2015. július 10., péntek

1. Feladat A sík pontjainak egy véges $\mathcal{S}$ halmazát *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely két különböző A, B pontjához van $\mathcal{S}$-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. $\mathcal{S}$-et *centrum-nélküli*nek nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs $\mathcal{S}$-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.

(a) Mutassuk meg, hogy bármely $n \geqslant 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

(b) Határozzuk meg azokat az $n \geqslant 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

2. Feladat Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a, b, c) számhármasokat, amelyekre az

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

számok mindegyike 2-hatvány.

(2-*hatvány egy* 2^n *alakú egész szám, ahol* n *egy nemnegatív egész szám.*)

3. Feladat Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90°$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90°$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2015. július 11., szombat

4. Feladat Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja O. Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.

Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

5. Feladat Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

minden x, y valós számra.

6. Feladat Egész számok egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ minden $j \geqslant 1$-re;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ minden $1 \leqslant k < \ell$-re.

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N, hogy

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n > m \geqslant N$.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.