

IMO 2024

65th International
Mathematical Olympiad

Polish (pol), day 1

wtorek, 16. lipca 2024

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste α , że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

jest wielokrotnością n . (Napis $\lfloor z \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą z . Przykładowo $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ i $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite g i N , że

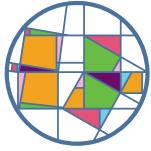
$$\text{NWD}(a^n + b, b^n + a) = g$$

dla wszystkich liczb całkowitych $n \geq N$. (Napis $\text{NWD}(x, y)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych x i y .)

Zadanie 3. Dany jest nieskończony ciąg dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, \dots oraz dodatnia liczba całkowita N . Założmy, że dla każdego $n > N$ liczba a_n jest równa liczbie wystąpień liczby a_{n-1} w ciągu a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Wykazać, że co najmniej jeden z ciągów a_1, a_3, a_5, \dots i a_2, a_4, a_6, \dots jest od pewnego miejsca okresowy.

(Nieskończony ciąg b_1, b_2, b_3, \dots jest *od pewnego miejsca okresowy* jeśli istnieją takie dodatnie liczby całkowite p i M , że $b_{m+p} = b_m$ dla każdego $m \geq M$.)



IMO 2024

65th International
Mathematical Olympiad

Polish (pol), day 2

środa, 17. lipca 2024

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB < AC < BC$. Niech ω i I będą odpowiednio okręgiem wpisanym w trójkąt ABC oraz środkiem ω . Niech X będzie takim punktem na prostej BC różnym od C , że prosta przechodząca przez X i równoległa do AC jest styczna do ω . Podobnie, niech Y będzie takim punktem na prostej BC różnym od B , że prosta przechodząca przez Y i równoległa do AB jest styczna do ω . Niech prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie $P \neq A$. Niech K i L będą odpowiednio środkami odcinków AC i AB .

Dowieść, że $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Zadanie 5. Slimak Turbo gra w grę na planszy o 2024 rzędach i 2023 kolumnach. Na 2022 polach znajdują się ukryte potwory. Na początku Turbo nie wie, gdzie znajdują się potwory, ale wie, że w każdym rzędzie poza pierwszym i ostatnim jest dokładnie jeden potwór oraz w każdej kolumnie znajduje się co najwyżej jeden potwór.

Turbo próbuje przejść z pierwszego rzędu do ostatniego rzędu. W każdej próbie wybiera pole w pierwszym rzędzie, z którego zaczyna wędrówkę, a następnie porusza się po planszy, za każdym razem przechodząc do sąsiedniego pola mającego wspólny bok z polem, na którym się znajduje. (Turbo może odwiedzać wcześniej odwiedzone pola.) Jeśli Turbo wejdzie na pole z potworem, jego próba kończy się i Turbo zostaje przeniesiony do pierwszego rzędu, skąd rozpoczyna kolejną próbę. Potwory nie poruszają się, a Turbo pamięta, na których dotychczas odwiedzonych polach znajdują się potwory. Gdy Turbo dotrze do któregokolwiek pola w ostatnim rzędzie, jego próba kończy się i gra jest zakończona.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą n , dla której Turbo ma strategię gwarantującą dotarcie do ostatniego rzędu w n -tej próbie lub wcześniej, niezależnie od pól zajmowanych przez potwory.

Zadanie 6. Niech \mathbb{Q} oznacza zbiór liczb wymiernych. Funkcję $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ nazwiemy *wodnistą* jeśli spełniona jest następująca własność: dla każdych $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{lub} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita c , że dla każdej wodnistej funkcji f istnieje co najwyżej c różnych liczb wymiernych postaci $f(r) + f(-r)$ dla pewnej liczby wymiernej r oraz znaleźć najmniejszą możliwą wartość c .