Selasa, 10 Julai 2012

Masalah 1. Diberi segitiga ABC, titik J ialah titik tengah bulatan luar yang bertentangan dengan bucu A. Bulatan luar ini adalah tangen kepada sisi BC pada titik M, serta tangen kepada garis AB dan AC masing-masing pada titik K dan L. Garis LM dan BJ bertemu pada titik F, manakala garis KM dan CJ bertemu pada titik G. Andaikan S ialah titik persilangan garis AF dan BC, dan andaikan T ialah titik persilangan garis AG dan BC.

Buktikan bahawa M ialah titik tengah ST.

(*Bulatan luar* yang bertentangan dengan bucu A pada segitiga ABC ialah bulatan yang tangen kepada tembereng BC, kepada penerusan garis AB yang melepasi B, dan kepada penerusan garis AC yang melepasi C.)

Masalah 2. Andaikan $n \geq 3$ ialah suatu integer, dan andaikan bahawa $a_2, a_3, \ldots, a_n$ ialah nombor nyata positif dengan $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan bahawa

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

Masalah 3. Permainan *Tekaan Si Pembohong* ialah satu permainan yang dimainkan oleh dua orang pemain A dan B. Peraturan permainan ini bergantung pada dua integer positif k dan n yang diketahui oleh kedua-dua pemain.

Pada permulaan permainan, A memilih integer x dan N dengan $1 \leq x \leq N$. Pemain A merahsiakan x, dan memaklumkan N dengan jujur kepada pemain B. Sekarang pemain B berusaha mendapatkan maklumat mengenai x dengan menyoal pemain A soalan-soalan seperti berikut: setiap soalan diutarakan dengan keadaan B mengemukakan satu set sembarangan integer positif S (mungkin yang sudah dikemukakan dalam soalan-soalan sebelumnya), dan menanyakan A sama ada x adalah unsur S. Pemain B boleh menyoal soalan seumpama ini sebanyak mana yang dimahunya. Selepas setiap soalan, pemain A mestilah dengan serta-merta menjawabnya dengan jawapan *ya* atau *tidak*, namun dia dibenarkan berbohong sebanyak mana yang dimahunya; satu-satunya kekangan baginya ialah, untuk sebarang $k+1$ jawapan yang berturutan, sekurang-kurangnya satu daripada jawapannya mestilah jujur.

Selepas B menyoal seberapa banyak soalan yang dimahunya, dia mestilah mengemukakan satu set X yang terdiri daripada, sebanyak-banyaknya, n integer positif. Sekiranya x ialah unsur X maka B menang; jika sebaliknya, dia kalah. Buktikan bahawa:

1. Jika $n \geq 2^k$, maka B dapat menjamin kemenangannya.

2. Untuk semua k yang cukup besar, wujud satu integer $n \geq 1.99^k$ yang B tidak dapat menjamin kemenangannya.

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Malay**

Day: **2**

Rabu, 11 Julai 2012

Masalah 4. Cari semua fungsi $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan keadaan, untuk semua integer a, b, c yang mematuhi $a+b+c=0$, persamaan berikut adalah benar:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \; = \; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ di sini mewakili set integer.)

Masalah 5. Andaikan ABC satu segitiga dengan $\angle BCA = 90°$, dan andaikan D ialah tapak altitud dari C. Andaikan X ialah satu titik di bahagian dalam tembereng CD. Andaikan K ialah titik pada tembereng AX dengan $BK = BC$. Dengan cara yang sama, andaikan L ialah titik pada tembereng BX dengan $AL = AC$. Andaikan M ialah titik persilangan AL dan BK.

Tunjukkan bahawa $MK = ML$.

Masalah 6. Cari semua integer positif n yang dengannya wujud integer tak negatif $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dengan

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \; = \; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \; = \; 1.$$

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah