



Երկուշաբթի, 18 հուլիսի, 2011թ.

Խնդիր 1: Տրված է չորս զույգ առ զույգ իրարից տարբեր դրական ամբողջ թվերից կազմված $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ բազմությունը, նշանակենք s_A -ով $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ գումարը: n_A -ով նշանակենք այն բոլոր (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$, զույգերի քանակը, որոնց համար s_A -ն բաժանվում է $a_i + a_j$ -ի: Գտնել այն բոլոր A բազմությունները, որոնց կազմված են չորս զույգ առ զույգ իրարից տարբեր դրական ամբողջ թվերից, որոնց համար n_A -ն ընդունում է հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Խնդիր 2: Դիցուք \mathbf{S} -ը հարթության կետերի վերջավոր բազմություն է, որը պարունակում է գոնե երկու կետ: Հայտնի է, որ \mathbf{S} բազմության ցանկացած երեք կետեր մի ողիղ վրա չեն գտնվում: *Աղաց* կանվանենք հետևյալ պրոցեսին: Ակզրում ընտրում ենք l ուղիղը, որի վրա գտնվում է \mathbf{S} բազմության ձիշտ մեկ P կետ: l ուղիղը պտտենք ժամացույցի ալաքի պտտման ուղղությամբ P կետի շուրջը այնքան ժամանակ, մինչև այն առաջին անգամ կհանդիպի \mathbf{S} բազմության մեկ այլ կետի: Այդ պահին այդ կետը, այն նշանակենք Q -ով, դառնում է պտույտի նոր կենտրոնը, և l ուղիղը շարունակում է պտտվել ժամացույցի ալաքի պտտման ուղղությամբ այնքան ժամանակ, քանի դեռ այն չի հանդիպել \mathbf{S} բազմության նոր կետի: Այս պրոցեսը անվերջ շարունակվում է:

Ապացուցելոր կարելի է ընտրել \mathbf{S} բազմության այնպիսի P կետ և այնպիսի l ուղիղ, որն անցնում է P կետով, և այն աղացում, որը սկսվում է l ուղղով, \mathbf{S} բազմության յուրաքանչյուր կետ անվերջ անգամ է հանդես գալիս որպես պտույտի կենտրոն:

Խնդիր 3: Դիցուք f ֆունկցիան, որոշված է իրական թվերի բազմության վրա և ընդունում է իրական արժեքներ, այնպիսին է, որ $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ բոլոր իրական x և y թվերի համար: Ապացուցել, որ $f(x)=0$, բոլոր $x \leq 0$ թվերի համար:



Երեքարթի, 19 հունիսի, 2011թ

Խնդիր 4: Տրված է $n > 0$ ամբողջ թիվը: Ունենք նժարավոր կշեռք և n կշռաքարեր, որոնց կշիռները հավասար են $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$: Կատարվում է n քայլերից կազմված գործողություն, որի ընթացքում բոլոր կշռաքարերը հերթականությամբ դրվում են կշեռքի վրա: Յուրաքանչյուր քայլում ընտրվում է մնացած կշռաքարերից ցանկացածը և այն դնում ենք կամ ձախ նժարի վրա, կամ աջ նժարի վրա: Գտնել n քայլերից կազմված այն բոլոր հնարավոր գործողությունների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար ցանկացած քայլում աջ նժարը չի գերակշռել ձախ նժարին:

Խնդիր 5: Դիցուք f ֆունկցիան, որոշված է ամբողջ թվերի բազմության վրա և ընդունում է դրական ամբողջ արժեքներ: Հայտնի է, որ ցանկացած m և n ամբողջ թվերի համար $f(m) - f(n)$ թիվը բաժանվում է $f(m - n)$ -ի: Ապացուցել, որ եթե m և n այնպիսի ցանկացած թվեր են, որ $f(m) \leq f(n)$, ապա $f(n) - f(m)$ թիվը բաժանվում է $f(n) - f(m)$ -ի:

Խնդիր 6: Դիցուք ABC -ն սուրանկյուն եռանկյուն է, և Γ -ն այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծն է: Դիցուք ℓ ուղիղը Γ շրջանագծի որևէ շոշափող է, իսկ ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c ուղիղները, ℓ ուղղի սիմետրիկ ուղիղներն են համապատասխանաբար BC, CA և AB ուղիղների նկատմամբ: Ապացուցել, որ ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c ուղիղների վրա կողմեր ունեցող եռանկյանն արտագծած շրջանագծը շոշափում է Γ շրջանագիծը: