



Salı, 16 Temmuz 2019

Soru 1. Tam sayılar kümesi \mathbb{Z} ile gösterilsin. Tüm a ve b tam sayıları için

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

koşulunu sağlayan tüm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Soru 2. Bir ABC üçgeninde, $[BC]$ kenarı üzerinde A_1 ve $[AC]$ kenarı üzerinde B_1 noktaları alınıyor. Sırasıyla $[AA_1]$ ve $[BB_1]$ doğru parçaları üzerinde P ve Q noktaları, PQ ile AB paralel olacak şekilde alınıyor. PB_1 doğrusu üzerinde P_1 noktası, B_1 noktası P ile P_1 arasında kalacak ve $\angle PP_1C = \angle BAC$ olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde, QA_1 doğrusu üzerinde Q_1 noktası, A_1 noktası Q ile Q_1 arasında kalacak ve $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ olacak şekilde alınıyor.

P, Q, P_1 ve Q_1 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Soru 3. Sanal alemdeki bir sosyal şebekede 2019 kullanıcı bulunuyor. Bu kullanıcılarından bazıları arkadaştır. Arkadaşlık karşılıklıdır, yani A kullanıcısı B ile arkadaş ise, B kullanıcısı da A ile arkadaştır. Bu sosyal şebekedeki arkadaşlık durumlarını değiştiren aşağıdaki türden olaylar, her defada sadece bir olay olmak üzere, çok defa meydana gelebiliyor:

Olay: A, B ve C ; A hem B , hem de C ile arkadaş olacak, fakat B ile C birbirleriyle arkadaş olmayacak şekilde üç kullanıcı olmak üzere, arkadaşlık durumları değişip B ile C birbirleriyle arkadaş olmaya, A ise hem B , hem de C ile arkadaş olmamaya başlıyor. Diğer arkadaşlık durumları ise değişmiyor.

Başlangıçta, 1010 adet kullanıcının her birinin 1009 arkadaşı, 1009 adet kullanıcının ise her birinin 1010 arkadaşı bulunuyor. Her kullanıcının en çok 1 arkadaşının olmasıyla sonuçlanacak bir olaylar dizisinin bulunduğuunu gösteriniz.



Çarşamba, 17 Temmuz 2019

Soru 4.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

denklemini sağlayan tüm (k, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Soru 5. Bath Bankası bir yüzünde H , diğer yüzünde T yazan madeni paralar basmıştır. Bu paralardan n tanesi soldan sağa dizilmiş olarak Giray'ın önünde duruyor. Giray şu işlemi tekrar tekrar uyguluyor: önündeki paralardan tam olarak $k > 0$ tanesinin H yüzü üstteyse, soldan k -inci sıradaki parayı ters çeviriyor; aksi halde, yani tüm paraların T yüzü üstteyse, duruyor. Örneğin, $n = 3$ durumunda THT dizilişiyle başlayan süreç $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ olarak devam edip üç işlem sonunda durur.

- (a) Başlangıçtaki diziliş nasıl olursa olsun, Giray'ın sonlu sayıda işlem sonunda duracağını gösteriniz.
- (b) Her C başlangıç dizilişi için, $L(C)$ ile Giray'ın durana kadar yaptığı işlem sayısı gösterilsin. Örneğin, $L(THT) = 3$ ve $L(TTT) = 0$ dır. Her bir C başlangıç dizilişi için $L(C)$ değerinin ayrı ayrı belirlenmesiyle elde edilen 2^n adet sayının ortalamasını bulunuz.

Soru 6. $|AB| \neq |AC|$ koşulunu sağlayan dar açılı bir ABC üçgeninin iç teğet çember merkezi I dır. ABC nin iç teğet çemberi ω ; $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırasıyla D , E ve F noktalarında tegettir. D den geçip EF ye dik olan doğru ω ile ikinci kez R noktasında kesişiyor. AR doğrusu ω ile ikinci kez P noktasında kesişiyor. PCE ve PBF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez Q noktasında kesişiyor.

DI ve PQ doğrularının, A dan geçip AI ya dik olan doğru üzerinde kesiştiğini gösteriniz.