

Marți, 23 iulie 2013

Problema 1. Demonstrați că pentru orice numere naturale nenule k și n există k numere naturale nenule m_1, m_2, \dots, m_k (nu neapărat diferite) astfel încât

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

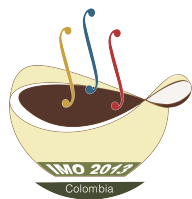
Problema 2. O configurație de 4027 de puncte se numește *columbiană* dacă are 2013 puncte colorate cu roșu și 2014 puncte colorate cu albastru, și nu conține trei puncte coliniare. O mulțime finită de drepte din plan împarte planul în regiuni. O mulțime de drepte se numește *bună* pentru o configurație columbiană dacă următoarele două condiții sunt îndeplinite:

- Nicio dreaptă nu trece printr-un punct al configurației,
- Nicio regiune nu conține puncte de culori diferite.

Determinați cel mai mic număr natural k astfel încât pentru orice configurație columbiană de 4027 de puncte să existe o mulțime bună de k drepte.

Problema 3. Cercul exînscriș corespunzător vârfului A al triunghiului ABC este tangent la latura BC în punctul A_1 . Definim analog punctele B_1 pe latura CA și C_1 pe latura AB . Presupunem că centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ aparține cercului circumscris triunghiului ABC . Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Cercul exînscriș în triunghiul ABC corespunzător vârfului A este cercul tangent laturii BC și dreptelor AB și AC , dar nu laturilor AB și AC . Cercurile exînscrișe corespunzătoare vârfurilor B și C se definesc analog.

*Miercuri, 24 iulie 2013*

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul H și fie W un punct situat în interiorul laturii BC . Punctele M și N sunt picioarele înălțimilor din B , respectiv C . Notăm cu ω_1 cercul circumscris triunghiului BWN și fie X punctul diametral opus lui W în cercul ω_1 . Analog, notăm cu ω_2 cercul circumscris triunghiului CWM și fie Y punctul diametral opus lui W în cercul ω_2 . Demonstrați că punctele X , Y și H sunt coliniare.

Problema 5. Fie $\mathbb{Q}_{>0}$ mulțimea numerelor raționale strict pozitive. Fie $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție ce îndeplinește următoarele trei condiții:

- (i) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x)f(y) \geq f(xy)$,
- (ii) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$,
- (iii) Există un număr rațional $a > 1$ astfel încât $f(a) = a$.

Demonstrați că $f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Fie $n \geq 3$ un număr întreg și fie un cerc pe care marcăm $n + 1$ puncte echidistante. Considerăm toate numerotările acestor puncte cu numerele $0, 1, \dots, n$ astfel încât fiecare număr este folosit exact o dată; două astfel de numerotări se consideră identice dacă printr-o rotație a cercului coincid. O numerotare se numește *frumoasă* dacă pentru orice patru numere $a < b < c < d$ cu $a + d = b + c$, coarda ce unește punctele numerotate cu a și d nu intersectează coarda ce unește punctele numerotate cu b și c .

Fie M numărul de numerotări frumoase și fie N numărul perechilor ordonate (x, y) de numere naturale nenule cu $x + y \leq n$ și $\text{cmmdc}(x, y) = 1$. Demonstrați că

$$M = N + 1.$$