Dinsdag 8 juli 2014

Opgave 1. Zij $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ een oneindige rij van (strikt) positieve gehele getallen.
Bewijs dat er een uniek geheel getal $n \geqslant 1$ bestaat zodanig dat

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Opgave 2. Zij $n \geqslant 2$ een geheel getal. Beschouw een $n \times n$-schaakbord bestaande uit n^2 eenheidsvierkantjes. Een opstelling van n torens op dit bord heet *vreedzaam* als er in elke rij en in elke kolom precies één toren staat.
Bepaal het grootste positieve gehele getal k zodanig dat er, voor elke vreedzame opstelling van n torens, een $k \times k$-vierkant bestaat waarbij op geen van zijn k^2 eenheidsvierkantjes een toren staat.

Opgave 3. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek met $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punt H is het voetpunt van de loodlijn vanuit A op BD. Punten S en T liggen respectievelijk op de lijnstukken AB en AD, zodanig dat H in het inwendige van driehoek SCT ligt en

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Bewijs dat lijn BD aan de omgeschreven cirkel van driehoek TSH raakt.

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

Woensdag 9 juli 2014

Opgave 4. Zij ABC een scherphoekige driehoek. Punten P en Q liggen op het lijnstuk BC zodanig dat $\angle PAB = \angle BCA$ en $\angle CAQ = \angle ABC$. Punten M en N liggen respectievelijk op de lijnen AP en AQ, zodanig dat P het midden van AM is en Q het midden van AN is.
Bewijs dat het snijpunt van de lijnen BM en CN op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt.

Opgave 5. Voor elk (strikt) positief geheel getal n geeft de Bank van Kaapstad munten uit van waarde $\frac{1}{n}$. Zij gegeven een eindig aantal van zulke munten (niet noodzakelijk van verschillende waarde) waarvan de totale waarde niet meer dan $99 + \frac{1}{2}$ is.
Bewijs dat het mogelijk is om deze munten te verdelen in 100 of minder stapeltjes, zodanig dat elk stapeltje hoogstens waarde 1 heeft.

Opgave 6. Een verzameling lijnen (rechten) in het vlak is in *algemene ligging* als geen twee van die lijnen evenwijdig zijn en geen drie van die lijnen door één punt gaan. Een verzameling lijnen in algemene ligging verdeelt het vlak in gebieden, waarvan sommige eindige oppervlakte hebben; we noemen die de *eindige gebieden* van deze verzameling.
Bewijs voor alle voldoende grote n dat het mogelijk is om in elke verzameling van n lijnen in algemene ligging ten minste $\sqrt{n}$ van de lijnen blauw te kleuren zodanig dat geen van haar eindige gebieden een volledig blauwe rand heeft.

Opmerking: een bewijs van de bewering waarbij $\sqrt{n}$ vervangen is door $c\sqrt{n}$ is ook punten waard, afhankelijk van de waarde van de constante c.

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard