

12 juli 2006

**Opgave 1.** Zij  $ABC$  een driehoek en  $I$  het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Voor een punt  $P$  in het inwendige van de driehoek geldt:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Bewijs dat  $AP \geq AI$ , en dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als  $P = I$ .

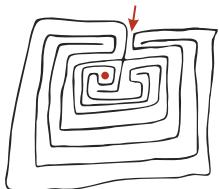
**Opgave 2.** Zij  $P$  een regelmatige 2006-hoek. Een diagonaal van  $P$  noemen we *goed* als zijn eindpunten de rand van  $P$  verdelen in twee stukken die beide bestaan uit een oneven aantal zijden van  $P$ . De zijden van  $P$  noemen we ook *goed*.

Stel dat  $P$  door 2003 diagonalen in driehoeken wordt verdeeld, zodanig dat geen twee diagonalen elkaar snijden in het inwendige van  $P$ . Bepaal het grootste aantal gelijkbenige driehoeken met twee goede zijden die in zo'n verdeling van  $P$  kunnen voorkomen.

**Opgave 3.** Bepaal het kleinste reële getal  $M$  zodanig dat voor alle reële getallen  $a, b$  en  $c$  de volgende ongelijkheid geldt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

*Beschikbare tijd:  $4\frac{1}{2}$  uur  
Voor iedere opgave maximaal 7 punten*



13 juli 2006

**Opgave 4.** Bepaal alle paren gehele getallen  $(x, y)$  zodanig dat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Opgave 5.** Zij  $P(x)$  een polynoom (veelterm) van graad  $n > 1$  met gehele coëfficiënten en zij  $k$  een positief geheel getal ( $k > 0$ ). Beschouw het polynoom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

waarin  $P$  precies  $k$  keer voorkomt.

Bewijs dat er ten hoogste  $n$  gehele getallen  $t$  zijn zodanig dat  $Q(t) = t$ .

**Opgave 6.** Zij  $P$  een convexe veelhoek. Aan elke zijde  $b$  van  $P$  wordt de maximale oppervlakte toegekend van een driehoek die  $b$  als een zijde heeft en bevat is in  $P$ .

Bewijs dat de som van alle oppervlaktes die zijn toegekend aan de zijden van  $P$  ten minste tweemaal zo groot is als de oppervlakte van  $P$ .

*Beschikbare tijd:  $4\frac{1}{2}$  uur  
Voor iedere opgave maximaal 7 punten*