Ponedjeljak, 9. juli 2018.

1. zadatak. Neka je Γ opisana kružnica oštrouglog trougla ABC. Tačke D i E nalaze se na dužima AB i AC, redom, tako da važi $AD = AE$. Simetrale duži BD i CE sijeku kraće lukove AB i AC kružnice Γ u tačkama F i G, redom. Dokazati da su prave DE i FG paralelne (ili jednake).

2. zadatak. Naći sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje postoje realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, takvi da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ i

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. zadatak. Antipaskalov trougao je tablica u obliku jednakostraničnog trougla koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem redu, važi da je svaki broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koja su neposredno ispod njega. Na primjer, sljedeća tablica je antipaskalov trougao sa četiri reda, koji se sastoji od prirodnih brojeva od 1 do 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Da li postoji antipaskalov trougao sa 2018 redova koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Utorak, 10. juli 2018.

4. zadatak. Pozicija je svaka tačka (x, y) u ravni takva da su x i y prirodni brojevi ne veći od 20.

Na početku, svaka od 400 pozicija je slobodna. Ana i Berin igraju igru u kojoj naizmjenično povlače poteze, pri čemu Ana igra prva. U svakom svom potezu Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju tako da je rastojanje između svake dvije pozicije na kojima se nalazi crveni kamenčić različito od $\sqrt{5}$. U svakom svom potezu Berin postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kom rastojanju od drugih pozicija na kojima se nalazi neki kamenčić.) Igra se završava kada neko od njih ne može povući potez.

Odrediti najveće K tako da Ana sigurno može postaviti barem K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Berin postavlja plave kamenčiće.

5. zadatak. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $N > 1$ takav da je za sve $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

cio broj.

Dokazati da postoji prirodan broj M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m \geqslant M$.

6. zadatak. Neka je $ABCD$ konveksan četverougao takav da je $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Tačka X leži u unutrašnjosti četverougla $ABCD$ tako da važi

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{i} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Dokazati da je $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180°$.