Uzbek version. *O'zbek versiyasi.*

Birinchi kun.

2007 yil 25 iyul.

1-masala. Haqiqiy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar berilgan bo'lsin. Har bir i $(1 \le i \le n)$ uchun

$$d_i = \max\left\{a_j : 1 \le j \le i\right\} - \min\left\{a_j : i \le j \le n\right\}$$

belgilashni kiritamiz.

$$d = \max\left\{d_i : 1 \le i \le n\right\}$$

bo'lsin.

(a) Har qanday $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$\max\{|x_i - a_i| \ : \ 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2} \qquad (*)$$

tengsizlikni isbotlang.

(b) (*) tengsizlikni tenglikka aylantiradigan $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ haqiqiy sonlarning mavjudligini ko'rsating.

2-masala. Shunday beshta A, B, C, D, E nuqta olinganki, bunda $ABCD$ - parallelogramm, $BCED$ esa biror aylanaga ichki chizilgan to'rtburchak bo'ladi. A nuqta orq'ali o'tadigan l to'g'ri chiziq DC kesmaning ichi bilan F nuqtada, BC to'g'ri chiziq bilan esa G nuqtada kesishsin. Agar $EF = EG = EC$ bo'lsa, l to'g'ri chiziq DAB burchakning bissektrisasi bo'lishini isbotlang.

3-masala. Matematika musobaqasi ishtirokchilari orasida ayrimlari bir-biri bilan do'st hisoblanadilar (agar A bilan B do'st bo'lsa, unda B bilan A ham do'st bo'ladi). Musobaqa ishtirokchilaridan tashkil to'pgan guruh *do'stona* deyiladi, agar uning a'zolaridan ixtiyoriy ikkitasi bir-biri bilan do'st bo'lsa. (Hususan, a'zolar soni ikkitadan kam bo'lgan guruh do'stona bo'ladi). Do'stona guruhdagi a'zolar sonini uning *o'lchami* deb ataymiz.

Ma'lumki, barcha do'stona guruhlarining o'lchamlari ichida eng kattasi juft sondir. Barcha ishtirokchilarni ikkita xonaga shunday taqsimlash mumkinligini isbotlangki, bunda birinchi xonadagi do'stona guruhlarning o'lchamlari ichida eng kattasi ikkinchi xonadagi do'stona guruhlarning o'lchamlari ichida eng kattasiga teng bo'ladi.

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut.
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi.

Uzbek version. *O'zbek versiyasi.*

Ikkinchi kun.
2007 yil 26 iyul.

4-masala. ABC uchburchakdagi BCA burchakning bissektrisasining bu uchburchakka tashqi chizilgan aylana bilan kesishish nuqtalaridan ikkinchisini R orqali, shu bissektrisaning BC va AC tomonlarga o'tkazilgan o'rta perpendikulyarlar bilan kesishish nuqtalarini esa mos ravishda P va Q orqali belgilaymiz. K va L nuqtalar mos ravishda BC va AC tomonlarning o'rtalari bo'lsin. RPK va RQL uchburchaklar yuzalari o'zaro teng bo'lishini isbotlang.

5-masala. Ma'lumki, musbat butun a va b sonlar uchun $(4a^2-1)^2$ soni $4ab-1$ songa qoldiqsiz bo'linadi. $a=b$ tenglikni isbotlang.

6-masala. n - musbat butun son bo'lsin. Uch o'lchovli fazoning $(n+1)^3-1$ ta nuqtasidan tashkil topgan

$$S=\{(x,y,z): x,y,z\in\{0,1,\dots,n\},\ x+y+z>0\}$$

to'plamni qaraymiz. Shunday tekisliklarning eng kichik sonini aniqlangki, ularning birlashmasi S to'plamning barcha nuqtalarini o'z ichiga o'lgan, ammo (0,0,0) nuqtani o'lmagan bo'lsin.

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut.
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi.