International Mathematical Olympiad 50th, Bremen | Germany | 2009

Language: **Greek**

Day: **1**

Τετάρτη, 15 Ιουλίου 2009

Πρόβλημα 1. Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι από το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$ τέτοιοι, ώστε ο n διαιρεί τον $a_i(a_{i+1}-1)$, για $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Να αποδείξετε ότι ο n δεν διαιρεί τον $a_k(a_1-1)$.

Πρόβλημα 2. Έστω ABC τρίγωνο με περίκεντρο O. Τα σημεία P και Q είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών CA και AB, αντίστοιχα. Έστω K, L και M τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων BP, CQ και PQ, αντίστοιχα, και έστω Γ ο κύκλος που περνάει από τα σημεία K, L και M. Υποθέτουμε ότι η ευθεία PQ είναι εφαπτομένη του κύκλου Γ. Να αποδείξετε ότι $OP = OQ$.

Πρόβλημα 3. Υποθέτουμε ότι $s_1, s_2, s_3, \ldots$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακέραιων τέτοια ώστε οι υποακολουθίες της

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ και } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

είναι και οι δύο αριθμητικές πρόοδοι. Να αποδείξετε ότι και η ακολουθία $s_1, s_2, s_3, \ldots$ είναι επίσης αριθμητική πρόοδος.

Language: Greek

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Πέμπτη, 16 Ιουλίου2009

Πρόβλημα 4. Έστω ABC ένα τρίγωνο με $AB = AC$. Οι διχοτόμοι των γωνιών του $\angle CAB$ και $\angle ABC$ τέμνουν τις πλευρές BC και AC στα σημεία D και E, αντίστοιχα. Έστω K το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ADC. Υποθέτουμε ότι $\angle BEK = 45^0$. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της γωνίας $\angle CAB$.

Πρόβλημα 5. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις f, με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων και με τιμές στο σύνολο των θετικών ακέραιων, που είναι τέτοιες ώστε για όλους τους θετικούς ακέραιους a και b να υπάρχει (μη εκφυλισμένο) τρίγωνο με μήκη πλευρών

$$a, \quad f(b) \ \text{ και } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Ένα τρίγωνο είναι *μη εκφυλισμένο*, αν οι κορυφές του δεν βρίσκονται σε μία ευθεία).

Πρόβλημα 6. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ διαφορετικοί ανά δύο θετικοί ακέραιοι και έστω M ένα σύνολο που αποτελείται από $n-1$ θετικούς ακέραιους και δεν περιέχει τον ακέραιο $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Ένα τριζόνι θα κινηθεί με πηδήματα κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Αρχίζει από το σημείο 0 και κάνει n πηδήματα προς τα δεξιά με μήκη $a_1, a_2, \ldots, a_n$, σε τυχαία σειρά. Να αποδείξετε ότι η σειρά των πηδημάτων μπορεί να επιλεγεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το τριζόνι να μην πατήσει ποτέ σε κάποιο σημείο του συνόλου M.

Language: Greek

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες