الثلاثاء 16 جويلية 2019

المسألة 1.

نرمز بـ $\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة النسبية. حدّد جميع الدوال $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بحيث لكل عددين صحيحين نسبيين a و b :

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

المسألة 2.

لتكن A_1 و B_1 نقطتين تنتميان على التوالي إلى الضلعين $[BC]$ و $[AC]$ في مثلث ABC. ولتكن كذلك P و Q نقطتين تنتميان على التوالي إلى القطعتين $[AA_1]$ و $[BB_1]$، حيث يكون المستقيمان (PQ) و (AB) متوازيين. لتكن P_1 نقطة من المستقيم (PB_1)، حيث تتواجد النقطة B_1 قطعا بين النقطتين P و P_1، و بحيث $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. بالمثل، لتكن Q_1 نقطة من المستقيم (QA_1)، حيث تتواجد النقطة A_1 قطعا بين النقطتين Q و Q_1، و بحيث $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

أثبت أنّ P و Q و P_1 و Q_1 نقط متداورة .

المسألة 3.

تضم شبكة للتواصل الاجتماعي 2019 عضوا. بعض من هؤلاء الأعضاء هم أصدقاء مع بعضهم البعض، وعلاقة الصداقة هنا متبادلة. أحداث من النوع الموضح أدناه تحدث على التوالي واحدا تلو الآخر:

> ليكن A و B و C ثلاثة أعضاء بحيث يكون A صديقا لـ B و C، لكن دون أن تكون بين B و C أية علاقة صداقة؛ ثم يصبح B و C صديقين لكن لم يعد A صديقا سواء لـ B أو لـ C. علاقات الصداقة الآخرى بين الأعضاء لا تتغير خلال هذا الحدث.

في البداية، كان لدى 1010 من الأعضاء 1009 من الأصدقاء لكل واحد منهم، وكان لدى 1009 من الأعضاء 1010 من الأصدقاء لكل واحد منهم.

أثبت أنّ هناك سلسلة من هذه الأحداث التي يصبح عقبها لكل عضو صديق واحد على الأكثر.

Language: Arabic (Tunisian)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

الأربعاء 17 جويلية 2019

المسألة 4.

أوجد جميع الأزواج (k,n) من أعداد صحيحة طبيعية موجبة قطعا، والتي تحقق المعادلة:

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

المسألة 5.

أصدر بنك باث قطعا نقدية، وجه كل واحدة منها يحمل الحرف H والوجه الآخر يحمل الحرف T . قامت مرغان بوضع n قطعة، من هذه القطع النقدية، على شكل خط مستقيم من اليسار إلى اليمين. ثم تنجز عدة مرات متتابعة العملية التالية: إذا كان الحرف H يظهر على k قطعة نقدية بالضبط، مع $k \geq 1$، فإنّ مرغان تقلب القطعة النقدية الموجودة في الرتبة k انطلاقا من اليسار ؛ وإذا كان $k = 0$ فإنّها تتوقف. فمثلا، إذا كان $n = 3$، فإنّ العمليات التي تنطلق من التشكيلة THT تكون

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

تتوقف مرغان إذن بعد إنجاز 3 عمليات.

(a) بيّن أنّه مهما تكن التشكيلة التي تنطلق منها مرغان، فإنّها ستتوقف بعد عدد منته من العمليات.

(b) مهما كانت التشكيلة C في البداية، نرمز بـ $L(C)$ لعدد العمليات التي ستنجزها مرغان قبل أن تتوقف. فمثلا $L(THT) = 3$ و $L(TTT) = 0$. أوجد القيمة المتوسطة للأعداد $L(C)$ المحصل عليها عندما تتغير C في المجموعة المكونة من 2^n تشكيلة بدئية الممكنة.

المسألة 6.

ليكن ABC مثلثا زواياه حادة حيث $AB \neq AC$. نرمز بـ ω للدائرة المحاطة بالمثلث ABC و I مركز ω، و D و E و F نقط تماس ω مع الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ على التوالي. لتكن R النقطة من ω، تخالف D، حيث يكون المستقيم (DR) عموديا على (EF) . لتكن P نقطة تقاطع المستقيم (AR) والدائرة ω والتي تخالف R. وأخيرا، لتكن Q نقطة تقاطع الدائرتين المحيطتين بالمثلثين PCE و PBF، والتي تخالف P.

بين أنّ المستقيمين (DI) و (PQ) يتقاطعان في نقطة تنتمي إلى المستقيم العمودي على (AI) والمار من A.

Language: Arabic (Tunisian)

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة