e hënë, 21. shtator 2020

Detyra 1. Le të jetë dhënë katërkëndëshi konveks $ABCD$. Pika P gjendet në brendi të katërkëndëshit $ABCD$. Vlejnë këto barazi:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Vërtetoni se këto tri drejtëza priten në një pikë: simetralet e brendshme të këndeve $\angle ADP$ dhe $\angle PCB$ si dhe simetralja normale e segmentit AB.

Detyra 2. Numrat realë a, b, c, d janë të tillë që $a \geq b \geq c \geq d > 0$ dhe $a+b+c+d = 1$. Vërtetoni se

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Detyra 3. Janë dhënë $4n$ guralecë me pesha $1, 2, 3, \dots, 4n$. Secili guralec është ngjyrosur me një nga n ngjyrat. Prej secilës ngjyrë janë nga katër guralecë. Tregoni se guralecët mund t'i ndajmë në dy grupe në mënyrë që të plotësohen të dy kushtet:

- Pesha totale e të dy grupeve të jetë e njëjtë.
- Secili grup përmban nga dy guralecë të secilës ngjyrë.

Koha: 4 orë e 30 minuta.
Secili problem vlen 7 pikë.

e martë, 22. shtator 2020

Detyra 4. Është dhënë numri i plotë $n > 1$. Në shpatin e një mali gjenden n^2 stacione, që të gjitha në lartësi të ndryshme. Secila nga dy kompanitë e teleferikëve, A dhe B, operon me k teleferikë; secili teleferik ofron transfer nga njëri stacion te një stacion më lartë (pa ndalesa të ndërmjetme). k teleferikët e kompanisë A kanë k stacione të ndryshme të nisjes dhe k stacione të ndryshme të ndalesës, dhe teleferiku që fillon më lartë gjithashtu përfundon më lartë. Të njëjtat kushte vlejnë për kompaninë B. Për dy stacione themi se janë të *lidhura* përmes një kompanie nëse është e mundur të udhëtohet prej stacionit të poshtëm te stacioni i sipërm duke përdorur një ose më shumë teleferikë të asaj kompanie (nuk lejohen lëvizje të tjera mes stacioneve).

Përcaktoni numrin më të vogël të plotë pozitiv k për të cilin garantohet ekzistenca e dy stacioneve që janë të *lidhura* nga të dy kompanitë.

Detyra 5. Është dhënë një pako me $n > 1$ karta. Në secilën kartë është shënuar një numër i plotë pozitiv. Pakoja ka vetinë që mesi aritmetik i çfarëdo dy numrave të kartave është gjithashtu mes gjeometrik i numrave të ndonjë koleksioni me një apo më shumë karta.

Për cilat vlera të n-it rrjedh se numrat në karta janë të gjithë të barabartë?

Detyra 6. Tregoni që ekziston konstanta pozitive c ashtu që pohimi vijues është i saktë:

Jepet numri i plotë $n > 1$, dhe bashkësia $\mathcal{S}$ e n pikave në rrafsh ashtu që distanca në mes të çdo dy pikave të ndryshme në $\mathcal{S}$ të jetë së paku 1. Rrjedh që ekziston një drejtëz ℓ që e ndan bashkësinë $\mathcal{S}$ ashtu që distanca e cilësdo pikë të bashkësisë $\mathcal{S}$ nga drejtëza ℓ është së paku $cn^{-1/3}$.

(Një vijë ℓ *e ndan* një bashkësi pikash $\mathcal{S}$ nëse ndonjë segment që bashkon dy pika në $\mathcal{S}$ e ndërpret drejtëzën ℓ.)

Shënim. Rezultatet më të dobëta ku $cn^{-1/3}$ zëvendësohet me $cn^{-\alpha}$ mund të shpërblehen me pikë varësisht nga vlera e konstantes $\alpha > 1/3$.