

25. julij 2007

Naloga 1. Dana so realna števila a_1, a_2, \dots, a_n . Za vsak i ($1 \leq i \leq n$) definiramo

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Naj bo

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokaži, da za poljubna realna števila $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ velja

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Pokaži, da obstajajo taka realna števila $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, da v $(*)$ velja enakost.

Naloga 2. Danih je 5 točk A, B, C, D in E , tako da je $ABCD$ paralelogram in $BCED$ tetivni štirikotnik. Naj bo ℓ premica, ki gre skozi točko A . Denimo, da ℓ seka notranjost daljice DC v točki F in premico BC v točki G . Denimo še, da je $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokaži, da je ℓ simetrala kota $\angle DAB$.

Naloga 3. Na matematičnem tekmovanju so nekateri tekmovalci prijatelji. Prijateljstvo je vedno vzajemno. Skupino tekmovalcev imenujemo *družčina*, če sta vsaka dva tekmovalca v tej skupini prijatelja. (Posebej, vsaka skupina z manj kot dvema tekmovalcema je družčina.) *Velikost* družčine je enaka številu članov te družčine.

Denimo, da je na tem tekmovanju največja velikost družčine soda. Dokaži, da lahko razporedimo tekmovalce v dve sobi tako, da je največja velikost družčine, ki je v prvi sobi, enaka največji velikosti družčine, ki je v drugi sobi.

*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.*

26. junij 2007

Naloga 4. Dan je trikotnik ABC . Simetrala kota $\angle BCA$ seka trikotniku očrtano krožnico v točki R ($R \neq C$), simetralo stranice BC v točki P in simetralo stranice AC v točki Q . Razpolovišče stranice BC označimo s K in razpolovišče stranice AC z L . Dokaži, da imata trikotnika RPK in RQL enako ploščino.

Naloga 5. Naj bosta a in b naravni števili. Dokaži, če $4ab - 1$ deli $(4a^2 - 1)^2$, potem je $a = b$.

Naloga 6. Naj bo n naravno število. Dana je množica

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\},$$

to je množica $(n + 1)^3 - 1$ točk v tridimenzionalnem prostoru. Določi najmanjše možno število ravnin, katerih unija vsebuje množico S , ne vsebuje pa točke $(0, 0, 0)$.

*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.*