Понеделник, 9 юли 2018 г.

Задача 1. Нека Γ е описаната около остроъгълен триъгълник ABC окръжност. Точките D и E лежат съответно върху отсечките AB и AC така, че $AD = AE$. Симетралите на BD и CE пресичат малките дъги AB и AC от Γ съответно в точки F и G. Да се докаже, че правите DE и FG са успоредни или съвпадат.

Задача 2. Да се намерят всички цели числа $n \geq 3$, за които съществуват реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, такива, че $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 3. Равностранен триъгълен масив от числа се нарича *триъгълник анти-Паскал*, ако притежава следното свойство: всяко число, което не е в последния ред, е равно на абсолютната стойност на разликата на двете числа непосредствено под него. Пример за триъгълник анти-Паскал с четири реда с целите числа от 1 до 10 е показан на фигурата.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Съществува ли триъгълник анти-Паскал с 2018 реда, който съдържа всяко цяло число от 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Вторник, 10 юли, 2018 г.

Задача 4. Точка (x, y) в равнината, където x и y са естествени числа, ненадминаващи 20, се нарича *възел*.

Първоначално всичките 400 възела са незаети. Мария и Иван последователно правят ходове, поставяйки камъни във възлите, като Мария започва първа. Когато Мария е на ход, тя поставя нов червен камък в незает възел така, че разстоянието между кои да е два възела, заети от червени камъни, да не е равно на $\sqrt{5}$. Когато Иван е на ход, той поставя нов син камък в незает възел. (Възел, зает от син камък, може да е на всякакво разстояние от зает възел.) Играта свършва, когато някой от играчите не може да направи ход.

Да се намери максималното число K, за което Мария може да постави поне K червени камъка, както и да играе Иван.

Задача 5. Нека $a_1, a_2, \dots$ е безкрайна редица от естествени числа. Известно, че съществува цяло число $N > 1$, такова, че за всяко $n \geq N$ числото

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

е цяло. Да се докаже, че съществува естествено число M, такова, че $a_m = a_{m+1}$ за всяко $m \geq M$.

Задача 6. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X е вътрешна за $ABCD$ и е такава, че

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{и} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Да се докаже, че $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.