Cümə, 10 iyul, 2015

Məsələ 1. Müstəvidə sonlu sayda nöqtələrdən ibarət $\mathcal{S}$ çoxluğundakı ixtiyari iki fərqli A və B nöqtələri üçün $\mathcal{S}$ çoxluğundan olan və $AC = BC$ şərtini ödəyən C nöqtəsi mövcüd olarsa, onda bu $\mathcal{S}$ çoxluğuna *tarazlaşmış* çoxluq deyək. Əgər $\mathcal{S}$ çoxluğundan olan ixtiyari üç biri-birindən fərqli A, B və C nöqtələri üçün $\mathcal{S}$ çoxluğunda $PA = PB = PC$ şərtini ödəyən P nöqtəsi mövcüd deyilsə bu çoxluğa *mərkəzsiz* çoxluq deyək.

(a) İsbat edin ki, bütün $n \geq 3$ tam ədədləri üçün n sayda nöqtədən ibarət *tarazlaşmış* çoxluq vardır;

(b) Hansı $n \geq 3$ tam ədədləri üçün n sayda nöqtədən ibarət tarazlaşmış və mərkəzsiz çoxluq vardır?

Məsələ 2. Elə bütün (a, b, c) - müsbət tam ədədlər üçlüsünü müəyyən edin ki,

$$ab - c,\ \ bc - a,\ \ ca - b$$

ədədlərinin hər biri 2-nin tam qüvvəti olsun.

(2-*nin qüvvəti - mənfi olmayan* n *tam ədədi üçün* 2^n *şəklində yazılabilən ədəddir).*

Məsələ 3. İtibucaqlı ABC üçbucağında $AB > AC$. Γ ilə ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni, H ilə hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsini və F ilə A təpə nöqtəsindən endirilmiş hündürlüyün oturacağını işarə edək. BC tərəfinin orta nöqtəsi M olsun. Γ çevrəsi üzərində Q nöqtəsi elə seçilmişdir ki, $\angle HQA = 90°$,və yenə Γ çevrəsi üzərində K nöqtəsi elə seçilmişdir ki,$\angle HKQ = 90°$. Qəbul edək ki, A, B, C, K və Q nöqtələri biri-birindən fərqli olub, yazıldıqları ardıcıllıqla Γ çevrəsinin üzərində yerləşirlər.

İsbat edin ki, KQH və FKM üçbucaqlarının xaricinə çəkilmiş çevrələr biri-birinə toxunurlar.

İmtahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir

Şənbə, 11 iyul, 2015

Məsələ 4. ABC üçbucağının xaricinə mərkəzi O olan Ω çevrəsi çəkilmişdir. Mərkəzi A olan Γ çevrəsi BC parçasını D və E nöqtələrində kəsir. Qəbul edək ki, biri-birindən fərqli olan B, D, E və C nöqtələri BC düz xətti üzərində yazıldıqları ardıcıllıqla yerləşirlər. Γ və Ω çevrələrinin kəsişmə nöqtələri F və G nöqtələri olmaqla, A, F, B, C və G nöqtələri Ω çevrəsi üzərində yazıldıqları ardıcıllıqla yerləşirlər. BDF üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə AB parçasını ikinci dəfə K nöqtəsində kəsir. CGE üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə isə CA parçasını ikinci dəfə L nöqtəsində kəsir.

Fərz edək ki, FK və GL düz xəttləri biri-birindən fərqlidirlər və X nöqtəsində kəsişirlər. Bu X nöqtəsinin AO düz xətti üzərində yerləşdiyini isbat edin.

Məsələ 5. $\mathbb{R}$ - ilə həqiqi ədədlər çoxluğunu işarə edək. Bütün x və y - həqiqi ədədləri üçün

$$f\big(x + f(x + y)\big) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

şərtini ödəyən bütün $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarını müəyyən edin.

Məsələ 6. $a_1, a_2, \ldots$ tam ədədlər ardıcıllığı aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(i) bütün $j \geq 1$ üçün $1 \leq a_j \leq 2015$;

(ii) bütün $1 \leq k < l$ üçün $k + a_k \neq l + a_l$.

$n > m \geq N$ olmaqla bütün m və n - tam ədədləri üçün

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

şərtini ödəyən iki b və N – müsbət tam ədədlərinin mövcüd olduğunu isbat edin.

İmtahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir