Dienstag, 15. Juli 2025

Aufgabe 1. Ä Liniä i dä Ebäni heisst *sünnälig* wänn si **nöd** parallel zu dä x-Achsä, dä y-Achsä, und dä Liniä $x + y = 0$ isch.

Sig $n \geqslant 3$ ä g'gäbeni ganzi Zahl. Beschtimm alli nöd-negativä ganzä Zahlä k, sodass äs n verschidnigi Liniä i dä Ebäni git wo diä zwo Bedingigä erfülläd:

- für alli positivä ganzä Zahlä a und b mit $a + b \leqslant n + 1$, liit dä Punkt (a, b) uf mindischtäns einäre vo denä Liniä; und
- g'nau k vo denä n Liniä sind sünnälig.

Aufgabe 2. Siged Ω und Γ zwo Rundumeli mit Mittelpünkt M, reschpektiv N, sodass dä Radius vo Ω chliinär als dä Radius vo Γ isch. Nim aa, dass sich d'Rundumeli Ω und Γ i zwo verschidnigä Pünkt A und B schniidä. d'Liniä MN schniidät Ω im Punkt C und Γ im Punkt D, sodass d'Pünkt C, M, N und D i därä Reiäfolg uf dä Liniä liggä. Sig P dä Umrundumeli-Mittelpunkt vom Drüegg ACD. d'Liniä AP schniidet Ω nomal im Punkt $E \neq A$. d'Liniä AP schniidet Γ nomal im Punkt $F \neq A$. Sig H dä Höäschnittpunkt vom Drüegg PMN.

Bewiis, dass d'Liniä dur H und parallel zu AP ä Tangäntä isch as Umrundumeli vom Drüegg BEF.

Aufgabe 3. Miär schriibä $\mathbb{N}$ für d'Mängi vodä positivä ganzä Zahlä. Ä Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ isch *bönzä* falls

$$f(a) \ \text{ än Teilär isch vo } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

für alli positivä ganzä Zahlä a und b.

Beschtimm di chliinschti reelli Konschtantä c, sodass $f(n) \leqslant cn$ gilt für alli bönzä Funktionä f und alli positivä ganzä Zahlä n.

Mittwoch, 16. Juli 2025

Aufgabe 4. Än *strängä Teilär* vonärä positvä ganzä Zahl N isch än positivä Teilär vo N, wo nöd N sälbär isch.

Di unändlichi Folg $a_1, a_2, \ldots$ beschtaat us positivä ganzä Zahlä, wobii jedi mindischtäns drüü strängi Teilär hät. Für jedäs $n \geqslant 1$ isch d'Zahl a_{n+1} d'Summä vo dä drüü gröschtä strängä Teilär vo a_n.

Beschtimm alli möglichä Wärt vo a_1.

Aufgabe 5. Dä Arnaud und d'Bea spilläd s'*Krokki-Schpiili*, äs Zwo-Schpiller-Schpiili mit Reglä wo von'rä, bednä bekanntä, positivä reellä Zahl λ abhängä. Dä n-ti Zuug vom Schpiili (schtartänd mit $n = 1$) gaat folgändermassä:

- Wänn n ungraad isch, dänn wählt dä Arnaud ä nöd-negativi reelli Zahl x_n uus, sodass
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Wänn n graad isch, dänn wählt d'Bea ä nöd-negativi reelli Zahl x_n uus, sodass
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Falls än Schpiller käni g'eignäti Zahl x_n me cha wähle, dänn isch s'Schpiili verbii und äs günnt dä anderi Schpiller. Falls s'Schpiili unändlich lang wiitär gaht, dänn günnt keinä vo bednä. Alli uusgwähltä Zahlä sind bednä Schpiller bekannt.

Beschtimm alli Wärt vo λ, für diä dä Arnaud ä Gwünnschtrategii hät, und alli Wärt vo λ, für diä d'Bea ä Gwünnschtrategii hät.

Aufgabe 6. g'Gäh isch äs 2025×2025 Schpiilbrätt wo us Einheitsquadrätli beschtaat. Dä Mathys wür gärn rächteggigi Kachlä ufs Schpiilbrätt leggä, wobii d'Kachlä verschidnigi Grössänä chönd ha. d'Siitänä vo jed'rä Kachlä muänd entlang vo Rändär vo dä Einheitsquadrätli verlaufä, und jedes Einheitsquadrätli dörf vo höchschtens einärä Kachlä bedeckt sii.

Beschtimm di minimali Azahl a Kachlä wo dä Mathys plaziärä muäs, sodass äs i jed'rä Ziilä und i jed'rä Schpaltä vom Schpiilbrätt äs einzigs Einheitsquadrätli hät wo nöd bedeckt isch.