уторак, 15. јули 2025

Задатак 1. За праву у равни кажемо да је *сунчана* ако **није** паралелна ни са x-осом, ни са y-осом ни са правом $x + y = 0$.

Нека је дат цијели број $n \geqslant 3$. Одредити све ненегативне цијеле бројеве k такве да постоји n различитих правих у равни које задовољавају оба сљедећа услова:

- за све позитивне цијеле бројеве a и b такве да је $a + b \leqslant n + 1$ tačka (a, b) припада барем једној од ових правих; и
- тачно k од ових n правих су сунчане.

Задатак 2. Нека су Ω и Γ кружнице с центрима M и N, редом, тако да је полупречник кружнице Ω мањи од полупречника кружнице Γ. Претпоставимо да се кружнице Ω и Γ сијеку у двије различите тачке A и B. Права MN сијече Ω у C и Γ у D тако да тачке C, M, N и D леже на правој у том редослиједу. Нека је P центар описане кружнице троугла ACD. Права AP сијече Ω по други пут у $E \neq A$. Права AP сијече Γ по други пут у $F \neq A$. Нека је H ортоцентар троугла PMN.

Доказати да права кроз H паралелна са AP додирује описану кружницу троугла BEF.

(*Ортоцентар* троугла је тачка пресјека његових висина.)

Задатак 3. Нека је $\mathbb{N}$ скуп позитивних цијелих бројева. За функцију $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажемо да *грми* ако

$$f(a) \text{ дијели } b^a - f(b)^{f(a)}$$

за све позитивне цијеле бројеве a і b.

Одредити најмању реалну константу c такву да за све функције f које грме и све позитивне цијеле бројеве n вриједи $f(n) \leqslant cn$.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.

сриједа, 16. јули 2025

Задатак 4. *Прави дјелилац* позитивног цијелог броја N је позитиван дјелилац броја N различит од N.

Сви елементи бесконачног низа $a_1, a_2, \ldots$ су позитивни цијели бројеви такви да сваки од њих има барем три права дјелиоца. За сваки $n \geqslant 1$, број a_{n+1} је једнак суми три највећа права дјелиоца броја a_n.

Одредити све могуће вриједности броја a_1.

Задатак 5. Адиса и Бењамин играју игру чија правила зависе од позитивног реалног броја λ чију вриједност знају оба играча. У n-том потезу (почевши од $n = 1$) игра се одвија на сљедећи начин:

- Ако је n непаран, Адиса бира ненегативан реалан број x_n такав да је
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ако је n паран, Бењамин бира ненегативан реалан број x_n такав да је
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ако играч не може изабрати такав број x_n, игра завршава и његов противник побјеђује. Ако се игра наставља унедоглед, ниједан играч не побјеђује. Оба играча знају вриједности свих одабраних бројева.

Одредити све вриједности λ за које Адиса има побједничку стратегију и све вриједности λ за које Бењамин има побједничку стратегију.

Задатак 6. Посматрајмо плочу димензије 2025×2025 сачињену од јединичних квадрата. Матилда жели да на плочу постави одређен број правоугаоника, не нужно истих величина, тако да свака страница сваког правоугаоника лежи на ивицама јединичних квадрата и да је сваки јединични квадрат покривен највише једним правоугаоником.

Одредити минималан број правоугаоника које Матилда треба поставити тако да сваки ред и свака колона плоче садржи тачно један јединични квадрат којег не покрива ни један правоугаоник.