

Мягмар, 7 сарын 16, 2019

**Бодлого 1.** Бүхэл тоон олонлогийг  $\mathbb{Z}$  гэж тэмдэглэе. Дурын бүхэл  $a, b$  тоонуудын хувьд

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

байх бүх  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  функцийг ол.

**Бодлого 2.**  $ABC$  гурвалжны  $BC$  тал дээр  $A_1$  цэг,  $AC$  тал дээр  $B_1$  цэг байрлана.  $AA_1$  хэрчим дээрх  $P$  цэг ба  $BB_1$  хэрчим дээрх  $Q$  цэгийн хувьд  $PQ$  нь  $AB$  шулуунтай параллель болог.  $PB_1$  шулуун дээрх  $P_1$  цэгийн хувьд  $B_1$  цэг  $P, P_1$  цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд  $\angle PP_1C = \angle BAC$  байдаг гэе. Мөн ижлээр,  $QA_1$  шулуун дээрх  $Q_1$  цэгийн хувьд  $A_1$  цэг  $Q, Q_1$  цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд  $\angle CQ_1Q = \angle CBA$  байдаг гэе.

$P, Q, P_1, Q_1$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

**Бодлого 3.** Нийт 2019 хэрэглэгчтэй нэгэн социал сүлжээний зарим хэрэглэгчид нь найзууд байв. Сүлжээнд  $A$  хэрэглэгч  $B$  хэрэглэгчтэй найз бол  $B$  хэрэглэгч  $A$  хэрэглэгчтэй найз байдаг. Дараах үйл явдал давтагдан, хоёр үйл явдал нэгэн зэрэг биш, явагдах боломжтой:

$A$  нь  $B, C$ -тэй хоёулантай нь найз, харин  $B, C$  хоорондоо найз биш байдаг  $A, B, C$  гурван хэрэглэгч найзлалтын төлөвөө  $B, C$  хоорондоо найз, харин  $A$  нь  $B$ -тэй ч найз биш,  $C$ -тэй ч найз биш байхаар өөрчилнө. Бусад найзлалтын төлөвт өөрчлөлт орохгүй.

Анх 1010 хэрэглэгч нь тус бүр 1009 найзтай ба 1009 хэрэглэгч нь тус бүр 1010 найзтай байв. Бүх хэрэглэгч нэгээс олонгүй найзтай үлдэх үйл явдлын дараалал олдохыг батал.

Лхагва, 7 сарын 17, 2019

**Бодлого 4.** Дараах нөхцөлийг хангах бүх  $(k, n)$  эерэг бүхэл тоон хосыг ол.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

**Бодлого 5.** Батт Банкнаас гаргадаг зоос нэг талдаа  $H$ , нөгөө талдаа  $T$  үсэгтэй. Номин зүүнээс баруун тийш жагсаасан  $n$  ширхэг зоостой. Тэр дараах үйлдлийг давтан хийдэг: хэрэв яг  $k > 0$  ширхэг зоосны  $H$  тал нь дээшээ харсан бол зүүн талаасаа тоолоод  $k$  дахь зоосыг эргүүлнэ; үгүй бол бүх зоосны  $T$  тал нь дээшээ харсан бөгөөд Номин үйлдэл хийхээ зогсоно. Жишээлбэл,  $n = 3$  үед анх  $THT$  байрлалаас эхлэхэд  $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$  гээд гурван үйлдлийн дараа зогсоно.

- (a) Ямар ч байрлалаас эхэлсэн, Номин төгсгөлөг алхмын дараа зогсохыг батал.
- (b) Анх  $C$  байрлалаас эхлэхэд зогсох хүртэл хийгдэх үйлдлийн тоог  $L(C)$  гээ. Жишээлбэл,  $L(THT) = 3$  ба  $L(TTT) = 0$  байна.  $C$  нь бүх боломжит  $2^n$  байрлалаар гүйх үеийн  $L(C)$  тоонуудын арифметик дунджийг ол.

**Бодлого 6.**  $AB \neq AC$  байдаг хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжинд багтсан  $I$  төвтэй  $\omega$  тойрог  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  талуудыг, харгалзан,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  цэгүүдэд шүргэнэ.  $D$  цэгийг дайрсан  $EF$  шулуунд перпендикуляр шулуун  $\omega$  тойргийг дахин  $R$  цэгт огтолно.  $AR$  шулуун  $\omega$  тойргийг дахин  $P$  цэгт огтолно.  $PCE$ ,  $PBF$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин  $Q$  цэгт огтлолцоно.

$DI$  ба  $PQ$  шулуунууд  $A$  цэгийг дайрсан  $AI$  шулуунтай перпендикуляр шулуун дээр огтлолцохыг батал.