



Pirmadienis, 2011-07-18

1 uždavinys. Kiekvienos keturių skirtingų natūraliųjų skaičių aibės $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ elementų sumą $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ pažymėkime s_A . Tegul n_A yra porų (i, j) , kur $1 \leq i < j \leq 4$ ir $a_i + a_j$ dalija s_A , skaičius. Nurodykite visas tokias keturių skirtingų natūraliųjų skaičių aibes A , su kuriomis skaičius n_A įgyja didžiausią reikšmę.

2 uždavinys. Tegul \mathcal{S} yra baigtinė aibė plokštumos taškų. Aibę \mathcal{S} sudaro bent du taškai ir jokie trys aibės \mathcal{S} taškai nepriklauso vienai tiesei. *Vėjo malūnu* vadinamas toks procesas. Pradedame nuo kurio nors aibės \mathcal{S} taško P ir kokios nors tiesės ℓ , kuri eina per šį tašką P ir neina per jokią kitą aibės \mathcal{S} tašką. Šią tiesę ℓ sukame pagal laikrodžio rodyklę per *sukimosi tašką* P iki tol, kol tiesė pasieks sekantį aibės \mathcal{S} tašką. Tada tas sekantis taškas, Q , tampa naujuoju sukimosi tašku ir tiesę mes toliau sukame pagal laikrodžio rodyklę per sukimosi tašką Q iki tol, kol ji pasieks sekantį aibės \mathcal{S} tašką, kuris vėl tampa naujuoju sukimosi tašku, ir t.t. Šį procesą tęsiame tokiu pat būdu be galo ilgai.

Įrodykite, kad visada galima taip parinkti pradinį aibės \mathcal{S} tašką P ir pradinę tiesę ℓ , jog kiekvienas aibės \mathcal{S} taškas bus šio vėjo malūno sukimosi tašku be galo daug kartų.

3 uždavinys. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kur \mathbb{R} realiųjų skaičių aibė, tenkina nelygybę

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

su visais realiaisiais skaičiais x, y . Įrodykite, kad $f(x) = 0$, kai $x \leq 0$.



Antradienis, 2011-07-19

4 uždavinys. Tegul n yra natūralusis skaičius. Turime svarstyklės, kurias sudaro dvi lėkštutės, kairioji ir dešinioji, ir n svarelių, kurių svoriai yra $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Mums reikia koku nors būdu sudėti visus n svarelių ant svarstyklių vieną po kito taip, kad po kiekvieno ėjimo dešinioji svarstyklių lėkštutė niekada nebūtų sunkesnė už kairiąją. Kiekvienu ėjimu mes pasirenkame kurį nors dar nepadėtą ant svarstyklių svarelį ir padedame jį arba ant kairiosios, arba ant dešinėsios svarstyklių lėkštutės ir t.t. iki tol, kol ant svarstyklių bus padėti visi n svarelių. Nustatykite, keliais skirtingais būdais tai galima padaryti.

5 uždavinys. Duota funkcija $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, kur \mathbb{Z} – sveikųjų skaičių aibė, o \mathbb{N} – natūraliųjų skaičių aibė. Skirtumas $f(m) - f(n)$ dalijasi iš $f(m - n)$ su visais sveikaisiais skaičiais m ir n . Įrodykite, kad jei m ir n yra tokie sveikieji skaičiai, kad $f(m) \leq f(n)$, tai $f(n)$ dalijasi iš $f(m)$.

6 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC ir apibrėžtas apie jį apskritimas Γ . Tiesė ℓ yra apskritimo Γ liestinė, o ℓ_a, ℓ_b ir ℓ_c – tiesės, simetriškos tiesei ℓ atitinkamai tiesių BC, CA ir AB atžvilgiu. Įrodykite, kad per tris tiesių ℓ_a, ℓ_b ir ℓ_c susikirtimo taškus einantis apskritimas liečia apskritimą Γ .