Martedì 10 luglio 2012

Problema 1. Dato un triangolo ABC, il punto J è il centro della circonferenza ex-inscritta opposta al vertice A. Questa circonferenza è tangente al lato BC in M, ed alle rette AB ed AC in K ed L rispettivamente. Le rette LM e BJ si intersecano in F, e le rette KM e CJ si intersecano in G. Sia S il punto di intersezione delle rette AF e BC, e sia T il punto di intersezione delle rette AG e BC.

Dimostrare che M è il punto medio di ST.

(La *circonferenza ex-inscritta* di ABC opposta al vertice A è la circonferenza tangente al segmento BC, alla semiretta AB oltre il punto B, ed alla semiretta AC oltre il punto C)

Problema 2. Sia $n \geq 3$ un intero, e siano $a_2, a_3, \ldots, a_n$ numeri reali positivi tali che $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dimostrare che

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \;>\; n^n.$$

Problema 3. La *divinazione del mentitore* è un gioco tra due giocatori A e B. Le regole del gioco dipendono da due interi positivi k ed n, che sono noti ad entrambi i giocatori.

All'inizio del gioco A sceglie degli interi x ed N con $1 \leq x \leq N$. Il giocatore A mantiene segreto x, e dice al giocatore B con sincerità il valore di N. A questo punto, il giocatore B cerca di ottenere informazioni su x ponendo domande al giocatore A come segue: in ogni domanda B sceglie un insieme arbitrario S di interi positivi (eventualmente anche uno già scelto in una domanda precedente) e chiede ad A se x appartiene ad S. Il giocatore B può fare tante domande di questo tipo quante vuole. Dopo ogni domanda, il giocatore A deve rispondere immediatamente con un *sì* o con un *no*, ma può mentire tante volte quante vuole; l'unica restrizione è che, in ogni insieme di $k + 1$ risposte consecutive, almeno una deve essere veritiera.

Dopo che B ha fatto tutte le domande che ha voluto, deve indicare un insieme X di al più n interi positivi. Se x appartiene a X, allora B vince; altrimenti perde. Dimostrare che:

1. Se $n \geq 2^k$, allora B ha una strategia vincente.
2. Per tutti gli interi k sufficientemente grandi, esiste un intero $n \geq 1.99^k$ tale che B non ha una strategia vincente.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Mercoledì 11 luglio 2012

Problema 4. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che soddisfano la seguente uguaglianza

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \ = \ 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

per tutti gli interi a, b, c tali che $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei numeri interi relativi)

Problema 5. Sia ABC un triangolo con $\angle BCA = 90^\circ$, e sia D il piede dell'altezza condotta da C. Sia X un punto interno al segmento CD. Sia K il punto del segmento AX tale che $BK = BC$. Analogamente, sia L il punto del segmento BX tale che $AL = AC$. Sia M il punto di intersezione di AL e BK.

Dimostrare che $MK = ML$.

Problema 6. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali esistono interi non negativi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \ = \ \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \ = \ 1.$$

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti