pondělí, 19. července 2021

Úloha 1. Nechť $n \geqslant 100$ je celé číslo. Ivan napsal čísla $n, n+1, \ldots, 2n$, každé z nich na jinou kartu. Pak těchto $n+1$ karet zamíchal a rozdělil na dvě hromádky. Dokažte, že aspoň jedna z těchto hromádek obsahuje takové dvě karty, že součet čísel na nich napsaných je druhou mocninou přirozeného čísla.

Úloha 2. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Úloha 3. Nechť D je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC, v němž $|AB| > |AC|$, a platí $|\angle DAB| = |\angle CAD|$. Bod E úsečky AC splňuje $|\angle ADE| = |\angle BCD|$, pro bod F úsečky AB platí $|\angle FDA| = |\angle DBC|$ a pro bod X přímky AC platí $|CX| = |BX|$. Nechť O_1 a O_2 jsou středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ADC a EXD. Dokažte, že přímky BC, EF a O_1O_2 procházejí společným bodem.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

úterý, 20. července 2021

Úloha 4. Nechť Γ je kružnice se středem I a $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany AB, BC, CD and DA jsou tečnami kružnice Γ, a Ω je kružnice opsaná trojúhelníku AIC. Polopřímka BA protíná kružnici Ω v bodě X, který leží za bodem A a polopřímka BC protíná Ω v bodě Z, který leží za bodem C. Polopřímky AD a CD protínají kružnici Ω po řadě v bodech Y a T, které leží za bodem D. Dokažte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Úloha 5. Dvě veverky, Bushy a Jumpy, nasbíraly na zimu 2021 oříšků. Jumpy označila oříšky čísly od 1 do 2021 a vyhloubila 2021 malých jamek po obvodu kružnice kolem svého oblíbeného stromu. Následující ráno Jumpy zjistila, že Bushy umístila do každé jamky po jednom oříšku bez ohledu na jejich čísla. Nešťastná Jumpy se rozhodla přeskupit oříšky použitím posloupnosti 2021 kroků. V k-tém kroku Jumpy zamění pozice dvou oříšků sousedících s oříškem k. Dokažte, že existuje hodnota k taková, že v k-tém kroku zamění Jumpy oříšky s některými čísly a a b, která splňují nerovnost $a < k < b$.

Úloha 6. Nechť $m \geqslant 2$ je celé číslo, A je konečná množina (ne nutně kladných) celých čísel a $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ jsou podmnožiny A. Předpokládejme, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, m$ je součet prvků B_k roven m^k. Dokažte, že A obsahuje aspoň $m/2$ prvků.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.