International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום שני, 18 ביולי 2011

שאלה 1. לכל קבוצה $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ של ארבעה מספרים שלמים חיוביים שונים בזוגות, נסמן את הסכום $a_1+a_2+a_3+a_4$ ב- s_A. נסמן ב- n_A את כמות זוגות האינדקסים (i,j), $1\le i<j\le 4$, עבורם a_i+a_j מחלק את s_A. מצא את כל הקבוצות A מסוג זה, עבורן n_A מקבל את הערך המקסימלי האפשרי.

שאלה 2. תהא S קבוצה סופית של נקודות במישור, בעלת שתי נקודות לפחות. נניח כי אף שלוש נקודות של S לא נמצאות על ישר אחד. **תחנת רוח** היא תהליך שמתחיל עם ישר ℓ שעובר דרך נקודה יחידה P מהקבוצה S. הישר מסתובב עם כיוון השעון מסביב לנקודה P, שתקרא ה**מיסב**, עד לרגע הראשון בו הישר יכיל נקודה נוספת של S. נקודה זו, שתקרא Q, הופכת להיות המיסב החדש, והישר ממשיך להסתובב עם כיוון השעון מסביב ל-Q, עד לרגע הבא בו הישר יכיל שתי נקודות של S. התהליך ימשך כך לנצח.
הוכח כי ניתן לבחור נקודה P מ-S וישר ℓ דרך P, כך שתחנת הרוח שתתקבל תשתמש בכל נקודה מ-S כמיסב אינסוף פעמים.

שאלה 3. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))$$

לכל x,y ממשיים. הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\le 0$.

יום שלישי, 19 ביולי 2011

שאלה 4. יהא n שלם חיובי. נתונים מאזני כף ו-n משקולות שמשקליהן $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.
עלינו להניח את כל המשקולות על המאזניים בזו אחר זו, כך שהכף הימנית לעולם אינה כבדה יותר מהכף השמאלית. בכל צעד בוחרים משקולת שאינה על המאזניים, מניחים אותה על אחת הכפות, וממשיכים כך עד שכל המשקולות נמצאות על המאזניים.
מצא את מספר הדרכים השונות לבצע את המשימה.

שאלה 5. תהא f פונקציה מקבוצת השלמים לקבוצת השלמים החיוביים. נניח כי לכל m, n שלמים, ההפרש $f(m)-f(n)$ מתחלק ב-$f(m-n)$. הוכח כי לכל m, n שלמים שמקיימים $f(m) \leq f(n)$, המספר $f(n)$ מתחלק ב-$f(m)$.

שאלה 6. יהא ABC משולש חד-זוויות שחסום במעגל Γ. יהא ℓ ישר משיק למעגל Γ. נסמן ב-ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתקבלים על ידי שיקוף הישר ℓ ביחס לישרים BC, CA, AB בהתאמה. הוכח כי המעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ.