



วันพุธที่ ๗ กรกฎาคม ๒๕๕๓

โจทย์ข้อ ๑ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in \mathbb{R}$$

(ในที่นี้ สัญลักษณ์ $[z]$ หมายถึงจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ z)

โจทย์ข้อ ๒ ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC และ ให้ Γ เป็นวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ให้เส้นตรง AI ตัด Γ อีกครั้งที่จุด D ให้ E เป็นจุดบนส่วนโค้ง \widehat{BDC} และ F เป็นจุดบนด้าน BC โดยที่

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$

และให้ G เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรง IF

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง DG และ EI ตัดกันบน Γ

โจทย์ข้อ ๓ ให้ \mathbb{N} เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จงหาฟังก์ชัน $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ทั้งหมด ซึ่ง

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

เป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$



วันพฤหัสบดีที่ ๘ กรกฎาคม ๒๕๕๓

โจทย์ข้อ ๔ ให้ P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ABC เส้นตรง AP, BP, CP ตัดวงกลม Γ ซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC อีกครั้งที่จุด K, L และ M ตามลำดับ เส้นสัมผัส Γ ที่จุด C ตัดเส้นตรง AB ที่จุด S สมมติให้ $SC = SP$ จงพิสูจน์ว่า $MK = ML$

โจทย์ข้อ ๕ ในกล่อง $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ เริ่มต้นมีเหรียญอยู่กล่องละหนึ่งเหรียญ มีการดำเนินการสองแบบที่อนุญาตให้ทำได้ ดังนี้

แบบที่ 1: เลือกกล่อง B_j ซึ่ง $1 \leq j \leq 5$ ที่ไม่ว่างเปล่า หยิบเหรียญหนึ่งเหรียญออกจาก B_j

และ ใส่เหรียญสองเหรียญลงใน B_{j+1}

แบบที่ 2: เลือกกล่อง B_k ซึ่ง $1 \leq k \leq 4$ ที่ไม่ว่างเปล่า หยิบเหรียญหนึ่งเหรียญออกจาก B_k

และ สลับทุกอย่างในกล่อง B_{k+1} และ B_{k+2} (ซึ่งอาจว่างเปล่า)

จงหาว่า มีลำดับจำกัดของการดำเนินการดังกล่าวหรือไม่ ที่ทำให้กล่อง B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ว่างเปล่า และกล่อง B_6 มีเหรียญอยู่ $2010^{2010^{2010}}$ เหรียญพอดี

(หมายเหตุ: สัญลักษณ์ a^{b^c} หมายถึง $a^{(b^c)}$)

โจทย์ข้อ ๖ ให้ a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก s ที่ทำให้

$$a_n = \max \{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\} \quad \text{สำหรับทุก } n > s$$

จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก ℓ และ N ซึ่ง $\ell \leq s$ และทำให้ $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ สำหรับทุก $n \geq N$