqendër pikën H, kurse W le të jetë një pikë e brinjës BC, e ndryshme nga pikat B dhe C. Pikat M dhe N janë këmbëzat e lartësive nga kulmet B dhe C, respektivisht. Le të jetë ω_1 rrethi i jashtëshkruar rreth trekëndëshit BWN, kurse X është pika e rrethit ω_1 ashtu që WX është diametër i ω_1. Ngjashëm, me ω_2 shënojmë rrethin e jashtëshkruar rreth trekëndëshit CWM, kurse Y është pika nga ω_2 ashtu që WY është diametër i ω_2. Tregoni se pikat X, Y dhe H janë kolineare.

Problemi 5. Le të jetë $\mathbb{Q}_{>0}$ bashkësia e numrave racionalë pozitivë. Le të jetë $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ funksion që plotëson kushtet në vijim:

(i) për çdo $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, kemi $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) për çdo $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, kemi $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) ekziston një numër racional $a > 1$ ashtu që $f(a) = a$.

Tregoni se $f(x) = x$ për çdo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problemi 6. Le të jetë $n \geq 3$ një numër i plotë dhe konsiderojmë rrethin me $n+1$ pika të shënuara në te, ashtu që secila pikë është e baraslarguar nga dy pikat fqinje të saj. Këto pika etiketohen me numrat $0, 1, \ldots, n$ ashtu që secila etiketë është përdorur vetëm njëherë dhe dy etiketime konsierohen të njëjta, nëse njëra është fituar nga tjetra duke e rrotulluar rrethin. Një etiketim do të quhet i *bukur* nëse për çdo katër etiketa $a < b < c < d$ të tilla që $a + d = b + c$, korda e përcaktuar nga pikat e etiketuara me a dhe d nuk e pret kordën e përcaktuar nga pikat e etiketuara me b dhe c.

Le të jetë M numri i etiketimeve të bukura, kurse N numri i dysheve të renditura (x, y) i numrave natyralë ashtu që $x + y \leq n$ dhe $\operatorname{pmp}(x, y) = 1$. Tregoni se

$$M = N + 1.$$

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlerësohet me 7 pikë