çərşənbə axşamı, 15. iyul 2025

Məsələ 1. Müstəvidə yerləşən düz xətt o zaman *günəşli* adlanır ki, həmin xətt x-oxu, y-oxu, və $x + y = 0$ xəttinin heç birinə paralel **deyil**.

$n \geqslant 3$ natural ədədi verilmişdir. Bütün mənfi olmayan k tam ədədlərini tapın ki, müstəvidə aşağıdakı şərtləri ödəyən n fərqli düz xətt olsun:

- $a + b \leqslant n + 1$ şərtini ödəyən istənilən a və b natural ədədləri üçün, (a, b) nöqtəsi bu xətlərdən ən azı birinin üzərində yerləşir; və
- n xətdən tam olaraq k dənəsi günəşlidir.

Məsələ 2. M və N nöqtələri müvafiq olaraq elə Ω və Γ çevrələrinin mərkəzləri olsunlar ki, Ω çevrəsinin radiusu Γ çevrəsinin radiusundan kiçikdir. Ω və Γ çevrələri bir-birindən fərqli A və B nöqtələrində kəsişirlər. MN xətti Ω və Γ çevrələrini müvafiq olaraq elə C və D nöqtələrində kəsir ki, C, M, N və D nöqtələri düz xətt üzərində bu sırada yerləşirlər. P nöqtəsi ACD üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi olsun. AP xətti Ω çevrəsini yenidən $E \neq A$ nöqtəsində kəsir. AP xətti Γ çevrəsini yenidən $F \neq A$ nöqtəsində kəsir. H nöqtəsi PMN üçbucağında hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi olsun.

İsbat edin ki, H nöqtəsindən keçən və AP xəttinə paralel olan xətt BEF üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəyə toxunur.

Məsələ 3. $\mathbb{N}$ natural ədədlər çoxluğu olsun. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funksiyası o zaman *gözəl* adlanır ki, istənilən a və b natural ədədləri üçün

$$f(a) \text{ ədədi } b^a - f(b)^{f(a)} \text{ ədədini bölür.}$$

Elə ən kiçik həqiqi c sabitini tapın ki, bütün f gözəl funksiyaları və n natural ədədləri üçün $f(n) \leqslant cn$ olsun.

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.

çərşənbə, 16. iyul 2025

Məsələ 4. Natural ədədlərdən ibarət elə $a_1, a_2, \ldots$ sonsuz ardıcıllığı verilmişdir ki, bu ardıcıllığın hər həddinin özündən fərqli ən azı 3 natural böləni var. İstənilən $n \geqslant 1$ üçün, a_{n+1} ədədi a_n ədədinin özündən fərqli ən böyük 3 natural böləninin cəminə bərabərdir.

a_1 ədədinin ala biləcəyi bütün qiymətləri tapın.

Məsələ 5. Anar və Bahar *Avstraliya oyununu* oynayırlar. Bu oyun 2 nəfərlik oyundur, və oyunun qaydaları hər iki oyunçuya məlum olan müsbət λ həqiqi ədədindən asılıdır. Oyunun n-ci addımında ($n = 1$ dən başlayaraq) aşağıdakı addımlar baş verir:

- Əgər n təkdirsə, Anar elə mənfi olmayan x_n həqiqi ədədini seçir ki,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n$$

  bərabərsizliyi ödənir.

- Əgər n cütdürsə, Bahar elə mənfi olmayan x_n həqiqi ədədini seçir ki,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n$$

  bərabərsizliyi ödənir.

Əgər oyunçulardan biri qaydalara uyğun x_n ədədi seçə bilmirsə, oyun bitir və digər oyunçu qalib sayılır. Əgər oyun sonsuza qədər davam edirsə, o zaman oyunçulardan heç biri qalib sayılmır. Bütün seçilən ədədlər hər iki oyunçuya məlumdur.

λ ədədinin hansı qiymətlərində Anarın qalib olma strategiyasının olduğunu, və hansı qiymətlərində Bahar qalib olma strategiyasının olduğunu tapın.

Məsələ 6. Vahid kvadrat xanalardan ibarət 2025×2025 lövhə verilmişdir. Fərid bu lövhəyə düzbucaqlı daşlar yerləşdirmək istəyir (daşların ölçüləri fərqli ola bilər), belə ki, istənilən daşın hər tərəfi lövhənin vahid kvadrat xanalarının tərəflərini formalaşdıran xətlərdə yerləşir, və hər vahid kvadrat xananı ən çox bir daş əhatə edir.

Lövhənin hər bir sətirində və hər bir sütununda tam olaraq bir dənə heç bir daşla əhatə olunmayan vahid kvadrat xananın olması üçün Fəridin lövhəyə yerləşdirməli olduğu ən az daş sayısını tapın.

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.