יום שני, 9 ביולי, 2018

שאלה 1. יהא Γ המעגל החוסם של המשולש חד-הזוויות ABC. הנקודות D ו-E נמצאות על הקטעים AB ו-AC, בהתאמה, ומקיימות $AD = AE$. האנכים האמצעיים של BD ו-CE חותכים את הקשתות הקצרות AB ו-AC של Γ בנקודות F ו-G, בהתאמה. הוכיחו כי הישרים DE ו-FG מקבילים.

שאלה 2. מצאו את כל השלמים $n \geq 3$ עבורם קיימים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$, המקיימים $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ וכן

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

לכל $i = 1, 2, \dots, n$.

שאלה 3. נגדיר **משולש אנטי-פסקל** בתור מערך מספרים בצורת משולש שווה-צלעות בו כל מספר שאינו בשורה התחתונה שווה לערך המוחלט של הפרש שני המספרים שמתחתיו. לדוגמה, המערך הבא הוא משולש אנטי-פסקל עם ארבע שורות שמכיל את כל השלמים מ-1 עד 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

האם קיים משולש אנטי-פסקל עם 2018 שורות שמכיל את כל השלמים מ-1 עד $1 + 2 + \cdots + 2018$?

יום שלישי, 10 ביולי, 2018

שאלה 4. נקודה (x,y) במישור עבורה x ו-y שניהם שלמים חיוביים קטנים או שווים ל-20 תקרא **אתר**.

תחילה, כל 400 האתרים פנויים. איילה וברווז מניחים אבנים בתורות, איילה ראשונה. בתורה, איילה מניחה אבן אדומה חדשה על אתר פנוי, כך שהמרחק בין כל שני אתרים עליהם מונחות אבנים אדומות שונה מ-$\sqrt{5}$. בתורו, ברווז מניח אבן כחולה חדשה על אתר פנוי כלשהו (לאתר עליו מונחת אבן כחולה מותר להיות בכל מרחק שהוא מכל אתר אחר). הם מפסיקים ברגע ששחקן כלשהו לא מסוגל להניח אבן בתורו.

מצאו את השלם הגדול ביותר K עבורו איילה יכולה להבטיח שהיא תניח לפחות K אבנים אדומות, לא משנה איך ברווז יניח את האבנים הכחולות שלו.

שאלה 5. תהא $a_1, a_2, \ldots$ סדרה אינסופית של שלמים חיוביים. נתון שקיים שלם $N > 1$ כך שלכל $n \geq N$, המספר

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

הינו שלם. הוכיחו שקיים שלם חיובי M עבורו $a_m = a_{m+1}$ לכל $m \geq M$.

שאלה 6. במרובע קמור $ABCD$ מתקיים $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. הנקודה X נמצאת בתוך $ABCD$ ומקיימת

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{וגם} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

הוכיחו כי $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$.