

سه شنبه ۲۳ جولای ۲۰۱۳

مسئله ۱. ثابت کنید برای هر زوج از اعداد صحیح مثبت k و n ، وجود دارند m_1, m_2, \dots, m_k عدد صحیح مثبت (نه لزوماً متفاوت) به طوری که

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

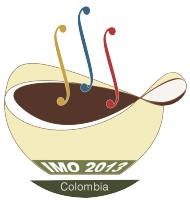
مسئله ۲. یک جای دهی از ۴۰۲۷ نقطه در صفحه، کلمبیایی خوانده می شود، اگر متشکل از ۲۰۱۳ نقطه قرمز و ۲۰۱۴ نقطه آبی باشد و هیچ سه نقطه‌ای از این جای دهی روی یک خط نباشند. با رسم تعدادی خط، صفحه به تعدادی ناحیه تقسیم می شود. یک آرایش از خطوط را برای یک جای دهی کلمبیایی، خوب می گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند:

- هیچ خطی از هیچ نقطه‌ای از جای دهی نگذرد.
- هیچ ناحیه‌ای شامل نقاط از هر دو رنگ نباشد.

کوچکترین مقدار k را بباید که برای هر جای دهی کلمبیایی از ۴۰۲۷ نقطه، یک آرایش خوب از k خط وجود داشته باشد.

مسئله ۳. فرض کنید دایره محاطی خارجی مثلث ABC مقابل به رأس A در نقطه‌ای A_1 به ضلع BC مماس باشد. نقاط B_1 روی AB و C_1 روی CA را به ترتیب مشابهًاً توسط دواير محاطی خارجی مقابل به رأس B و C تعریف می کیم. فرض کنید که مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد. ثابت کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC مقابل به رأس A دایره‌ای است که مماس بر پاره خط BC و امتداد AB از طرف B و امتداد AC از طرف C است. دواير محاطی خارجی مقابل به B و C مشابهًاً تعریف می شوند.



چهارشنبه ۲۴ جولای ۱۳۹۰

مسئله ۴. فرض کنید ABC یک مثلث حاده‌الزاویه با مرکز ارتفاعیه‌ی H باشد و فرض کنید W نقطه‌ای روی پاره خط BC غیر از B و C باشد. نقاط M و N به ترتیب پای ارتفاع‌های رسم شده از B و C هستند. دایره‌ی محیطی BWN را با ω_1 نمایش می‌دهیم. فرض کنید X نقطه‌ای روی ω_1 است که WX قطر ω_1 می‌باشد. مشابه‌اً، دایره‌ی محیطی CWM را با ω_2 نمایش می‌دهیم. فرض کنید Y نقطه‌ای روی ω_2 است که WY قطر ω_2 می‌باشد. ثابت کنید X , Y و H هم خط‌اند.

مسئله ۵. فرض کنید $\mathbb{Q}_{>}$ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_{>}$: f تابعی باشد که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$$(1) \text{ برای هر } x, y \in \mathbb{Q}_{>} : f(x)f(y) \geq f(xy)$$

$$(2) \text{ برای هر } x, y \in \mathbb{Q}_{>} : f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

$$(3) \text{ وجود دارد عدد گویای } a > 1 \text{، به طوری که } f(a) = a$$

$$\text{ثابت کنید برای هر } x \in \mathbb{Q}_{>} : f(x) = x$$

مسئله ۶. فرض کنید $n \geq 3$ عددی صحیح باشد و روی دایره‌ای $1 + n$ نقطه‌ی هم‌فاصله را در نظر بگیرید. همه‌ی برچسب‌گذاری‌های این نقاط را با اعداد $0, 1, \dots, n$ در نظر بگیرید که هر برچسب دقیقاً یک بار استفاده شده است. دو برچسب‌گذاری این‌گونه، یکی فرض می‌شوند، اگر یکی را بتوان از دیگری با یک دوران دایره به دست آورد. یک برچسب‌گذاری، زیبا خوانده می‌شود، اگر برای هر چهار برچسب $a < b < c < d$ که در آن $a+d = b+c$ وتر واصل نقاط با برچسب a و d و قطبی b و c هم‌دیگر را قطع نکنند.

فرض کنید M تعداد برچسب‌گذاری‌های زیبا باشد و N تعداد زوج‌های مرتب (x, y) از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که $x+y \leq n$ و اعداد x و y نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید

$$M = N + 1$$