Maandag 11 juli 2016

Opgave 1. Driehoek $\triangle BCF$ heeft een rechte hoek in B. Zij A het punt op de lijn CF zo dat $|FA| = |FB|$ en F tussen A en C ligt. We kiezen punt D zo dat $|DA| = |DC|$ en AC de bissectrice van hoek $\angle DAB$ is. We kiezen punt E zo dat $|EA| = |ED|$ en AD de bissectrice van hoek $\angle EAC$ is. Zij M het midden van CF. Zij X het punt zo dat $AMXE$ een parallellogram is (waarbij $AM \parallel EX$ en $AE \parallel MX$).

Bewijs dat de lijnen BD, FX en ME concurrent zijn.

Opgave 2. Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 1$ waarvoor iedere cel van een $n \times n$-tabel gevuld kan worden met een van de letters I, M en O zodanig dat aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- in iedere rij en in iedere kolom is een derde van de letters een I, een derde een M en een derde een O;
- op iedere diagonale lijn waarop het aantal letters een drievoud is, is een derde van de letters een I, een derde een M en een derde een O.

Opmerking. De rijen en kolommen van een $n \times n$-tabel zijn op een gebruikelijke manier genummerd van 1 tot en met n. Dus iedere cel komt overeen met een paar gehele getallen (i, j) met $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Voor $n > 1$ heeft de tabel $4n - 2$ *diagonale lijnen*, onderverdeeld in twee soorten. Een diagonale lijn van de eerste soort bestaat uit alle cellen (i, j) waarbij $i + j$ een constante is en een diagonale lijn van de tweede soort bestaat uit alle cellen (i, j) waarbij $i - j$ een constante is.

Opgave 3. Zij $P = A_1A_2 \ldots A_k$ een convexe veelhoek in het vlak. De hoekpunten A_1, A_2, $\ldots$, A_k hebben gehele coördinaten en liggen op een cirkel. Zij S de oppervlakte van P. Een oneven geheel getal $n \geqslant 1$ is gegeven. Het kwadraat van de lengte van iedere zijde van P is geheel en deelbaar door n.

Bewijs dat $2S$ geheel is en deelbaar door n.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

Dinsdag 12 juli 2016

Opgave 4. Een verzameling positieve gehele getallen noemen we *welriekend* als die uit minstens twee elementen bestaat en elk van de elementen een priemdeler gemeen heeft met een van de andere elementen. Definieer $P(n) = n^2 + n + 1$. Wat is het kleinst mogelijke gehele getal $b \geqslant 1$ zodanig dat er een geheel getal $a \geqslant 0$ bestaat waarvoor de verzameling

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

welriekend is?

Opgave 5. Op een krijtbord staat de vergelijking

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

met aan beide kanten van het gelijkheidsteken 2016 factoren van graad 1. Wat is de kleinst mogelijke waarde van k waarvoor het mogelijk is om precies k van deze 4032 factoren van graad 1 uit te vegen zodanig dat aan beide kanten minstens een factor overblijft en de nieuwe vergelijking geen reële oplossingen heeft?

Opgave 6. In het vlak zijn $n \geqslant 2$ lijnstukken gegeven zodanig dat elk tweetal lijnstukken elkaar inwendig snijdt en elk drietal lijnstukken geen gemeenschappelijk punt heeft. Amalia moet van ieder lijnstuk een eindpunt kiezen en daar een kikker plaatsen die in de richting van het andere eindpunt kijkt. Daarna zal Amalia precies $n-1$ keer in haar handen klappen. Bij elke klap springt iedere kikker onmiddelijk vooruit naar het volgende snijpunt op zijn lijnstuk. Kikkers veranderen hierbij niet van richting. Het is de wens van Amalia om de kikkers zodanig te plaatsen dat er nooit twee kikkers gelijktijdig op hetzelfde snijpunt zitten.

(a) Bewijs dat Amalia altijd haar wens kan laten uitkomen als n oneven is.

(b) Bewijs dat Amalia nooit haar wens kan laten uitkomen als n even is.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard