

Cumartesi, 8 Temmuz 2023

Soru 1. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm $n > 1$ bileşik tam sayılarını belirleyiniz: d_1, d_2, \dots, d_k sayıları n sayısının tüm pozitif bölenleri ve $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ ise, her $1 \leq i \leq k-2$ için d_i sayısı $d_{i+1} + d_{i+2}$ sayısını böler.

Soru 2. Dar açılı bir ABC üçgeninde $|AB| < |AC|$ olsun. ABC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. Ω çemberinin A noktasını içeren CB yayının orta noktası S olsun. A dan BC ye inilen dikme BS ile D noktasında ve Ω ile ikinci kez $E \neq A$ noktasında kesişiyor. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan doğru BE doğrusu ile L noktasında kesişiyor. BDL üçgeninin çevrel çemberi ω olsun. ω ile Ω ikinci kez $P \neq B$ noktasında kesişiyor.

ω çemberine P noktasında teğet olan doğrunun BS doğrusu ile $\angle BAC$ açısının iç açıortayı üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

Soru 3. $k \geq 2$ tam sayı olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm a_1, a_2, \dots sonsuz pozitif tam sayı dizilerini belirleyiniz: a_1, a_2, \dots dizisi için öyle bir P polinomu vardır ki, c_0, c_1, \dots, c_{k-1} negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ formundadır ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

koşulu sağlanır.

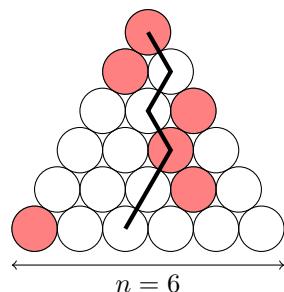
Pazar, 9 Temmuz 2023

Soru 4. Herhangi ikisi birbirinden farklı olan $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ pozitif gerçek sayıları için,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

sayısı her $n = 1, 2, \dots, 2023$ için bir tam sayıdır. Buna göre, $a_{2023} \geq 3034$ olduğunu gösteriniz.

Soru 5. n bir pozitif tam sayı olsun. Bir *Japon üçgeni*, $1 + 2 + \dots + n$ adet çemberin, eşkenar üçgen şeklinde ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için i . satırda tam olarak bir tanesi kırmızı olan i tane çember bulunacak şekilde yerleştirilmesiyle olmaktadır. Japon üçgenindeki bir *ninja yolu*, en tepedeki çemberden başlayıp her defasında bulunduğu çemberin hemen altındaki iki çemberden birine giderek en alt satırda biten, n adet çemberden oluşan bir dizidir. Aşağıda, $n = 6$ durumunda bir Japon üçgeni ve iki adet kırmızı çember içeren bir ninja yolunun örneği verilmiştir.



Her Japon üçgeninde en az k adet kırmızı çember içeren bir ninja yolu bulunuyorsa, k sayısının alabileceği en büyük değeri n cinsinden belirleyiniz.

Soru 6. ABC bir eşkenar üçgen olsun. A_1, B_1, C_1 noktaları ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ ve

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

olacak şekilde alınıyor. BC_1 ve CB_1 doğruları A_2 noktasında, CA_1 ve AC_1 doğruları B_2 noktasında, ve AB_1 ve BA_1 doğruları C_2 noktasında kesişiyor.

$A_1B_1C_1$ çeşitkenar üçgen ise, öyle iki nokta bulunduğuunu gösteriniz ki, AA_1A_2 , BB_1B_2 ve CC_1C_2 üçgenlerinin her birinin çevrel çemberi bu iki noktadan da geçer.