

Úterý, 8. července 2014

**Úloha 1.** Nechť  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Dokažte, že existuje právě jedno celé číslo  $n \geq 1$  takové, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

**Úloha 2.** Nechť  $n \geq 2$  je celé číslo. Uvažujme šachovnici o rozměrech  $n \times n$  složenou z  $n^2$  jednotkových čtvercových políček. Konfiguraci  $n$  věží na této šachovnici nazýváme *šťastnou*, pokud každý řádek a každý sloupec obsahuje právě jednu věž. Najděte největší kladné celé číslo  $k$  takové, že pro každou šťastnou konfiguraci  $n$  věží existuje čtverec o rozměrech  $k \times k$ , který neobsahuje věž na žádném ze svých  $k^2$  políček.

**Úloha 3.** V konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  platí  $|\angle ABC| = |\angle CDA| = 90^\circ$ . Bod  $H$  je patou kolmice z bodu  $A$  na přímkou  $BD$ . Body  $S, T$  leží po řadě na stranách  $AB, AD$  tak, že bod  $H$  je vnitřním bodem trojúhelníku  $SCT$  a platí

$$|\angle CHS| - |\angle CSB| = 90^\circ, \quad |\angle THC| - |\angle DTC| = 90^\circ.$$

Dokažte, že přímka  $BD$  se dotýká kružnice opsané trojúhelníku  $TSH$ .

Středa, 9. července 2014

**Úloha 4.** Na straně  $BC$  daného ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  leží body  $P$  a  $Q$  tak, že  $|\angle PAB| = |\angle BCA|$  a  $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$ . Body  $M$  a  $N$  leží po řadě na přímkách  $AP$  a  $AQ$ , přičemž bod  $P$  je středem úsečky  $AM$  a bod  $Q$  je středem úsečky  $AN$ . Dokažte, že přímky  $BM$  a  $CN$  se protínají na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

**Úloha 5.** Banka v Kapském Městě razí mince s hodnotou  $\frac{1}{n}$  pro každé kladné celé číslo  $n$ . Mějme konečnou kolekci takových mincí (ne nutně různých hodnot), která má celkovou hodnotu nejvýše  $99 + \frac{1}{2}$ . Dokažte, že tuto kolekci je možné rozdělit na 100 nebo méně částí tak, aby každá část měla celkovou hodnotu nejvýše 1.

**Úloha 6.** Říkáme, že přímky v rovině jsou v *obecné poloze*, pokud žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Množina přímek v obecné poloze rozděluje rovinu na oblasti, z nichž některé mají konečný obsah; nazýváme je *konečné oblasti* příslušné dané množině přímek. Pro každé dostatečně velké  $n$  dokažte, že v libovolné množině  $n$  přímek v obecné poloze je možné obarvit modře aspoň  $\sqrt{n}$  přímek tak, že žádná z příslušných konečných oblastí nebude mít celou hranici modrou.

*Poznámka.* Řešení, ve kterých bude tvrzení dokázáno s výrazem  $c \cdot \sqrt{n}$  namísto  $\sqrt{n}$ , budou ohodnocena body v závislosti na hodnotě konstanty  $c$ .