

الجمعة 10 يوليو 2015

المأساة 1. نقول عن مجموعة متميزة S من نقط المستوي إِنَّها متوازنة إذا كان لـ $\forall A, B \in S$ نقطتين مختلفتين A, B من S توجد نقطة $C \in S$ بحسب $AC = BC$. نقول عن S إِنَّها بدون مركز إذا كان لـ $\forall A, B, C \in S$ ثالث نقطة مختلفة P من S لا توجد نقطة P من S بحسب $PA = PB = PC$.

(a) بين أنَّ لـ $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة متوازنة مكونة من n نقطة.

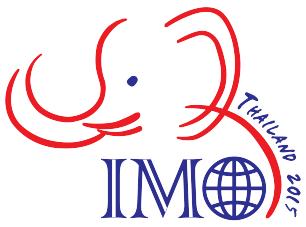
(b) حدد كُلَّ الأعداد الصحيحة $n \leq 3$ بحسب توجُّد مجموعة متوازنة بدون مركز مكونة من n نقطة.

المأساة 2. حدد كُلَّ المثلوثات (a, b, c) من الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المعدمة بحسب يكون كُلَّ واحد من الأعداد $a - b$ و $b - c$ و $c - a$ قوة للعدد 2.

(قوة للعدد 2 هي كُلُّ عدد يُكتب على شكل 2^n حيث $n \in \mathbb{N}$ عدد صحيح طبيعي.)

المأساة 3. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا بحسب $\angle A < \angle B < \angle C$. لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و H مركز تعاونه، و F موقع ارتفاعه المنشأ من الرأس A . نرمز بـ M لمنتصف القطعة $[BC]$. لتكن Q نقطة Γ بحسب $\widehat{HQA} = 90^\circ$ ، ولتكن K نقطة Γ بحسب $\widehat{HQK} = 90^\circ$. نفترض أنَّ النقط A, B, C, K, Q كُلُّها مختلفه وهي وفق هذا الترتيب على Γ .

بين أنَّ الدائرة المحيطة بالمثلث KQH مماسة للدائرة المحيطة بالمثلث FKM .



Language: Arabic (Moroccan)

Day: 2

السبت 11 يوليو 2015

المأساة 4. ليكن ABC مثلثا دائرة المحيطة Ω ولتكن O مركز Ω . دائرة Γ مركزها A تقطع القطعة $[BC]$ في نقطتين D و E بحيث تكون النقط B ، D ، E و C كلها مختلفة وهي وفق هذا الترتيب على المستقيم (BC) . نرم بـ F و G لنقطي تقاطع Γ و Ω ، بحيث تكون A ، B ، F ، C و G وفق هذا الترتيب على Ω . لتكن K نقطة التقاطع الأخرى للدائرة المحيطة بالثلث BDF مع القطعة $[AB]$. لتكن L نقطة التقاطع الأخرى للدائرة المحيطة بالثلث CGE مع القطعة $[CA]$.

نفترض أن المستقيمين (FK) و (GL) ليسا منطبقين وأنهما يتقاطعان في النقطة X . بين أن X تنتمي للمستقيم (AO) .

المأساة 5. لتكن \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقة. حدد كل الدوال $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f التي تتحقق المعادلة

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

لكل عددين حقيقيين x و y .

المأساة 6. المتالية \dots, a_1, a_2, \dots من أعداد صحيحة تتحقق الشرطين التاليين:

$$\text{لكل } j \leq 1 \leq a_j \leq 2015 \quad (i)$$

$$\text{لكل } 1 \leq k < \ell \quad k + a_k \neq \ell + a_\ell \quad (ii)$$

بين أنه يوجد عددان صحيحان موجبان قطعا b و N بحيث

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

لكل عددين صحيحين m و n يتحققان $n > m \geq N$.

Language: Arabic (Moroccan)

مدة الإنجاز: أربع ساعات ونصف
تمتحن سبع نقاط لكل مسألة