Tirsdag 16. juli 2019

Oppgave 1. La $\mathbb{Z}$ betegne mengden av heltall. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ slik at

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

holder for alle a og b.

Oppgave 2. I trekanten ABC ligger punktet A_1 på siden BC og punktet B_1 på siden AC. La P og Q være punkter på linjestykkene AA_1 henholdsvis BB_1 slik at PQ er parallell med AB. La videre P_1 være et punkt på linjen PB_1 slik at B_1 ligger strengt mellom P og P_1, og $\angle PP_1C = \angle BAC$. På lignende måte la Q_1 være et punkt på linjen QA_1 slik at A_1 ligger strengt mellom Q og Q_1, og $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Vis at punktene P, Q, P_1, og Q_1 ligger på samme sirkel.

Oppgave 3. Et sosialt nettverk består av 2019 brukere, der enkelte par av dem er venner. Dersom bruker A er venn med bruker B, er også bruker B venn med bruker A. Følgende type hendelser kan forekomme gjentatte ganger, én av gangen:

> Tre brukere A, B, og C for hvilke A er venn med både B og C, men B og C ikke er venner, endrer sine vennskapsstatuser slik at B og C nå blir venner, mens A ikke lenger er venn med B, og heller ikke lenger er venn med C. Alle andre vennskapsstatuser forblir uendret.

I utgangspunktet er det 1010 brukere med 1009 venner hver, samt 1009 brukere med 1010 venner hver. Vis at det finnes en følge av slike hendelser som fører til at alle brukere ender opp med å være venn med høyst én annen bruker.

Onsdag 17. juli 2019

Oppgave 4. Finn alle par (k, n) av positive heltall slik at

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Oppgave 5. Bank of Bath utsteder mynter med bokstaven H på den ene siden, og T på den andre. Nils plasserer n slike mynter på rad, fra venstre til høyre. Han utfører gjentatte ganger følgende trekk: dersom det er nøyaktig $k > 0$ mynter som viser H, snur han mynt nummer k fra venstre; ellers viser alle mynter T, og han stopper. For eksempel vil i tilfellet $n = 3$ prosessen som starter med konfigurasjonen THT være $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, som stopper opp etter tre trekk.

(a) Vis at uansett startkonfigurasjon kommer Nils til å stoppe etter et endelig antall trekk.

(b) For enhver startkonfigurasjon C lar vi $L(C)$ betegne antall trekk før Nils stopper. For eksempel er $L(THT) = 3$ og $L(TTT) = 0$. Bestem gjennomsnittet av tallene $L(C)$ tilhørende de 2^n mulige startkonfigurasjonene C.

Oppgave 6. La I være innsenteret i den spissvinklede trekanten ABC med $AB \neq AC$. Innsirkelen ω til ABC tangerer sidene BC, CA og AB i henholdsvis D, E og F. Linjen gjennom D som står normalt på EF skjærer ω igjen i R. Linjen AR skjærer ω igjen i P. Omsirklene til trekantene PCE og PBF skjærer hverandre igjen i Q.

Vis at linjene DI og PQ skjærer hverandre på linjen gjennom A som står normalt på AI.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng