



Pazartesi, 19. Temmuz 2021

**Soru 1.**  $n \geq 100$  bir tam sayı olsun. Aslı  $n, n+1, \dots, 2n$  sayılarının her birini farklı bir karta yazıyor. Daha sonra bu  $n+1$  kartı karıştırarak iki gruba ayırıyor. Bu gruplardan en az birinde, üzerindeki sayıların toplamı tam kare olan iki kartın bulunduğunu gösteriniz.

**Soru 2.** Tüm  $x_1, \dots, x_n$  gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

**Soru 3.**  $|AB| > |AC|$  olan dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde  $\angle DAB = \angle CAD$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınıyor.  $[AC]$  kenarı üzerinde  $\angle ADE = \angle BCD$  olacak şekilde bir  $E$  noktası,  $[AB]$  kenarı üzerinde  $\angle FDA = \angle DBC$  olacak şekilde bir  $F$  noktası ve  $AC$  doğrusu üzerinde  $|CX| = |BX|$  olacak şekilde bir  $X$  noktası alınıyor.  $ADC$  ve  $EXD$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla  $O_1$  ve  $O_2$  olsun.  $BC$ ,  $EF$  ve  $O_1O_2$  doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.



*Salı, 20. Temmuz 2021*

**Soru 4.**  $\Gamma$  çemberinin merkezi  $I$  olsun.  $ABCD$  dışbükey dörtgeninin  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  ve  $[DA]$  kenarlarının her biri  $\Gamma$  çemberine teğettir.  $AIC$  üçgeninin çevrel çemberi  $\Omega$  olsun.  $[BA]$  nın  $A$  yönünde uzantısı  $\Omega$  ile  $X$  noktasında,  $[BC]$  nin  $C$  yönünde uzantısı  $\Omega$  ile  $Z$  noktasında kesişiyor.  $[AD]$  ve  $[CD]$  nin  $D$  yönünde uzantıları  $\Omega$  ile sırasıyla  $Y$  ve  $T$  noktalarında kesişiyor.

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|$$

olduğunu gösteriniz.

**Soru 5.** Tüylü ve Zıplak isimli iki sincap kış için 2021 tane ceviz toplamıştır. Zıplak, cevizleri 1 den 2021 e kadar olan sayılarla numaralandırıyor ve en sevdikleri ağacın etrafında çembersel bir düzende 2021 tane küçük delik açıyor. Ertesi sabah Zıplak, Tüylü'nün her deliğe bir ceviz yerleştirdiğini, fakat yerleştirirken cevizlerin numaralarına hiç dikkat etmediğini fark ediyor. Bundan mutsuz olan Zıplak, 2021 hamleden oluşan bir hamleler dizisi uygulayarak cevizlerin yerlerini değiştirmeye karar veriyor.  $k$  ıncı hamlede Zıplak,  $k$  numaralı cevizin iki komşusunun yerlerini birbirleriyle değiştiriyor. Öyle bir  $k$  sayısının var olduğunu gösteriniz ki; Zıplak,  $k$  ıncı hamlede  $a < k < b$  koşuluna uyan  $a$  ve  $b$  numaralı cevizlerin yerlerini değiştirmiş olsun.

**Soru 6.**  $m \geq 2$  bir tam sayı,  $A$  (pozitif olmak zorunda olmayan) tam sayılardan oluşan bir sonlu küme ve  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  kümeleri  $A$  nın alt kümeleri olsun. Her  $k = 1, 2, \dots, m$  için  $B_k$  kümesinin elemanlarının toplamı  $m^k$  dir.  $A$  kümesinin en az  $m/2$  eleman içerdiğini gösteriniz.