Utorak, 10. srpnja 2012.

1. zadatak

Neka je ABC trokut i neka je točka J središte tom trokutu pripisane kružnice nasuprot vrha A. Ta pripisana kružnica dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki M, a pravce AB i AC redom u točkama K i L. Pravci LM i BJ sijeku se u točki F, a pravci KM i CJ u točki G. Neka je S sjecište pravaca AF i BC i neka je T sjecište pravaca AG i BC.

Dokaži da je točka M polovište dužine $\overline{ST}$.

(*Pripisana kružnica* trokuta ABC nasuprot vrha A je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.)

2. zadatak

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj i neka su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokaži da vrijedi

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \; > \; n^n.$$

3. zadatak

Razotkrivanje laži je igra koju igraju dva igrača, A i B. Pravila igre ovise o dva prirodna broja k i n koji su poznati i jednom i drugom igraču.

Na početku igre igrač A bira prirodne brojeve x i N takve da je $1 \leqslant x \leqslant N$. Igrač A čuva broj x kao tajnu, ali kaže igraču B točnu vrijednost broja N. Nakon toga igrač B nastoji prikupiti informacije o broju x postavljajući igraču A pitanja na sljedeći način: za svako pitanje igrač B odabire podskup S skupa prirodnih brojeva (možda isti kao u nekom od prethodnih pitanja) i pita igrača A pripada li broj x skupu S. Igrač B može postaviti po volji mnogo pitanja ovog tipa. Na svako pitanje igrač A mora odmah odgovoriti sa *da* ili *ne*, ali smije lagati koliko god puta želi; jedino je ograničenje da među svakih $k+1$ uzastopnih odgovora barem jedan mora biti istinit.

Nakon što B postavi koliko god pitanja želi, on odabire skup X koji se sastoji od najviše n prirodnih brojeva. Ako broj x pripada skupu X onda igrač B pobjeđuje, u suprotnom B gubi. Dokaži da:

1. Ako je $n \geqslant 2^k$, onda igrač B može osigurati pobjedu.
2. Za svaki dovoljno veliki k, postoji $n \geqslant 1.99^k$ za koji igrač B ne može osigurati pobjedu.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Srijeda, 11. srpnja 2012.

4. zadatak

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da, za sve cijele brojeve a, b, c koji zadovoljavaju $a+b+c=0$, vrijedi jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ označava skup svih cijelih brojeva)

5. zadatak

Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ i neka je D nožište visine iz vrha C. Neka je X unutarnja točka dužine $\overline{CD}$. Neka je K točka na dužini $\overline{AX}$ takva da je $|BK| = |BC|$. Analogno, neka je L točka na dužini $\overline{BX}$ takva da je $|AL| = |AC|$. Neka je M sjecište pravaca AL i BK.

Dokaži da je $|MK| = |ML|$.

6. zadatak

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje nenegativni cijeli brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da vrijedi

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$