maandag 21 september 2020

Opgave 1. Beschouw de convexe vierhoek $ABCD$. Het punt P ligt in het inwendige van $ABCD$. Gegeven is dat de volgende verhoudingen gelijk zijn:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Bewijs dat de volgende drie lijnen (rechten) door één punt gaan: de binnenbissectrice van hoek $\angle ADP$, de binnenbissectrice van hoek $\angle PCB$ en de middelloodlijn van lijnstuk AB.

Opgave 2. Gegeven zijn de reële getallen a, b, c, d waarvoor $a \geq b \geq c \geq d > 0$ en $a+b+c+d=1$. Bewijs dat

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Opgave 3. Gegeven zijn $4n$ stenen met gewichten $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Elke steen is gekleurd in één van de n gegeven kleuren en er zijn vier stenen van elke kleur. Bewijs dat de stenen in twee stapels verdeeld kunnen worden zodanig dat aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan::

- Het totale gewicht van de ene stapel is gelijk aan het totale gewicht van de andere stapel.
- Elk van beide stapels bevat twee stenen van elke kleur.

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

dinsdag 22 september 2020

Opgave 4. Gegeven is een geheel getal $n > 1$. Er zijn n^2 stations op een berghelling, allemaal op verschillende hoogtes. Er zijn twee firma's, A en B, die elk k kabelbanen beheren. Met elke kabelbaan kun je van een van de stations naar een hogergelegen station gaan (zonder tussenstops). De k kabelbanen van A hebben k verschillende beginpunten en k verschillende eindpunten, en een kabelbaan die hoger begint dan een andere, eindigt ook hoger. Hetzelfde geldt voor firma B. We zeggen dat twee stations door een firma *verbonden* zijn als je van het lagere naar het hogere station kunt gaan door alleen gebruik te maken van een of meer kabelbanen van die firma (geen andere bewegingen tussen de stations zijn toegestaan).

Bepaal het kleinste (strikt) positieve gehele getal k zodat je zeker weet dat er twee stations zijn die door de beide firma's verbonden zijn.

Opgave 5. Gegeven is een stapel van $n > 1$ kaarten. Op iedere kaart staat een (strikt) positief geheel getal. De stapel kaarten voldoet aan de eigenschap dat voor elk tweetal kaarten het rekenkundig gemiddelde van de getallen op deze kaarten gelijk is aan het meetkundig gemiddelde van de getallen op een of meerdere kaarten van de stapel.

Voor welke n volgt dat de getallen op de kaarten allemaal gelijk zijn?

Opgave 6. Bewijs dat er een (strikt) positieve constante c bestaat zodanig dat de volgende uitspraak waar is:

Beschouw een geheel getal $n > 1$ en een verzameling $\mathcal{S}$ van n punten in het vlak zodanig dat de afstand tussen elke twee verschillende punten in $\mathcal{S}$ minstens 1 is. Dan is er een lijn (rechte) ℓ die $\mathcal{S}$ verdeelt zodanig dat de afstand van elk punt van $\mathcal{S}$ tot ℓ minstens $cn^{-1/3}$ is.

(Een lijn ℓ *verdeelt* een verzameling punten $\mathcal{S}$ als er een lijnstuk tussen punten van $\mathcal{S}$ is dat ℓ snijdt.)

Opmerking. Zwakkere resultaten waarbij $cn^{-1/3}$ vervangen is door $cn^{-\alpha}$ kunnen beloond worden met punten afhankelijk van de waarde van de constante $\alpha > 1/3$.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.