

Даваа, 21. 9 дүгээр сарын 2020

Бодлого 1. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт авч үзье. P цэг $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид оршино. Дараах харьцаа биелдэг байг:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Дараах гурван шулуун нэг цэгт огтлолцоно гэж батал: $\angle ADP$, $\angle PCB$ өнцгүүдийн дотоод биссектрис, AB хэрчмийн дундаж перпендикуляр.

Бодлого 2. a, b, c, d бодит тоонууд $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ба $a + b + c + d = 1$ нөхцөлийг хангана.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

болохыг батал.

Бодлого 3. $1, 2, 3, \dots, 4n$ жинтэй $4n$ ширхэг чулуу өгөгдөв. Өнгө бүрээр тус бүр дөрвөн чулуу будагдсан байхаар эдгээр чулууг n өнгийн аль нэгээр буджээ. Дараах хоёр нөхцөлийг хангаж байхаар чулуунуудыг хоёр овоо болгон хувааж болно гэж батал:

- Хоёр овооны нийт жин хоорондоо тэнцүү.
- Овоо бүрд өнгө бүрээс хоёр чулуу орсон.

Мягмар, 22. 9 дүгээр сарын 2020

Бодлого 4. $n > 1$ бүхэл тоо. Бүгдээрээ ялгаатай өндөрт байрласан n^2 зогсоол уул өөд байрласан байв. A ба B компаниуд тус бүр k ширхэг дүүжин тэрэг ажиллуулдаг; аль ч дүүжин тэрэг нэг буудлаас нөгөө буудал руу (өөр буудлаар дамжихгүйгээр) дээшээ өгсдөг. A компанийн дүүжин тэргүүд k ялгаатай эхлэлийн цэгтэй бөгөөд k ялгаатай төгсгөлийн цэгтэй, түүнчлэн аль өндрөөс эхэлсэн дүүжин тэрэг нь илүү өндөрт очдог. B компанийн дүүжин тэргүүдийн хувьд мөн ижил нөхцөл биелдэг. Хэрвээ аль нэг доод буудлаас өөр нэг дээд буудал руу нэг компанийн нэг эсвэл хэсэг дүүжин тэргээр дамжин хүрч болдог бол энэ хоёр буудлыг тухайн компаниар *холбогдсон* гээ.

Хоёр компаниар нэгэн зэрэг холбогдсон хоёр буудал зайлшгүй олддог байх хамгийн бага k натурал тоог ол.

Бодлого 5. $n > 1$ ширхэг карттай багц хөзөр өгөгдөв. Карт тус бүр дээр нэг натурал тоо бичигдсэн. Энэ хөзрийн аль ч хоёр карт дээр бичигдсэн тоонуудын арифметик дундаж нь өөр нэг эсвэл хэсэг карт дээр бичигдсэн тоонуудын геометр дундаж болдог.

Ямар n -ийн хувьд эдгээр картууд дээр бичигдсэн тоонууд бүгд тэнцүү гэж гарах вэ?

Бодлого 6. Дараах өгүүлбэр биелдэг байх c гэсэн эерэг бодит оршин байна гэж батал:

$n > 1$ бүхэл тоо ба аливаа ялгаатай хоёр цэгийн хоорондох зай нь ядаж 1 байх хавтгайн n ширхэг цэгээс тогтох S олонлог авахад S олонлогийг *хуваадаг* бөгөөд S -ийн аль ч цэгээс ядаж $cn^{-1/3}$ зайд байрлах ℓ шулуун оршин байна.

(Хэрвээ ℓ шулуун S олонлогийн хоёр цэгийг холбосон хэрчмийг огтолдог бол *хуваадаг* гэж үзнэ.)

Note. $cn^{-1/3}$ -ийг $cn^{-\alpha}$ -ээр сулруулсан аливаа үнэлгээнд $\alpha > 1/3$ -ийн утгаас хамаарч оноо өгөх боломжтой.