الإثنين, 21، سبتمبر 2020

المسألة رقم 1 ليكن $ABCD$ رباعيا محدبا، والنقطة P تقع داخله. بحيث يتحقق التناسب التالي

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

أثبت أن المستقيمات الثلاثة الآتية تتقاطع في نقطة: المنصفان الداخليان للزاويتين $\angle ADP$ و $\angle PCB$ والعمود المنصف للقطعة المستقيمة AB.

المسألة رقم 2 الأعداد الحقيقية a, b, c, d تحقق أن $a \geq b \geq c \geq d > 0$ و $a + b + c + d = 1$. أثبت أن

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1$$

المسألة رقم 3 هناك $4n$ من الحصى أوزانها $1, 2, 3, \dots, 4n$. كل حصاة ملونة بلون من n من الألوان وهناك 4 من الحصى لكل لون. أثبت أنه يمكننا ترتيب الحصى إلى كومتين بحيث يتحقق الشرطان التاليان معًا:

- الوزن الكلي لكل من الكومتين متساوٍ.
- كل كومة تحتوي حصاتين من كل لون.

الزمن 4.5 ساعة
لكل سؤال 7 درجات

Language: Arabic

الثلاثاء, 22، سبتمبر 2020

المسألة رقم 4 لدينا عدد صحيح $n > 1$. هناك n^2 محطة على سفح جبل بارتفاعات مختلفة. كل من شركتي التلفريك A و B، تشغل k من العربات، وكل عربة تنقل الركاب من إحدى المحطات إلى محطة أعلى منها دون توقف عند محطة وسيطة. الـ k عربة الخاصة بالشركة A لها k نقطة بداية مختلفة و k نقطة نهاية مختلفة، والعربة التي تبدأ من نقطة أعلى من عربة أخرى تنتهي عند نقطة أعلى منها أيضًا. نفس الشروط تنطبق على الشركة B. يقال لمحطتين بأنهما مرتبطتان عن طريق شركة إذا استطاع راكب الانتقال من محطة سفلى إلى محطة عليا باستخدام عربة أو أكثر من نفس الشركة (لا يمكن التنقل بين المحطات بوسيلة مواصلات أخرى).
عين أصغر عدد صحيح موجب k الذي يضمن وجود محطتين مرتبطتين عن طريق كلا الشركتين.

المسألة رقم 5 لدينا $n > 1$ من الكروت المعطاة. تم كتابة عدد صحيح موجب على كل كرت. مجموعة الكروت تحقق أن الوسط الحسابي لأي عددين على زوج من الكروت يساوي الوسط الهندسي للأعداد المكتوبة على مجموعة كروت أخرى (مكونة من بطاقة أو أكثر).
لأي قيم n يقتضي ذلك أن جميع الأعداد على الكروت متساوية؟

المسألة رقم 6 أثبت وجود ثابت موجب c يجعل العبارة الآتية صحيحة:
إذا اعتبرنا عددًا صحيحا $n > 1$، ومجموعة S من n نقطة في المستوي بحيث تكون المسافة بين أي نقطتين في S تساوي 1 على الأقل، فإنه يوجد مستقيم ℓ يفصل نقاط S بحيث تكون المسافة من أي نقطة في S إلى ℓ تساوي $cn^{-1/3}$ على الأقل.
(المستقيم ℓ يفصل مجموعة نقاط S إذا وجدت قطعة مستقيمة تصل نقطتين من S وتقطع ℓ)

ملاحظة. من الممكن منح درجات جزئية على النتيجة البديلة الأضعف $cn^{-\alpha}$ بدلا من $cn^{-1/3}$ اعتمادا على قيمة $\alpha > 1/3$.