Вівторок, 16 липня 2019 р.

Задача 1. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такі, що для будь-яких цілих чисел a і b справджується рівність

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Задача 2. У трикутнику ABC точка A_1 лежить на відрізку BC, а точка B_1 лежить на відрізку AC. Нехай P і Q — точки на відрізках AA_1 та BB_1 відповідно, такі, що пряма PQ паралельна до AB. Точку P_1 вибрано на прямій PB_1 так, що B_1 знаходиться строго між P і P_1, при цьому $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогічно, точку Q_1 вибрано на прямій QA_1 так, що A_1 знаходиться строго між Q і Q_1, при цьому $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Доведіть, що точки P, Q, P_1 і Q_1 належать одному колу.

Задача 3. У соціальній мережі 2019 користувачів. Деякі користувачі товаришують з деякими іншими, при цьому якщо користувач A є другом користувача B, то B також є другом A. Зміни наступного типу здійснюються послідовно, по одній зміні за раз:

> обираються три користувачі A, B та C такі, що A є другом для B та C, але B і C не є друзями; після цього B та C стають друзями, але A перестає бути другом для B і для C. В усіх інших парах відношення не змінюються.

Спочатку 1010 користувачів мають по 1009 друзів кожний, а 1009 користувачів мають по 1010 друзів кожний. Доведіть, що існує послідовність змін, після яких кожен користувач матиме не більше одного друга.

Середа, 17 липня 2019 р.

Задача 4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) такі, що

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Задача 5. Банк міста Бат виробляє монети з літерою H на одному боці та літерою T на іншому боці. Гаррі виклав n таких монет у ряд зліва направо. Він послідовно виконує таку операцію: якщо в ряду рівно $k > 0$ монет лежать догори літерою H, то він перевертає k-ту зліва монету; інакше усі монети лежать догори літерою T і він зупиняється. Наприклад, якщо $n = 3$ та процес починається з конфігурації THT, то послідовність операцій матиме такий вигляд: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, тобто процес зупиниться після трьох операцій.

(a) Доведіть, що для будь-якої початкової конфігурації процес зупиниться після скінченної кількості операцій.

(b) Для кожної початкової конфігурації C позначимо за $L(C)$ кількість операцій, після яких процес зупиниться. Наприклад, $L(THT) = 3$ та $L(TTT) = 0$. Знайдіть середнє арифметичне значень $L(C)$, якщо C пробігає всі 2^n можливих початкових конфігурацій.

Задача 6. Нехай I — центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC, та $AB \neq AC$. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається сторін BC, CA і AB у точках D, E та F відповідно. Пряма, що проходить через D перпендикулярно до EF, вдруге перетинає коло ω у точці R. Пряма AR вдруге перетинає коло ω у точці P. Описані кола трикутників PCE та PBF вдруге перетинаються в точці Q.

Доведіть, що прямі DI та PQ перетинаються на прямій, що проходить через A перпендикулярно до AI.

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів