

úterý, 15. července 2025

Úloha 1. Řekneme, že přímka v rovině je *slunečná*, pokud není rovnoběžná ani s osou x , ani s osou y , ani s přímkou $x + y = 0$.

Je dáno celé číslo $n \geq 3$. Určete všechna nezáporná celá čísla k , pro něž existuje n navzájem různých přímek v rovině takových, že:

- pro každá dvě kladná celá čísla a a b splňující $a + b \leq n + 1$ platí, že bod (a, b) leží na aspoň jedné z těchto n přímek; a
- přesně k z těchto n přímek je slunečných.

Úloha 2. Jsou dány kružnice Ω a Γ se středy po řadě M a N takové, že poloměr kružnice Ω je menší než poloměr kružnice Γ . Předpokládejme, že kružnice Ω a Γ se protínají ve dvou bodech A a B . Přímka MN protíná kružnici Ω v bodě C a kružnici Γ v bodě D tak, že body C, M, N, D leží na přímce v tomto pořadí. Označme P střed kružnice opsané trojúhelníku ACD . Přímka AP protíná kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$ a kružnici Γ podruhé v bodě $F \neq A$. Označme H průsečík výšek trojúhelníku PMN .

Dokažte, že rovnoběžka s AP vedená bodem H se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BEF .

Úloha 3. Označme \mathbb{N} množinu kladných celých čísel. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je *senza*, jestliže pro všechna kladná celá čísla a a b platí, že

$$f(a) \text{ je dělitelem } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určete nejmenší reálnou konstantu c takovou, že pro každou senza funkci f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leq cn$.

středa, 16. července 2025

Úloha 4. Řekneme, že kladný dělitel kladného celého čísla m je *ostrý*, pokud je různý od m .

Uvažujme nekonečnou posloupnost (a_1, a_2, \dots) kladných celých čísel, z nichž každé má alespoň tři ostré dělitele. Pro každé $n \geq 1$ platí, že číslo a_{n+1} je součtem tří největších ostrých dělitelů čísla a_n .

Určete všechny možné hodnoty a_1 .

Úloha 5. Alice a Bob hrají hru, jejíž pravidla závisí na kladném reálném čísle λ , které je známé oběma hráčům. V n -tém kole hry (počínaje $n = 1$) se stane následující:

- Je-li n liché, Alice vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Je-li n sudé, Bob vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Pokud hráč nemůže vybrat takové číslo x_n , hra končí a vyhrává jeho soupeř. Pokud hra pokračuje donekonečna, nevyhrává žádný z hráčů. Všechna vybraná čísla jsou známa oběma hráčům.

Určete všechny hodnoty λ , pro které má Alice vítěznou strategii, a také všechny hodnoty λ , pro které má vítěznou strategii Bob.

Úloha 6. Matilda chce do čtvercové tabulky 2025×2025 rozmištit několik dlaždic tak, že každá dlaždice je obdélník nebo čtverec, každá dlaždice přesně zakrývá několik políček tabulky a dlaždice se navzájem nepřekrývají.

Určete nejmenší počet dlaždic, které Matilda musí rozmištit, aby v každém řádku a každém sloupci zůstalo přesně jedno políčko nezakryté.