þriðjudagur, 15. júlí 2025

Dæmi 1. Lína í sléttunni er sögð vera *sólskinslína* ef hún er **ekki** samsíða neinu af eftirfarandi, x-ásnum, y-ásnum eða línunni $x + y = 0$.

Látum $n \geqslant 3$ vera gefna heiltölu. Ákvarðið allar ekki neikvæðar heiltölur k þannig að til séu n ólíkar línur í sléttunni sem uppfylla tvennt eftirfarandi:

- fyrir allar jákvæðar heiltölur a og b með $a + b \leqslant n + 1$, er punkturinn (a, b) á að minnsta kosti einni af línunum; og
- nákvæmlega k af línunum n eru sólskinslínur.

Dæmi 2. Látum Ω og Γ vera hringi með miðpunkta M og N, í þeirri röð, þannig að geisli Ω sé minni en geisli Γ. Gerum ráð fyrir að hringirnir Ω og Γ skerist í tveimur ólíkum punktum A og B. Línan MN sker Ω í C og Γ í D, þannig að punktarnir C, M, N og D liggi á línunni í þessari röð. Látum P vera ummiðju þríhyrningsins ACD. Línan AP sker Ω aftur í $E \neq A$. Línan AP sker Γ aftur í $F \neq A$. Látum H vera hæðamiðju þríhyrningsins PMN.

Sannið að línan í gegnum H samsíða AP snerti umritaða hring þríhyrningsins BEF.

(*Hæðamiðja* þríhyrnings er punkturinn þar sem hæðir hans skerast.)

Dæmi 3. Látum $\mathbb{N}$ tákna mengi jákvæðra heiltalna. Fall $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er sagt vera *bonza* ef

$$f(a) \text{ gengur upp í } b^a - f(b)^{f(a)}$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur a og b.

Ákvarðið minnsta rauntölu fastann c þannig að $f(n) \leqslant cn$ fyrir öll bonza föll f og allar jákvæðar heiltölur n.

miðvikudagur, 16. júlí 2025

Dæmi 4. *Eiginlegur deilir* jákvæðrar heiltölu N er jákvæður deilir N ólíkur N.

Óendanlega runan $a_1, a_2, \ldots$ samanstendur af jákvæðum heiltölum, sem hver um sig hefur að minnsta kosti þrjá eiginlega deila. Fyrir sérhvert $n \geqslant 1$, er heiltalan a_{n+1} summa þriggja stærstu eiginlegu deila a_n.

Ákvarðið öll möguleg gildi a_1.

Dæmi 5. Anna og Bassi spila *inekoalaty leik*, fyrir tvo leikmenn og reglur leiksins byggja á jákvæðri rauntölu λ sem báðir leikmenn vita. Í umferð n í leiknum (byrjar á $n = 1$) gerist eftirfarandi:

- Ef n er oddatala velur Anna ekki-neikvæða rauntölu x_n þannig að
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ef n er slétt velur Bassi ekki-neikvæða rauntölu x_n þannig að
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ef leikmaður getur ekki valið löglega tölu x_n endar leikurinn og hinn leikmaðurinn vinnur. Ef leikurinn heldur áfram óendanlega lengi vinnur hvorugur. Báðir leikmenn vita allar tölur sem hafa verið valdar.

Ákvarðið öll gildi λ þannig að Anna eigi örugga vinningsleið og öll gildi þannig að Bassi eigi örugga vinningsleið.

Dæmi 6. Gefið er 2025×2025 reita skákborð. Matthildur ætlar að setja rétthyrningslaga flísar á borðið, hugsanlega misstórar, þannig að hliðar sérhverrar flísar liggi eftir hliðum reita og sérhver reitur sé hulinn af í mesta lagi einni flís.

Ákvarðið minnsta fjölda flísa sem Matthildur þarf að nota þannig að sérhver röð og sérhver dálkur borðsins innihaldi nákvæmlega einn reit sem er ekki hulinn af neinni flís.

Language: Icelandic

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.
Hvert dæmi er 7 stiga virði.