

Teisipäev, 15. juuli 2025

Ülesanne 1. Nimetame sirget tasandil *päikseliseks*, kui see **ei ole** paralleelne ei x -telje, y -telje ega sirgega $x + y = 0$.

Olgu antud täisarv $n \geq 3$. Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud k , mille korral leiduvad tasandil n erinevat sirget, mis rahuldavad mõlemat järgmist tingimust:

- kõigi positiivsete täisarvude a ja b korral, kus $a + b \leq n + 1$, asub punkt (a, b) vähemalt ühel sirgetest;
- n sirgest on täpselt k päikselised.

Ülesanne 2. Olgu ringjooned Ω ja Γ vastavalt keskpunktidega M ja N , kusjuures ringjoone Ω raadius on väiksem kui ringjoone Γ raadius. Ringjooned Ω ja Γ lõikuvad kahes eri punktis A ja B . Sirge MN lõikub ringjoonega Ω punktis C ja ringjoonega Γ punktis D nii, et punktid C , M , N ja D asuvad sirgel selles järjekorras. Olgu P kolmnurga ACD ümberringjoone keskpunkt. Sirge AP lõikub ringjoonega Ω uuesti punktis $E \neq A$. Sirge AP lõikub ringjoonega Γ uuesti punktis $F \neq A$. Olgu H kolmnurga PMN kõrguste lõikepunkt.

Tõesta, et sirge, mis läbib punkti H ning on paralleelne sirgega AP , puutub kolmnurga BEF ümberringjoont.

Ülesanne 3. Olgu \mathbb{N} positiivsete täisarvude hulk. Funktsiooni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nimetatakse *bonzaks*, kui

$$f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}$$

kõigi positiivsete täisarvude a ja b korral.

Leia vähim reaalarvuline konstant c , mille korral $f(n) \leq cn$ kõigi bonza funktsioonide f ja kõigi positiivsete täisarvude n jaoks.

Kolmapäev, 16. juuli 2025

Ülesanne 4. Positiivse täisarvu N *pärisjagajaks* nimetame arvu N positiivset jagajat, mis ei ole arv N ise.

Lõpmatus positiivsete täisarvude jadas a_1, a_2, \dots on igal liikmel vähemalt kolm pärisjagajat. Iga $n \geq 1$ korral on arv a_{n+1} arvu a_n kolme suurima pärisjagaja summa.

Leia kõik võimalikud a_1 väärtused.

Ülesanne 5. Andres ja Birgit mängivad *Austraalia mängu*, mille reeglid sõltuvad positiivse reaalarvu λ väärtusest. Mõlemad mängijad teavad λ väärtust. Mängu n -dal käigul (esimesel käigul $n = 1$) toimub järgnev:

- Kui n on paaritu, siis valib Andres sellise mittenegatiivse reaalarvu x_n , et

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Kui n on paaris, siis valib Birgit sellise mittenegatiivse reaalarvu x_n , et

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Kui mängija ei saa sobilikku arvu x_n valida, siis mäng lõppeb ning teine mängija võidab. Kui mäng kestab igavesti, siis ei võida kumbki mängija. Mõlemad mängijad teavad kõiki mängu jooksul valitud arve.

Leia kõik λ väärtused, mille korral leidub Andresel võitev strateegia, ning kõik λ väärtused, mille korral leidub Birgitil võitev strateegia.

Ülesanne 6. Vaatleme 2025×2025 ruudustikku. Matilda tahab ruudustikule asetada mõned ristkülikud (võib-olla erinevate mõõtmetega) selliselt, et iga ristküliku iga külg asub täielikult mõnel ruudustiku joonel ning iga ühikruut on kaetud ülimalt ühe ristkülikuga.

Leia vähim arv ristkülikuid, mida Matilda peab ruudustikule asetama, et ruudustiku igas reas ja igas veerus oleks täpselt üks ühikruut, mida ei kata ükski ristkülik.