Selasa, 23 Julai 2013

Masalah 1. Buktikan bahawa untuk setiap pasangan integer positif k dan n, wujud k integer positif $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (tidak semestinya berbeza) sehinggakan

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Masalah 2. Suatu konfigurasi 4027 titik di atas satah dikatakan *Colombian* jika ia terdiri daripada 2013 titik merah dan 2014 titik biru, dan tiada tiga titik dalam konfigurasi tersebut yang segaris. Dengan melukis beberapa garisan, satah tersebut dibahagikan kepada beberapa kawasan. Sekumpulan garisan dikatakan *elok* untuk suatu konfigurasi Colombian jika dua syarat berikut dipenuhi:

- tiada garisan yang melalui mana-mana titik dalam konfigurasi tersebut;
- tiada kawasan yang mengandungi titik kedua-dua warna.

Tentukan nilai k yang terkecil sehinggakan untuk setiap konfigurasi Colombian dengan 4027 titik, wujud sekumpulan k garisan yang elok.

Masalah 3. Katakan bulatan luar bagi segitiga ABC yang bertentangan dengan bucu A tangen kepada sisi BC pada titik A_1. Takrifkan titik B_1 pada CA dan C_1 pada AB dengan cara yang serupa, masing-masing menggunakan bulatan luar yang bertentangan dengan B dan C. Andaikan bahawa pusat lilit bagi segitiga $A_1B_1C_1$ terletak pada bulatan lilit bagi segitiga ABC. Buktikan bahawa segitiga ABC adalah bersudut tegak.

Bulatan luar *bagi segitiga ABC yang bertentangan dengan bucu A ialah bulatan yang tangen kepada tembereng BC, kepada penerusan garis AB yang melepasi B, dan kepada penerusan garis AC yang melepasi C. Bulatan luar yang bertentangan dengan B dan C ditakrifkan dengan cara yang serupa.*

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah

Rabu, 24 Julai 2013

Masalah 4. Katakan ABC suatu segitiga bersudut tirus dengan ortopusat H, dan katakan W suatu titik pada sisi BC yang terletak di antara B dan C. Titik M dan N masing-masing adalah tapak altitud dari B dan C. Lambangkan dengan ω_1 bulatan lilit bagi BWN, dan katakan X titik pada ω_1 sehinggakan WX adalah suatu diameter bagi ω_1. Lambangkan dengan ω_2 bulatan lilit bagi CWM, dan katakan Y titik pada ω_2 sehinggakan WY adalah suatu diameter bagi ω_2. Buktikan bahawa X, Y dan H adalah segaris.

Masalah 5. Katakan $\mathbb{Q}_{>0}$ set nombor nisbah positif. Katakan $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ suatu fungsi yang memenuhi tiga syarat berikut:

(i) untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, kita dapati bahawa $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, kita dapati bahawa $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) wujud suatu nombor nisbah $a > 1$ sehinggakan $f(a) = a$.

Buktikan bahawa $f(x) = x$ untuk semua $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Masalah 6. Katakan $n \geq 3$ suatu integer, dan pertimbangkan suatu bulatan dengan $n+1$ titik yang ditandakan padanya dengan jarak sekata. Pertimbangkan semua pelabelan titik tersebut dengan nombor $0, 1, \ldots, n$ dengan setiap label digunakan tepat satu kali; dua pelabelan dianggap sama jika satu daripadaya boleh diperoleh daripada yang satu lagi melalui putaran bulatan tersebut. Suatu pelabelan dikatakan *indah* jika, untuk setiap empat label $a < b < c < d$ dengan $a + d = b + c$, perentas yang menyambungkan titik berlabel a dan d tidak memintas perentas yang menyambungkan titik berlabel b dan c.

Katakan M bilangan pelabelan yang indah, dan katakan N bilangan pasangan tersusun integer positif (x, y) sehinggakan $x + y \leq n$ dan $\operatorname{fstb}(x, y) = 1$. Buktikan bahawa

$$M = N + 1.$$

Tempoh: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah