Þriðjudagur, 10. Júlí, 2012

Dæmi 1. Þríhyrningurinn ABC hefur punktinn J sem miðpunkt utanverðs snertihrings á móti punktinum A. Utanverði snertihringurinn snertir hliðina BC í M og línurnar AB og AC í K og L í þeirri röð. Línurnar LM og BJ skerast í F og línurnar KM og CJ skerast í G. Látum S vera skurðpunkt línanna AF og BC og látum T vera skurðpunkt línanna AG og BC.

Sannið að M er miðpunktur ST.

(*Utanverði snertihringur* ABC á móti punktinum A er hringurinn sem snertir hliðina BC, hálflínuna AB handan B og hálflínuna AC handan C.)

Dæmi 2. Látum $n \geq 3$ vera heiltölu og látum $a_2, a_3, \ldots, a_n$ vera jákvæðar rauntölur þannig að $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Sannið að

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \; > \; n^n.$$

Dæmi 3. *Lygara og ágiskanaleikurinn* er leikur milli tveggja leikmanna A og B. Reglur leiksins eru háðar tveimur jákvæðum heiltölum k og n sem báðir leikmenn þekkja.

Í upphafi leiksins velur A heiltölur x og N með $1 \leq x \leq N$. Leikmaður A heldur x leyndri og segir leikmanni B satt frá N. Leikmaður B reynir nú að afla upplýsinga um x með því að spyrja leikmann A spurninga eins og eftirfarandi: Sérhver spurning samanstendur af því að B velur eitthvert mengi S af jákvæðum heiltölum (hugsanlega sama mengi og hefur verið notað í einhverri spurningu áður) og spyr A hvort x sé í S. Leikmaður B má spyrja eins margra svona spurninga eins og hann vill. Eftir hverja spurningu verður leikmaður A að svara strax með *já* eða *nei* en má ljúga eins oft og hann vill. Eina skilyrðið er að í sérhverjum $k+1$ svörum í röð verður að minnsta kosti eitt að vera satt.

Eftir að B hefur spurt eins margra spurninga og hann vill verður hann að velja mengi X sem má í mesta lagi innihalda n jákvæðar heiltölur. Ef x er í menginu X þá vinnur B annars tapar hann. Sannið að:

1. Ef $n \geq 2^k$ þá á B örugga vinningsleið.
2. Fyrir öll k sem eru nægjanlega stór er til heiltala $n \geq 1,99^k$ þannig að B á ekki örugga vinningsleið.

Miðvikudagur, 11. Júlí, 2012

Dæmi 4. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ þannig að fyrir allar heiltölur a, b, c sem uppfylla $a+b+c=0$ gildir eftirfarandi jafna:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Hér táknar $\mathbb{Z}$ mengi allra heiltalna.)

Dæmi 5. Látum ABC vera þríhyrning með $\angle BCA = 90^\circ$ og látum D vera fótpunkt hæðarinnar frá C. Látum X vera innri punkt striksins CD. Látum K vera punkt á strikinu AX þannig að $|BK| = |BC|$. Látum á sama hátt L vera punkt á strikinu BX þannig að $|AL| = |AC|$. Látum M vera skurðpunkt $|AL|$ og $|BK|$.

Sýnið að $|MK| = |ML|$.

Dæmi 6. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að til eru ekki neikvæðar heiltölur $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þannig að

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er virði 7 stiga