Úterý, 16. července, 2019

Úloha 1. Nechť $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro libovolná celá čísla a, b platí

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Úloha 2. Na stranách BC a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body A_1 a B_1. Body P a Q jsou zvoleny postupně uvnitř úseček AA_1 a BB_1 tak, že přímka PQ je rovnoběžná se stranou AB. Dále P_1 je bod na přímce PB_1, pro nějž platí, že B_1 leží uvnitř úsečky PP_1 a zároveň $|\sphericalangle PP_1C| = |\sphericalangle BAC|$. Podobně bod Q_1 leží na přímce QA_1 tak, že A_1 leží uvnitř úsečky QQ_1 a zároveň platí $|\sphericalangle CQ_1Q| = |\sphericalangle CBA|$.

Dokažte, že body P, Q, P_1, Q_1 leží na jedné kružnici.

Úloha 3. Na sociální síti s 2019 uživateli jsou některé dvojice uživatelů přátelé, přičemž přátelství jsou vždy vzájemná. Vztahy v této síti se mohou měnit opakovaným provedením následující operace:

> Tři uživatelé A, B, C splňující, že A se přátelí s B i C a zároveň že B a C nejsou přáteli, změní svá přátelství tak, že B se spřátelí s C a zároveň A ukončí svá přátelství s B i s C. Všechna ostatní přátelství zůstanou beze změny.

Na začátku je v síti 1010 uživatelů, z nichž každý má 1009 přátel, a 1009 uživatelů, z nichž každý má 1010 přátel. Ukažte, že existuje vhodná posloupnost uvedených operací, po jejímž provedení nemá žádný uživatel sítě více než jednoho přítele.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů

Středa, 17. července, 2019

Úloha 4. Nalezněte všechny dvojice kladných celých čísel (k, n) splňujících

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Úloha 5. Banka města Bath vydává mince, na jejichž jedné straně je vyraženo písmeno H a na té druhé pak písmeno T. Pepa si n takových mincí postavil do řady zleva doprava a opakoval následující operaci: Ukazuje-li alespoň jedna mince H, pak Pepa obrátí k-tou minci zleva, kde k je počet mincí ukazujících H. Ukazují-li všechny mince písmeno T, posloupnost operací končí. Například pro $n = 3$ a počáteční konfiguraci THT by Pepa postupně získal $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a po těchto třech operacích by skončil.

(a) Ukažte, že pro libovolnou počáteční konfiguraci je Pepa nucen skončit po konečném počtu kroků.

(b) Pro každou počáteční konfiguraci C označíme $L(C)$ počet operací, které Pepa provede, než je nucen skončit. Například $L(THT) = 3$ a $L(TTT) = 0$. Pokud spočítáme hodnotu $L(C)$ pro každou z 2^n počátečních konfigurací, jaký bude aritmetický průměr všech spočítaných hodnot?

Úloha 6. Nechť I je střed kružnice vepsané ostroúhlého trojúhelníka ABC, v němž $|AB| \neq |AC|$. Kružnici vepsanou tomuto trojúhelníku dále označíme ω a její body dotyku se stranami BC, CA a AB postupně jako D, E a F. Kolmice na přímku EF vedená bodem D protne kružnici ω podruhé v bodě R. Dále pak P je druhý průsečík AR s kružnicí ω. Konečně označme Q druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům PCE a PBF.

Dokažte, že průsečík přímek DI a PQ leží na kolmici vedené bodem A k přímce AI.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů