pondelok, 11. júla 2022

Úloha 1. Osloská banka vydáva mince dvoch druhov – alumíniové (označené `A`) a bronzové (označené `B`). Ingrid má n alumíniových a n bronzových mincí a zoradí ich v ľubovoľnom poradí zľava doprava. Pod *blokom* rozumieme podpostupnosť susedných mincí rovnakého druh. Nech k je pevné kladné celé číslo také, že $k \leq 2n$, Ingrid potom opakovane vykonáva nasledujúcu operáciu: Nájde najdlhší blok obsahujúci k. mincu zľava a presunie všetky mince tohto bloku na začiatok radu. Napríklad ak $n = 4$ a $k = 4$, tak proces začínajúci sa rozmiestnením `AABBBABA` bude

$$\texttt{AAB}\underline{\texttt{B}}\texttt{BABA} \to \texttt{BBB}\underline{\texttt{A}}\texttt{AABA} \to \texttt{AAA}\underline{\texttt{B}}\texttt{BBBA} \to \texttt{BBB}\underline{\texttt{B}}\texttt{AAAA} \to \texttt{BBB}\underline{\texttt{B}}\texttt{AAAA} \to \dots$$

Nájdite všetky dvojice (n, k) kladných celých čísel také, že $k \leq 2n$ a pre toto k a ľubovoľné začiatočné rozmiestnenie bude v niektorom okamihu príslušného procesu prvých n mincí zľava z rovnakého kovu.

Úloha 2. Nájdite všetky funkcie f, kde $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, také, že pre každé x z množiny $\mathbb{R}^+$ existuje práve jedno y z množiny $\mathbb{R}^+$ také, že

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

($\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel.)

Úloha 3. Nech k je kladné celé číslo a S je konečná množina nepárnych prvočísel. Dokážte, že existuje najviac jeden spôsob (až na otočenie a osovú súmernosť), ako rovnomerne rozmiestniť prvky S na danú kružnicu tak, že súčin každých dvoch susedných čísel má tvar $x^2 + x + k$ pre nejaké kladné celé číslo x.

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

utorok, 12. júla 2022

Úloha 4. Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $|BC| = |DE|$. Podobne nech vnútri $ABCDE$ existuje bod T taký, že $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ a $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|$. Nech priamka AB pretína priamky CD a CT postupne v bodoch P a Q tak, že body P, B, A, Q ležia na jednej priamke v tomto poradí. Nech priamka AE pretína priamky CD a DT postupne v bodoch R a S tak, že body R, E, A, S ležia na jednej priamke v tomto poradí. Dokážte, že body P, S, Q, R ležia na jednej kružnici.

Úloha 5. Nájdite všetky trojice (a, b, p) kladných celých čísel takých, že p je prvočíslo a

$$a^p = b! + p.$$

Úloha 6. Nech n je kladné celé číslo. *Nordickým štvorcom* rozmeru n budeme nazývať tabuľku $n \times n$ obsahujúcu všetky celé čísla od 1 do n^2 tak, že každé políčko obsahuje práve jedno číslo. Dve políčka považujeme za susedné práve vtedy, keď majú spoločnú stranu. Políčko susediace len s políčkami s väčším číslom nazveme *dolina*. Pod *stupákom* rozumieme postupnosť jedného alebo viacerých políčok tabuľky takú, že platí:

(i) Prvé políčko tejto postupnosti je dolina.

(ii) Každé ďalšie políčko tejto postupnosti susedí s predchádzajúcim políčkom.

(iii) Čísla napísané v políčkach postupnosti sú v rastúcom poradí.

Nájdite najmenší možný počet stupákov v nordickom štvorci rozmeru n.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.