Keskiviikko, 15. heinäkuuta 2009

1. tehtävä. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ joukon $\{1, \ldots, n\}$ eri lukuja niin, että $a_i(a_{i+1} - 1)$ on jaollinen n:llä, kun $i = 1, \ldots, k-1$. Osoita, että $a_k(a_1 - 1)$ ei ole jaollinen n:llä.

2. tehtävä. Olkoon ABC kolmio ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste P on sivun CA sisäpiste ja piste Q sivun AB sisäpiste. Pisteet K, L ja M ovat janojen BP, CQ ja PQ keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja Γ on pisteiden K, L ja M kautta kulkeva ympyrä. Oletetaan, että suora PQ on ympyrän Γ tangentti. Osoita, että $OP = OQ$.

3. tehtävä. Oletetaan, että $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono ja että molemmat osajonot

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{ja} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

ovat aritmeettisia jonoja. Osoita, että myös jono $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on aritmeettinen jono.

Työaikaa 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

Torstai, 16. heinäkuuta 2009

4. tehtävä. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Kulmien CAB ja ABC puolittajat leikkaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E, tässä järjestyksessä. Olkoon K kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että $\angle BEK = 45°$. Määritä $\angle CAB$:n kaikki mahdolliset arvot.

5. tehtävä. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen joukossa määritellyt funktiot f, joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja joilla on seuraava ominaisuus: kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b on olemassa (ei-surkastunut) kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

$$a, \quad f(b) \quad \text{ja} \quad f(b + f(a) - 1).$$

6. tehtävä. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon M joukko, jonka alkiot ovat $n-1$ positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee n hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jossain järjestyksessä. Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa M.

Työaikaa 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.