tisdag, 16. juli 2024

Problem 1. Bestäm alla reella tal α sådana att för varje positivt heltal n är heltalet

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

en multipel av n. (Notera att $\lfloor z \rfloor$ betecknar det största heltal som är mindre än eller lika med z. Till exampel är $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ och $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Problem 2. Bestäm alla par (a, b) av positiva heltal för vilka det existerar positiva heltal g och N sådana att

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

för alla heltal $n \geqslant N$. (Notera att $\gcd(x, y)$ betecknar den största gemensamma delaren av heltalen x och y.)

Problem 3. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av positiva heltal, och låt N vara ett positivt heltal. Anta att för varje $n > N$ är talet a_n lika med antalet gånger talet a_{n-1} förekommer i listan $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Visa att åtminstone en av följderna $a_1, a_3, a_5, \ldots$ och $a_2, a_4, a_6, \ldots$ så småningom är periodisk. (En oändlig följd $b_1, b_2, b_3, \ldots$ är *så småningom periodisk* om det finns positiva heltal p och M sådana att $b_{m+p} = b_m$ för alla $m \geqslant M$.)

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

onsdag, 17. juli 2024

Problem 4. Låt ABC vara en triangel med $AB < AC < BC$. Låt ω vara den inskrivna cirkeln till triangeln ABC och låt I vara dess medelpunkt. Låt X vara punkten på linjen BC skild från C sådan att linjen genom X parallell med AC tangerar ω. Låt på samma sätt Y vara punkten på linjen BC skild från B sådan att linjen genom Y parallell med AB tangerar ω. Beteckna den andra skärningspunkten mellan AI och den omskrivna cirkeln till triangeln ABC med $P \neq A$. Låt K och L vara mittpunkterna på AC respektive AB. Visa att $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problem 5. Snigeln Turbo spelar ett spel på ett rutnät med 2024 rader och 2023 kolumner. I 2022 av rutorna finns det monster som gömt sig. Från början vet Turbo inte var monstren befinner sig, men han vet att det finns precis ett monster i varje rad med undantag för den första och den sista raden. Han vet också att det finns som mest ett monster i varje kolumn. Turbo gör ett antal försök att ta sig från den första raden till den sista. Vid varje försök väljer han att börja på någon ruta i den första raden och förflyttar sig sedan upprepat till en ruta med en gemensam sida. (Han får lov att återbesöka rutor som han besökt tidigare.) Om han hamnar på en ruta med ett monster så avslutas hans försök, och han transporteras tillbaka till den första raden för att påbörja ett nytt försök. Monstren förflyttar sig inte, och Turbo kommer ihåg för varje ruta han besökt huruvida den innehåller ett monster eller ej. Om han når en ruta i den sista raden så avslutas hans försök, och spelet är över. Bestäm det minsta talet n för vilket Turbo har en strategi som garanterar att han når sista raden på som mest n försök, oberoende av hur monstren är placerade.

Problem 6. Låt $\mathbb{Q}$ vara mängden av alla rationella tal. En funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ är *trevlig* om den har följande egenskap: för varje $x, y \in \mathbb{Q}$ så gäller minst en av likheterna

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{och} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Visa att det finns ett heltal c sådant att det för varje trevlig funktion f finns högst c olika rationella tal på formen $f(r) + f(-r)$ för något rationellt tal r, och bestäm det minsta möjliga sådana talet c.

Language: Swedish

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.