Rabu, 7 Julai 2010

Soalan 1. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehinggakan kesamaan

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

berlaku untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. (Di sini $\lfloor z \rfloor$ melambangkan integer terbesar yang kurang daripada atau sama dengan z.)

Soalan 2. Katakan I pusat dalam bagi segitiga ABC dan katakan Γ bulatan lilit baginya. Katakan garisan AI memotong Γ semula pada titik D. Katakan E suatu titik di atas lengkok $\widehat{BDC}$ dan F suatu titik di atas sisi BC sehinggakan

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Akhir sekali, katakan G titik tengah bagi tembereng garis IF. Buktikan bahawa garisan DG dan EI bertemu pada Γ.

Soalan 3. Katakan $\mathbb{N}$ set integer positif. Tentukan semua fungsi $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehinggakan

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

adalah suatu kuasa dua sempurna untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

Masa: 4 jam 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah

Khamis, 8 Julai 2010

Soalan 4. Katakan P suatu titik di dalam segitiga ABC. Garisan AP, BP dan CP masing-masing memotong bulatan lilit Γ bagi segitiga ABC semula pada titik K, L dan M. Tangen kepada Γ pada titik C bertemu garisan AB pada titik S. Andaikan bahawa $SC = SP$. Buktikan bahawa $MK = ML$.

Soalan 5. Setiap satu daripada enam kotak $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ mengandungi satu syiling pada awalnya. Ada dua jenis operasi yang dibenarkan:

Jenis 1: Pilih suatu kotak yang tidak kosong B_j dengan $1 \leq j \leq 5$. Buang satu syiling daripada B_j dan tambah dua syiling kepada B_{j+1}.

Jenis 2: Pilih suatu kotak yang tidak kosong B_k dengan $1 \leq k \leq 4$. Buang satu syiling daripada B_k dan tukarkan kandungan (yang mungkin kosong) bagi kotak B_{k+1} dan B_{k+2}.

Tentukan sama ada wujud suatu jujukan operasi yang terhingga, yang menyebabkan kotak B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 menjadi kosong, dan kotak B_6 mengandungi tepat $2010^{2010^{2010}}$ syiling. (Perhatikan bahawa $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Soalan 6. Katakan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suatu jujukan nombor nyata positif. Andaikan bahawa untuk suatu integer positif s,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

untuk semua $n > s$. Buktikan bahawa wujud integer positif ℓ dan N, dengan $\ell \leq s$ dan sehinggakan $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ untuk semua $n \geq N$.

Masa: 4 jam 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah