Dinsdag, 16. Julie 2024

Probleem 1. Bepaal alle reële getalle α sodat, vir elke positiewe heelgetal n, die heelgetal

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

'n veelvoud van n is. (Let op dat $\lfloor z \rfloor$ die grootste heelgetal aandui wat kleiner as of gelyk is aan z. Byvoorbeeld, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ en $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Probleem 2. Bepaal alle pare positiewe heelgetalle (a, b) waarvoor daar positiewe heelgetalle g en N bestaan sodanig dat

$$\operatorname{ggd}(a^n + b, b^n + a) = g$$

vir alle heelgetalle $n \geq N$. (Let op dat $\operatorname{ggd}(x, y)$ die grootste gemene deler van die heelgetalle x en y aandui.)

Probleem 3. Laat $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 'n oneindige ry positiewe heelgetalle wees, en laat N 'n positiewe heelgetal wees. Veronderstel dat vir elke $n > N$, a_n gelyk is aan die aantal kere dat a_{n-1} in die lys $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ verskyn.

Bewys dat ten minste een van die rye $a_1, a_3, a_5, \ldots$ en $a_2, a_4, a_6, \ldots$ uiteindelik periodies is.

('n Oneindige ry $b_1, b_2, b_3, \ldots$ is *uiteindelik periodies* as daar positiewe heelgetalle p en M bestaan sodanig dat $b_{m+p} = b_m$ vir alle $m \geq M$.)

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.

Woensdag, 17. Julie 2024

Probleem 4. Laat ABC 'n driehoek wees met $AB < AC < BC$. Laat I die middelpunt van die ingeskrewe sirkel ω van die driehoek ABC wees. Laat X die punt wees op die lyn BC, anders as C, sodat die lyn deur X parallel aan AC die sirkel ω raak. Op dieselfde manier, laat Y die punt wees op die lyn BC, anders as B, sodat die lyn deur Y parallel aan AB die sirkel ω raak. Die lyn AI sny die omgeskrewe sirkel van die driehoek ABC weer in die punt $P \neq A$. Laat K en L die middelpunte van die lyne AC en AB wees, onderskeidelik.

Bewys dat $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Probleem 5. Turbo die slak speel 'n spel op 'n bord met 2024 rye en 2023 kolomme. Daar is versteekte monsters in 2022 van die selle. Aanvanklik weet Turbo nie waar enige van die monsters is nie, maar hy weet dat daar presies een monster is in elke ry behalwe in die eerste ry en in die laaste ry, and dat elke kolom hoogstens een monster bevat.

Turbo maak 'n reeks pogings om van die eerste ry af na die laaste ry toe te beweeg. In elke poging kies hy enige sel in die eerste ry om in te begin and beweeg herhaaldelik na 'n aangrensende sel wat 'n gemene sy deel. (Hy mag teruggaan na 'n sel wat voorheen al besoek is.) As hy 'n sel met 'n monster bereik eindig sy poging onmiddelik en hy word terug na die eerste ry toe gestuur om weereens 'n nuwe poging te maak. Die monsters skyf nie, en Turbo onthou watter besoekte selle 'n monster bevat. As hy enige sel in die finale ry bereik, eindig sy poging en die spel is verby.

Bepaal die minimale waarde van n waarvoor 'n strategie vir Turbo bestaan wat verseker dat hy die laaste ry op sy n-de poging of vroër bereik, ongeag die lokasies van die monsters.

Probleem 6. Laat $\mathbb{Q}$ die versameling rasionale getalle wees. A funksie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ word *akwaesuliaans* genoem as die volgende eienskap bevredig is: vir alle $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{of} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Bewys dat daar 'n heelgetal c bestaan sodanig dat vir alle akwaesuliaanse funksies f daar hoogstens c verskillende rasionale nommers bestaan wat in die vorm $f(r) + f(-r)$ kan geskryf word waar r 'n rasionale getal is, en vind die kleinste moontlike waarde van c.

Language: Afrikaans

Tyd: 4 uur en 30 minute.
Elke probleem is 7 punte werd.