Antradienis, liepos 23 d., 2013

1 uždavinys. Įrodykite, kad kokia bebūtų natūraliųjų skaičių pora k ir n, visada atsiras k tokių (nebūtinai skirtingų) natūraliųjų skaičių $m_1, m_2, \ldots, m_k$, kad

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

2 uždavinys. 4027 taškų rinkinį plokštumoje vadinsime *kolumbietišku*, jei tarp jų yra 2013 raudonų taškų, 2014 mėlynų taškų ir, be to, jokie trys taškai nepriklauso vienai tiesei. Nubrėžus keletą tiesių, jos visada padalija plokštumą į nesikertančias sritis. Duotam kolumbietiškam taškų rinkiniui tiesių kolekciją vadinsime *gera*, jei ji tenkina tokias sąlygas:

- joks iš to rinkinio taškų nepriklauso jokiai tiesei;
- jokiai iš sričių, į kurias plokštumą padalijo tos tiesės, nepriklauso abiejų spalvų taškai.

Raskite mažiausią k reikšmę, su kuria bet kokiam kolumbietiškam 4027 taškų rinkiniui visada atsiras kokia nors gera k tiesių kolekcija.

3 uždavinys. Išorinis įbrėžtinis trikampio ABC apskritimas prieš viršūnę A liečia kraštinę BC taške A_1. Taškai B_1 kraštinėje CA ir C_1 kraštinėje AB apibrėžiami analogiškai, naudojant išorinius įbrėžtinius trikampio ABC apskritimus prieš viršūnes atitinkamai B ir C. Žinoma, kad apibrėžto apie trikampį $A_1B_1C_1$ apskritimo centras priklauso apibrėžtam apie trikampį ABC apskritimui. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis.

Išoriniu įbrėžtiniu trikampio ABC apskritimu prieš viršūnę A yra vadinamas apskritimas, kuris liečia kraštinę BC, spindulį AB už taško B ir spindulį AC už taško C. Išoriniai įbrėžtiniai apskritimai prieš viršūnes B ir C yra apibrėžiami analogiškai.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Trečiadienis, liepos 24 d., 2013

4 uždavinys. Tegul H yra smailiojo trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas, o taškas W priklauso kraštinei BC ir nesutampa nei su B, nei su C. Taškas M yra aukštinės iš viršūnės B į kraštinę AC pagrindas, o taškas N yra aukštinės iš viršūnės C į kraštinę AB pagrindas. Tegul ω_1 yra apibrėžtas apie trikampį BWN apskritimas, o X – toks apskritimo ω_1 taškas, kad WX yra apskritimo ω_1 skersmuo. Analogiškai, tegul ω_2 yra apibrėžtas apie trikampį CWM apskritimas, o Y – toks apskritimo ω_2 taškas, kad WY yra apskritimo ω_2 skersmuo. Įrodykite, kad taškai X, Y ir H priklauso vienai tiesei.

5 uždavinys. Tegul $\mathbb{Q}_{>0}$ yra teigiamų racionaliųjų skaičių aibė. Funkcija $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ tenkina tokias tris sąlygas:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ su visais $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ su visais $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) egzistuoja toks racionalusis skaičius $a > 1$, kad $f(a) = a$.

Įrodykite, kad $f(x) = x$ su visais $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

6 uždavinys. Tegul $n \geq 3$ yra natūralusis skaičius. Nagrinėkime apskritimą, kuriame pažymėtas $n+1$ taškas taip, kad visi lankai tarp gretimų taškų yra lygūs. Nagrinėsime visus tų taškų žymėjimus skaičiais $0, 1, \ldots, n$ taip, kad kiekvienas skaičius yra panaudojamas lygiai vieną kartą; du tokie taškų žymėjimai skaičiais yra laikomi vienodais, jeigu jie yra gaunami vienas iš kito pasukant apskritimą. Žymėjimas yra vadinamas *gražiu*, jei imant bet kokius tokius skaičius $a < b < c < d$, kad $a+d = b+c$, apskritimo styga, jungianti taškus, kuriuose yra skaičiai a ir d, nekerta stygos, jungiančios taškus, kuriuose yra skaičiai b ir c.

Tegul M yra gražių žymėjimų skaičius, o N – natūraliųjų skaičių porų (x, y), su kuriomis $x + y \leq n$ ir $\mathrm{DBD}(x, y) = 1$, skaičius. Įrodykite, kad

$$M = N + 1.$$

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais