Вівторок, 10 липня 2012 р.

Задача 1. Для трикутника ABC точка J є центром зовні вписаного кола напроти вершини A. Це зовні вписане коло дотикається до сторони BC у точці M і до прямих AB та AC у точках K та L відповідно. Прямі LM і BJ перетинаються у точці F, а прямі KM і CJ перетинаються у точці G. Нехай S — точка перетину прямих AF і BC, а точка T — точка перетину прямих AG і BC.

Доведіть, що точка M ділить відрізок ST навпіл.

(*Зовні вписане коло* трикутника ABC напроти вершини A — це коло, що дотикається до сторони BC і продовжень сторін AB і AC.)

Задача 2. Дано ціле число $n \geq 3$ і такі додатні дійсні числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$, що $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Доведіть, що

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Задача 3. Два гравці A та B грають у гру *Ти ж мене підманула.* Правила цієї гри залежать від двох натуральних чисел k та n, які відомі обом гравцям.

На початку гри A обирає натуральні числа x і N, для яких $1 \leq x \leq N$. Гравець A зберігає число x у таємниці, а число N правдиво повідомляє гравцю B. Гравець B після цього намагається отримати інформацію про x, задаючи гравцю A питання наступним чином: перед кожним питанням B вказує довільну множину S натуральних чисел (можливо, вже вказану в попередньому питанні) та питає A, чи належить x множині S. Гравець B може запитати стільки питань, скільки він захоче. На кожне задане B питання гравець A мусить одразу відповідати *так* чи *ні*, але їй дозволяється збрехати стільки разів, скільки вона забажає. Єдине обмеження — із будь-яких $k + 1$ послідовних відповідей принаймні одна має бути правдивою.

Після того, як B задав стільки запитань, скільки він уважав за потрібне, він мусить указати множину X з щонайбільше n натуральних чисел. Якщо x належить X, то B перемагає; інакше він програє. Доведіть, що:

1. Якщо $n \geq 2^k$, то B має виграшну стратегію.

2. Для довільного достатньо великого k знайдеться таке ціле число $n \geq 1.99^k$, що B не має виграшної стратегії.

Середа, 11 липня 2012 р.

Задача 4. Знайдіть усі такі функції $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, що для довільних цілих a, b, c, які задовольняють умову $a+b+c=0$, виконано рівність

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Тут $\mathbb{Z}$ позначає множину цілих чисел.)

Задача 5. Нехай ABC — трикутник, у якому $\angle BCA = 90^\circ$, D — основа висоти, проведеної з вершини C. Всередині відрізку CD взято точку X. Точка K на відрізку AX така, що $BK = BC$. Аналогічно, точка L на відрізку BX така, що $AL = AC$. Нехай M — точка перетину AL і BK.

Доведіть, що $MK = ML$.

Задача 6. Знайдіть всі натуральні числа n, для яких існують такі невід'ємні цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів