الثلاثاء, 15. يوليو 2025

المسألة رقم 1 يُقال للمستقيم في المستوى أنه مشمس إذا كان **ليس** موازيًا لأي من محور x أو محور y أو المستقيم $x + y = 0$.

ليكن $n \geqslant 3$ عددًا صحيحًا. حدد جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة k بحيث يوجد n مستقيمات مختلفة في هذا المستوى تحقق الشرطين التاليين:

- لكل عددين صحيحين موجبين a و b حيث $a + b \leqslant n + 1$، بحيث تكون النقطة (a, b) على أحد المستقيمات على الأقل؛
- بالضبط k من هذه المستقيمات ال n هي مستقيمات مشمسة.

المسألة رقم 2 لتكن Ω وΓ دائرتين مركزيهما M وN على الترتيب، بحيث نصف قطر الدائرة Ω أصغر من نصف قطر الدائرة Γ. بفرض Ω وΓ تتقاطعان في نقطتين مختلفتين A وB. المستقيم MN يقطع الدائرة Ω في النقطة C ويقطع الدائرة Γ في النقطة D، بحيث تقع النقاط D, N, M, C على استقامة واحدة بهذا الترتيب. لتكن P مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD. المستقيم AP يقطع Ω مرة أخرى في النقطة $E \neq A$، ويقطع Γ مرة أخرى في النقطة $F \neq A$. لتكن H هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث PMN.

أثبت أن المستقيم المار بـ H والموازي للمستقيم AP هو مماس للدائرة المحيطة بالمثلث BEF.

المسألة رقم 3 لتكن $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

نُسمي دالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ أنها بنزا (bonza) إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(a) | (b^a - f(b)^{f(a)})$$

لكل عددين صحيحين موجبين a وb.

حدد أصغر ثابت حقيقي c بحيث $f(n) \leqslant cn$ لجميع الدوال بنزا (bonza) f ولكل عدد صحيح موجب n.

Arabic (ara), day 2

الأربعاء, 16، يوليو 2025

المسألة رقم 4 تتكوَّن المتتابعة اللانهائية $a_1, a_2, \ldots$ من أعداد صحيحة موجبة، بحيث لكل عنصر منها على الأقل ثلاثة قواسم فعلية صحيحة موجبة. لكل $n \geqslant 1$، يكون a_{n+1} هو مجموع أكبر ثلاث قواسم فعلية للعدد a_n.

حدّد جميع القيم الممكنة للعدد الأول a_1.

(القاسم الفعلي لعدد صحيح موجب N هو القاسم الصحيح الموجب لـ N الذي لا يساوي N نفسه).

المسألة رقم 5 تلعب أليس وبازا لعبة تُسمى لعبة اللاتساوي ، وهي لعبة بين لاعبين وتعتمد قواعدها على عدد حقيقي موجب λ يكون معروفًا لكلا اللاعبين.

في الدور رقم n من اللعبة (بدءًا من $n = 1$) يحدث ما يلي:

- إذا كان n فرديًا، تختار أليس عددًا حقيقيًا غير سالب x_n بحيث:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- إذا كان n زوجيًا، يختار بازا عددًا حقيقيًا غير سالب x_n بحيث:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

إذا لم يتمكن أحد اللاعبين من اختيار عدد x_n مناسب، تنتهي اللعبة ويفوز اللاعب الآخر. إذا استمرت اللعبة إلى ما لا نهاية، فلا أحد من اللاعبين يفوز. جميع الأعداد التي يتم اختيارها تكون معلومة لكلا اللاعبين.

حدّد جميع قيم λ التي تمتلك فيها أليس استراتيجية فوز، وجميع القيم التي يمتلك فيها بازا استراتيجية فوز.

المسألة رقم 6 لدينا شبكة مربعات 2025×2025 مكوّنة من مربعات الوحدة. ترغب ماتيلدا في وضع بعض البلاطات المستطيلة على الشبكة، قد تكون بمقاسات مختلفة، بحيث يكون كل ضلع من أضلاع كل بلاطة يقع على خطوط الشبكة، ولا يُغطّى أي مربع وحدة بأكثر من بلاطة واحدة.

حدّد أقل عدد ممكن من البلاطات التي تحتاج ماتيلدا لوضعها حتى يحتوي كل صف وكل عمود من الشبكة على مربع وحدة واحد فقط غير مغطى بأي بلاطة.