e shtunë, 8. korrik 2023

Problem 1. Gjeni të gjithë numrat e plotë të përbërë $n > 1$ që kënaqin vetinë e mëposhtme: në qoftë se $d_1, d_2, \ldots, d_k$ janë të gjithë pjestuesit pozitivë të n ku $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, atëherë d_i plotpjeston $d_{i+1} + d_{i+2}$ për çdo $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Problem 2. Në trekëndëshin këndngushtë ABC kemi $AB < AC$. Le të jetë Ω rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit ABC. Shënohet me S mesi i harkut CB të Ω që përmban pikën A. Pingulja e hequr nga kulmi A mbi BC pret BS në pikën D si dhe pret përsëri rrethin Ω në pikën $E \neq A$. Drejtëza që kalon në pikën D paralel me BC pret drejtëzën BE në pikën L. Rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit BDL shënohet me ω. Rrethi ω pret rrethin Ω përsëri në pikën $P \neq B$.
Vërtetoni që drejtëza tangjente me rrethin ω në pikën P pret drejtëzën BS në një pikë të përgjysmores së brendshme të këndit $\angle BAC$.

Problem 3. Për çdo numër të plotë $k \geqslant 2$, gjeni të gjitha vargjet e pafundme të numrave të plotë pozitivë $a_1, a_2, \ldots$ për të cilët gjendet një polinom P i formës $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, ku $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ janë numra të plotë jo negativë, të tillë që

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

për çdo numër të plotë $n \geqslant 1$.

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.

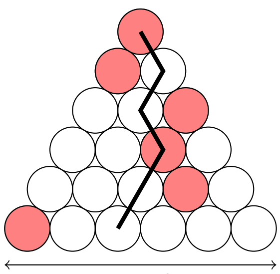
e diel, 9. korrik 2023

Problem 4. Le të jenë $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ numra realë pozitivë të cilët janë çdo dy të ndryshëm nga njëri tjetri të tillë që

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

është një numër i plotë për çdo $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Tregoni që $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problem 5. Jepet numri i plotë pozitiv n. Një *trekëndësh Japonez* përbëhet nga $1 + 2 + \cdots + n$ rrathë të vendosur në formën e një trekëndëshi barabrinjës i tillë që për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$, rreshti i $i^{\text{të}}$ përmban ekzaktësisht i rrathë, nga të cilët vetëm një prej tyre është me ngjyrë të kuqe. Një *shteg ninxha* në një trekëndësh Japonez është një varg prej n rrathësh i cili përftohet duke filluar nga rreshti i sipërm që ndodhet në majë, në vijim duke shkuar në mënyrë të përsëritur nga një rreth tek njëri prej dy rrathëve që ndodhen menjëherë poshtë tij dhe duke përfunduar në rreshtin e poshtëm në fund. Këtu jepet një shembull i një trekëndëshi Japonez me $n = 6$, së bashku me një shteg ninxha në këtë trekëndësh që përmban dy rrathë të kuq.



$n = 6$

Në varësi të n, gjeni numrin më të madh k të tillë që në secilin trekëndësh Japonez gjendet nje shteg ninxha i cili përmban të paktën k rrathë të kuq.

Problem 6. Jepet trekëndëshi barabrinjës ABC. Le të jenë A_1, B_1, C_1 pika në brendësi të trekëndëshit ABC të tilla që $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, dhe

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

BC_1 dhe CB_1 priten në pikën A_2, CA_1 dhe AC_1 priten në pikën B_2, si dhe AB_1 dhe BA_1 priten në pikën C_2.

Vërtetoni se në qoftë se trekëndëshi $A_1B_1C_1$ është brinjëndryshëm, atëherë të tre rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave AA_1A_2, BB_1B_2 dhe CC_1C_2 kalojnë nga dy pika të përbashkëta.

(Shënim: Në një trekëndsh brinjëndryshëm çdo dy brinjë kanë gjatësi të ndryshme.)

Language: Albanian

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.