Language: **Kazakh**

Day: **1**

Жұма, 10 шілде, 2015 ж.

Есеп 1. Егер $\mathcal{S}$ жиынында жататын кез келген әртүрлі A және B нүктелері үшін $AC = BC$ болатындай $\mathcal{S}$ жиынында C нүктесі табылса, онда шекті $\mathcal{S}$ жазықтықтағы нүктелер жиыны *балансты* деп аталады. Егер $\mathcal{S}$ жиынында жататын кез келген әртүрлі A, B және C нүктелері үшін $PA = PB = PC$ болатындай $\mathcal{S}$ жиынында P нүктесі табылмаса, онда $\mathcal{S}$ *центрден бос* деп аталады.

(a) Кез келген бүтін $n \geqslant 3$ үшін, n нүктеден тұратын балансты жиын табылатынын дәлелдеңіз.

(б) n нүктеден тұратын балансты центрден бос жиын табылатындай, барлық $n \geqslant 3$ бүтін сандарын табыңыз.

Есеп 2. $ab - c, bc - a$ және $ca - b$ сандарының әрқайсысы 2-нің дәрежесі болатындай барлық натурал (a, b, c) үштік сандарын табыңыз.

(*Бүтін теріс емес n саны үшін, 2^n түріндегі санды 2-нің дәрежесі деп атаймыз.*)

Есеп 3. $AB > AC$ болатындай сүйірбұрышты ABC үшбұрышы берілген. Оның Γ сырттай сызылған шеңбері, H ортоцентрі, ал F нүктесі A төбесінен түсірілген биіктіктің табаны болсын. M нүктесі BC қабырғасының ортасы болсын. $\angle HQA = 90^\circ$ болатындай Γ шеңберінен Q нүктесі, және $\angle HKQ = 90^\circ$ болатын Γ шеңберінен K нүктесі алынған. A, B, C, K және Q нүктелері әртүрлі, және Γ шеңберінің бойында осындай ретпен орналассын.

KQH және FKM үшбұрыштарының сырттай сызылған шеңберлері бір бірін жанайтынын дәлелдеңіз.

Сенбі, 11 шілде, 2015 ж.

Есеп 4. ABC үшбұрышында Ω ол сырттай сызылған шеңбері, O осы шеңбердің центрі. Центрі A болатын Γ шеңбері BC қабырғасын D және E нүктелерінде қияды, мұнда B, D, E мен C әртүрлі нүктелер және олар BC түзуінде осындай ретпен орналасқан. Γ және Ω шеңберлері F және G нүктелерінде қиылысады, мұнда A, F, B, C мен G нүктелері Ω-ның бойында осындай ретпен орналасқан. BDF үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер AB кесіндісін екінші рет K нүктесінде қисын. CGE үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер CA кесіндісін екінші рет L нүктесінде қисын.

FK және GL түзулері әртүрлі және олар X нүктесінде қиылыссын. X нүктесі AO түзуінің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Есеп 5. $\mathbb{R}$ нақты сандар жиыны. Барлық нақты x пен y үшін

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \ = \ x + f(x+y) + yf(x)$$

теңдеуін қанағаттандыратын барлық $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцияларын табыңыз.

Есеп 6. $a_1, a_2, \ldots$ бүтін сандар тізбегі келесі шарттарды қанағаттандырады:

(i) барлық $j \geqslant 1$ үшін $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$;

(ii) барлық $1 \leqslant k < \ell$ үшін $k + a_k \neq \ell + a_\ell$.

$n > m \geqslant N$ болатын барлық бүтін m және n үшін

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

орындалатындай натурал b және N сандары табылатынын дәлелдеңіз.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады