Уторак, 23. јул 2013.

**1. задатак.** Доказати да за свака два природна броја $k$ и $n$ постоји $k$ природних бројева $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не обавезно различитих) таквих да је

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**2. задатак.** Конфигурацију 4027 тачака у равни зовемо *колумбијском* ако се састоји од 2013 црвених и 2014 плавих тачака, при чему никоје три тачке у конфигурацији нису колинеарне. Повлачењем правих, раван се дијели на области. Кажемо да је распоред правих *добар* за колумбијску конфигурацију ако су задовољена сљедећа два услова:

- ниједна права не садржи неку од тачака из конфигурације;
- ниједна област не садржи тачке различитих боја.

Наћи најмањи број $k$ такав да за сваку колумбијску конфигурацију 4027 тачака постоји добар распоред $k$ правих.

**3. задатак.** Приписана кружница троугла $ABC$ наспрам тјемена $A$ додирује страницу $BC$ у тачки $A_1$. Аналогно се дефинишу тачке $B_1$ на $CA$ и $C_1$ на $AB$, као додирне тачке приписаних кружница наспрам тјемена $B$ и $C$, редом. Претпоставимо да центар описане кружнице троугла $A_1B_1C_1$ лежи на описаној кружници троугла $ABC$. Доказати да је троугао $ABC$ правоугли.

*Приписана кружница троугла $ABC$ наспрам тјемена $A$* је кружница која додирује страницу $BC$, продужетак странице $AB$ преко тачке $B$ и продужетак странице $AC$ преко тачке $C$. Слично се дефинишу приписане кружнице наспрам тјемена $B$ и $C$.



Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова

Сриједа, 24. јул 2013.

**4. задатак.** Нека је $H$ ортоцентар оштроуглог троугла $ABC$, а $W$ тачка на страници $BC$ различита од тјемена $B$ и $C$. Тачке $M$ и $N$ су подножја висина из тјемена $B$ и $C$, редом. Нека је $\omega_1$ описана кружница троугла $BWN$, а $X$ тачка на $\omega_1$ таква да је $WX$ пречник кружнице $\omega_1$. Аналогно, нека је $\omega_2$ описана кружница троугла $CWM$, а $Y$ тачка на $\omega_2$ таква да је $WY$ пречник кружнице $\omega_2$. Доказати да су тачке $X$, $Y$ и $H$ колинеарне.

**5. задатак.** Нека је $\mathbb{Q}_{>0}$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Нека функција $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ задовољава сљедећа три услова:

(i) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) за све $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ важи $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) постоји рационалан број $a > 1$ такав да је $f(a) = a$.

Доказати да је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

**6. задатак.** Дат је природан број $n \geq 3$, и $n+1$ тачака на кружници које је дијеле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0, 1, \ldots, n$, таква да се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем кружнице. Означавање се назива *лијепим* ако, за сваке четири ознаке $a < b < c < d$ за које је $a + d = b + c$, тетива која спаја тачке означене са $a$ и $d$ не сијече тетиву која спаја тачке означене са $b$ и $c$.

Нека је $M$ број лијепих означавања, а $N$ број уређених парова $(x, y)$ природних бројева таквих да је $x + y \leq n$ и НЗД$(x, y) = 1$. Доказати да је

$$M = N + 1.$$



Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова