Среда, 15. Јули, 2009.

Проблем 1. Нека је n природан број и нека су $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ различити природни бројеви из скупа $\{1, \ldots, n\}$, такви да n дели $a_i(a_{i+1}-1)$ за $i = 1, \ldots, k-1$. Докажи да n не дели $a_k(a_1-1)$.

Проблем 2. Нека је ABC троугао са центром описане кружнице у тачки O. Тачке P и Q су унутрашње тачке страница CA и AB, редом. Нека су K, L и M средишње тачке сегмената BP, CQ и PQ, редом и нека је Γ кружница која пролази кроз K, L и M. Претпоставимо да је права PQ тангента на кружницу Γ. Докажи да је $OP = OQ$.

Проблем 3. Претпоставимо да је $s_1, s_2, s_3, \ldots$ строго растући низ природних бројева, такав да су оба подниза

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{и} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

аритметичка. Докажи да је низ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ аритметички.

Време: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем вреди 7 поена.

Четвртак,16. Јули, 2009.

Проблем 4. Нека је ABC троугао са $AB = AC$. Симетрале углова $\angle CAB$ и $\angle ABC$ секу странице BC и CA у D и E, редом. Нека је K центар уписане кружнице троугла ADC. Претпоставимо да је $\angle BEK = 45°$. Нађи све могуће вредности угла $\angle CAB$.

Проблем 5. Одреди све функције f, са скупа природних бројева у скуп природних бројева, такве да, за све природне бројеве a и b, постоји недегенерисани троугао са странама дужина

$$a,\ \ f(b)\ \text{ и }\ f(b+f(a)-1).$$

(Троугао је *недегенерисани* ако му врхови нису колинеарни.)

Проблем 6. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити природни бројеви и нека је M скуп од $n-1$ природних бројева, који не садржи $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Скакавац скаче дуж реалне осе, почињући у тачки 0, правећи n скокова удесно са дужинама $a_1, a_2, \ldots, a_n$ у неком поретку. Докажи да је поредак могуће одабрати тако да скакавац никад не скочи ни на једну тачку из M.

Време: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем вреди 7 поена.