

Torek, 23. julij 2013

**Naloga 1.** Dokaži, da za vsak par naravnih števil  $k$  in  $n$  obstaja  $k$  naravnih števil  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (ne nujno različnih), tako da velja

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

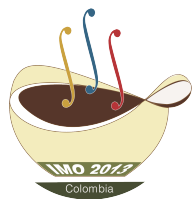
**Naloga 2.** Postavitev 4027 točk v ravnini je *kolumbijska*, če je 2013 točk postavitve rdečih in 2014 točk postavitve modrih in če nobene tri točke postavitve niso kolinearne. Če narišemo nekaj premic v ravnini, razdelimo ravnino na več območij. Razporeditev narisanih premic za kolumbijsko postavitve točk je *dobra*, če sta izpolnjena naslednja dva pogoja:

- na nobeni premici ni nobene izmed točk postavitve;
- v nobenem območju niso točke obeh barv.

Poišči najmanjše število  $k$ , tako da za vsako kolumbijsko postavitve 4027 točk obstaja dobra razporeditev  $k$  premic.

**Naloga 3.** Pričrtana krožnica trikotnika  $ABC$  nasproti oglišča  $A$  se dotika stranice  $BC$  v točki  $A_1$ . Na enak način definiramo točko  $B_1$  na stranici  $CA$  s pomočjo pričrtane krožnice nasproti oglišča  $B$  in točko  $C_1$  na stranici  $AB$  s pomočjo pričrtane krožnice nasproti oglišča  $C$ . Denimo, da središče trikotniku  $A_1B_1C_1$  očrtane krožnice leži na očrtani krožnici trikotnika  $ABC$ . Dokaži, da je trikotnik  $ABC$  pravokoten.

Pričrtana krožnica trikotnika  $ABC$  nasproti oglišča  $A$  je krožnica, ki se dotika daljice  $BC$ , poltraka  $AB$  izven daljice  $AB$  in poltraka  $AC$  izven daljice  $AC$ . Podobno definiramo pričrtani krožnici trikotnika  $ABC$  nasproti oglišč  $B$  in  $C$ .



Sreda, 24. julij 2013

**Naloga 4.** Naj bo  $H$  višinska točka ostrokotnega trikotnika  $ABC$  in naj bo  $W$  točka na stranici  $BC$ , različna od točk  $B$  in  $C$ . Naj bo  $M$  nožišče višine iz oglišča  $B$  in naj bo  $N$  nožišče višine iz oglišča  $C$ . Označimo z  $\omega_1$  trikotniku  $BWN$  očrtano krožnico in naj bo  $X$  taka točka na krožnici  $\omega_1$ , da je  $WX$  premer krožnice  $\omega_1$ . Podobno označimo z  $\omega_2$  trikotniku  $CWM$  očrtano krožnico in naj bo  $Y$  taka točka na krožnici  $\omega_2$ , da je  $WY$  premer krožnice  $\omega_2$ . Dokaži, da so točke  $X$ ,  $Y$  in  $H$  kolinearne.

**Naloga 5.** Naj bo  $\mathbb{Q}_{>0}$  množica pozitivnih racionalnih števil. Naj bo  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, ki zadošča naslednjim trem pogojem:

- (i) za vse  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  velja  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) za vse  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  velja  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) obstaja tako racionalno število  $a > 1$ , da je  $f(a) = a$ .

Dokaži, da je  $f(x) = x$  za vsak  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Naloga 6.** Naj bo  $n \geq 3$  naravno število. Na krožnici je danih  $n + 1$  točk, ki razdelijo krožnico na loke enakih dolžin. Obravnavamo vsa možna oštevilčenja teh točk s števili  $0, 1, \dots, n$ , tako da je vsako število uporabljeno natanko enkrat; dve oštevilčenji sta enaki, če lahko dobimo eno iz drugega z rotacijo krožnice. Oštevilčenje točk je *lepo*, če za vsaka štiri števila tega oštevilčenja  $a < b < c < d$ , za katera je  $a + d = b + c$ , tetiva med točkama, oštevilčenima z  $a$  in  $d$ , ne seka tetive med točkama, oštevilčenima z  $b$  in  $c$ .

Naj bo  $M$  število lepih oštevilčenj in naj bo  $N$  število urejenih parov  $(x, y)$  naravnih števil, tako da velja  $x + y \leq n$  in največji skupni delitelj  $x$  in  $y$  je 1. Dokaži, da je

$$M = N + 1.$$