სამშაბათი, 16. ივლისი 2024

ამოცანა 1. იპოვეთ ყველა ნამდვილი რიცხვი α ისეთი, რომ ყოველი მთელი დადებითი n-თვის, რიცხვი

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

არის n-ის ჯერადი. ($\lfloor z \rfloor$ ტოლია უდიდესი მთელი რიცხვის, რომელიც ნაკლებია ან ტოლია z-ზე. მაგალითად $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ და $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

ამოცანა 2. იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა (a, b) წყვილი, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები g და N, რომ ყოველი მთელი $n \geqslant N$-თვის სრულდება ტოლობა

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g.$$

($\gcd(x, y)$ აღნიშნავს x და y მთელი რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს.)

ამოცანა 3. ვთქვათ N მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots$ მთელ დადებით რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობაა. ვთქვათ ყოველი მთელი $n > N$-თვის, a_n არის რაოდენობა a_{n-1}-ის ტოლი რიცხვებისა $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ჩამონათვალში. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი $a_1, a_3, a_5, \ldots$ და $a_2, a_4, a_6, \ldots$ მიმდევრობიდან ერთი მიმდევრობა მაინც რაღაც ადგილიდან დაწყებული პერიოდულია. (მიმდევრობას $b_1, b_2, \ldots$ ეწოდება რაღაც ადგილიდან პერიოდული, თუ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვები p და M ისეთი, რომ $b_{m+p} = b_m$ ყოველი $m \geqslant M$.)

ოთხშაბათი, 17. ივლისი 2024

ამოცანა 4. ABC სამკუთხედში $AB < AC < BC$. ვთქვათ ω არის ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი, ხოლო I არის ω-ს ცენტრი. BC წრფეზე აღებულია C -სგან განსხვავებული ისეთი X წერტილი, რომ X-ზე გამავალი AC-ს პარალელური წრფე ω-ს მხებია. ანალოგიურად, Y არის B-სგან განსხვავებული წერტილი BC წრფეზე ისეთი, რომ Y-ზე გამავალი AB-ს პარალელური წრფე ω-ს მხებია. ვთქვათ ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს AI მეორედ კვეთს $P \neq A$ წერტილში. ვთქვათ K და L შესაბამისად AC და AB გვერდების შუაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

ამოცანა 5. ლოკოკინა ტურბო მოძრაობს მართკუთხედის ფორმის დაფაზე, რომელიც შედგება 2024 სტრიქონისგან და 2023 სვეტისგან. 2022 ურჩხული დამალულია დაფის 2022 უჯრაში. ტურბომ არ იცის ურჩხულების განლაგება, მაგრამ იცის, რომ ყოველ სტრიქონში გარდა პირველი და ბოლო სტრიქონისა, იმყოფება ზუსტად ერთი ურჩხული და ასევე იცის, რომ ყოველ სვეტში არაუმეტეს ერთი ურჩხულია. ტურბოს მიზანია, დაიწყოს მოძრაობა პირველი სტრიქონის რომელიმე უჯრიდან და მიაღწიოს ბოლო სტრიქონის რომელიმე უჯრას. ამისათვის ის აკეთებს მცდელობების სერიას. ყოველი მცდელობისას მას შეუძლია დაიწყოს მოძრაობა პირველი სტრიქონის ნებისმიერი უჯრიდან და გადაადგილდეს მეზობელ უჯრაში. (ორი უჯრა ერთმანეთის მეზობელია, თუ მათ საერთო გვერდი აქვთ.) ტურბოს უფლება აქვს დაბრუნდეს იმ უჯრაში, რომელშიც უკვე იმყოფებოდა. თუ ტურბო მოხვდება იმ უჯრაზე, სადაც ურჩხულია, მისი მცდელობა მთავრდება და ის უმალვე გადაიტყორცნება პირველ სტრიქონში მორიგი მცდელობის დასაწყებად. ანუ მან ისევ უნდა აირჩიოს პირველი სტრიქონის ნებისმიერი უჯრა და დაიწყოს მოძრაობა არჩეული უჯრიდან. ცნობილია, რომ ურჩხულები არ მოძრაობენ და ამიტომ ტურბოს შეუძლია დააგროვოს ინფორმაცია უჯრების შესახებ მისი წინა მცდელობების გათვალისწინებით. განსაზღვრეთ n-ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ტურბოს აქვს სტრატეგია, რომლითაც ის აუცილებლად მიაღწევს მიზანს მიუხედავად ურჩხულების განლაგებისა, n ან უფრო ნაკლებ მცდელობაში.

ამოცანა 6. ვთქვათ $\mathbb{Q}$ ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა. $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ფუნქციას ვუწოდოთ *კარგი*, თუ მას აქვს შემდეგი თვისება: ყოველი $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ან} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი რიცხვი c ისეთი, რომ ყოველი კარგი f ფუნქციისთვის გვაქვს არაუმეტეს c ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული $f(r) + f(-r)$ სახის რაციონალური რიცხვი, $r \in \mathbb{Q}$. ასევე, იპოვეთ c-ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა.