понедељак, 18. 07. 2011.

1. задатак. За задани скуп $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, састављен од четири различита природна броја, означимо суму елемената $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ са s_A. Нека је n_A број парова индекса (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, за које број $a_i + a_j$ дијели s_A. Одредити све такве скупове A, састављене од четири различита природна броја, за које n_A постиже максималнu вриједност.

2. задатак. Нека је S коначан скуп тачака у равни који садржи бар двије тачке. Никоје три тачке скупа S нису колинеарне. *Вјетрењача* је сљедећи поступак у којем на самом почетку бирамо праву l која садржи тачно једну тачку $P \in S$.

Права l ротира у смјеру казаљке на сату око *центра* P до првог момента у којем права садржи неку другу тачку скупа S (означимо ову тачку са Q). Након тога, права ротира у смјеру казаљке на сату око новог центра Q до (првог) момента у којем права садржи неку другу тачку скупа S. Овај поступак се понавља бесконачно много пута, при чему је центар ротације увијек тачка из скупа S.

Доказати да је могуће одабрати неку тачку $P \in S$ и неку праву l која садржу тачку P, тако да за добијену *вјетрењачу* свака тачка скупа S постаје *центар* ротације бесконачно много пута.

3. задатак. Нека функција $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовољава сљедећи услов

$$f(x + y) \leq y \cdot f(x) + f\big(f(x)\big),$$

за све реалне бројеве x и y. Доказати да је $f(x) = 0$ за све $x \leq 0$.

Вријеме рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова

уторак, 19. 07. 2011.

4. задатак. Нека је n природан број. Дата је равнотежна вага са два таса и n утега са тежинама $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Све утеге морамо поставити на вагу, један за другим. У сваком кораку одаберемо један од утега који још није постављен на вагу и поставимо га на лијеви или десни тас ваге, тако да тежина десног таса није већа од тежине лијевог таса.

Одредити број начина на које је ово постављање могуће урадити.

5. задатак. Задана је функција $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, са скупа цијелих бројева на скуп природних бројева, таква да је разлика $f(m) - f(n)$ дјељива бројем $f(m-n)$, за било која два цијела броја m и n.

Доказати да је број $f(n)$ дјељив бројем $f(m)$, за све цијеле бројеве m и n за које је $f(m) \leq f(n)$.

6. задатак. Задан је оштроугли троугао ABC са описаном кружницом Γ. Нека је права l тангентна са кружницом Γ, а нека су праве l_a, l_b и l_c праве симетричне правој l у односу на странице BC, CA и AB, респективно. Доказати да је кружница описана око троугла одређеног правама l_a, l_b и l_c тангентна са кружницом Γ.

Вријеме рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова