

*Turkish version*

Birinci Gün  
25 Temmuz 2007

**Soru 1.**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gerçek sayıları verilmiş olsun. Her  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) için,

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun.

- a. Tüm  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  gerçek sayıları için,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

olduğunu kanıtlayınız.

- b. (\*) da eşitliğin gerçekleşmesini sağlayan  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  gerçek sayılarının bulunduğu gösteriniz.

**Soru 2.**  $A, B, C, D$  ve  $E$  den oluşan beş nokta,  $ABCD$  bir paralelkenar ve  $BCED$  konveks bir kirişler dörtgeni olacak biçimde verilmiş olsun.  $A$  dan geçen bir  $\ell$  doğrusu,  $[DC]$  doğru parçasını bir  $F$  iç noktasında ve  $BC$  doğrusunu da bir  $G$  noktasında kessin.  $|EF| = |EG| = |EC|$  olduğunu varsayıyalım.  $\ell$  nin,  $\widehat{DAB}$  açısının açı ortayı olduğunu kanıtlayınız.

**Soru 3.** Bir matematik yarışmasına katılan yarışmacılardan bazıları arkadaştır. Arkadaşlık her zaman karşılıklıdır. Bir yarışmacı grubundaki her yarışmacı çifti arkadaşsa, bu gruba bir *klik* diyelim. (Özellikle, ikiden az yarışmacıdan oluşan her grup bir klikdir.) Bir klikin eleman sayısına bu klikin *büyüklüğü* diyelim.

Bu yarışmadaki kliklerin büyükliklerinin aldığı en büyük değer bir çift sayı olsun. Tüm yarışmacıların, bir odadaki kliklerin büyükliklerinin en büyük değeri, diğer odadaki kliklerin büyükliklerinin en büyük değerine eşit olacak biçimde iki odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

*Sınav süresi 4 1/2 saatir.  
Her soru 7 puan değerindedir.*

*Turkish version*

İkinci Gün  
26 Temmuz 2007

**Soru 4.** Bir  $ABC$  üçgeninde,  $\widehat{BCA}$  açısının açı ortayı, üçgenin çevrel çemberini ikinci kez  $R$  de,  $[BC]$  nin orta dikmesini  $P$  de ve  $[AC]$  nin orta dikmesini de  $Q$  da kesiyor.  $[BC]$  nin orta noktası  $K$  ve  $[AC]$  nin orta noktası  $L$  olsun.  $RPK$  ve  $RQL$  üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu kanıtlayınız.

**Soru 5.**  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılar olsun.  $4ab - 1$ ,  $(4a^2 - 1)^2$  yi böülüyorsa,  $a = b$  olduğunu kanıtlayınız.

**Soru 6.**  $n$  pozitif bir tam sayı olsun. Üç boyutlu uzayda  $(n+1)^3 - 1$  noktadan oluşan

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kümesi veriliyor. Birleşimleri  $S$  kümesini kapsayan, ama  $(0, 0, 0)$  noktasını içermeyen düzlemlerin sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saatdir.  
Her soru 7 puan değerindedir.*