

Երկուշաբթի, հուլիսի 11, 2016թ.

Խնդիր 1: Տրված է BCF եռանկյունը, որի B գագաթով անկյունը ուղիղ է: CF ուղղին պատկանող A կետը այնպիսին է, որ $FA = FB$ և F կետը գտնվում է A և C կետերի միջև: D կետը ընտրված է այնպես, որ $DA = DC$ և AC -ն DAB անկյան կիսորդն է: E կետը ընտրված է այնպես, որ $EA = ED$ և AD -ն EAC անկյան կիսորդն է: M կետը CF հատվածի միջնակետն է: Դիցուք X կետը այնպիսին է, որ $AMXE$ -ն գուգահեռագիծ է ($\text{որում } AM \parallel EX \text{ և } AE \parallel MX$): Ապացուցեք, որ BD, FX և ME ուղիղները հատվում են մեկ կետում:

Խնդիր 2: Գտեք բոլոր դրական ամբողջ n թվերը, որոնց համար $n \times n$ աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում կարելի է գրել I, M կամ O տառերից ուղիղ մեկը այնպես, որ

- յուրաքանչյուր տողում և յուրաքանչյուր սյունակում ուղիղ մեկ երրորդը լինի I տառը, ուղիղ մեկ երրորդը լինի M տառը և ուղիղ մեկ երրորդը լինի O տառը, ինչպես նաև
- յուրաքանչյուր անկյունագծում, որի վանդակների քանակը բազմապատճել է երեքին, ուղիղ մեկ երրորդում լինի I տառը, ուղիղ մեկ երրորդում լինի M տառը և ուղիղ մեկ երրորդում լինի O տառը:

Դիստորիթուն. Եթե $n \times n$ չափի աղյուսակի տողերը և սյունակները համարակալված են հերթականությամբ $1\text{-}jg$ ու n թվերով, ապա յուրաքանչյուր վանդակին համապատասխանում է դրական ամբողջ (i, j) թվերի գույգ, որտեղ $1 \leq i, j \leq n$: Եթե $n > 1$ աղյուսակում գումարային կա երկու տեսակի $4n - 2$ անկյունագիծ: Առաջին տեսակի յուրաքանչյուր անկյունագծում վանդակները (i, j) տեսքի են, որոնց համար $i + j$ գումարը հաստատուն է, իսկ երկրորդ տեսակի յուրաքանչյուր անկյունագիծում վանդակները (i, j) տեսքի են, որոնց համար $i - j$ տարբերությունն է հաստատուն:

Խնդիր 3: Դիցուք $P = A_1 A_2 \cdots A_k$ -ն հարթությանը պատկանող ուռուցիկ բազմանկյուն է: A_1, A_2, \dots, A_k գագաթները ունեն ամբողջ կոորդինատներ և պատկանում են մեկ շրջանագծի: P բազմանկյան մակերեսը նշանակենք S -ով: Դրական ամբողջ n կենտ թիվը այնպիսին է, որ P բազմանկյան բոլոր կողմերի երկարությունների քառակուսիները n -ի վրա բաժանվող ամբողջ թվեր են: Ապացուցեք, որ $2S - p$ n -ի վրա բաժանվող ամբողջ թիվ է:

Երեքշաբթի, հուլիսի 12, 2016թ.

Խնդիր 4: Բազմությունը, որի տարրերը դրական ամբողջ թվեր են կանվանենք փիլրուն, եթե այն պարունակում է առնվազն երկու տարր և նրա յուրաքանչյուր տարր նույն բազմության գոնե մեկ այլ տարրի հետ ունի ընդհանուր պարզ բաժանարար : Դիցուք $P(n) = n^2 + n + 1$: Գտեք ամենափոքր դրական ամբողջ Յ թիվը, որի համար կգտնվի ոչ բացասական ամբողջ Յ թիվ այնպես, որ

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

բազմությունը լինի փիլրուն:

Խնդիր 5: Գրատախուակին գրած է

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

հավասարումը: Այսպիսով նրա երկու կողմերից յուրաքանչյուրում գրված է 2016 զծային արտադրիչ: Գտեք կ -ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում այդ 4032 զծային արտադրիչներից կարելի է ջնջել ուղիղ կ հատը այնպես, որ յուրաքանչյուր կողմում մնա գոնե մեկ արտադրիչ և ստացված հավասարումը չունենա իրական արմատներ:

Խնդիր 6: Հարթության վրա կա $n \geq 2$ քանակությամբ հատվածներ այնպես, որ նրանցից կամայական երկուսը հատվում են ներքին կետում, իսկ կամայական երեքը չունեն ընդհանուր կետ: Արշակը ընտրում է յուրաքանչյուր հատվածի ծայրակետերից մեկը և այդ կետում նստացնում գորտի, որը դեմքով ուղղված է այդ հատվածի մյուս ծայրակետը: Այնուհետև նա $n-1$ անգամ ծափ է տալիս: Ցուրաքանչյուր ծափի ժամանակ գորտերից յուրաքանչյուրը ակնթարթորեն թռչում է առաջ իր հատվածին պատկանող հաջորդ հատման կետը: Գորտերը երբեք չեն փոխում իրենց շարժման ուղղությունը: Արշակը ցանկանում է սկզբում գորտերին նստացնել այնպես, որ նրանցից ոչ մի երկուսը միաժամանակ երբեք չհայտնվեն միևնույն հատման կետում:

(ա) Ապացուցեք, որ Արշակը կարող է իրականացնել իր ուղածը, եթե $n-p$ կենտ է:

(բ) Ապացուցեք, որ Արշակը չի կարող իրականացնել իր ուղածը, եթե $n-p$ զույգ է: