Dinsdag, 15. Julie 2025

Probleem 1. ’n Lyn in die vlak word *sonnig* genoem as dit **nie** parallel aan die x-as, die y-as, of die lyn $x + y = 0$ is **nie**.

Laat $n \geq 3$ ’n gegewe heelgetal wees. Bepaal alle nie-negatiewe heelgetalle k sodanig dat daar n verskillende lyne in die vlak bestaan sodanig dat albei die volgende voorwaardes geld:

- vir alle positiewe heelgetalle a en b met $a + b \leqslant n + 1$, lê die punt (a, b) op ten minste een van die lyne; en
- presies k van die n lyne is sonnig.

Probleem 2. Laat Ω en Γ sirkels wees met middelpunte M en N onderskeidelik sodanig dat die radius van Ω kleiner is dan die radius van Γ. Neem aan dat die sirkels Ω en Γ mekaar sny in twee verskillende punte A en B. Die lyn MN sny Ω in C en Γ in D, sodanig dat die punte C, M, N en D in daardie volgorde op die lyn lê. Laat P die middelpunt van die omgeskrewe sirkel van die driehoek ACD wees. Die lyn AP sny Ω weer in $E \neq A$. Die lyn AP sny Γ weer in $F \neq A$. Laat H die hoogtesnypunt van die driehoek PMN wees.

Bewys dat die lyn deur H parallel aan AP die omgeskrewe sirkel van die driehoek BEF raak.

(Die *hoogtesnypunt* van ’n driehoek is die punt waar die hoogtelyne van die driehoek mekaar sny.)

Probleem 3. Laat $\mathbb{N}$ die versameling van positiewe heelgetalle aandui. ’n Funksie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ word *nca* genoem as

$$f(a) \ \text{ ’n deler is van } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

vir alle positiewe heelgetalle a en b.

Bepaal die kleinste reële konstant c sodanig dat $f(n) \leqslant cn$ geld vir alle nca funksies f en alle positiewe heelgetalle n.

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.

Woensdag, 16. Julie 2025

Probleem 4. ’n *Streng deler* van ’n positiewe heelgetal N is ’n deler van N wat nie gelyk is aan N nie.

Die oneindige ry $a_1, a_2, \ldots$ bevat positiewe heelgetalle waar elkeen ten minste drie strenge delers het. Vir elke $n \geqslant 1$ is die heelgetal a_{n+1} die som van die drie grootste streng delers van a_n.

Bepaal al die moontlike waardes van a_1.

Probleem 5. Tannie Antjie en oom Bertus speel die *krokodilspel*: a twee-speler spel waar die reëls aan ’n positiewe reële getal λ afhang wat bekend is aan albei spelers. Op die n^{de} beurt van die spel (vanaf $n = 1$) gebeur die volgende:

- As n onewe is kies Antjie ’n nie-negatiewe reële getal x_n sodanig dat

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- As n ewe is kies Bertus ’n nie-negatiewe reële getal x_n sodanig dat

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

As ’n speler nie ’n passende getal x_n kan kies nie dan eindig die spel en die ander speler wen. As die spel vir ewig aangaan dan wen geen van die spelers nie. Al die gekiese getalle is bekend aan beide spelers.

Bepaal al die waardes van λ waarvoor Antjie kan verseker dat sy wen, en al die waardes van λ waarvoor Bertus kan verseker dat hy wen.

Probleem 6. Beskou ’n 2025×2025 rooster van eenheidsvierkante. Marelize wil reghoekige teëls op die rooster plaas, miskien met verskillende afmetings, sodanig dat elke sy van elke teël op ’n roosterlyn lê en sodanig dat elke vierkant van die rooster deur nie meer dan een teël bedek word nie.

Bepaal die kleinste hoeveelheid teëls dat Marelize moet plaas sodanig dat elke ry en elke kolom van die rooster precies een eenheidsvierkant bevat dat nie deur enige teël bedek is nie.

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.