ponedeljek, 11. julij 2022

Naloga 1. Banka v Oslu je izdala dva tipa kovancev: aluminijaste (označene z A) in bronaste (označene z B). Meta ima n aluminijastih kovancev in n bronastih kovancev, ki jih je razporedila v vrsto v nekem poljubnem začetnem vrstnem redu. *Niz* je katerokoli podzaporedje zaporednih kovancev istega tipa. Za dano fiksno naravno število $k \leqslant 2n$ Meta ponavljajoče izvaja naslednjo operacijo: vzame najdaljši niz, ki vsebuje k-ti kovanec z leve, in premakne vse kovance iz tega niza na levo stran vrste. Na primer, za $n = 4$ in $k = 4$ ter začetni vrstni red $AABBBABA$ bi Meta izvedla naslednje operacije

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Poišči vse pare (n, k), pri čemer je $1 \leqslant k \leqslant 2n$, tako da je za vsak začetni vrstni red v nekem trenutku vseh n skrajno levih kovancev istega tipa.

Naloga 2. Označimo z $\mathbb{R}^+$ množico pozitivnih realnih števil. Poišči vse take funkcije $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, za katere za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ obstaja natanko en $y \in \mathbb{R}^+$, tako da velja

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Naloga 3. Naj bo k naravno število in naj bo S končna množica lihih praštevil. Dokaži, da obstaja največ en način (do rotacije in zrcaljenja natančno), na katerega lahko razporedimo elemente množice S na krožnico, tako da bo zmnožek katerihkoli sosednjih števil oblike $x^2 + x + k$ za neko naravno število x.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

torek, 12. julij 2022

Naloga 4. Naj bo $ABCDE$ tak konveksen petkotnik, da je $|BC| = |DE|$. Privzemimo, da obstaja točka T v notranjosti petkotnika $ABCDE$, tako da je $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ in $\angle ABT = \angle TEA$. Premica AB seka premico CD v točki P in premico CT v točki Q. Privzemimo, da so točke P, B, A, Q razporejene na premici v tem vrstnem redu. Premica AE seka premico CD v točki R in premico DT v točki S. Privzemimo, da so točke R, E, A, S razporejene na premici v tem vrstnem redu. Dokaži, da točke P, S, Q in R ležijo na krožnici.

Naloga 5. Poišči vse trojice (a, b, p) naravnih števil, tako da je p praštevilo in

$$a^p = b! + p.$$

Naloga 6. Naj bo n naravno število. *Nordijski kvadrat* je preglednica velikosti $n \times n$, v kateri so razporejena vsa števila od 1 do n^2, tako da je v vsakem polju preglednice natanko eno število. Polji sta sosednji, če imata skupno stranico. Vsako tako polje, ki je sosednje samo s polji, v katerih so števila, ki so večja od števila v tem polju, se imenuje *dolina*. *Vzpon* je zaporedje enega ali več polj, tako da velja:

(i) prvo polje v zaporedju je dolina,

(ii) vsako naslednje polje v zaporedju je sosednje predhodnemu polju in

(iii) števila v poljih zaporedja si sledijo v naraščajočem vrstnem redu.

V odvisnosti od števila n poišči najmanjše možno število vseh vzponov v nordijskem kvadratu.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.