понедјељак, 11. јули 2022

Задатак 1. Банка у Ослу користи двије врсте кованица: алуминијске (означене са A) и бакрене (означене са B). Шеф има n алуминијских и n бакрених кованица, поређаних у низ у произвољном поретку. *Ланац* је било који подниз узастопних кованица исте врсте. За дати фиксни природан број $k \leqslant 2n$, Шеф понавља идућу операцију: он проналази најдужи ланац који садржи k-ту кованицу са лијеве стране и помјера све кованице у том ланцу на лијеви крај низа. На примјер, за $n = 4$ и $k = 4$, полазећи од низа $AABBBABA$ процес би изгледао овако:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Одредити све парове (n, k), гдје је $1 \leqslant k \leqslant 2n$, такве да за сваки почетни низ Шеф, у неком тренутку током извођења операција, долази до ситуације у којој је првих n кованица са лијеве стране исте врсте.

Задатак 2. Означимо са $\mathbb{R}^+$ скуп позитивних реалних бројева. Одредити све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за свако $x \in \mathbb{R}^+$, постоји тачно једно $y \in \mathbb{R}^+$ за које вриједи

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задатак 3. Нека је k природан број и нека је S коначан скуп који се састоји од непарних простих бројева. Доказати да постоји највише један начин (до на ротацију и осну симетрију) да распоредимо елементе скупа S на кружницу тако да производ било која два сусједна броја има облик $x^2 + x + k$ за неки природан број x.

Language: Serbian (BIH)

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

уторак, 12. јули 2022

Задатак 4. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао у којем је $BC = DE$. Унутар петоугла $ABCDE$ налази се тачка T таква да вриједи $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Нека права AB сијече праве CD и CT у тачкама P и Q, редом. Претпоставимо да се тачке P, B, A и Q појављују у том редослиједу на правој на којој леже. Нека права AE сијече праве CD и DT у тачкама R и S, редом. Претпоставимо да се тачке R, E, A и S појављују у том редослиједу на правој на којој леже. Доказати да тачке P, S, Q и R леже на истој кружници.

Задатак 5. Одредити све тројке (a, b, p) природних бројева, такве да је p прост број и вриједи

$$a^p = b! + p.$$

Задатак 6. Нека је n природан број. *Нордијски квадрат* је табела димензија $n \times n$ у коју су уписани сви природни бројеви од 1 до n^2 тако да је у свако поље табеле уписан тачно један број. Два поља табеле су сусједна ако имају заједничку страницу. Свако поље које је сусједно само са пољима која садрже веће бројеве назива се *долина*. *Узбрдица* је низ од једног или више поља табеле такав да вриједе сљедећа три услова:

(i) прво поље у низу је долина,

(ii) свака два узастопна поља у низу су сусједна поља у табели, и

(iii) бројеви уписани у пољима низа су у растућем поретку.

Одредити, у функцији од броја n, најмању могућу вриједност укупног броја узбрдица у нордијском квадрату.