

2006. július 12.

1. Feladat Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I . A háromszög P belső pontja kielégíti a

$$PBA\triangleleft + PCA\triangleleft = PBC\triangleleft + PCB\triangleleft$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \geq AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

2. Feladat Legyen P egy szabályos 2006-szög. P egy átlóját *jónak* nevezzük, ha a végpontjai P határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike P páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jónak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy P -t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja P belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

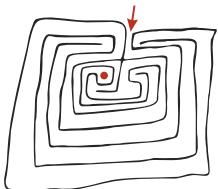
3. Feladat Határozzuk meg a legkisebb olyan M valós számot, amire az

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden a, b, c valós számra.

Munkaidő: 4 és fél óra.

Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.



2006. július 13.

- 4. Feladat** Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló (x, y) számpárt, amire teljesül

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

- 5. Feladat** Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ polinomot, ahol P k -szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.

- 6. Feladat** Egy P konvex sokszög mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P -ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese P területének.

Munkaidő: 4 és fél óra.

Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.