Utorak, 16. srpnja 2019.

Zadatak 1. Neka je $\mathbb{Z}$ skup svih cijelih brojeva. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da, za sve cijele brojeve a i b, vrijedi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Zadatak 2. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC dane su točke A_1 i B_1, redom. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, redom, takve da su pravci PQ i AB paralelni. Neka je P_1 točka na pravcu PB_1 takva da točka B_1 leži strogo između točaka P i P_1 te da je $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Neka je Q_1 točka na pravcu QA_1 takva da točka A_1 leži strogo između točaka Q i Q_1 te da je $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Dokaži da su točke P, Q, P_1 i Q_1 konciklične.

Zadatak 3. Neka društvena mreža ima 2019 korisnika i neki parovi korisnika su prijatelji. Ako je A prijatelj korisniku B, onda je i B prijatelj korisniku A. Sljedeći događaji mogu se ponavljati jedan za drugim, ali ne istovremeno:

> Tri korisnika A, B i C, takva da su B i C prijatelji korisniku A, ali B i C nisu prijatelji, mijenjaju svoje statuse prijateljstava tako da su B i C sada prijatelji, ali A više nije prijatelj korisniku B, niti korisniku C. Svi ostali statusi prijateljstava ostaju nepromijenjeni.

Na početku, 1010 korisnika ima po 1009 prijatelja i 1009 korisnika ima po 1010 prijatelja. Dokaži da postoji niz opisanih događaja nakon kojega svaki korisnik ima najviše jednog prijatelja.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Srijeda, 17. srpnja 2019.

Zadatak 4. Odredi sve parove (k, n) prirodnih brojeva takve da je

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Zadatak 5. Banka Batha izdaje kovanice kojima se na jednoj strani nalazi H, a na drugoj T. Borna ima n takvih kovanica poredanih u niz slijeva nadesno te započinje proces sljedećih poteza: ako točno $k > 0$ kovanica pokazuje H, k-tu kovanicu slijeva okreće na drugu stranu; u suprotnom sve kovanice pokazuju T i proces staje. Na primjer, ako je $n = 3$, proces koji započinje konfiguracijom THT je $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ te on staje nakon 3 poteza.

(a) Dokaži da, za svaku početnu konfiguraciju, proces staje nakon konačno mnogo poteza.

(b) Za svaku početnu konfiguraciju C, neka je $L(C)$ broj poteza potrebnih da proces stane. Na primjer, za $n = 3$ je $L(THT) = 3$ i $L(TTT) = 0$. Odredi aritmetičku sredinu brojeva $L(C)$ po svih 2^n mogućnosti početne konfiguracije C.

Zadatak 6. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|AB| \neq |AC|$ te neka je I središte njegove upisane kružnice ω. Kružnica ω dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama D, E i F, redom. Pravac kroz točku D okomit na pravac EF siječe kružnicu ω ponovno u točki R. Pravac AR siječe kružnicu ω ponovno u točki P. Kružnice opisane trokutima PCE i PBF sijeku se ponovno u točki Q.

Dokaži da se pravci DI i PQ sijeku na pravcu kroz točku A okomitom na pravac AI.