

utorak, 16. jula 2019.

Zadatak 1. Neka je \mathbb{Z} skup cijelih brojeva. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a i b vrijedi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Zadatak 2. Na stranicama BC i AC trougla ABC date su tačke A_1 i B_1 , redom. Neka su P i Q tačke na dužima AA_1 i BB_1 , redom, takve da su prave PQ i AB paralelne. Neka je P_1 tačka na pravoj PB_1 takva da tačka B_1 leži između tačaka P i P_1 i vrijedi $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Neka je Q_1 tačka na pravoj QA_1 takva da tačka A_1 leži između tačaka Q i Q_1 i vrijedi $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Dokazati da su tačke P , Q , P_1 i Q_1 konciklične.

Zadatak 3. Društvena mreža ima 2019 korisnika i neki parovi korisnika su prijatelji. Ako je korisnik A prijatelj korisnika B , onda je i korisnik B prijatelj korisnika A . Sljedeći događaji mogu se ponavljati jedan za drugim (ne istovremeno):

Tri korisnika A , B i C takva da je A prijatelj korisnika B i C , ali B i C nisu prijatelji, mijenjaju svoje statuse prijateljstava tako da su B i C sada prijatelji, a A više nije prijatelj niti sa B niti sa C . Svi ostali statusi prijateljstava ostaju nepromijenjeni.

Na početku 1010 korisnika od kojh svaki ima 1009 prijatelja, dok svaki od preostalih 1009 korisnika ima 1010 prijatelja. Dokazati da postoji niz opisanih događaja nakon kojeg svaki korisnik ima najviše jednog prijatelja.

srijeda, 17. jula 2019.

Zadatak 4. Naći sve parove (k, n) prirodnih brojeva takve da vrijedi

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Zadatak 5. Banka grada Batha izdaje novčiće koji sa jedne strane imaju oznaku H , a sa druge oznaku T . Harun je poredao n ovakvih novčića u niz s lijeva na desno. Sa ovim novčićima on ponavlja sljedeću operaciju: ako je u nizu tačno $k > 0$ novčića koji pokazuju H , tada okreće k -ti novčić s lijeva; inače, svi novčići pokazuju T i proces se završava. Na primjer, ako je $n = 3$ i početni raspored je THT , Harun vrši sljedeći niz operacija $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, i proces se završava nakon ove tri operacije.

- (a) Dokazati da za svaki početni raspored novčića Harun završava opisani proces nakon konačno mnogo operacija.
- (b) Za početni raspored C neka je sa $L(C)$ označen broj operacija koje Harun izvrši prije nego što se proces završi. Na primjer, $L(THT) = 3$ i $L(TTT) = 0$. Odrediti aritmetičku sredinu brojeva $L(C)$ po svih 2^n mogućih početnih rasporeda C .

Zadatak 6. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC u kojem je $AB \neq AC$. Upisana kružnica ω trougla ABC dodiruje stranice BC , CA i AB u tačkama D , E i F , redom. Prava kroz D okomita na EF siječe ω ponovo u R . Prava AR siječe ω ponovo u P . Opisane kružnice trouglova PCE i PBF se sijeku ponovo u Q .

Dokazati da se prave DI i PQ sijeku na pravoj kroz A okomitoj na AI .