Antradienis, 2017 m. liepos 18 d.

1 uždavinys. Su kiekvienu sveikuoju skaičiumi $a_0 > 1$ seka a_0, a_1, a_2, ... apibrėžiama taip:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{jei } \sqrt{a_n} \text{ yra sveikasis skaičius,} \\ a_n + 3 & \text{priešingu atveju,} \end{cases} \qquad \text{su kiekvienu } n \geqslant 0.$$

Raskite visas tokias a_0 reikšmes, su kuriomis egzistuoja toks skaičius A, kad $a_n = A$ su be galo daug n reikšmių.

2 uždavinys. Tegul $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

su visais realiaisiais skaičiais x ir y.

3 uždavinys. Medžiotojas ir nematomas kiškis plokštumoje žaidžia tokį žaidimą. Pradžioje kiškis yra taške A_0, o medžiotojas – taške B_0. Taškai A_0 ir B_0 sutampa. Tarkime, kad po $n-1$ žaidimo raundo kiškis yra taške A_{n-1}, o medžiotojas – taške B_{n-1}. Žaidimas n-tajame raunde vyksta tokia tvarka:

(i) Nematomas kiškis iš taško A_{n-1} peršoka į kokį nori tašką A_n su sąlyga, kad atstumas tarp taškų A_{n-1} ir A_n yra lygus 1.

(ii) Medžiotojo turimas prietaisas nurodo medžiotojui tašką P_n. Prietaiso gamintojas garantuoja, kad atstumas tarp prietaiso nurodyto taško P_n ir tikrosios kiškio buvimo vietos A_n neviršija 1.

(iii) Medžiotojas (jį kiškis mato) iš taško B_{n-1} pereina į kokį nori tašką B_n su sąlyga, kad atstumas tarp taškų B_{n-1} ir B_n yra lygus 1.

Ar medžiotojas, kad ir kaip kiškis bešokinėtų, ir kad ir kokius taškus medžiotojo turimas prietaisas kaskart berodytų, visada gali judėti taip, kad po 10^9 žaidimo raundų jis garantuotai žinotų, kad atstumas tarp jo ir kiškio neviršija 100?

Trečiadienis, 2017 m. liepos 19 d.

4 uždavinys. Skirtingi taškai R ir S priklauso apskritimui Ω, o RS nėra apskritimo Ω skersmuo. Tiesė ℓ yra apskritimo Ω liestinė taške R, o T yra toks taškas, kad S yra atkarpos RT vidurio taškas. Trumpesniajame apskritimo Ω lanke RS duotas toks taškas J, kad apibrėžtas apie trikampį JST apskritimas Γ kertasi su tiese ℓ dviejuose skirtinguose taškuose. Tegul A yra Γ ir ℓ susikirtimo taškas, esantis arčiau taško R. Tiesės AJ ir apskritimo Ω antrasis susikirtimo taškas yra K. Įrodykite, kad tiesė KT yra apskritimo Γ liestinė.

5 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius $N \geqslant 2$. Eilėje išsirikiavę stovi $N(N+1)$ skirtingo ūgio futbolininkų. Seras Aleksas nori pašalinti is rikiuotės $N(N-1)$ futbolininką taip, kad savo vietose likę stovėti $2N$ futbolininkų tenkintų tokias N sąlygų:

(1) niekas nestovi tarp dviejų aukščiausiųjų futbolininkų,

(2) niekas nestovi tarp trečio ir ketvirto pagal ūgį futbolininkų,

$\vdots$

(N) niekas nestovi tarp dviejų žemiausiųjų futbolininkų.

Įrodykite, kad tai visada įmanoma padaryti.

6 uždavinys. Sveikųjų skaičių pora (x, y) vadinama *primityviuoju tašku*, jei bendras didžiausias skaičių x ir y daliklis yra lygus 1. Tegul S yra baigtinė primityviųjų taškų aibė. Įrodykite, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius n ir sveikieji skaičiai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kad su visais (x, y) iš S galioja lygybė

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$