Çərşəmbə axşamı, 10 iyul 2012.

Məsələ 1. ABC üçbucağının BC tərəfinə M nöqtəsində xaricdən toxunan çevrə eyni zamanda bu üçbucağın AB və AC tərəflərinin uzantılarına uyğun olaraq K və L nöqtələrində toxunur. Həmin bu çevrənin mərkəzi J nöqtəsi olsun. LM və BJ düz xətləri F nöqtəsində, KM və CJ düz xətləri isə G nöqtəsində kəsişirlər. Həmçinin AF və BC düz xətləri S nöqtəsində, AG və BC düz xətləri isə T nöqtəsində kəsişirlər.

İsbat edin ki, M nöqtəsi ST parçasının orta nöqtəsidir.

(AB və AC tərəflərinin *uzantıları* dedikdə başlanğıcı A nöqtəsi olan AB və AC şüaları nəzərdə tutulmuşdur).

Məsələ 2. Məlumdur ki, $n \geq 3$ tam ədədi və $a_2, a_3, \ldots, a_n$ müsbət həqiqi ədədləri üçün $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1$ şərti ödənilir. İsbat edin ki,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Məsələ 3. İki oyunçu A və B "*ƏDƏDİ TAP GÖRƏK*" oyununu oynayırlar. Bu oyunun qaydası iki müsbət tam k və n ədədlərindən asılıdır. Belə ki, bu ədədlər hər iki oyunçuya məlumdur.

Oyunun əvvəlində A oyunçu elə x və N ədədlərini seçir ki, $1 \leq x \leq N$. A oyunçu x ədədini sirr olaraq saxlayır, lakin N ədədini dəqiq düzgün olaraq B oyunçuya söyləyir. Bundan sonra B oyunçu A oyunçudan x ədədi haqqında məlumat toplamaq üçün suallar verir: hər dəfə B oyunçu müsbət tam ədədlərdən ibarət bir S çoxluğunu müəyyən edir (ola bilər ki, bu çoxluq əvvəlki suallarda da göstərilmiş olsun) və A oyunçudan x ədədinin həmin S çoxluğuna daxil olub olmadığını soruşur. B oyunçu isdədiyi qədər sual verə bilər. B oyunçunun hər bir sualına A oyunçu o anda ya *bəli* ya da *xeyir* cavabını verməlidir. Bu halda A oyunçu istədiyi qədər yalan danışa bilər, sadəcə bir şərt var ki, $k+1$ sayda ardıcıl cavabların hər hansı birində heç olmazsa bir cavab düzgün olmalıdır.

B oyunçu istədiyi qədər sual verdikdən sonra, elementlərinin sayı n-dən çox olmayan müsbət tam ədədlərdən ibarət hər hansı bir X çoxluğunu müəyyən edir. Əgər x ədədi həmin X çoxluğuna daxildirsə, onda B oyunçu qalib gəlir; əks halda B oyunçu oyunu uduzur. İsbat edin ki,

1. Əgər $n \geq 2^k$ olarsa, onda B oyunçu qələbəni özü üçün qarantiya edə bilər yəni qələbədən əmin ola bilər.
2. Hər bir mümkün qədər böyük k ədədi üçün elə bir $n \geq 1{,}99^k$ ədədi tapılar ki, bu halda B oyunçu qələbəni özü üçün qarantiya edə bilməz, yəni qələbədən əmin olmaz.

İmtahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir.

Çərşəmbə, 11 iyul 2012.

Məsələ 4. Bütün a, b, c tam ədədləri üçün $a+b+c=0$.

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

şərtini ödəyən bütün $f: Z \to Z$ funksiyalarını müəyyən edin.

(Z - tam ədədlər çoxluğudur).

Məsələ 5. ABC üçbucağında $\angle BCA=90^\circ$. Bu üçbucağın C təpəsindən endirilmiş hündürlüyün oturacağı D nöqtəsi olsun. CD parçası üzərində C və D nöqtələrindən fərqli X nöqtəsi götürülmüşdür. AX parçası üzərində K nöqtəsi elə seçilmişdir ki, $BK=BC$. Eyni qayda ilə BX parçası üzərində L nöqtəsi elə seçilmişdir ki, $AL=AC$ olsun. Tutaq ki, AL və BK düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi M olsun.

İsbat edin ki, $MK=ML$.

Məsələ 6. Elə bütün müsbət tam n ədədlərini tapın ki, bu ədədlər üçün

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$$

şərtini ödəyən mənfi olmayan tam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ədədləri mövcüddur.

İmtahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir