เสาร์, 8. กรกฎาคม 2023

โจทย์ข้อ 1. จงหาจำนวนประกอบ $n > 1$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมบัติดังนี้: ถ้า $d_1, d_2, \ldots, d_k$ เป็นตัวหาร-บวกทั้งหมดของ n โดย $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ แล้ว d_i หาร $d_{i+1} + d_{i+2}$ ลงตัว สำหรับทุก $1 \leqslant i \leqslant k-2$

โจทย์ข้อ 2. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม โดยที่ $AB < AC$ ให้ Ω เป็นวงกลมล้อมรอบรูปสาม-เหลี่ยม ABC ให้ S เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง CB ของ Ω ฝั่งที่มี A เส้นตรงจากจุด A ที่ตั้งฉากกับ BC ตัดกับ BS ที่ D และตัดกับ Ω อีกครั้งที่ $E \neq A$ เส้นตรงที่ผ่านจุด D และขนานกับ BC ตัดกับเส้นตรง BE ที่ L ให้วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม BDL แทนด้วย ω ให้ ω ตัดกับ Ω อีกครั้งที่จุด $P \neq B$
จงแสดงว่าเส้นตรงที่สัมผัสกับ ω ที่ P ตัดกับเส้นตรง BS บนเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของ $\angle BAC$

โจทย์ข้อ 3. สำหรับจำนวนเต็ม $k \geqslant 2$ แต่ละตัว จงหาลำดับอนันต์ทั้งหมดของจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, \ldots$ ที่มีสมบัติว่า มีพหุนาม P ในรูป $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ โดย $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geqslant 1$

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน

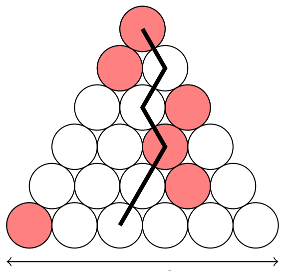
อาทิตย์, 9. กรกฎาคม 2023

โจทย์ข้อ 4. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ เป็นจำนวนจริงบวกที่แตกต่างกันทุกคู่ ที่ทำให้

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

เป็นจำนวนเต็มสำหรับทุก $n = 1, 2, \ldots, 2023$ จงแสดงว่า $a_{2023} \geqslant 3034$

โจทย์ข้อ 5. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก *รูปสามเหลี่ยมญี่ปุ่น* ประกอบด้วยวงกลมจำนวน $1 + 2 + \cdots + n$ วง วางเรียงกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยที่สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้ว่าแถวที่ i มีวงกลม i วงพอดี และแต่ละแถวมีหนึ่งวงพอดีที่เป็นสีแดง *วิถีนินจา* ในรูปสามเหลี่ยมญี่ปุ่น คือลำดับของวงกลมจำนวน n วง ที่ได้จากการเริ่มต้นที่แถวบนสุด แล้วเคลื่อนที่จากวงกลมหนึ่ง ไปยังหนึ่งในวงกลมสองวงในแถวล่างที่ติดกับวง-กลมดังกล่าว ทำซ้ำเช่นนี้ไปจนสิ้นสุดที่แถวล่างสุด รูปต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสามเหลี่ยมญี่ปุ่นเมื่อ $n = 6$ และ วิถีนินจาที่มีวงกลมสีแดงสองวง



จงหาค่ามากสุดที่เป็นไปได้ของ k ในรูปของ n ที่มีสมบัติว่า รูปสามเหลี่ยมญี่ปุ่นแต่ละรูปจะมีวิถีนินจาที่มีวงกลมสีแดงอย่างน้อย k วง

โจทย์ข้อ 6. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ให้ A_1, B_1, C_1 เป็นจุดภายในของ ABC ที่ทำให้ $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ และ

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

ให้ BC_1 และ CB_1 ตัดกันที่ A_2 ให้ CA_1 และ AC_1 ตัดกันที่ B_2 และให้ AB_1 และ BA_1 ตัดกันที่ C_2

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A_1B_1C_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า แล้ววงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม AA_1A_2, BB_1B_2 และ CC_1C_2 ทั้งสามวง ผ่านจุดร่วมกันสองจุด

(หมายเหตุ: รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า คือรูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีด้านสองด้านใดมีความยาวเท่ากัน)

Language: Thai

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน