Pirmadienis, 2016 m. liepos 11 d.

1 uždavinys. Trikampio BCF kampas B yra statusis. Tegul A yra toks tiesės CF taškas, kad $FA = FB$ ir F yra tarp taškų A ir C. Taškas D yra toks, kad $DA = DC$ ir AC yra kampo $\angle DAB$ pusiaukampinė. Taškas E yra toks, kad $EA = ED$ ir AD yra kampo $\angle EAC$ pusiaukampinė. Tegul M yra atkarpos CF vidurio taškas. Tegul X yra toks taškas, kad $AMXE$ yra lygiagretainis (kuriame $AM \parallel EX$ ir $AE \parallel MX$). Įrodykite, kad tiesės BD, FX ir ME kertasi viename taške.

2 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais į kiekvieną $n \times n$ lentelės langelį galima taip įrašyti vieną iš raidžių I, M ir O, kad:

- kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje lygiai trečdalis raidžių būtų I, trečdalis – M ir trečdalis – O; ir
- kiekvienoje tokioje įstrižainėje, kurioje esančių raidžių skaičius dalijasi is trijų, lygiai trečdalis raidžių būtų I, trečdalis – M ir trečdalis – O.

Pastaba: Lentelės $n \times n$ eilutes bei stulpelius galima sunumeruoti iš eilės nuo 1 iki n. Tada kiekvieną lentelės langelį atitinka natūraliųjų skaičių pora (i, j), kur $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Su kiekvienu $n > 1$, lentelėje bus lygiai $4n - 2$ *įstrižainės*, kurios yra dviejų tipų. Pirmojo tipo įstrižainę sudaro langeliai (i, j), su kuriais $i + j$ yra konstanta, o antrojo tipo įstrižainę sudaro langeliai (i, j), su kuriais $i - j$ yra konstanta.

3 uždavinys. Tegul $P = A_1A_2 \ldots A_k$ yra iškilasis daugiakampis plokštumoje. Visos jo viršūnės $A_1, A_2, \ldots, A_k$ turi sveikąsias koordinates ir priklauso vienam apskritimui. Tegul S žymi daugiakampio P plotą. Tegul n yra toks nelyginis natūralusis skaičius, kad visų daugiakampio P kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, kurie dalijasi iš n. Įrodykite, kad $2S$ yra sveikasis skaičius, kuris dalijasi iš n.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Antradienis, 2016 m. liepos 12 d.

4 uždavinys. Natūraliųjų skaičių aibė yra vadinama *kvapia*, jei ji turi bent du elementus ir kiekvienas jos elementas turi bendrą pirminį daliklį su kokiu nors kitu tos aibės elementu. Tegul $P(n) = n^2 + n + 1$. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių b, su kuriuo egzistuoja toks neneigiamas sveikasis skaičius a, kad aibė

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

yra kvapi.

5 uždavinys. Lentoje užrašyta lygtis

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

turinti po 2016 tiesinių daugiklių kiekvienoje pusėje. Raskite mažiausią skaičių k, kad būtų įmanoma nutrinti lygiai k iš visų 4032 tiesinių daugiklių taip, jog abiejose pusėse liktų bent po vieną daugiklį ir gautoji lygtis neturėtų realiųjų sprendinių.

6 uždavinys. Plokštumoje duota $n \geqslant 2$ atkarpų. Bet kurios dvi iš jų kertasi, tačiau jokios trys nesikerta viename taške. Džefas turi pasirinkti po vieną kiekvienos atkarpos galą ir padėti ant jo po varlę, nukreiptą į kitą tos atkarpos galą. Tada jis $n-1$ kartą suploja rankomis. Kiekvieną kartą jam suplojus, kiekviena varlė is karto šoka į priekį ant sekančio savosios atkarpos susikirtimo taško su kita atkarpa. Savo šiuolių krypties varlės niekada nekeičia. Džefas nori išdėlioti varles taip, kad jokios dvi varlės niekada neatsirastų vienu metu tame pačiame atkarpų susikirtimo taške.

(a) Įrodykite, kad Džefas visada gali tai padaryti, jei n yra nelyginis skaičius.

(b) Įrodykite, kad Džefas niekada negalės to padaryti, jei n yra lyginis skaičius.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais