

Kolmapäev, 15. juuli 2009

Ülesanne 1. Olgu n positiivne täisarv ja olgu a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) sellised erinevad täisarvud hulgast $\{1, \dots, n\}$, et arv n jagab arvu $a_i(a_{i+1} - 1)$ iga $i = 1, \dots, k - 1$ korral. Tõesta, et arv n ei jaga arvu $a_k(a_1 - 1)$.

Ülesanne 2. Olgu ABC kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O . Olgu P ja Q kolmnurga tipudest erinevad punktid vastavalt külgedel CA ja AB . Olgu K , L ja M vastavalt lõikude BP , CQ ja PQ keskpunktid ning olgu Γ ringjoon, mis läbib punkte K , L ja M . Oletame, et sirge PQ puutub ringjoont Γ . Tõesta, et $|OP| = |OQ|$.

Ülesanne 3. Olgu s_1, s_2, s_3, \dots selline rangelt kasvav positiivsete täisarvude jada, et jadad

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ja} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

on mõlemad aritmeetilised. Tõesta, et jada s_1, s_2, s_3, \dots on ise aritmeetiline.

Neljapäev, 16. juuli 2009

Ülesanne 4. Olgu ABC kolmnurk, kus $|AB| = |AC|$. Nurkade CAB ja ABC poolitajad lõikavad külgi BC ja CA vastavalt punktides D ja E . Olgu K kolmnurga ADC siseringjoone keskpunkt. Oletame, et $\angle BEK = 45^\circ$. Leia kõik võimalused, milline saab olla $\angle CAB$.

Ülesanne 5. Leia kõik sellised funktsioonid f positiivsete täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral leidub kolmnurk küljepikkustega

$$a, f(b) \text{ ja } f(b + f(a) - 1).$$

Ülesanne 6. Olgu a_1, a_2, \dots, a_n erinevad positiivsed täisarvud ja olgu M hulk $n - 1$ positiivsest täisarvust, kuhu ei kuulu arv $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Rohutirts alustab hüppamist piki arvtelge punktist 0 ja teeb n hüpet paremale pikkustega a_1, a_2, \dots, a_n mingis järjekorras. Tõesta, et järjekorra saab valida nii, et rohutirts ei maandu kunagi hulka M kuuluvas punktis.