Language: **Georgian**

Day: **1**

*პარასკევი, 10 ივლისი, 2015*

**ამოცანა 1.** სიბრტყეზე მდებარე წერტილთა სასრულ $\mathcal{S}$ სიმრავლეს ვუწოდოთ *გაწონასწორებული*, თუ ყოველი ორი განსხვავებული $A$ და $B$ წერტილისთვის $\mathcal{S}$ სიმრავლიდან, არსებობს წერტილი $C$, ასევე $\mathcal{S}$ სიმრავლიდან ისეთი, რომ $AC = BC$. ვიტყვით, რომ $\mathcal{S}$ არის *უცენტრო*, თუ ყოველი სამი წყვილ-წყვილად განსხვავებული $A$, $B$ და $C$ წერტილისთვის $\mathcal{S}$-დან, არ არსებობს $\mathcal{S}$ სიმრავლის წერტილი $P$ ისეთი, რომ $PA = PB = PC$.

(ა) აჩვენეთ, რომ ყოველი მთელი $n \geqslant 3$-თვის, არსებობს გაწონასწორებული სიმრავლე, რომელიც $n$ ცალი წერტილისგან შედგება.

(ბ) იპოვეთ ყველა მთელი $n \geqslant 3$ რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს გაწონასწორებული უცენტრო სიმრავლე, რომელიც $n$ ცალი წერტილისგან შედგება.

**ამოცანა 2.** იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა $(a, b, c)$ სამეული ისეთი, რომ

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

რიცხვებიდან თითოეული იყოს 2-ის ხარისხი.

( *2-ის ხარისხი ეწოდება $2^n$ სახის რიცხვს, სადაც $n$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვია.*)

**ამოცანა 3.** ვთქვათ $ABC$ მახვილკუთხა სამკუთხედია, რომელშიც $AB > AC$-ზე. ვთქვათ $\Gamma$ არის მასზე შემოხაზული წრეწირი, $H$ არის მისი ორთოცენტრი, ხოლო $F$ არის $A$ წერტილიდან დაშვებული სიმაღლის ფუძე. ვთქვათ $M$ არის $BC$ გვერდის შუაწერტილი. ვთქვათ $Q$ არის ისეთი წერტილი $\Gamma$ წრეწირზე, რომ $\angle HQA = 90^\circ$, და ვთქვათ $K$ არის ისეთი წერტილი $\Gamma$-ზე, რომ $\angle HKQ = 90^\circ$. ვთქვათ $A$, $B$, $C$, $K$ და $Q$ წერტილები ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით არიან განლაგებულნი $\Gamma$ წრეწირზე და ამასთან, ისინი წყვილ-წყვილად განსხვავებული წერტილებია.

დაამტკიცეთ, რომ $KQH$ და $FKM$ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ერთმანეთს ეხება.



*სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წუთი*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*

Language: **Georgian**

Day: **2**

*შაბათი, 11 ივლისი, 2015*

**ამოცანა 4.** ვთქვათ $\Omega$ არის $ABC$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი $O$ ცენტრით. $\Gamma$ წრეწირი ცენტრით $A$ წერტილში კვეთს $BC$ გვერდს $D$ და $E$ წერტილებში ისე, რომ $B$, $D$, $E$ და $C$ წერტილები წყვილ-წყვილად განსხვავებული წერტილებია და მდებარეობენ $BC$ წრფეზე ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით. ვთქვათ $\Gamma$ და $\Omega$ წრეწირები იკვეთება $F$ და $G$ წერტილებში ისე, რომ $A$, $F$, $B$, $C$ და $G$ წერტილები ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით მდებარეობენ $\Omega$ წრეწირზე. ვთქვათ $K$ არის $BDF$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისა და $AB$ გვერდის მეორე გადაკვეთის წერტილი. ვთქვათ $L$ არის $CGE$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისა და $CA$ გვერდის მეორე გადაკვეთის წერტილი.

დავუშვათ, რომ $FK$ და $GL$ ერთმანეთისგან განსხვავებული წრფეებია, რომლებიც იკვეთება $X$ წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $X$ ძევს $AO$ წრფეზე.

**ამოცანა 5.** ვთქვათ $\mathbb{R}$ არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. განსაზღვრეთ ყველა $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

ყოველი ნამდვილი $x$ და $y$ რიცხვებისთვის.

**ამოცანა 6.** მოცემულია მთელ რიცხვთა $a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობა ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ ყოველი $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ ყოველი $1 \leqslant k < \ell$.

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი $b$ და $N$ რიცხვები, რომ მართებულია უტოლობა

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

ყოველი მთელი $m$ და $n$ რიცხვებისთვის, $n > m \geqslant N$.



*სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*