

Chorshanba, 2009 yil 15 iyul

1-masala. $\{1, \dots, n\}$ to'plamda o'zaro teng bo'lmagan a_1, \dots, a_k natural sonlar olingan, bu yerda n – natural son va $k \geq 2$. Agar har bir $i = 1, \dots, k-1$ uchun $a_i(a_{i+1} - 1)$ soni n ga qoldiqsiz bo'linsa, $a_k(a_1 - 1)$ soni n ga qoldiqsiz bo'linmasligini isbotlang.

2-masala. ABC ucburchakka tashqi chizilgan aylana markazini O deb belgilaylik. P va Q nuqtalar mos ravishda CA va AB kesmalarning ichki nuqtalari bo'lsin. K, L va M nuqtalar mos ravishda BP, CQ va PQ kesmalarning o'rtalari bo'lsin. K, L va M nuqtalar orqali o'tadigan aylanani Γ deb belgilaylik. Agar PQ to'g'ri chiziq Γ aylanaga urinsa, $OP = OQ$ tenglik bajarilishini isbotlang.

3-masala. Natural sonlardan iborat bo'lgan qat'iy o'suvchi s_1, s_2, s_3, \dots ketma-ketlik berilgan. Ma'lumki,

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ va } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

qisman ketma-ketliklarning ikkalasi ham arifmetik progressiya bo'ladi. s_1, s_2, s_3, \dots ketma-ketlik o'zi ham arifmetik progressiya bo'lishini isbotlang.

Language: Uzbek

*Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi*

Payshanba, 2009 yil 16 iyul

4-masala. ABC uchburchakda $AB = AC$ bo'lsin. $\angle CAB$ va $\angle ABC$ burchaklarning bissektoralari BC va CA tomonlar bilan mos ravishda D va E nuqtalarda kesishadi. K nuqta ADC uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo'lsin. Agar $\angle BEK = 45^\circ$ bo'lsa, $\angle CAB$ burchakning barcha mo'mkin bo'lgan qiymatlarini toping.

5-masala. Shunday $f: N \rightarrow N$ funksiyalar (ya'ni natural sonlar to'plamida aniqlangan va natural qiymatlarni qabul qiladigan funksiyalar) barchasi topilsinki, istalgan natural a va b sonlar uchun

$$a, f(b) \text{ va } f(b + f(a) - 1)$$

sonlari qandaydir maxsusmas uchburchak tomonlarining uzunliklari bo'ladi.

(Hamma uchlari bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchburchak *maxsusmas* deyiladi).

6-masala. O'zaro teng bo'lmagan a_1, a_2, \dots, a_n natural sonlar berilgan. M to'plam $n-1$ ta natural sonlardan iborat va $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ soni M to'plamga tegishli emas. Chiqirtka koordinata o'qining 0 koordinatali nuqtadan boshlab o'ng tomonga qarab n ta sakrashni bajarishi kerak. Bunda sakrash uzunliklari biror tartibda olingan a_1, a_2, \dots, a_n sonlarga teng bo'lishi shart. Tartibni shunday tanlash mumkinligini isbotlangki, bunda chiqirtka M to'plamga tegishli bo'lgan nuqtalarning hech qaysisiga qo'nmasligi ta'minlanadi.

Language: Uzbek

*Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi*