



วันจันทร์ที่ ๑๘ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๔

โจทย์ข้อ ๑ สำหรับเซต  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  ของจำนวนนับที่แตกต่างกันสี่จำนวน จะแทนผลบวก  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  ด้วย  $s_A$  ให้  $n_A$  แทนจำนวนของคู่อันดับ  $(i, j)$  ซึ่ง  $1 \leq i < j \leq 4$  ทั้งหมดซึ่ง  $a_i + a_j$  หาร  $s_A$  ลงตัว

จงหาเซต  $A$  ของจำนวนนับที่แตกต่างกันสี่จำนวนทั้งหมด ซึ่งให้ค่า  $n_A$  ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

โจทย์ข้อ ๒ ให้  $S$  เป็นเซตจำกัดของจุดอย่างน้อยสองจุดในระนาบโดยไม่มีสามจุดใด ๆ ใน  $S$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

นิยามว่า *กัณฑ์* คือกระบวนการที่เริ่มจากเส้นตรง  $\ell$  ซึ่งผ่านจุด  $P \in S$  เพียงจุดเดียว หมุนเส้นตรงนี้ตามเข็มนาฬิการอบ จุดหมุน  $P$  ไปจนกระทั่งเส้นตรงพบอีกจุดหนึ่งใน  $S$  เป็นครั้งแรก เรียกจุดใหม่นี้ว่า  $Q$  ซึ่งจะเป็นจุดหมุนใหม่ และหมุนเส้นตรงต่อไปตามเข็มนาฬิการอบจุด  $Q$  จนพบจุดใหม่ใน  $S$  อีกครั้ง กระบวนการนี้ดำเนินต่อไปอย่างไม่สิ้นสุด

จงพิสูจน์ว่าเราสามารถเลือกจุด  $P$  ใน  $S$  และเส้นตรง  $\ell$  ที่ผ่าน  $P$  ซึ่งกระบวนการกัณฑ์ดังกล่าวใช้ทุกจุดใน  $S$  เป็นจุดหมุนเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง

โจทย์ข้อ ๓ ให้  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้อง

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

สำหรับจำนวนจริง  $x$  และ  $y$  ใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า  $f(x) = 0$  สำหรับทุก  $x \leq 0$



วันอังคารที่ ๑๕ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๔

โจทย์ข้อ ๔ ให้  $n > 0$  เป็นจำนวนนับ มีตาชั่งสองข้างและก้อนน้ำหนัก  $n$  ก้อนที่หนัก  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  หน่วย จะวางก้อนน้ำหนักที่ละก้อนลงบนตาชั่ง โดยที่ตาชั่งข้างขวาไม่เคยหนักมากกว่าตาชั่งข้างซ้าย ในแต่ละครั้งจะเลือกน้ำหนักหนึ่งก้อนที่ยังไม่ถูกวางบนตาชั่ง และวางลงบนตาชั่งข้างซ้ายหรือข้างขวา จนครบทุกก้อน

จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการกระทำได้กล่าว

โจทย์ข้อ ๕ ให้  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มไปเซตของจำนวนนับ สมมติว่า สำหรับจำนวนเต็ม  $m$  และ  $n$  ใด ๆ ผลต่าง  $f(m) - f(n)$ หารลงตัวด้วย  $f(m - n)$

จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็ม  $m$  และ  $n$  ใด ๆ ซึ่ง  $f(m) \leq f(n)$  จำนวนนับ  $f(n)$  หารลงตัวด้วย  $f(m)$

โจทย์ข้อ ๖ ให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมที่มีวงกลมล้อมรอบคือ  $\Gamma$  ให้  $\ell$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $\Gamma$  และให้  $\ell_a, \ell_b$  และ  $\ell_c$  เป็นเส้นตรงที่ได้จากการสะท้อน  $\ell$  ข้ามเส้นตรง  $BC, CA$  และ  $AB$  ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่าวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดโดยเส้นตรง  $\ell_a, \ell_b$  และ  $\ell_c$  จะสัมผัส  $\Gamma$