

12. júlí 2006

**Dæmi 1.** Látum  $ABC$  vera þríhyrning með innmiðju  $I$ . Um punkt  $P$  innaní þríhyrningnum gildir

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Sýnið að  $AP \geq AI$ , og að jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að  $P = I$ .

**Dæmi 2.** Látum  $P$  vera reglulegan 2006-hyrning. Hornalína í  $P$  er sögð vera *góð* ef endapunktar hennar skipta jaðri  $P$  í two hluta sem hver um sig samanstendur af oddatölufjölda hliða í  $P$ . Hliðar  $P$  eru einnig sagðar vera *góðar*.

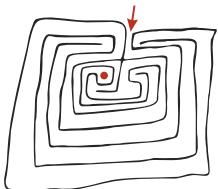
Nú er  $P$  skipt niður í þríhyrninga með 2003 hornalínum, þannig að engar tvær hornalínur hafi sameiginlegan punkt innaní  $P$ . Finnið mesta fjölda jafnarma þríhyrninga með tvær góðar hliðar sem geta komið fyrir í slíkri skiptingu.

**Dæmi 3.** Finnið lægstu rauntölu  $M$  þannig að ójafnan

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gildi fyrir allar rauntölur  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

Tími:  $4\frac{1}{2}$  klukkustundir  
Hvert dæmi er sjö stiga virði



13. júlí 2006

**Dæmi 4.** Ákvarðið öll pör  $(x, y)$  af heiltönum þannig að

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Dæmi 5.** Látum  $P(x)$  vera margliðu með heiltölustuðla af stigi  $n > 1$  og látum  $k$  vera jákvæða heiltölu. Lítið á margliðuna  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ , þar sem  $P$  kemur  $k$  sinnum fyrir. Sannið að í mesta lagi séu til  $n$  heiltölur  $t$  þannig að  $Q(t) = t$ .

**Dæmi 6.** Úthlutum hverri hlið  $b$  í kúptum marghyrningi  $P$  mesta mögulega flatarmál þríhyrnings sem hefur  $b$  sem hlið og liggar í  $P$ . Sýnið að summa flatarmálanna sem hliðum  $P$  er úthlutað sé að minnsta kosti tvöfalt flatarmál  $P$ .

Tími:  $4\frac{1}{2}$  klukkustundir  
Hvert dæmi er sjö stiga virði