Montag, 21. September 2020

Aufgabe 1. Man betrachte ein konvexes Viereck $ABCD$. Der Punkt P liegt im Inneren von $ABCD$. Es gelten die folgenden Verhältnisgleichungen:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Man beweise, dass sich die folgenden drei Geraden in einem Punkt treffen: die inneren Winkelhalbierenden der Winkel $\angle ADP$ und $\angle PCB$ sowie die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Aufgabe 2. Die reellen Zahlen a, b, c, d erfüllen $a \geq b \geq c \geq d > 0$ und $a + b + c + d = 1$. Man beweise, dass

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Aufgabe 3. Gegeben seien $4n$ Steine mit den Gewichten $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Jeder Stein hat eine von n Farben, und es gibt vier Steine in jeder Farbe. Man zeige, dass die Steine so auf zwei Haufen verteilt werden können, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Die beiden Haufen haben gleiches Gesamtgewicht.
- Jeder Haufen enthält zwei Steine jeder Farbe.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 22. September 2020

Aufgabe 4. Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl. An einem Berghang befinden sich n^2 Stationen, alle auf unterschiedlichen Höhen. Zwei Seilbahngesellschaften A und B betreiben jeweils k Seilbahnen; jede Seilbahn führt von einer der Stationen zu einer höhergelegenen (ohne Zwischenhalt). Die k Seilbahnen von A beginnen an k verschiedenen Punkten und enden an k verschiedenen Punkten, und wenn eine Seilbahn an einem höheren Punkt beginnt als eine andere, dann endet sie auch an einem höheren Punkt. Dieselben Bedingungen gelten auch für B. Wir sagen, dass zwei Stationen von einer Gesellschaft *verbunden* werden, wenn man von der niedrigeren Station ausgehend die höhere Station durch Fahrten mit einer oder mehreren Seilbahnen dieser Gesellschaft erreichen kann (keine anderen Bewegungen zwischen Stationen sind erlaubt).

Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, für die man garantieren kann, dass es zwei Stationen gibt, die von beiden Gesellschaften verbunden werden.

Aufgabe 5. Gegeben sei ein Satz von $n > 1$ Karten. Auf jeder Karte steht eine positive ganze Zahl. Der Kartensatz hat die Eigenschaft, dass für jedes Paar von Karten das arithmetische Mittel der Zahlen auf diesen Karten zugleich das geometrische Mittel der Zahlen auf einer Auswahl von einer oder mehreren Karten ist.

Für welche n folgt daraus, dass die Zahlen auf den Karten alle gleich sind?

Aufgabe 6. Man zeige, dass es eine positive Konstante c gibt, für die die folgende Aussage zutrifft:

Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl und $\mathcal{S}$ eine Menge von n Punkten in der Ebene, für die der Abstand zwischen je zwei verschiedenen Punkten aus $\mathcal{S}$ mindestens 1 beträgt. Dann gibt es eine Gerade ℓ, die $\mathcal{S}$ spaltet und für die jeder Punkt aus $\mathcal{S}$ mindestens den Abstand $cn^{-1/3}$ zu ℓ hat.

(Eine Gerade ℓ *spaltet* eine Punktmenge $\mathcal{S}$, wenn es eine Strecke zwischen zwei Punkten aus $\mathcal{S}$ gibt, die ℓ schneidet.)

Hinweis. Falls eine schwächere Aussage mit $cn^{-\alpha}$ anstelle von $cn^{-1/3}$ bewiesen wird, können abhängig vom Wert der Konstanten $\alpha > 1/3$ Punkte vergeben werden.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.