الإثنين, 21، أيلول 2020

مسألة 1. تأمّل رباعياً محدباً $ABCD$. النقطة P تقع داخل $ABCD$. وتتحقّق المساويات الآتية

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

أثبت أنّ المستقيمات الثلاثة الآتية تلتقي في نقطة واحدة: المنصفان الداخليان للزاويتين $\angle ADP$ و $\angle PCB$، ومحور القطعة المستقيمة AB.

مسألة 2. تحقّق الأعداد الحقيقية a, b, c, d ما يأتي $a \geq b \geq c \geq d > 0$ و $a + b + c + d = 1$. أثبت أنّ

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1$$

مسألة 3. لدينا $4n$ حبّة بأوزان $1, 2, 3, \ldots, 4n$. كلّ حبّة ملوّنة بواحد من n لوناً وهناك أربع حبات من كلّ لون. أثبت أنّه يمكننا ترتيب الحبات في كومتين بحيث يتحقّق الشرطان الآتيان:

- مجموع أوزان الحبات في الكومة الأولى يساوي مجموع أوزان الحبات في الكومة الثانية.
- كل كومة تحتوي على حبتين من كل لون.

الثلاثاء, 22، أيلول 2020

مسألة 4. يوجد عدد صحيح $n > 1$. هناك n^2 محطّة على جبل تقع جميعها على ارتفاعات مختلفة. هناك شركتان A و B للنقل بين المحطات كلّ منها يدير عمل k حافلة. كلٌّ حافلة تُتيح إمكانية النقل من محطة إلى محطة أكثر ارتفاعاً (دون توقف على الطريق). لحافلات الشركة A عددٌ يساوي k من محطات الانطلاق المختلفة، وعددٌ يساوي k من محطات الوصول المختلفة، وكلّ حافلة تبدأ من موقع أعلى تصل أيضاً إلى موقع أعلى. تحقّق حافلات الشركة B شروط الشركة A نفسها. نقول إنّ محطتين متصلتان من قبل شركة إذا كان بإمكان أحدهم البدء من المحطة الأخفض والوصول إلى المحطة الأعلى باستعمال واحدة أو أكثر من حافلات تلك الشركة (ولا يسمح بأي تنقلات أخرى بين المحطات).

عيّن أصغر عدد صحيح موجب تماماً k يمكن في حالته ضمان وجود محطتين متصلتين من قِبل الشركتين معاً.

مسألة 5. نُعطى عدداً $n > 1$ من البطاقات. على كلّ بطاقة هناك عدد صحيح موجب تماماً مكتوب. تمتلك مجموعة البطاقات الخاصة الآتية: المتوسط الحسابي للعددين المكتوبين على أي زوج من البطاقات يساوي أيضاً المتوسط الهندسي للأعداد المكتوبة على واحدة أو أكثر من البطاقات.

عند أي قيم n نستنتج من ذلك أنّ جميع الأعداد المكتوبة على هذه البطاقات متساوية؟

مسألة 6. أثبت أنّه يوجد عدد موجب تماماً c يحقّق الخاصة الآتية:

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً ، ولتكن S مجموعة مكوّنة من n نقطة في المستوي بحيث تكون المسافة بين أي نقطتين مختلفتين في S أكبر أو تساوي 1. عندئذ يوجد مستقيم ℓ يفصل S وبحيث تكون المسافة بين أي نقطة من S إلى ℓ أكبر أو تساوي $cn^{-1/3}$.

(نقول إنّ مستقيماً ℓ يفصل مجموعة نقاط S إذا تقاطع مع قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من S)

ملاحظة. نتائج أضعف يستبدل فيها بـ $cn^{-1/3}$ المقدار $cn^{-\alpha}$ يمكن أن تمنح نقاطاً وذلك تبعاً لقيمة الثابت $\alpha > 1/3$.