

الجمعة 10 جويلية 2015

المُسَأَّلَة 1. نقول عن مجموعة متّهية S من نقط المستوی إنّها متوازنة إذا كان من أجل كلّ نقطتين مختلفتين A و B في S توجّد نقطة C في S تتحقّق $AC = BC$. نقول عن S إنّها بدون مركز إذا كان من أجل كلّ ثلاثة نقاط مختلفّة A و B و C في S لا توجّد نقطة P في S تتحقّق $PA = PB = PC$.

أثبت أنّه لكلّ عدد صحيح $3 \geq n$ ، توجّد مجموعة متوازنة مكوّنة من n نقطة.

بـ. حدد كلّ الأعداد الصحيحة $3 \geq n$ التي لأجلها توجّد مجموعة متوازنة بدون مركز مكوّنة من n نقطة.

المُسَأَّلَة 2. حدد كلّ التّلايّات المرتبة (a, b, c) من الأعداد الصحيحة الوجبة تماماً التي لأجلها تكون المقادير

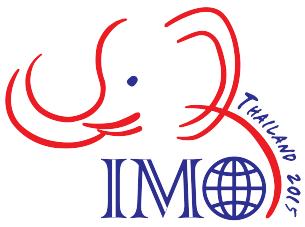
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

قوى للعدد 2.

() نسمّي قوّة للعدد 2 كلّ عدد صحيح يكتب على شكل 2^n ، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 0.

المُسَأَّلَة 3. ليكن ABC مثلثاً حادّ الزوايا فيه $AB > AC$ ، و Γ دائرة المحيطة، و H ملتقى ارتفاعاته، و F قدم ارتفاعه المنشأ من الرأس A . النّقطة M هي متّصف الضلع $[BC]$. لتكن Q النّقطة على الدائرة Γ التي تتحقّق $\widehat{HQ}A = 90^\circ$. لتكن K النّقطة على الدائرة Γ التي تتحقّق $\widehat{HK}Q = 90^\circ$. لنفرض أنّ النّقط A, B, C, K, Q مختلفّة وهي وفق هذا الترتيب على الدائرة Γ .

أثبت أنّ الدائريّين المحيطتين بالمثلثين KQH و FKM متّماستان.



Language: Arabic (Algerian)

Day: 2

السبت 11 جويليا 2015

المُسَأَّلَة 4. ABC مُثُلْث، (Ω) دَائِرَتُهُ الْمُحِيطَةُ وَ O مَرْكُزُهَا. الدَائِرَةُ (Γ) ذَاتُ الْمَرْكُزِ A تَقْطَعُ الْضَلعَ $[BC]$ فِي النَّقْطَيْنِ D وَ E ، بِحِيثُ تَكُونُ النَّقْطَ E, D, B وَ C كُلُّهَا مُخْتَلِفَةٌ وَتَقْعُدُ عَلَى الْمُسْتَقِيمِ (BC) بِهَذَا التَّرْتِيبِ. لَتَكُنْ F وَ G نَقْطَيْ تَقْاطُعِ الدَائِرَتَيْنِ (Γ) وَ (Ω) ، بِحِيثُ تَقْعُدُ النَّقْطَ A, C, B, F وَ G عَلَى الدَائِرَةِ (Ω) بِهَذَا التَّرْتِيبِ. لَتَكُنْ K نَقْطَةُ التَّقْاطُعِ الثَّانِيَةُ لِلَّدَائِرَةِ الْمُحِيطَةِ بِالْمُثُلْثِ BDF مَعَ الْضَلعِ $[AB]$. لَتَكُنْ L نَقْطَةُ التَّقْاطُعِ الثَّانِيَةُ لِلَّدَائِرَةِ الْمُحِيطَةِ بِالْمُثُلْثِ CGE مَعَ الْضَلعِ $[CA]$.

أَثْبِتْ أَنَّهُ إِذَا كَانَ الْمُسْتَقِيمَانِ (FK) وَ (GL) مُخْتَلِفَيْنِ وَيَتَقَاطِعُانِ فِي النَّقْطَةِ X ، فَإِنَّ النَّقْطَةَ X تَقْعُدُ عَلَى الْمُسْتَقِيمِ (AO) .

المُسَأَّلَة 5. لَتَكُنْ \mathbb{R} مَجْمُوعَةُ الْأَعْدَادِ الْحَقِيقِيَّةِ. جَدْ جَمِيعَ الدَّوَالِ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ الَّتِي تَحْقِّقُ الْمَعَادِلَةِ

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

لَكُلِّ عَدَدَيْنِ حَقِيقَيْنِ x وَ y .

المُسَأَّلَة 6. مَتَالِيَّةُ الْأَعْدَادِ الصَّحِيحَةِ a_1, a_2, \dots تَحْقِّقُ الشَّرْطَيْنِ:

$$1 \leq j \leq 2015 \quad (i)$$

$$1 \leq k < \ell \quad \text{لَكُلِّ } k + a_k \neq \ell + a_\ell \quad (ii)$$

أَثْبِتْ وَجُودَ عَدَدَيْنِ صَحِيقَيْنِ مُوجَبَيْنِ تَامَّاً b وَ N بِحِيثُ

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

لَكُلِّ عَدَدَيْنِ صَحِيقَيْنِ m وَ n يَحْقِّقَانِ $n > m \geq N$.

Language: Arabic (Algerian)

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة

7 درجات لكل مسألة