Maanantaina 11. heinäkuuta 2016

Tehtävä 1. Kolmiolla BCF on suora kulma kärjessä B. Olkoon A piste suoralla CF siten, että $FA = FB$ ja piste F sijaitsee pisteiden A ja C välissä. Valitaan piste D siten, että $DA = DC$ ja AC puolittaa kulman $\angle DAB$. Valitaan piste E siten, että $EA = ED$ ja AD puolittaa kulman $\angle EAC$. Olkoon M janan CF keskipiste. Olkoon X se piste, jolla $AMXE$ on suunnikas (missä $AM \parallel EX$ ja $AE \parallel MX$). Osoita, että suorat BD, FX ja ME kulkevat saman pisteen kautta.

Tehtävä 2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $n \times n$-ruudukon jokaiseen ruutuun voi asettaa yhden kirjaimista I, M ja O siten, että:

- jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia; ja
- jokaisella lävistäjällä, jolla ruutujen lukumäärä on kolmella jaollinen, yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia.

Huomautus: Numeroimme $n \times n$-ruudukon rivit ja sarakkeet luonnollisella tavalla luvuilla 1, 2, ..., n. Täten jokainen ruutu vastaa positiivisten kokonaislukujen paria (i, j), missä $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Kun $n > 1$, ruudukossa on $4n - 2$ *lävistäjää*, jotka edustavat kahta eri lajia. Ensimmäisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), joissa $i + j$ on jokin vakio, kun taas toisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), missä $i - j$ on jokin vakio.

Tehtävä 3. Olkoon $P = A_1A_2 \ldots A_k$ tason konveksi monikulmio. Kärkien A_1, A_2, ..., A_k koordinaatit ovat kokonaislukuja ja ne sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Olkoon S monikulmion P ala. On annettu pariton positiivinen kokonaisluku n siten, että monikulmion P sivujen pituuksien neliöt ovat kokonaislukuja ja jaollisia luvulla n. Osoita, että $2S$ on kokonaisluku ja jaollinen luvulla n.

Tiistaina 12. heinäkuuta 2016

Tehtävä 4. Positiivisista kokonaisluvuista koostuva joukko on *sulotuoksuinen*, jos se sisältää ainakin kaksi alkiota ja jokaisella sen alkioista on yhteinen alkulukutekijä ainakin yhden toisen alkion kanssa. Olkoon $P(n) = n^2 + n + 1$. Mikä on pienin mahdollinen positiivisen kokonaisluvun b arvo, jolla on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku a siten, että joukko

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

on sulotuoksuinen?

Tehtävä 5. Liitutaululle kirjoitetaan yhtälö

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

missä kummallakin puolella on 2016 lineaarista tekijää. Mikä on pienin mahdollinen k, jolla on mahdollista pyyhkiä pois täsmälleen k kappaletta näistä 4032 lineaarisesta tekijästä siten, että yhtälön kummallekin puolelle jää jäljelle ainakin yksi tekijä ja että lopputuloksena syntyvällä yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuita?

Tehtävä 6. Tasossa on $n \geqslant 2$ janaa siten, että mitkä tahansa kaksi janaa leikkaavat toisensa, ja mitkään kolme janaa eivät kulje saman pisteen kautta. Geoffin on valittava jokaisesta janasta toinen sen päätepisteistä ja asetettava sille sammakko niin, että se katsoo janan toista päätepistettä. Sitten hän taputtaa käsiään $n-1$ kertaa. Joka kerta, kun hän taputtaa, jokainen sammakko välittömästi hyppää eteenpäin janansa seuraavalle leikkauspisteelle. Mikään sammakoista ei koskaan vaihda hyppysuuntaansa. Geoff haluaisi asettaa sammakot siten, että mitkään kaksi niistä eivät milloinkaan ole samassa leikkauspisteessä samaan aikaan.

(a) Osoita, että Geoff voi aina toteuttaa toivomuksensa kun n on pariton.

(b) Osoita, että Geoff ei koskaan voi toteuttaa toivomustaan kun n on parillinen.