

Language: Vietnamese

Day: 1

Thứ Sáu, 10 tháng Bảy 2015

Bài 1. Ta nói tập \mathcal{S} gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng là tập *cân đối* nếu với hai điểm phân biệt A và B tùy ý thuộc \mathcal{S} , tồn tại điểm C thuộc \mathcal{S} sao cho $AC = BC$. Ta nói \mathcal{S} là tập *vô tâm* nếu với ba điểm phân biệt A, B, C tùy ý thuộc \mathcal{S} , không tồn tại điểm P thuộc \mathcal{S} sao cho $PA = PB = PC$.

- Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 3$, tồn tại tập cân đối gồm n điểm.
- Hãy tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại tập cân đối và vô tâm gồm n điểm.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho mỗi số trong các số

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

là lũy thừa của 2.

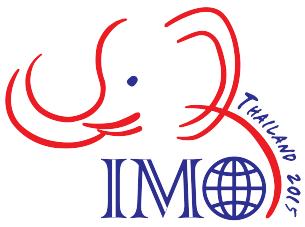
(Lũy thừa của 2 là một số nguyên có dạng 2^n , với n là số nguyên không âm.)

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC với $AB > AC$. Ký hiệu Γ là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm và F là chân đường cao hạ từ A của tam giác đó. Gọi M là trung điểm của BC . Gọi Q là điểm nằm trên Γ sao cho $\angle HQA = 90^\circ$, và gọi K là điểm nằm trên Γ sao cho $\angle HKQ = 90^\circ$. Giả sử rằng các điểm A, B, C, K và Q đôi một phân biệt, và nằm trên Γ theo thứ tự đó.

Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KQH và FKM tiếp xúc với nhau.

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm



Language: Vietnamese

Day: 2

Thứ Bảy, 11 tháng Bảy 2015

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω tâm O . Đường tròn Γ tâm A cắt đoạn thẳng BC tại các điểm D và E sao cho B, D, E và C đôi một phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo thứ tự đó. Gọi F và G là các giao điểm của Γ và Ω , sao cho A, F, B, C và G nằm trên Ω theo thứ tự đó. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và đoạn thẳng AB . Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và đoạn thẳng CA .

Giả sử các đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại điểm X . Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO .

Bài 5. Gọi \mathbb{R} là tập hợp số thực. Hãy tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

với mọi số thực x và y .

Bài 6. Dãy số nguyên a_1, a_2, \dots thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ với mọi $j \geq 1$;
- (ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ với mọi $1 \leq k < \ell$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N sao cho

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

với mọi số nguyên m và n thỏa mãn $n > m \geq N$.

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm.