

12 . јули 2006.

**Задатак 1.** Нека је  $I$  средиште уписане кружнице троугла  $ABC$ . У унутрашњости троугла изабрана је тачка  $P$  таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите да је  $AP \geq AI$ , при чему једнакост важи ако и само ако се тачка  $P$  подудара са тачком  $I$ .

**Задатак 2.** За дијагоналу правилног 2006-тоугла  $P$  кажемо да је *добра*, ако њени крајеви дијеле руб од  $P$  на два дијела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од  $P$ . За странице полигона  $P$  такође кажемо да су *добре*.

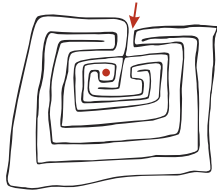
Посматрајмо разбијања полигона  $P$  на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје двије међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона  $P$ . Одредите максималан број једнакокраких троуглова са двије добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

**Задатак 3.** Одредите најмањи реалан број  $M$  такав да неједнакост

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута  
Сваки задатак вриједи 7 бодова



13. јули 2006.

**Задатак 4.** Одредите све парове  $(x, y)$  цијелих бројева такве да је

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Задатак 5.** Нека је  $P(x)$  полином степена  $n$  ( $n > 1$ ) са цијелим коефицијентима и нека је  $k$  природан број. Посматрајмо полином

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

гдје се  $P$  појављује  $k$  пута. Докажите да постоји највише  $n$  цијелих бројева  $t$  таквих да је  $Q(t) = t$ .

**Задатак 6.** Свакој страници  $b$  конвексног полигона  $P$  придружимо највећу површину троугла који је садржан у  $P$  и чија је једна страница  $b$ . Докажите да је збир свих површина придружених страницама полигона  $P$  већи или једнак од двоструке површине полигона  $P$ .

*Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута  
Сваки задатак вриједи 7 бодова*