



Language: **Korean**

Day: **1**

2015년 7월 10일, 금요일

**문제 1.** 평면 위의 유한 개의 점들의 집합  $S$ 의 임의의 서로 다른 두 점  $A, B$ 에 대하여  $AC = BC$ 가 되도록 하는  $S$ 의 점  $C$ 가 존재하면,  $S$ 를 **평형적**이라 하자.  $S$ 의 어떤 서로 다른 세 점  $A, B, C$ 에 대해서도  $PA = PB = PC$ 가 되도록 하는  $S$ 의 점  $P$ 가 존재하지 않으면,  $S$ 를 **비중심적**이라 하자.

- (a) 임의의 양의 정수  $n \geq 3$ 에 대하여  $n$ 개의 점으로 이루어진 평형적인 집합이 존재함을 보여라.
- (b)  $n$ 개의 점으로 이루어진 평형적이고 비중심적인 집합이 존재하게 되는 양의 정수  $n \geq 3$ 을 모두 구하여라.

**문제 2.** 다음 조건을 만족하는 양의 정수의 순서쌍  $(a, b, c)$ 를 모두 구하여라:

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b \text{가 모두 2의 제곱수이다.}$$

(2의 제곱수란 음이 아닌 정수  $n$ 에 대하여  $2^n$  꼴인 양의 정수를 말한다.)

**문제 3.** 예각삼각형  $ABC$ 가  $AB > AC$ 를 만족한다. 이 삼각형의 외접원을  $\Gamma$ , 수심을  $H$ , 점  $A$ 에서 대변에 내린 수선의 발을  $F$ 라 하자. 또한 변  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라 하자. 점  $Q$ 는  $\angle HQA = 90^\circ$ 를 만족하는 원  $\Gamma$  위의 점이고, 점  $K$ 는  $\angle HKQ = 90^\circ$ 를 만족하는 원  $\Gamma$  위의 점이다. 점  $A, B, C, K, Q$ 가 모두 다르며, 이 순서로 원  $\Gamma$  위에 있다 하자. 삼각형  $KQH$ 의 외접원과 삼각형  $FKM$ 의 외접원이 서로 접함을 보여라.

2015년 7월 11일, 토요일

**문제 4.** 삼각형  $ABC$ 의 외접원을  $\Omega$ 라 하고, 외심을  $O$ 라 하자. 점  $A$ 를 중심으로 하는 원  $\Gamma$ 가 선분  $BC$ 와 두 점  $D, E$ 에서 만난다. 이 때  $B, D, E, C$ 는 모두 서로 다르고 이 순서대로 선분  $BC$ 에 놓여 있다.  $F$ 와  $G$ 는 두 원  $\Gamma$ 와  $\Omega$ 의 교점이고  $A, F, B, C, G$ 는  $\Omega$  위에 이 순서대로 놓여 있다.  $K$ 는 삼각형  $BDF$ 의 외접원과 선분  $AB$ 의 교점 중  $B$ 가 아닌 점이다.  $L$ 은 삼각형  $CGE$ 의 외접원과 선분  $CA$ 의 교점 중  $C$ 가 아닌 점이다. 직선  $FK$ 와  $GL$ 이 서로 다르고 점  $X$ 에서 만날 때,  $X$ 는 직선  $AO$  위에 있음을 보여라.

**문제 5.** 실수 전체의 집합을  $\mathbb{R}$ 이라 하자. 다음 조건을 만족하는 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라:

임의의 실수  $x, y$ 에 대하여

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

이 성립한다.

**문제 6.** 정수로 이루어진 수열  $a_1, a_2, \dots$ 이 다음 조건을 만족한다:

- (i) 모든  $j \geq 1$ 에 대하여  $1 \leq a_j \leq 2015$ 이다;
- (ii) 모든  $1 \leq k < \ell$ 에 대하여  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ 이다.

다음을 만족하는 두 양의 정수  $b$ 와  $N$ 이 존재함을 보여라:

$n > m \geq N$ 을 만족하는 모든 정수  $m$ 과  $n$ 에 대하여

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

이 성립한다.