Ponedjeljak, 11. jul 2016.

Zadatak 1. U trouglu BCF ugao kod tjemena B je prav. Neka je A tačka na pravoj CF takva da je $FA = FB$ i tačka F leži između A i C. Tačka D je izabrana tako da je $DA = DC$ i prava AC polovi ugao $\sphericalangle DAB$. Tačka E je izabrana tako da je $EA = ED$ i prava AD polovi ugao $\sphericalangle EAC$. Neka je M središte duži CF, a tačka X takva da je četverougao $AMXE$ paralelogram (gdje je $AM \parallel EX$ i $AE \parallel MX$). Pokazati da se prave BD, FX i ME sijeku u jednoj tački.

Zadatak 2. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće u svako polje tabele dimenzija $n \times n$ upisati jedno od slova I, M i O tako da su zadovoljena oba sljedeća uslova:

- u svakom redu i svakoj koloni, jedna trećina svih upisanih slova su I, jedna trećina su M i jedna trećina su O;
- u svakoj dijagonali u kojoj je broj upisanih slova djeljiv sa tri, jednu trećinu svih upisanih čine slova I, trećinu čine slova M i trećinu slova O.

Napomena: Redovi i kolone $n \times n$ tabele su označeni brojevima od 1 do n na uobičajen način. Prema tome, svakom polju tabele odgovara par prirodnih brojeva (i, j), gdje je $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Za $n > 1$, tabela ima $4n - 2$ *dijagonale* dva tipa. Dijagonala prvog tipa se sastoji od svih polja (i, j) za koje je $i + j$ konstanta, a dijagonala drugog tipa se sastoji od svih polja (i, j) za koja je $i - j$ konstanta.

Zadatak 3. Neka je $P = A_1A_2 \ldots A_k$ konveksan mnogougao u ravni. Tjemena $A_1, A_2, \ldots, A_k$ imaju cjelobrojne koordinate i leže na istoj kružnici. Neka je S površina mnogougla P. Neka je n neparan prirodan broj takav da su kvadrati dužina stranica mnogougla P cijeli brojevi djeljivi sa n. Dokazati da je $2S$ cijeli broj djeljiv sa n.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Utorak, 12. jul 2016.

Zadatak 4. Skup prirodnih brojeva nazivamo *mirisan* ako sadrži bar dva elementa i svaki njegov element ima bar jedan zajednički prost djelilac sa bar jednim od preostalih elemenata. Neka je $P(n) = n^2+n+1$. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja b za koju postoji nenegativan cijeli broj a takav da je skup

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

mirisan?

Zadatak 5. Na tabli je napisana jednačina

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

sa po 2016 linearnih faktora na svakoj strani. Koja je najmanja moguća vrijednost broja k za koju je moguće izbrisati tačno k od ova 4032 linearna faktora, tako da na svakoj strani jednakosti ostane bar po jedan faktor i da dobijena jednačina nema realnih rješenja?

Zadatak 6. U ravni je dato $n \geqslant 2$ duži tako da se svake dvije duži sijeku u unutrašnjoj tački, i da se nikoje tri duži ne sijeku u istoj tački. Geoff treba da odabere po jedan kraj svake duži i u njega postavi žabu, okrenutu prema drugom kraju duži. Zatim će Geoff da pljesne rukama $n-1$ puta. Svaki put kad on pljesne rukama, svaka žaba će odmah da skoči naprijed u sljedeću presječnu tačku na svojoj duži. Žabe nikad ne mijenjaju smjer u kojem skaču. Geoff želi da postavi žabe tako da se ni u jednom trenutku dvije žabe ne mogu naći u istoj presječnoj tački.

(a) Dokazati da Geoff uvijek može da ispuni svoju želju ako je n neparan broj.

(b) Dokazati da Geoff nikad ne može da ispuni svoju želju ako je n paran broj.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova