Segunda-feira, 21 de setembro de 2020

Problema 1. Considere o quadrilátero convexo $ABCD$. O ponto P está no interior de $ABCD$. Verificam-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove que as três seguintes retas se intersetam num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a mediatriz do segmento AB.

Problema 2. Os números reais a, b, c, d são tais que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problema 3. Temos $4n$ pedras com pesos $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Cada pedra está colorida com uma de n cores e há quatro pedras de cada cor. Mostre que podemos organizar as pedras em dois grupos de modo que as seguintes condições são ambas satisfeitas:

- Os pesos totais dos dois grupos são iguais.
- Cada grupo contém duas pedras de cada cor.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

Terça-feira, 22 de setembro de 2020

Problema 4. Seja $n > 1$ um inteiro. Na encosta de uma montanha existem n^2 estações, todas com diferentes altitudes. Duas companhias de teleféricos, A e B, operam k teleféricos cada uma. Cada teleférico faz a viagem de uma estação para uma de maior altitude (sem paragens intermédias). Os k teleféricos de A partem de k estações diferentes e terminam em k estações diferentes; além disso, se um teleférico parte de uma estação de maior altitude do que a de partida de outro, também termina numa estação de maior altitude do que a de chegada desse outro. A companhia B satisfaz as mesmas condições. Dizemos que duas estações estão *ligadas* por uma companhia se podemos começar na estação com menor altitude e chegar à de maior altitude usando um ou mais teleféricos dessa companhia (não são permitidos quaisquer outros movimentos entre estações).

Determine o menor inteiro positivo k que garante que existam duas estações ligadas por ambas as companhias.

Problema 5. Temos um baralho de $n > 1$ cartas, com um inteiro positivo escrito em cada carta. O baralho tem a propriedade de que a média aritmética dos números escritos em cada par de cartas é também a média geométrica dos números escritos nalguma coleção de uma ou mais cartas.

Para que valores de n podemos concluir que os números escritos nas cartas são todos iguais?

Problema 6. Prove que existe uma constante positiva c para a qual a seguinte afirmação é verdadeira:

Considere um inteiro $n > 1$, e um conjunto $\mathcal{S}$ de n pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos diferentes de $\mathcal{S}$ é pelo menos 1. Então existe uma reta ℓ que separa $\mathcal{S}$ tal que a distância de qualquer ponto de $\mathcal{S}$ a ℓ é pelo menos $cn^{-1/3}$.

(Uma reta ℓ *separa* um conjunto de pontos $\mathcal{S}$ se existe algum segmento com extremos em dois pontos de $\mathcal{S}$ que interseta ℓ.)

Nota. A resultados mais fracos obtidos substituindo $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ podem ser atribuídos pontos dependendo do valor da constante $\alpha > 1/3$.