12 . јули 2006.

Задатак 1. Нека је I средиште уписане кружнице троугла ABC. У унутрашњости троугла изабрана је тачка P таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB\,.$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему се једнакост достиже ако и само ако се P поклапа са I.

Задатак 2. За дијагоналу правилног 2006-тоугла P кажемо да је *добра*, ако њени крајеви деле руб од P на два дела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од P. За странице полигона P такође кажемо да су *добре.*

Посматрајмо разбијања полигона P на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје две међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона P. Одредите максималан број једнакокраких троуглова са две добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

Задатак 3. Одредите најмањи реалан број M такав да неједнакост

$$\left|\, ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\,\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c.

Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 7 поена

13. јули 2006.

Задатак 4. Одредите све парове $(x,\ y)$ целих бројева такве да је

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Задатак 5. Нека је $P(x)$ полином степена n $(n>1)$ са целим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрамо полином

$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

где се P појављује k пута. Докажите да постоји највише n целих бројева t таквих да је $Q(t)=t$.

Задатак 6. Свакој страници b конвексног полигона P придружимо највећу површину троугла који је садржан у P и чија је једна страница b. Докажите да збир свих површина придружених страницама полигона P није мањи од двоструке површине полигона P.

Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 7 поена