



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Korean (kor), day 1

2024년 7월 16일 화요일

문제 1. 다음 조건을 만족하는 실수 α 를 모두 찾아라.

(조건) 모든 양의 정수 n 에 대하여 정수

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

가 n 의 배수이다.

(단, $\lfloor z \rfloor$ 는 z 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다. 예를 들어, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 2.9 \rfloor = 2$ 이다.)

문제 2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 g 와 N 이 존재하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하여라.

(조건) 모든 정수 $n \geq N$ 에 대하여 $\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$ 이다.

(단, $\gcd(x, y)$ 는 두 정수 x, y 의 최대공약수이다.)

문제 3. 양의 정수로 이루어진 무한 수열 a_1, a_2, a_3, \dots 과 양의 정수 N 이 있다. 각각의 $n > N$ 에 대하여 a_n 은 $n - 1$ 개의 항 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 중에서 값이 a_{n-1} 과 같은 항의 개수와 같다. 두 수열 a_1, a_3, a_5, \dots 과 a_2, a_4, a_6, \dots 중 적어도 하나는 결국주기적이 됨을 보여라.

(무한 수열 b_1, b_2, b_3, \dots 이 “결국주기적” 이라는 것은 어떤 양의 정수 p 와 M 이 존재하여, 모든 $m \geq M$ 에 대하여 $b_{m+p} = b_m$ 이 되는 것을 의미한다.)



2024년 7월 17일 수요일

문제 4. 삼각형 ABC 에서 $AB < AC < BC$ 이다. 삼각형 ABC 의 내심과 내접원을 각각 I , ω 라 하자. 점 X 는 직선 BC 위의 C 가 아닌 점이고, X 를 지나며 AC 와 평행한 직선은 ω 에 접한다. 비슷하게, 점 Y 는 직선 BC 위의 B 가 아닌 점이고, Y 를 지나며 AB 와 평행한 직선은 ω 에 접한다. 직선 AI 가 삼각형 ABC 의 외접원과 다시 만나는 점을 $P(\neq A)$ 라 하자. 점 K 와 L 을 각각 변 AC , AB 의 중점이라 할 때, $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ 임을 보여라.

문제 5. 터보라는 이름의 달팽이가 2024 개의 행 (가로), 2023 개의 열 (세로)을 가진 체스판 위에서 게임을 한다. 체스판의 2022 개의 칸에 괴물이 숨어 있다. 터보는 게임을 시작할 때 괴물들이 어디 있는지 모르지만, 제 1 행과 제 2024 행에는 괴물이 존재하지 않고 다른 행에는 각각 정확히 한 마리의 괴물이 있으며, 각 열에는 최대 한 마리의 괴물이 있다는 것을 알고 있다.

터보는 여러 번의 시도를 통하여 제 1 행에서 제 2024 행으로 이동하고자 한다. 각각의 시도에서, 터보는 제 1 행의 어떤 칸에서도 시작할 수 있으며, 그 이후부터는 변을 공유하는 인접한 칸으로 계속 이동한다. (터보는 이전에 방문했던 칸을 다시 방문할 수 있다.) 만약 터보가 괴물이 있는 칸에 도달한다면, 그때의 시도는 끝나고, 제 1 행으로 돌아가서 새로운 시도를 할 수 있다. 괴물은 움직이지 않으며, 터보는 방문했던 칸의 괴물의 존재 여부를 기억할 수 있다. 만약 터보가 제 2024 행의 어떤 칸이든 도달한다면 그의 시도 및 게임은 끝난다.

괴물이 어디에 숨어 있든지 상관없이 터보가 n 번 이하의 시도로 제 2024 행에 도착할 수 있는 전략이 존재하는 가장 작은 n 을 구하여라.

문제 6. 유리수 전체의 집합을 \mathbb{Q} 라 하자. 함수 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 가 다음 조건을 만족할 때 f 를 “귀여운 함수”라 하자.

(조건) 모든 $x, y \in \mathbb{Q}$ 에 대하여,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{또는} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

다음 성질을 만족하는 정수 c 가 존재함을 보이고, 그러한 c 의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(성질) 임의의 귀여운 함수 f 에 대하여, $f(r) + f(-r)$ 꼴로 표현되는 서로 다른 유리수가 최대 c 개 있다.