

월요일, 21. 9 월 2020

문제 1. 볼록사각형 $ABCD$ 의내부에한점 P 가있고, 다음비례식이성립한다.

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

이때다음세직선이한점에서만남을보여라: 각 $\angle ADP, \angle PCB$ 의내각의이등분선, 선분 AB 의수직이등분선.

문제 2. 실수 a, b, c, d 가부등식 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 와등식 $a + b + c + d = 1$ 을만족한다. 다음부등식이성립함을보여라.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

문제 3. 서로무게가다른조약돌 $4n$ 개가있고각조약돌의무게는 $1, 2, 3, \dots, 4n$ 중하나이다. 각조약돌은 n 개의색중하나로색칠되어있고, 같은색을가진조약돌은정확히 4 개씩있다. 이때다음두조건을모두만족하도록조약돌을두개의그룹으로나눌수있음을보여라.

- 각그룹의조약돌의무게의총합은서로같다.
- 각그룹에는각각의색에대하여그색으로색칠된조약돌이정확히 2 개있다.

화요일, 22. 9 월 2020

문제 4. 정수 $n > 1$ 이 있다. 한산의오르막에 n^2 개의역이있고, 역들은서로다른높이에있다. 두개의케이블카회사 A 와 B 는각각 k 개의케이블카를운행한다. 각각의케이블카는낮은위치에있는역에서출발하여더높은위치에있는역까지운행한다. (중간에멈추지않는다.) A 회사에서운행하는 k 개의케이블카는 k 개의서로다른역에서출발하여서로다른 k 개의역까지운행하고, 더높은곳에서출발한케이블카는더높은곳까지운행한다. B 회사가운행하는케이블카도같은조건으로운행한다. 두역이어떤회사에의해연결된다는것은한회사에서운행하는하나또는여러개의케이블카를이용하여이두역중낮은위치에있는역에서높은위치에있는역까지이동할수있다는것이다. (역들사이의다른이동은허용되지않는다)

두회사모두에의해연결되는두역이항상존재하는가장작은양의정수 k 를구하여라.

문제 5. $n > 1$ 장의카드로이루어진카드묶음이하나있다. 각각의카드에는양의정수가하나적혀있다. 이카드묶음은다음성질을만족한다: 임의의한쌍의카드에적혀있는두수의산술평균은이카드묶음내의한장또는여러장의카드에적혀있는수들의기하평균과같다.

어떤 n 에대하여, 카드에있는수가항상모두같아야할까?

문제 6. 다음조건을만족하는양의상수 c 가존재함을보여라.

정수 $n > 1$ 에대하여, 임의의두점사이의거리가 1 이상인 n 개의평면위의점으로이루어진집합 \mathcal{S} 를생각하자. 어떤직선 ℓ 이존재하여, \mathcal{S} 를두집합으로나누고 \mathcal{S} 의각점으로부터 ℓ 까지의거리가 $cn^{-1/3}$ 이상이다.

(직선 ℓ 이점의집합 \mathcal{S} 를나눈다는것은 \mathcal{S} 에속하는어떤두점을연결하는선분이 ℓ 과만난다는것이다.)

Note. $cn^{-1/3}$ 인경우대신이보다약한결과인 $cn^{-\alpha}$ 인경우에대해보인경우, 상수 $\alpha > 1/3$ 의값에따라부분점수가주어질수있다.