

Cuma, 10 Temmuz 2015

Soru 1. Düzlemin sonlu sayıda noktasından oluşan bir \mathcal{S} kümesindeki herhangi iki farklı A ve B noktaları alındığında; $|AC| = |BC|$ olacak şekilde, \mathcal{S} nin elemanı olan bir C noktası bulunabiliyorsa, \mathcal{S} kümesine *dengeli* diyelim. \mathcal{S} deki herhangi üç birbirinden farklı A , B ve C noktaları alındığında; $|PA| = |PB| = |PC|$ olacak şekilde, \mathcal{S} nin elemanı olan bir P noktası bulunamıyorsa, \mathcal{S} kümesine *merkezciksiz* diyelim.

- (a) Her $n \geq 3$ tam sayısı için, n noktadan oluşan dengeli bir küme bulunduğunu gösteriniz.
- (b) Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, n noktadan oluşan dengeli ve merkezciksiz bir küme bulunabilir?

Soru 2. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

sayılarının her birinin 2 nin tam kuvveti olmasını sağlayan tüm (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

(n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, 2^n şeklindeki sayılara 2 nin tam kuvveti deniyor.)

Soru 3. $|AB| > |AC|$ koşulunu sağlayan bir ABC dar açılı üçgeninin çevrel çemberi Γ , diklik merkezi H , A dan geçen yüksekliğinin ayağı ise F olsun. $[BC]$ nin orta noktasına M diyelim. Γ çemberi üzerinde $\angle HQA = 90^\circ$ olacak şekilde bir Q ve yine Γ çemberi üzerinde $\angle HKQ = 90^\circ$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. A , B , C , K ve Q noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve Γ üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor.

KQH ve FKM üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirlerine teğet olduklarını gösteriniz.

Cumartesi, 11 Temmuz 2015

Soru 4. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi O merkezli Ω çemberidir. A merkezli bir Γ çemberi $[BC]$ kenarını D ve E noktalarında kesiyor. B, D, E ve C noktalarının birbirlerinden farklı oldukları ve BC doğrusu üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. Γ ve Ω çemberlerinin kesişim noktaları F ve G olmak üzere A, F, B, C ve G noktalarının Ω üzerinde yazıldıkları sırada bulundukları varsayılıyor. BDF üçgeninin çevrel çemberi $[AB]$ kenarını ikinci kez K noktasında kesiyor. CGE üçgeninin çevrel çemberi ise $[CA]$ kenarını ikinci kez L noktasında kesiyor.

FK ve GL doğrularının farklı olduklarını ve bir X noktasında kesiştiklerini varsayalım. Bu X noktasının AO doğrusu üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Soru 5. Gerçek sayılar kümesini \mathbb{R} ile gösterelim. Tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

koşulunu sağlayan tüm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Soru 6. Tam sayılardan oluşan a_1, a_2, \dots dizisi

(i) her $j \geq 1$ için $1 \leq a_j \leq 2015$;

(ii) her $1 \leq k < \ell$ için $k + a_k \neq \ell + a_\ell$

koşullarını sağlıyor. $n > m \geq N$ koşulunu sağlayan tüm m ve n tam sayıları için

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

olmasını sağlayan b ve N pozitif tam sayılarının bulunabileceğini kanıtlayınız.