12 Юли 2006

Задача 1. Нека ABC е триъгълник с център на вписаната окръжност I. Точка P от вътрешността на триъгълника е такава, че

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Да се докаже, че $AP \geq AI$, като равенството се достига тогава и само тогава, когато $P = I$.

Задача 2. Нека P е правилен 2006-ъгълник. Диагонал на P се нарича *добър*, ако краищата му делят контура на P на две части, всяка от които се състои от нечетен брой страни. Страните на P също се считат за *добри*.

Нека P е разделен на триъгълници посредством 2003 диагонала, никои два от които не се пресичат във вътрешността на P. Да се намери максималният брой равнобедрени триъгълници с две добри страни, които могат да се получат при такова разделяне на P.

Задача 3. Да се намери най-малкото реално число M, за което неравенството

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

е изпълнено за произволни реални числа a, b и c.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

13 Юли 2006

Задача 4. Да се намерят всички двойки (x, y) от цели числа, за които

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Нека $P(x)$ е полином от степен $n > 1$ с цели коефициенти и нека k е естествено число. Разглеждаме полинома $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, където P се появява k пъти. Да се докаже, че съществуват най-много n цели числа t, за които $Q(t) = t$.

Задача 6. На всяка страна b на изпъкнал многоъгълник P е съпоставено максималното лице на триъгълник със страна b, който се съдържа в P. Да се докаже, че сборът на лицата, съпоставени на страните на P е поне два пъти по-голям от лицето на P.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки