вторник, 15. июля 2025

Задача 1. Прямая на плоскости называется *солнечной*, если она **не** параллельна ни одной из осей Ox, Oy и прямой $x + y = 0$.

Дано целое число $n \geqslant 3$. Определите все неотрицательные целые числа k, такие, что на плоскости существует n различных прямых, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- для всех положительных целых чисел a и b, где $a + b \leqslant n + 1$, точка (a, b) лежит хотя бы на одной из этих прямых;
- ровно k из этих n прямых являются солнечными.

Задача 2. Пусть Ω и Γ – окружности с центрами M и N соответственно, такие, что радиус Ω меньше радиуса Γ. Предположим, что окружности Ω и Γ пересекаются в двух различных точках A и B. Прямая MN пересекает Ω в точке C, а Γ – в точке D, так что точки C, M, N и D лежат на этой прямой в указанном порядке. Пусть P – центр описанной окружности треугольника ACD. Прямая AP второй раз пересекает Ω в точке $E \neq A$. Прямая AP второй раз пересекает Γ в точке $F \neq A$. Пусть H – ортоцентр треугольника PMN.

Докажите, что прямая, проходящая через точку H и параллельная AP, касается описанной окружности треугольника BEF.

(*Ортоцентр* треугольника – это точка пересечения его высот.)

Задача 3. Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество положительных целых чисел. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *борзóй*, если

$$f(a) \ \text{делит} \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

для всех положительных целых чисел a и b.

Определите наименьшую действительную константу c, такую, что $f(n) \leqslant cn$ для всех борзых функций f и всех положительных целых чисел n.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

среда, 16. июля 2025

Задача 4. *Собственным делителем* положительного целого числа N называется положительный делитель числа N, отличный от самого N.

Бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$ состоит из положительных целых чисел, каждое из которых имеет по крайней мере три собственных делителя. Для каждого $n \geqslant 1$ число a_{n+1} равно сумме трёх наибольших собственных делителей числа a_n.

Определите все возможные значения числа a_1.

Задача 5. Алиса и Базза играют в игру *коалация*, игру для двух игроков, правила которой зависят от положительного действительного числа λ, известного обоим игрокам. На n-ом ходу игры (начиная с $n = 1$) происходит следующее:

- Если n нечётно, то Алиса выбирает неотрицательное действительное число x_n такое, что

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Если n чётно, то Базза выбирает неотрицательное действительное число x_n такое, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Если игрок не может выбрать подходящее число x_n, игра заканчивается и другой игрок выигрывает. Если игра продолжается бесконечно, ни один из игроков не выигрывает. Все выбранные числа известны обоим игрокам.

Определите все значения λ, для которых у Алисы есть выигрышная стратегия, и все значения, для которых у Баззы есть выигрышная стратегия.

Задача 6. Рассмотрим сетку размером 2025×2025 из единичных квадратов. Матильда хочет разместить на сетке несколько прямоугольных плиток, возможно, разных размеров, так, чтобы стороны каждой плитки лежали на линиях сетки, а каждый единичный квадрат был покрыт не более чем одной плиткой.

Определите минимальное количество плиток, которые Матильде нужно разместить так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сетки был ровно один единичный квадрат, не покрытый ни одной плиткой.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.