จันทร์, 11. กรกฎาคม 2022

โจทย์ข้อ 1. ธนาคารแห่งกรุงออสโลผลิตเหรียญสองชนิด ได้แก่ อะลูมิเนียม (เขียนแทนด้วย A) และทองแดง (เขียนแทนด้วย B) มารีแอนมีเหรียญอะลูมิเนียม n เหรียญ และเหรียญทองแดง n เหรียญ วางเรียงเป็นแถวเริ่มต้นด้วยการเรียงลำดับใด ๆ *โซ่* คือลำดับย่อยใด ๆ ของเหรียญชนิดเดียวกันที่ติดกัน สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \leqslant 2n$ ที่กำหนดให้ มารีแอนจะทำกระบวนการต่อไปนี้ซ้ำ ๆ กล่าวคือ ระบุโซ่ที่ยาวที่สุดที่บรรจุเหรียญที่ k จากทางซ้าย และย้ายเหรียญทั้งหมดในโซ่ดังกล่าวไปอยู่ปลายซ้ายของแถว ตัวอย่างเช่น ถ้า $n = 4$ และ $k = 4$ แล้วกระบวนการที่เริ่มจากการเรียงลำดับ $AABBBABA$ จะเป็น

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$$

จงหาคู่อันดับ (n, k) ทั้งหมดที่ $1 \leqslant k \leqslant 2n$ และมีสมบัติว่า สำหรับการเรียงลำดับเริ่มต้นใด ๆ จะมีขณะหนึ่งในกระบวนการนี้ ที่เหรียญทางซ้ายสุด n เหรียญมีชนิดเดียวกันทั้งหมด

โจทย์ข้อ 2. ให้ $\mathbb{R}^+$ แทนเซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด จงหาฟังก์ชัน $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ทั้งหมด ที่มีสมบัติว่า สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{R}^+$ จะมี $y \in \mathbb{R}^+$ หนึ่งตัวพอดีที่สอดคล้องกับ

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

โจทย์ข้อ 3. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ S เป็นเซตจำกัดของจำนวนเฉพาะคี่ จงพิสูจน์ว่า มีวิธีอย่างมากหนึ่งวิธี (ไม่นับการหมุนและสะท้อน) ในการวางสมาชิกทั้งหมดของ S รอบวงกลม ที่ทำให้ผลคูณของจำนวนที่ติดกันสองตัวใด ๆ เขียนได้ในรูป $x^2 + x + k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก x

Language: Thai

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน

อังคาร, 12. กรกฎาคม 2022

โจทย์ข้อ 4. ให้ $ABCDE$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมนูนที่ $BC = DE$ สมมติว่ามีจุด T ภายใน $ABCDE$ ที่ทำให้ $TB = TD$, $TC = TE$ และ $\angle ABT = \angle TEA$ ให้เส้นตรง AB ตัดเส้นตรง CD และ CT ที่จุด P และ Q ตามลำดับ สมมติว่าจุด P, B, A, Q ปรากฏบนเส้นตรงตามลำดับดังกล่าว ให้เส้นตรง AE ตัดเส้นตรง CD และ DT ที่จุด R และ S ตามลำดับ สมมติว่าจุด R, E, A, S ปรากฏบนเส้นตรงตามลำดับดังกล่าว จงพิสูจน์ว่าจุด P, S, Q, R อยู่บนวงกลมเดียวกัน

โจทย์ข้อ 5. จงหาสามสิ่งอันดับทั้งหมดของจำนวนเต็มบวก (a, b, p) ที่มี p เป็นจำนวนเฉพาะ และ

$$a^p = b! + p$$

โจทย์ข้อ 6. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก *จัตุรัสนอร์ดิก* คือกระดานขนาด $n \times n$ ที่บรรจุจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง n^2 โดยแต่ละช่องบรรจุจำนวนหนึ่งตัวพอดี ช่องสองช่องที่ต่างกันจะถือว่า อยู่ติดกัน ถ้าสองช่องนี้มีด้านร่วมกัน ช่องทุกช่องที่อยู่ติดกับเฉพาะช่องที่บรรจุจำนวนที่มากกว่า จะถูกเรียกว่า *หุบเขา* *ทางเดินขึ้นเขา* คือลำดับของช่องหนึ่งช่องหรือมากกว่า ที่ทำให้

(i) ช่องแรกของลำดับเป็นหุบเขา

(ii) แต่ละช่องที่ถัดมาในลำดับอยู่ติดกับช่องก่อนหน้า และ

(iii) จำนวนที่อยู่ในช่องในลำดับ เรียงจากน้อยไปมาก

จงหาจำนวนที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ในรูปของ n ของทางเดินขึ้นเขาทั้งหมดในจัตุรัสนอร์ดิก