Τρίτη, 15 Ιουλίου 2025

Πρόβλημα 1. Μια ευθεία στο επίπεδο ονομάζεται *ηλιόλουστη* αν **δεν** είναι παράλληλη προς τον άξονα των x, τον άξονα των y, ή προς την ευθεία $x + y = 0$.

Δεδομένου ακεραίου $n \geqslant 3$, να προσδιορίσετε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους k για τους οποίους υπάρχουν n διακεκριμένες ευθείες του επιπέδου, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες:

- Για όλους τους θετικούς ακεραίους a και b, με $a + b \leqslant n + 1$, το σημείο (a, b) ανήκει σε τουλάχιστον μία από τις ευθείες.
- Ακριβώς k από τις n ευθείες είναι ηλιόλουστες.

Πρόβλημα 2. Θεωρούμε τους κύκλους Ω και Γ με κέντρα τα σημεία M και N, αντίστοιχα, ώστε η ακτίνα του Ω να είναι μικρότερη της ακτίνας του Γ. Υποθέτουμε ότι οι κύκλοι Ω και Γ τέμνονται σε δύο διακεκριμένα σημεία A και B. Η ευθεία MN τέμνει τον Ω στο σημείο C και τον Γ στο σημείο D, ώστε τα σημεία C, M, N και D να βρίσκονται στην ευθεία με αυτήν τη σειρά. Έστω P το περίκεντρο του τριγώνου ACD. Η ευθεία AP τέμνει τον Ω στο σημείο $E \neq A$ και τον Γ στο σημείο $F \neq A$. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου PMN.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το H και είναι παράλληλη στην AP εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BEF.

(Το *ορθόκεντρο* ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.)

Πρόβλημα 3. Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων. Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ονομάζεται *υπέροχη* αν

$$f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$.

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της πραγματικής σταθεράς c, ώστε να ισχύει ότι $f(n) \leqslant cn$, για κάθε υπέροχη συνάρτηση f και κάθε θετικό ακέραιο n.

Τετάρτη, 16 Ιουλίου 2025

Πρόβλημα 4. Ένας *γνήσιος διαιρέτης* του θετικού ακεραίου N είναι ένας θετικός ακέραιος που διαιρεί τον N χωρίς να ισούται με αυτόν.

Δίνεται μια άπειρη ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$ αποτελούμενη από θετικούς ακεραίους, καθένας εκ των οποίων έχει τουλάχιστον τρεις γνήσιους διαιρέτες. Για κάθε $n \geqslant 1$, ο a_{n+1} είναι το άθροισμα των τριών μεγαλύτερων γνήσιων διαιρετών του a_n.

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του a_1.

Πρόβλημα 5. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο *κοαλοπαιχνίδι ανισοτήτων*, το οποίο βασίζεται σε έναν θετικό πραγματικό αριθμό λ, τον οποίο γνωρίζουν και οι δύο παίκτες. Στον n-οστό γύρο του παιχνιδιού, οι κανόνες προβλέπουν τα εξής:

- Αν ο n είναι περιττός, η Αλίκη επιλέγει έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x_n, ώστε

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Αν ο n είναι άρτιος, ο Βασίλης επιλέγει έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x_n, ώστε

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Αν κάποιος παίκτης δεν μπορεί να επιλέξει κατάλληλο αριθμό x_n, το παιχνίδι τελειώνει και ο αντίπαλος παίκτης κερδίζει. Αν το παιχνίδι συνεχίζεται επ' άπειρον, δεν έχουμε νικητή. Όλες οι επιλογές των παικτών είναι φανερές και στον αντίπαλο παίκτη.

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες η Αλίκη έχει στρατηγική νίκης και όλες τις τιμές του λ για τις οποίες ο Βασίλης έχει στρατηγική νίκης.

Πρόβλημα 6. Θεωρούμε ένα 2025×2025 πλέγμα μοναδιαίων τετραγώνων. Η Ματίλντα θέλει να τοποθετήσει πάνω στο πλέγμα κάποια ορθογώνια πλακίδια, ενδεχομένως διαφορετικών διαστάσεων, ώστε οι πλευρές κάθε πλακιδίου να ανήκουν σε κάποιες από τις γραμμές του πλέγματος και κάθε μοναδιαίο τετράγωνο του πλέγματος να καλύπτεται το πολύ από ένα πλακίδιο.

Να προσδιορίσετε το ελάχιστο δυνατό πλήθος πλακιδίων που χρειάζεται να τοποθετήσει η Ματίλντα, ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πλέγματος να έχει ακριβώς ένα μοναδιαίο τετράγωνο που δεν καλύπτεται από κάποιο πλακίδιο.

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες