



IMO 2023

Chiba, JAPAN 64th

Arabic (Tunisian) (art), day 1

السبت، 8. جويلية 2023

مسألة 1. ابحث عن جميع الأعداد الطبيعية غير الأولى $n > 1$ التي تحقق الخاصة الآتية: إذا كانت d_1, d_2, \dots, d_k تمثل جميع القواسم الموجبة للعدد n حيث $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ ، فإن d_i يقسم $d_{i+1} + d_{i+2}$ أيّاً كان العدد $1 \leq i \leq k - 2$.

مسألة 2. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا بحيث $AB < AC$. ولتكن Ω الدائرة المارة برؤوس المثلث. لتكن النقطة S منتصف القوس CB من Ω الذي يحوي النقطة A . المستقيم المار من A والعمودي على BC يلاقي BS في D ويلاقي الدائرة Ω ثانية في $E \neq A$. المستقيم المار بالنقطة D والموازي للمستقيم BC يلاقي المستقيم BE في L . لتكن الدائرة ω المارة برؤوس المثلث BDL . ولنفترض أنّ ω تتقاطع ثانية مع Ω في $P \neq B$. أثبت أنّ المماس للدائرة ω في P يلاقي المستقيم BS في نقطة واقعة على المنصف الداخلي للزاوية $\angle ABC$.

مسألة 3. في حالة عدد صحيح $k \geq 2$ ، عيّن جميع المتتاليات اللانهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً a_1, a_2, \dots التي لأجلها يوجد كثير حدود P من الصيغة $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ أمثاله c_0, c_1, \dots, c_{k-1} أعداد صحيحة أكبر أو تساوي الصفر، ويحقق

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

أيّاً كان العدد الصحيح $n \geq 1$.



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Arabic (Tunisian) (art), day 2

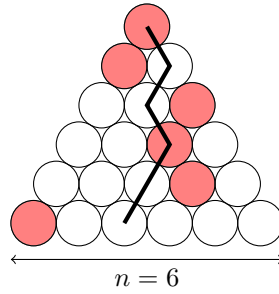
الأحد، 9 جويلية 2023

مسألة 4. لتكن $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ أعداداً حقيقية موجبة تماماً مختلفة مثنى مثنى بحيث يكون

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

عدداً صحيحاً لكل $n = 1, 2, \dots, 2023$. أثبت أن $a_{2023} \geq 3034$.

مسألة 5. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً تماماً. يتألف مثلث ياباني من $1 + 2 + \dots + n$ من الدوائر المرتبة في المستوي على شكل مثلث متساوي الأضلاع. يحوي السطر رقم i عدداً i من الدوائر واحدة منها فقط حمراء اللون حيث $i = 1, 2, \dots, n$. مسار النجاة في مثلث ياباني هو متتالية مؤلفة من n دائرة يبدأ بالدائرة في السطر العلوي ثم ينتقل على التوالي من دائرة إلى إحدى الدائرتين الواقعتين تحتها مباشرة وصولاً إلى السطر الأخير. هنا مثال على مثلث ياباني في حالة $n = 6$ مع مسار نجاة يحوي دائرتين حمراوين فيه.



جدّ بدلالة n أكبر عدد k بحيث يحتوي أي مثلث ياباني على مسار نجاة يضم k كرة حمراء اللون على الأقل.

مسألة 6. ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع. ولتكن A_1, B_1, C_1 ثلاث نقاط واقعة داخله وتحقق

$$BA_1 = A_1C, \quad CB_1 = B_1A, \quad AC_1 = C_1B$$

وكذلك

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

يتقاطع BC_1 و CB_1 في A_2 . ويتقاطع CA_1 و AC_1 في B_2 ، وأخيراً يتقاطع AB_1 و BA_1 في C_2 . بافتراض أنّ أطوال أضلاع المثلث $A_1B_1C_1$ مختلفة مثنى مثنى أثبت وجود نقطتين مشتركتين تشترك بهما الدوائر الثلاث المارة برؤوس كل من المثلثات AA_1A_2 و BB_1B_2 و CC_1C_2 .