

pondělí, 21. září 2020

**Úloha 1.** Bud  $ABCD$  konvexní čtyřúhelník. Bod  $P$  leží uvnitř  $ABCD$ . Platí následující rovnosti poměrů:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokažte, že se následující tři přímky protínají v jednom bodě: vnitřní osy úhlů  $\angle ADP$  a  $\angle PCB$  a osa úsečky  $AB$ .

**Úloha 2.** Reálná čísla  $a, b, c, d$  splňují  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  a  $a + b + c + d = 1$ . Dokažte, že

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

**Úloha 3.** Mějme  $4n$  oblázků o hmotnostech  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Každý oblázek jeobarven jednou z  $n$  barev a každou barvou jsou obarveny čtyři oblázky. Ukažte, že můžeme rozdělit oblázky do dvou hromádek tak, aby byly splněny obě následující podmínky:

- Celkové hmotnosti obou hromádek jsou stejné.
- Každá hromádka obsahuje dva oblázky od každé barvy.

úterý, 22. září 2020

**Úloha 4.** Budě  $n > 1$  celé číslo. Na sklonu hory je  $n^2$  stanic lanovky v různých výškách. Každá ze dvou lanovkových společností,  $A$  a  $B$ , provozuje  $k$  lanovek; každá lanovka umožňuje cestu z jedné ze stanic do některé z vyšších stanic (bez dalších zastávek).  $k$  lanovek společnosti  $A$  má  $k$  různých startovních stanic a  $k$  různých cílových stanic, navíc platí, že výše začínající lanovka také končí výše. Stejné podmínky platí i pro  $B$ . O dvou stanicích řekneme, že jsou propojené společností, pokud se můžeme dostat z nižší stanice do vyšší pomocí jedné či více lanovek této společnosti (žádné jiné přesuny mezi stanicemi nejsou povoleny).

Určete nejmenší kladné celé číslo  $k$ , pro které musí vždy existovat dvojice stanic propojená oběma společnostmi.

**Úloha 5.** Je dán balíček  $n > 1$  karet. Na každé kartě je napsáno kladné celé číslo. Balíček má vlastnost, že aritmetický průměr čísel na každé dvojici karet je roven geometrickému průměru čísel nějaké skupiny jedné nebo více karet.

Pro která  $n$  musí být nutně na všech kartách stejná čísla?

**Úloha 6.** Dokažte, že existuje kladná konstanta  $c$  taková, že je následující tvrzení pravdivé:

Uvažme celé číslo  $n > 1$  a množinu  $n$  bodů v rovině  $\mathcal{S}$  takovou, že vzdálenost libovolných dvou různých bodů z  $\mathcal{S}$  je alespoň 1. Potom existuje přímka  $\ell$  rozdělující  $\mathcal{S}$  tak, že vzdálenost libovolného bodu z  $\mathcal{S}$  k  $\ell$  je alespoň  $cn^{-1/3}$ .

(Přímka  $\ell$  rozděluje množinu bodů  $\mathcal{S}$ , pokud některá úsečka spojující dva body z  $\mathcal{S}$  protíná  $\ell$ .)

*Poznámka.* Řešení, která nahradí výraz  $cn^{-1/3}$  slabším odhadem  $cn^{-\alpha}$ , mohou být odměněny bodovým ziskem závisejícím na hodnotě konstanty  $\alpha > 1/3$ .