



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Estonian (est), day 1

laupäev, 8. juuli 2023

Ülesanne 1. Leia kõik kordarvud $n > 1$, mis rahuldavad järgmist tingimust: kui d_1, d_2, \dots, d_k on arvu n kõik positiivsed jagajad, kusjuures $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, siis d_i jagab arvu $d_{i+1} + d_{i+2}$ iga $1 \leq i \leq k - 2$ korral.

Ülesanne 2. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, milles $|AB| < |AC|$. Olgu Ω kolmnurga ABC ümberringjoon. Olgu S ringjoone Ω punkti A sisaldava kaare CB keskpunkt. Läbi punkti A tõmmatud külje BC ristsirge lõikub sirgega BS punktis D ning ringjoonega Ω teist korda punktis $E \neq A$. Sirge läbi punkti D , mis on paralleelne küljega BC , lõikub sirgega BE punktis L . Olgu ω kolmnurga BDL ümberringjoon. Ringjooned ω ja Ω lõikuvad teist korda punktis $P \neq B$.

Tõesta, et ringjoonele ω punktist P tõmmatud puutuja ning sirge BS lõikuvad nurga BAC poolitajal.

Ülesanne 3. Iga täisarvu $k \geq 2$ jaoks leia kõik positiivsete täisarvude lõpmatud jadad a_1, a_2, \dots järgmise omadusega: leidub polünoom P kujul $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, kus c_0, c_1, \dots, c_{k-1} on mittenegatiivsed täisarvud, mis rahuldab iga täisarvu $n \geq 1$ korral tingimust

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}.$$

Language: Estonian

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Estonian (est), day 2

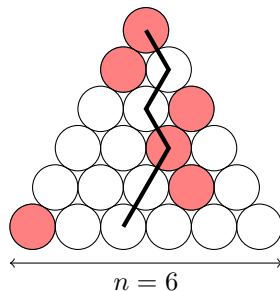
pühapäev, 9. juuli 2023

Ülesanne 4. Olgu $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ sellised paarikaupa erinevad positiivsed reaalarvud, et arv

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

on täisarv iga $n = 1, 2, \dots, 2023$ korral. Tõesta, et $a_{2023} \geq 3034$.

Ülesanne 5. Olgu n positiivne täisarv. *Jaapani kolmnurk* koosneb $1 + 2 + \dots + n$ ringist, mis on paigutatud võrdkülgse kolmnurga kujuliselt nii, et iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral sisaldab rida i täpselt i ringi, millest täpselt üks on värvitud punaseks. *Jaapani kolmnurga ninja teekond* on n ringist koosnev jada, mis saadakse alustades ülemisest reast, minnes korduvalt ühelt ringilt ühele kahest vahetult selle all olevast ringist ja lõpetades alumisel real. Siin on näide Jaapani kolmnurgast $n = 6$ jaoks koos ninja teekonnaga selles kolmnurgas, mis sisaldab kahte punast ringi.



Leidke n suhtes suurim k , mille korral leidub igas Jaapani kolmnurgas ninja teekond, mis sisaldab vähemalt k punast ringi.

Ülesanne 6. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk. Olgu A_1, B_1, C_1 sellised punktid kolmnurga ABC sisepiirkonnas, et $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ ning

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Lõikugu sirged BC_1 ja CB_1 punktis A_2 , sirged CA_1 ja AC_1 punktis B_2 ning sirged AB_1 ja BA_1 punktis C_2 .

Tõesta, et kui kolmnurk $A_1B_1C_1$ on erikülgne, siis kolmnurkade AA_1A_2 , BB_1B_2 ning CC_1C_2 kolm ümberringjoont läbivad kõik kahte ühist punkti.