2025 년 *7* 월 *15* 일, 화요일

문제 1. 좌표평면위의 한 직선이 x 축, y 축, 직선 $x+y=0$ 중 어느 것과도 평행하지 않으면, 그 직선을 '밝은선' 이라고 부른다.

주어진 양의 정수 $n(\geqslant 3)$ 에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 n 개의 서로 다른 직선들이 존재하도록 하는 음이 아닌 정수 k 를 모두 구하여라.

- $a+b \leqslant n+1$ 인 임의의 양의 정수 a, b 에 대하여, 점 (a, b) 는 이 n 개의 직선 중 적어도 하나의 직선 위에 있다.
- 이 n 개의 직선 중 정확히 k 개의 직선이 밝은선이다.

문제 2. 두 원 Ω, Γ 의 중심을 각각 점 M, N 이라 하고, Ω 의 반지름의 길이가 Γ 의 반지름의 길이보다 작다고 하자. 두 원 Ω, Γ 가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. 직선 MN 은 두 원 Ω, Γ 와 각각 점 C, D 에서 만나며, 이 직선 위에 네 점 C, M, N, D 는 이 순서대로 위치한다. 삼각형 ACD 의 외심 P 에 대하여, 직선 AP 는 원 Ω 와 점 E $(\neq A)$ 에서 만난다. 직선 AP 는 원 Γ 와는 점 F $(\neq A)$ 에서 만난다. 삼각형 PMN 의 수심을 H 라 하자.

점 H 를 지나고 직선 AP 에 평행한 직선은 삼각형 BEF 의 외접원과 접함을 보여라.

문제 3. 양의 정수의 집합을 $\mathbb{N}$ 이라 하자. 함수 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 이 다음 조건을 만족하면, 이 함수를 '멋진' 함수라고 하자.

조건) 모든 양의 정수 a, b 에 대하여, $f(a)$ 가 $b^a - f(b)^{f(a)}$ 를 나눈다.

모든 멋진 함수 f 와 모든 양의 정수 n 에 대하여 $f(n) \leqslant cn$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 c 의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

Language: Korean

제한시간: *4* 시간 *30* 분
문항당 *7* 점

2025 년 *7* 월 *16* 일, 수요일

문제 4. 양의 정수 N 의 '진약수' 란 N 보다 작은 N 의 양의 약수를 말한다. 양의 정수들로 이루어진 무한 수열 $a_1, a_2, \ldots$ 이 있다. 이 수열의 각 항은 적어도 세 개의 진약수를 갖는다. 임의의 $n(\geqslant 1)$ 에 대하여, a_{n+1} 은 a_n 의 진약수들 중 가장 큰 세 개를 더한 값이다.

a_1 으로 가능한 값을 모두 구하여라.

문제 5. 두 학생 A 와 B 가 '코알라게임' 을 한다. 코알라게임은 주어진 양의 실수 λ 에 대하여 진행되며, 이 값은 두 학생 모두에게 공개된다. 게임은 A 와 B 가 번갈아 수행하며, 매 n 번째 순서마다 ($n = 1$ 부터 시작) 다음과 같이 수행한다.

- n 이 홀수이면, A 가 다음 조건을 만족하는 음이 아닌 실수 x_n 을 고른다.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n$$

- n 이 짝수이면, B 가 다음 조건을 만족하는 음이 아닌 실수 x_n 을 고른다.

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n$$

한 학생이 더 이상 수를 고르지 못하면, 게임은 종료되고 상대방 학생이 승리하게 된다. 만약 게임이 영원히 계속되면, 두 학생 모두 승리하지 못한다. 각 순서마다 서로가 고른 x_n 의 값들을 두 학생 모두에게 알려준다고 하자.

A 가 필승 전략을 가지게 되는 λ 의 값들과 B 가 필승 전략을 가지게 되는 λ 의 값들을 모두 구하여라.

문제 6. 단위정사각형으로 이루어진 2025×2025 격자가 주어져 있다. 지민이는 이 격자 위에 여러 개의 직사각형 타일을 배치한다. (직사각형 타일의 크기나 모양들이 다 같을 필요는 없다.) 직사각형 타일의 각 변은 항상 단위정사각형들의 변들 위에 놓일 수 있도록 배치하며, 각 단위정사각형은 많아야 한 개의 타일에 의해 덮이도록 한다.

각 행과 각 열에 대하여 정확히 한 개씩의 단위정사각형만 타일로 덮이지 않도록 배치하려고 할 때, 지민이에게 필요한 직사각형 타일의 개수의 최솟값을 구하여라.