วันอังคารที่ ๘ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๗

โจทย์ข้อ ๑. ให้ $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม $n \geq 1$ เพียงจำนวนเดียวที่ทำให้

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

โจทย์ข้อ ๒. ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็ม พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $n \times n$ ที่ประกอบด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วยจำนวน n^2 ช่อง รูปแบบการวางหมากรุก n ตัวบนกระดานนี้จะเรียกว่า *สันติ* ถ้าแต่ละแถวและแต่ละหลักของกระดานมีหมากรุกหนึ่งตัวพอดี จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มากที่สุดซึ่งสำหรับรูปแบบการวางหมากรุก n ตัวแบบสันติใด ๆ ก็ตาม จะมีตารางจัตุรัสขนาด $k \times k$ ซึ่งไม่มีหมากรุกอยู่ในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วยทั้ง k^2 ช่อง

โจทย์ข้อ ๓. รูปสี่เหลี่ยมนูน $ABCD$ มี $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ จุด H เป็นจุดฐานของเส้นตั้งฉากจาก A ไปยัง BD จุด S และจุด T อยู่บนด้าน AB และ AD ตามลำดับ โดย H อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม SCT และ

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \qquad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ$$

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง BD สัมผัสกับวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม TSH

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน

วันพุธที่ ๙ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๕๗

โจทย์ข้อ ๔. จุด P และจุด Q อยู่บนด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC โดย $\angle PAB = \angle BCA$ และ $\angle CAQ = \angle ABC$ จุด M และจุด N อยู่บนเส้นตรง AP และ AQ ตามลำดับ โดย P เป็นจุดกึ่งกลางของ AM และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AN จงพิสูจน์ว่าจุดตัดของเส้นตรง BM และ CN อยู่บนวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC

โจทย์ข้อ ๕. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ธนาคารแห่งเมืองเคปทาวน์จัดทำเหรียญที่มีมูลค่า $\frac{1}{n}$ กำหนดชุดของเหรียญดังกล่าวที่มีเหรียญอยู่เป็นจำนวนจำกัด (เหรียญแต่ละเหรียญไม่จำเป็นต้องมีมูลค่าแตกต่างกัน) ซึ่งมีมูลค่ารวมกันอย่างมาก $99 + \frac{1}{2}$ จงพิสูจน์ว่าสามารถแบ่งชุดของเหรียญนี้ออกเป็นกลุ่มไม่เกิน 100 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มมีมูลค่าของเหรียญรวมกันอย่างมาก 1

โจทย์ข้อ ๖. เซตของเส้นตรงในระนาบจะเรียกว่าอยู่ใน *ตำแหน่งทั่วไป* ถ้าไม่มีสองเส้นใดขนานกันและไม่มีสามเส้นใดตัดกันที่จุดเดียว เซตของเส้นตรงในตำแหน่งทั่วไปแบ่งระนาบออกเป็นอาณาบริเวณ บางอาณาบริเวณมีพื้นที่จำกัดซึ่งต่อไปจะเรียกว่า *อาณาบริเวณจำกัด*

จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุกจำนวนนับ n ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ เซตของเส้นตรง n เส้นในตำแหน่งทั่วไปใด ๆ จะสามารถระบายสีเส้นตรงอย่างน้อย $\sqrt{n}$ เส้นด้วยสีน้ำเงิน โดยที่ไม่มีอาณาบริเวณจำกัดใดมีขอบเป็นสีน้ำเงินทั้งหมด

หมายเหตุ ถ้านักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความดังกล่าวข้างต้นสำหรับ $c\sqrt{n}$ แทนที่จะเป็น $\sqrt{n}$ จะได้รับการพิจารณาให้คะแนน โดยขึ้นกับค่าของจำนวนจริง c ที่นักเรียนพิสูจน์ได้

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน