понедјељак, 21. септембар 2020

Задатак 1. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Тачка P је у унутрашњости четвороугла $ABCD$ тако да вриједе пропорције:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Доказати да се сљедеће три праве сијеку у једној тачки: унутрашње симетрале углова $\angle ADP$ и $\angle PCB$, те симетрала дужи AB.

Задатак 2. Реални бројеви a, b, c, d су такви да вриједи $a \geq b \geq c \geq d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Доказати да је

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задатак 3. Дато је $4n$ каменчића тежина $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Сваки од каменчића је обојен у једну од n боја и сваком бојом су обојена тачно четири каменчића. Показати да можемо распоредити каменчиће у двије гомиле тако да су задовољена сљедећа два услова:

- Укупна тежина каменчића у обе гомиле је једнака.
- Свака гомила садржи по два каменчића сваке боје.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.

уторак, 22. септембар 2020

Задатак 4. Дат је природан број $n > 1$. На једној планини постоји n^2 станица које су на међусобно различитим висинама. Свака од двије компаније које управљају жичарама, A и B, има k жичара; свака жичара омогућује превоз од једне станице до друге која је на већој висини (без успутних стајања). Свих k жичара компаније A имају k различитих почетних станица и k различитих крајњих станица, при чему жичара која има вишу почетну станицу има и вишу крајњу станицу. Исто важи и за компанију B. Кажемо да једна компанија *повезује* двије станице ако је могуће из ниже стићи у вишу коришћењем једне или више жичара те компаније (при чему друга кретања између станица нису дозвољена).

Одредити најмањи природан број k за који сигурно постоје двије станице које повезују обе компаније.

Задатак 5. Дат је шпил од $n > 1$ карата. На свакој карти је написан један природан број. Шпил има особину да је аритметичка средина бројева написаних на призвољном пару карата из шпила једнака геометријској средини бројева написаних на неком скупу који се састоји од једне или више карата из шпила.

За које n слиједи да бројеви написани на свим картама шпила морају бити једнаки?

Задатак 6. Доказати да постоји позитивна константа c таква да важи сљедеће тврђење:

Нека је $n > 1$ природан број и $\mathcal{S}$ скуп од n тачака у равни такав да је растојање између сваке двије тачке скупа $\mathcal{S}$ барем 1. Тада слиједи да постоји права ℓ која раздваја $\mathcal{S}$ таква да је растојање од било које тачке скупа $\mathcal{S}$ до праве ℓ барем $cn^{-1/3}$.

(Права ℓ *раздваја* скуп тачака $\mathcal{S}$ ако нека дуж чији су крајеви у скупу $\mathcal{S}$ сијече праву ℓ.)

Напомена. За слабије резултате у којима је $cn^{-1/3}$ замијењено са $cn^{-\alpha}$ могу се добити поени у зависности од вриједности константе $\alpha > 1/3$.

Language: Serbian (BIH)

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.