International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Georgian**

Day: **1**

ორშაბათი, 18 ივლისი, 2011 წელი

ამოცანა 1. მოცემული $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ სიმრავლისათვის, რომელიც შედგება ოთხი განსხვავებული მთელი დადებითი რიცხვისგან, s_A-თი აღვნიშნოთ ჯამი $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. ვთქვათ n_A აღნიშნავს ისეთ (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$ წყვილთა რაოდენობას, რომ s_A იყოფა $a_i + a_j$ -ზე.
იპოვეთ ყველა სიმრავლე A, შედგენილი ოთხი განსხვავებული მთელი დადებითი რიცხვისგან, რომ n_A ღებულობს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს შორის მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამოცანა 2. ვთქვათ $\mathcal{S}$ არის სიბრტყეზე მდებარე წერტილთა სასრული სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ორ წერტილს მაინც. ცნობილია, რომ $\mathcal{S}$-ის არცერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. *ქარის წისქვილი* ვუწოდოთ შემდეგ პროცესს. პროცესი იწყება ℓ წრფით, რომელიც გადის $\mathcal{S}$ სიმრავლის მხოლოდ ერთ $P \in \mathcal{S}$ წერტილზე. წრფე იწყებს ბრუნვას P *ბრუნვის ცენტრის* გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მანამ, სანამ პირველად არ შეხვდება $\mathcal{S}$ სიმრავლის წერტილს. ეს წერტილი, აღვნიშნოთ იგი Q-თი, ხდება ახალი ბრუნვის ცენტრი და წრფე განაგრძობს ბრუნვას ისევ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით Q წერტილის გარშემო მანამ, სანამ არ შეხვდება $\mathcal{S}$ სიმრავლის წერტილს. ეს პროცესი გრძელდება უსასრულოდ და ყოველთვის ბრუნვის ცენტრს წარმოადგენს $\mathcal{S}$ სიმრავლის წერტილი.
დაამტკიცეთ, რომ შეგვიძლია ავირჩიოთ $\mathcal{S}$ სიმრავლის წერტილი P და მასზე გამავალი წრფე ℓ ისე, რომ ქარის წისქვილი, რომელიც დაიწყება ℓ წრფით, გამოიყენებს $\mathcal{S}$ სიმრავლის ყოველ წერტილს, როგორც ბრუნვის ცენტრს, უსასრულოდ ბევრჯერ.

ამოცანა 3. ვთქვათ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია მნიშვნელობებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ისეთი, რომ ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = 0$ ყოველი $x \leq 0$.

language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Georgian**

Day: **2**

სამშაბათი, 19 ივლისი, 2011 წელი

ამოცანა 4. ვთქვათ $n > 0$ არის მთელი რიცხვი. მოცემულია თეფშებიანი სასწორი და n ცალი გირი შემდეგი მასებით $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. ყველა გირი უნდა დავდოთ სასწორზე რიგ-რიგობით, ისე რომ სასწორის მარჯვენა თეფში არცერთი დადების შემდეგ არ უნდა იყოს მძიმე ვიდრე სასწორის მარცხენა თეფში. ყოველ ნაბიჯზე ვირჩევთ ერთ გირს იმ გირებიდან, რომლებიც ჯერ არ დაგვიდევს სასწორზე და ვდებთ მას სასწორის ან მარცხენა თეფშზე ან მარჯვენა თეფშზე. დადებას ვაგრძელებთ მანამდე, სანამ ყველა გირი არ აღმოჩნდება სასწორზე.
განსაზღვრეთ რამდენი გზით შეგვიძლია ამის გაკეთება.

ამოცანა 5. ვთქვათ f არის მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეში. ცნობილია, რომ ყოველი მთელი m და n რიცხვებისათვის $f(m) - f(n)$ იყოფა $f(m-n)$-ზე. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი მთელი m და n რიცხვებისათვის, რომელთათვისაც $f(m) \le f(n)$, $f(n)$ რიცხვი იყოფა $f(m)$-ზე.

ამოცანა 6. ვთქვათ ABC მახვილკუთხა სამკუთხედია, ხოლო Γ მასზე შემოხაზული წრეწირია. მოცემულია ℓ წრფე, რომელიც წარმოადგენს Γ წრეწირის მხებს. ვთქვათ ℓ_a, ℓ_b და ℓ_c წრფეები არიან ℓ წრფის სიმეტრიული წრფეები (სარკული ანარეკლები) შესაბამისად BC, CA და AB, წრფეების მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ ℓ_a, ℓ_b და ℓ_c წრფეებით შედგენილ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეხება Γ წრეწირს.

language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით