

12 Korrik 2006

Problem 1. Le të jetë ABC një trekëndësh dhe I qendra e rrethit brendashkruar tij. Një pikë P e cila ndodhet brenda trekëndëshit plotëson kushtin

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Tregoni që $AP \geq AI$ dhe që barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur $P = I$.

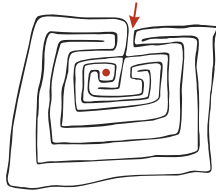
Problem 2. Le të jetë P një 2006-këndësh i rregullt. Një diagonale e P quhet *e mirë* në qoftë se skajet e saj ndajnë konturin e P në dy pjesë, secila prej të cilave përbëhet nga një numër tek brinjësh të P . Brinjët e P quhen gjithashtu *të mira*. E zëmë se P është ndarë në trekëndësha me anë të 2003 diagonaleve, çdo dy prej të cilave nuk kanë pikë të përbashkët brenda P . Gjeni numrin më të madh të trekëndësive dybrinjënjëshme me dy brinjë *të mira* të cilët mund të shfaqen në një konfiguracion të tillë.

Problem 3. Gjeni numrin real më të vogël M të tillë që mosbarazimi

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

të plotësohet për të gjithë numrat realë a , b dhe c .

*Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë*



13 Korrik 2006

Problem 4. Gjeni të gjitha çiftet e numrave të plotë (x, y) të tillë që

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Le të jetë $P(x)$ një polinom i fuqisë $n > 1$ me koeficientë numra të plotë dhe le të jetë k një numër i plotë pozitiv. Marrim polinomin $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, ku P shfaqet k herë. Provoni që ka të shumtën n numra të plotë t të tillë që $Q(t) = t$.

Problem 6. Çdo brinje b të një shumëkëndëshi konveks P i shoqërojmë sipërfaqen më të madhe të një trekëndëshi i cili përmbahet në P dhe ka b si brinjë. Tregoni që shuma e sipërfaqeve që i shoqërohen brinjëve të P është të paktët sa dyfishi i sipërfaqes së P .

*Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë*