

יום שלישי, 15 ביולי 2025

**שאלה 1.** ישר במישור יקרא **שמשי** אם הוא לא מקביל לציר ה- $x$ , לציר ה- $y$ , או לישר  $0 = x + y$ . נתון  $3 \geq n$  שלם. מצאו את כל השלמים האי-שליליים  $k$  עבורם קיימים  $n$  ישרים שונים במישור אשר מקיימים את שתי התכונות הבאות:

- לכל זוג שלמים חיוביים  $a$  ו- $b$  המקיימים  $a + b \leq n + 1$ , הנקודה  $(a, b)$  נמצאת על לפחות אחד מהישרים; וגם
- בדיקות  $k$  מתוך  $n$  הישרים הם ממשיים.

**שאלה 2.** יהיו  $\Omega$ -ו- $\Gamma$  מעגלים עם מרכזים  $M$  ו- $N$  בהתחאה, עبورם הרדיוס של  $\Omega$  קטן מהרדיוס של  $\Gamma$ . נתון כי המעגלים  $\Omega$ -ו- $\Gamma$  נחתכים בשתי נקודות שונות  $A$  ו- $B$ . נסמן ב- $C$ - $D$  נקודות חיתוך של הישר  $MN$  עם המעגלים  $\Omega$  ו- $\Gamma$  בהתחאה, כך שהנקודות  $C, M, N, D$  נמצאות על הישר בסדר זהה. נסמן ב- $P$  את מרכזו המעגל החוסם של המשולש  $ACD$ . הישר  $AP$  פוגש את  $\Omega$  בשנית בנקודה  $E$  השונה מ- $A$ , ופוגש את  $\Gamma$  בשנית בנקודה  $F$  השונה מ- $A$ . נסמן ב- $H$  את מפגש הגבהים במשולש  $PMN$ . הוכיחו כי הישר דרך  $H$  אשר מקביל ל- $AP$  משיק למעגל החוסם של המשולש  $BEF$ .

**שאלה 3.** נסמן ב- $\mathbb{N}$  את קבוצת השלמים החיוביים. פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  תקרא **בונזה** אם

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ מחלק את } f(a)$$

לכל זוג שלמים חיוביים  $a$  ו- $b$ .

מצאו את המספר ממשי הקטן ביותר  $c$  עבורו מתקיים  $f(n) \leq cn$  לכל פונקציה בונזה  $f$  ולכל שלם חיובי  $n$ .

יום רביעי, 16 ביולי 2025

**שאלה 4.** מחלקת תקני של שלם חיובי  $N$  הינו מחלקת חיובי של  $N$  אשר שונה מ- $N$  עצמו. בסדרה אינסופית של שלמים חיובים  $\dots, a_1, a_2, \dots$  מתקיים שכל איבר יש לפחות שלושה מחולקים תקניים. לכל  $1 \geq n$  שלם מתקיים  $a_{n+1}$  שהואסכום של שלושת המחלקים התקניים הגדולים ביותר של  $a_n$ . מצאו את כל הערכים האפשריים של  $a_1$ .

**שאלה 5.** איילה וברווזן משחקים במשחק*אי-שיומבט*, שהוקו תלוים במספר ממשי חיובי  $\lambda$  אשר ידוע לשני השחקנים. לכל  $1 \geq n$ , בתור ה- $n$  של המשחק מתבצעת אחת משתי הפעולות הבאות:

- אם  $n$  אי-זוגי, איילה בוחרת מספר ממשי אי-שלילי  $x$  כך שמתקיים

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n$$

- אם  $n$  זוגי, ברווזן בוחר מספר ממשי אי-שלילי  $x$  כך שמתקיים

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$$

אם שחקן כלשהו לא מסוגל לבחור  $x$  כנדרש, המשחק מסתיים והשחקן השני מנצח. אם המשחק נמשך לנצח, אף שחקן לא מנצח. כל המספרים הנבחרים ידועים לשני השחקנים.

מצאו את כל הערכים של  $\lambda$  עבורם לאיילה יש אסטרטגיה מנצחת, ואת כל הערכים עבורם לברווזן יש אסטרטגיה מנצחת.

**שאלה 6.** נתון לוח משבצות בגודל  $2025 \times 2025$ . היקף הלוח והקווים אשר מפרידים בין המשבצות יקרוו קווי הרשת. מטilda רוצה לרצף חלק מהלוח באירועים מלכניים, אולי בגודלים שונים, כך שכל צלעות האירועים מונחות על קווי הרשת וכל משבצת מכוסה על ידי אריה אחד לכל היותר.

מצאו את הכמות הקטנה ביותר האפשרית של אירועים שמטilda תצטרך למקום, כך שבכל שורה ובכל עמודה של הלוח תהיה משבצת אחת בדיקוק אשר אינה מכוסה על ידי אף אריה.