الإثنين, 11. يوليه 2022

المسألة رقم 1 يصدر بنك أوسلو نوعين من العملات المعدنية: ألومونيوم (يرمز لها A)، وبرونز (يرمز لها B) . تملك ماريان n من عملات الألومنيوم و n من عملات البرونز، قامت بوضعها في صف بترتيب عشوائي. لتكن "السلسلة" هي أي مجموعة متتالية من العملات من نفس النوع. معطى أن $k \leqslant 2n$ عدد صحيح موجب محدد. تقوم ماريان بالعملية التالية بشكل متكرر:
تحدد أطول سلسلة تحتوي على العملة رقم k من اليسار ثم تقوم بتحريك جميع العملات في تلك السلسلة إلى نهاية الطرف الأيسر من الصف. على سبيل المثال: إذا كان $n = 4$ و $k = 4$، وليكن الوضع الابتدائي للعملات $AABBBABA$ فان تتابع العمليات ينبغي أن يكون كالتالي:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

أوجد جميع الأزواج المرتبة (n, k) بحيث $1 \leqslant k \leqslant 2n$ التي تحقق أنه لأي ترتيب ابتدائي، بعد وقت ما أثناء العملية، ستكون جميع العملات التي عددها n من اليسار من نفس النوع.

المسألة رقم 2 لتكن $\mathbb{R}^+$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. أوجد كل الدوال $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ بحيث: لكل $x \in \mathbb{R}^+$ يوجد عدد واحد بالضبط $y \in \mathbb{R}^+$ تحقق أن:

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

المسألة رقم 3 ليكن k عدداً صحيحاً موجباً ولتكن S مجموعة منتهية من الأعداد الأولية الفردية. أثبت أنه يوجد على الأكثر طريقة واحدة (باعتبار الدوران والانعكاس لا تعطي ترتيب جديد) لوضع عناصر S على دائرة بحيث حاصل ضرب أي عددين متجاورين يكون على الصورة $x^2 + x + k$ لقيمة صحيحة موجبة x.

الثلاثاء, 12. يوليه 2022

المسألة رقم 4 ليكن $ABCDE$ خماسياً محدباً بحيث $BC = DE$. لتكن النقطة T تقع داخل $ABCDE$ بحيث $TB = TD$، $TC = TE$ و $\angle ABT = \angle TEA$. ليكن المستقيم AB يقطع المستقيمين CD و CT في النقطتين P و Q على التوالي. لتكن النقاط P, B, A, Q تقع على مستقيم بهذا الترتيب. ليكن المستقيم AE يقطع المستقيمين CD و DT في النقطتين R و S على التوالي. لتكن النقاط R, E, A, S تقع على مستقيم بهذا الترتيب. أثبت أن النقاط P, S, Q, R تقع على دائرة واحدة.

المسألة رقم 5 أوجد جميع الثلاثيات المرتبة (a, b, p) من الأعداد الصحيحة الموجبة و p عدد أولي والتي تحقق أن:

$$a^p = b! + p$$

المسألة رقم 6 ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. "المربع الشمالي" هو جدول $n \times n$ يحتوي على جميع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n^2 بحيث تحتوي كل خلية على عدد واحد بالضبط. نعتبر الخليتين المختلفتين متجاورتين إذا كان لهما ضلع مشترك. يقال لخلية بأنها "وادي" إذا كانت مجاورة لخلايا تحتوي على أعداد أكبر من العدد الذي تحتويه. نعرف "المسار الشاق" على أنه سلسلة تتكون من خلية واحدة أو أكثر تحقق:

(i) الخلية الأولى في المسار هي "وادي"،

(ii) أي خلية تالية في السلسلة تكون مجاورة لخلية سابقة،

(iii) الأعداد المكتوبة في الخلايا المتتابعة في السلسلة تكون في ترتيب تصاعدي.

أوجد كدالة في n أصغر عدد ممكن من "المسارات الشاقة" في "المربع الشمالي".