



Isnin, 18 Julai 2011

Masalah 1. Diberi sebarang set $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ yang terdiri daripada empat integer positif berlainan. Namakan hasil tambah $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ sebagai s_A . Andaikan n_A mewakili bilangan pasangan (i, j) dengan $1 \leq i < j \leq 4$ supaya $a_i + a_j$ membahagi s_A . Cari semua set A yang terdiri daripada empat integer positif berlainan supaya nilai n_A adalah sebesar mungkin.

Masalah 2. Andaikan \mathcal{S} suatu set terhingga yang terdiri daripada sekurang-kurangnya dua titik pada suatu satah. Andaikan tiada tiga titik dalam \mathcal{S} yang segaris. Suatu *kincir* ialah suatu proses yang bermula dengan suatu garis ℓ yang melalui satu titik $P \in \mathcal{S}$. Garis ini berputar mengikut arah jam menggunakan P sebagai *sendi* sehingga garis ini melalui satu titik lain dalam \mathcal{S} . Titik ini, yang dinamakan Q , mengambil alih peranan sebagai sendi yang baru, dan garis ini terus berputar mengikut arah jam bersendikan Q sehingga ia melalui titik seterusnya dalam \mathcal{S} . Proses ini berterusan tanpa henti.

Buktikan bahawa suatu titik P dalam \mathcal{S} dan suatu garis ℓ yang melalui P boleh dipilih supaya kincir yang terhasil akan menggunakan setiap titik dalam \mathcal{S} sebagai sendi tak terhingga kali banyaknya.

Masalah 3. Andaikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suatu fungsi nyata yang tertakrif pada set nombor nyata yang memenuhi

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

untuk semua nombor nyata x dan y . Buktikan bahawa $f(x) = 0$ untuk semua $x \leq 0$.



Selasa, 19 Julai 2011

Masalah 4. Andaikan $n > 0$ suatu integer. Diberi suatu dacing dan n pemberat yang beratnya $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Setiap pemberat diletakkan di atas piring dacing, satu demi satu, dengan keadaan piring kanan tidak pernah lebih berat daripada piring kiri. Pada setiap langkah, satu pemberat dipilih daripada pemberat-pemberat yang belum diletakkan di atas dacing dan kemudian pemberat itu diletakkan sama ada di atas piring kiri atau kanan, sehinggalah semua pemberat berada di atas dacing itu.

Tentukan bilangan cara untuk melakukan hal ini.

Masalah 5. Andaikan f suatu fungsi daripada set integer kepada set integer positif. Andaikan bahawa, untuk sebarang dua integer m dan n , beza $f(m) - f(n)$ boleh dibahagi dengan $f(m - n)$. Buktikan bahawa, untuk semua integer m dan n dengan $f(m) \leq f(n)$, nilai $f(n)$ boleh dibahagi dengan $f(m)$.

Masalah 6. Andaikan ABC suatu segitiga tirus dengan bulatan lilit Γ . Andaikan ℓ suatu tangen kepada Γ , dan andaikan ℓ_a , ℓ_b dan ℓ_c masing-masing adalah garis-garis yang diperoleh dengan memantulkan ℓ pada garis-garis BC , CA dan AB . Buktikan bahawa bulatan lilit kepada segitiga yang dibentuk oleh garis-garis ℓ_a , ℓ_b dan ℓ_c adalah tangen kepada bulatan Γ .