*الثلاثاء 10 تموز 2012*

***المسألة* 1 :**

$ABC$ مثلث ، النقطة $J$ مركز الدائرة الماسة خارجاً لأضلاع المثلث حيث تمس الضلع $BC$ في نقطة $M$ وتمس امتدادي الضلعين $AB$ و $AC$ في $K$ و $L$ على الترتيب . يتقاطع المستقيمان $LM$ و $BJ$ في $F$ ، و يتقاطع المستقيمان $KM$ و $CJ$ في $G$ . لتكن $S$ نقطة تقاطع المستقيمين $AF$ و $BC$ ، ولتكن $T$ نقطة تقاطع المستقيمين $AG$ و $BC$ . برهن أن $M$ منتصف القطعة $ST$ .

***المسألة* 2 :**

ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ولتكن $a_2, a_3, ..., a_n$ أعداداً حقيقية موجبة تحقق $a_2.a_3....a_n = 1$ . برهن أن

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^2...(1+a_n)^2 > n^n$$

***المسألة* 3 :**

لعبة كشف الكذب هي لعبة يلعبها لاعبين اثنين $A$ و $B$ ، تعتمد قواعدها على عددين صحيحين موجبين $k$ و $n$ معلومين لكلا اللاعبين .

في بداية اللعبة يختار اللاعب $A$ عددين صحيحين $x$ و $N$ بحيث $1 \leq x \leq N$ ويحتفظ سراً بالعدد $x$ ويكشف بكل أمانة للاعب $B$ عن العدد $N$ . يحاول اللاعب $B$ أن يعرف العدد $x$ من خلال أسئلة يطرحها على اللاعب $A$ على النحو التالي : في كل سؤال يختار اللاعب $B$ مجموعة $S$ من الأعداد الصحيحة الموجبة ، ويسأل فيما إذا كان العدد $x$ ينتمي إلى المجموعة $S$ ، ويحق للّاعب $B$ أن يسأل الكم الذي يراه مناسباً من الأسئلة وإن يغير المجموعة $S$ كيفما شاء ، أمّا اللاعب $A$ فيجب أن يجيب مباشرة على أسئلة اللّاعب $B$ بنعم أو بلا مع إمكانية الكذب ما شاء من المرات إلاّ أنه في كل $k+1$ من الإجابات المتتالية يجب أن تكون إجابة واحدة على الأقل صحيحة . بعد أن ينتهي اللاعب $B$ من طرح جميع الأسئلة التي أرادها يجب عليه أن يحدد مجموعة $X$ مؤلفة على الأكثر من $n$ عدد صحيحا موجب ، فإذا انتمى العدد $x$ إلى المجموعة $X$ فإن اللاعب $B$ رابح ، وفي غير ذلك يكون خاسراً . برهن أن :

1 . إذا كان $n \geq 2^k$ فإن اللاعب $B$ رابح أكيد .

2 . من أجل كل الأعداد $k$ الكبيرة بما فيه الكفاية يوجد $n \geq 1.99^k$ من أجله لا يمكن للّاعب $B$ أن يضمن الربح .

Language: **Arabic (Syrian)**

Day: 2

53rd International Mathematical Olympiad

MAR DEL PLATA - ARGENTINA

*الأربعاء 11 تموز 2012*

***المسألة*** 4:

أوجد جميع التوابع $f:Z\longrightarrow Z$ التي تحقق

$$(f(a))^2+(f(b))^2+(f(c))^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

من اجل جميع الأعداد الصحيحة $a,b,c$ التي تحقق $a+b+c=0$ .

( نعني بالرمز $Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة )

***المسألة*** 5:

ليكن $ABC$ مثلث فيه $\angle BCA=90^\circ$ ولتكن $D$ المرتسم القائم للنقطة $C$ على الضلع $AB$ . نأخذ نقطة $X$ على القطعة المستقيمة $CD$ ولتكن $K$ نقطة على القطعة المستقيمة $AX$ بحيث $BK=BC$ ، ولتكن $L$ نقطة على القطعة المستقيمة $BX$ بحيث $AL=AC$ ، ولتكن $M$ نقطة تقاطع المستقيمين $AL$ و $BK$ . أثبت أن $MK=ML$ .

***المسألة*** 6:

أوجد جميع الأعداد الطبيعية $n$ التي من أجلها توجد أعداد صحيحة غير سالبة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ بحيث يتحقق

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$$

*Language: Arabic Syrian*

*مدة الامتحان 4ساعات و 30 دقيقة*

*لكل مسألة 7 درجات .*