pondělí, 11. července 2022

Úloha 1. Banka města Oslo razí mince dvou druhů: aluminiové (značené A) a bronzové (značené B). Magnus má n aluminiových mincí a n bronzových mincí v řadě v nějakém počátečním pořadí. *Řetězem* rozumíme podposloupnost sousedních mincí stejného druhu. Pro dané pevné kladné celé číslo $k \leqslant 2n$ provádí Magnus opakovaně následující krok: určí nejdelší řetěz obsahující k-tou minci zleva a přesune všechny mince z tohoto řetězu na levý konec řady. Například pro $n = 4$, $k = 4$ a počáteční pořadí $AABBBABA$ vypadá proces takto:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Najděte všechny dvojice (n, k) splňující $1 \leqslant k \leqslant 2n$ takové, že pro každé počáteční pořadí se v nějaký okamžik stane, že levých n mincí je stejného druhu.

Úloha 2. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}^+$ splňující

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Úloha 3. Nechť k je kladné celé číslo a nechť S je konečná množina lichých prvočísel. Dokažte, že existuje nejvýše jeden způsob (až na otočení a překlopení) jak umístit prvky S podél obvodu kruhu tak, aby součin každých dvou sousedních čísel byl tvaru $x^2 + x + k$ pro nějaké kladné celé číslo x.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

úterý, 12. července 2022

Úloha 4. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ splňující $|BC| = |DE|$ a uvnitř něj bod T, pro který platí $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ a $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|$. Přímka AB protne přímky CD a CT postupně v bodech P a Q tak, že body P, B, A, Q leží na přímce v tomto pořadí. Podobně přímka AE protne přímky CD a DT postupně v bodech R a S tak, že body R, E, A, S leží na přímce v tomto pořadí. Dokažte, že body P, S, Q, R leží na jedné kružnici.

Úloha 5. Najděte všechny trojice (a, b, p) kladných celých čísel takových, že p je prvočíslo a platí

$$a^p = b! + p.$$

Úloha 6. Nechť n je kladné celé číslo. *Nordický čtverec* je tabulka $n \times n$ vyplněná navzájem různými celými čísly od 1 po n^2. Dvě různá políčka považujeme za sousední, pokud sdílejí stranu. Řekneme, že políčko je *dolík*, pokud je v něm menší číslo než ve všech sousedních políčkách. Řekneme, že posloupnost jednoho či více políček je *stoupák*, pokud současně platí:

(i) první políčko posloupnosti je dolík,

(ii) každé další políčko posloupnosti sousedí s předchozím políčkem,

(iii) čísla v políčkách posloupnosti jsou v rostoucím pořadí.

V závislosti na n určete nejmenší možný celkový počet stoupáků v nordickém čtverci.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.