utorak, 15. srpnja 2025

Zadatak 1. Kažemo da je pravac u ravnini *sunčan* ako **nije** usporedan ni s x-osi, ni s y-osi, ni s pravcem $x + y = 0$.

Neka je $n \geqslant 3$ zadani cijeli broj. Odredi sve nenegativne cijele brojeve k za koje postoji n različitih pravaca u ravnini koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

- za sve pozitivne cijele brojeve a i b takve da je $a+b \leqslant n+1$, točka (a, b) pripada barem jednom od tih pravaca; i
- točno k od tih n pravaca su sunčani.

Zadatak 2. Neka su Ω i Γ kružnice sa središtima M i N, redom, tako da je polumjer kružnice Ω manji od polumjera kružnice Γ. Pretpostavimo da se kružnice Ω i Γ sijeku u dvije različite točke A i B. Pravac MN siječe Ω u C i Γ u D tako da točke C, M, N i D leže na pravcu u tom redoslijedu. Neka je P centar opisane kružnice trokuta ACD. Pravac AP siječe Ω po drugi put u $E \neq A$. Pravac AP siječe Γ po drugi put u $F \neq A$. Neka je H ortocentar trokuta PMN.

Dokazati da pravac kroz H usporedan s AP dodiruje opisanu kružnicu trokuta BEF.

(*Ortocentar* trokuta je točka presjeka njegovih visina.)

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{N}$ skup pozitivnih cijelih brojeva. Kažemo da je funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dobra* ako

$$f(a) \ \text{ dijeli } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

za sve pozitivne cijele brojeve a i b.

Odredi najmanju realnu konstantu c takvu da za sve dobre funkcije f i sve pozitivne cijele brojeve n vrijedi $f(n) \leqslant cn$.

srijeda, 16. srpnja 2025

Zadatak 4. *Pravi djelitelj* pozitivnog cijelog broja N je pozitivan djelitelj broja N različit od N.

Svi članovi beskonačnog niza $a_1, a_2, \ldots$ su pozitivni cijeli brojevi s barem tri prava djelitelja. Za svaki $n \geqslant 1$, broj a_{n+1} je jednak zbroju tri najveća prava djelitelja broja a_n.

Odredi sve moguće vrijednosti broja a_1.

Zadatak 5. Ana i Boris igraju igru čija pravila ovise o pozitivnom realnom broju λ koji oba igrača znaju. U n-tom potezu (počevši od $n = 1$) igra se odvija na sljedeći način:

- Ako je n neparan, Ana bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ako je n paran, Boris bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ako igrač ne može izabrati takav broj x_n, igra završava i njegov protivnik pobjeđuje. Ako se igra nastavlja unedogled, nijedan igrač ne pobjeđuje. Oba igrača znaju vrijednosti svih odabranih brojeva.

Odredi sve vrijednosti λ za koje Ana ima pobjedničku strategiju i sve vrijednosti λ za koje Boris ima pobjedničku strategiju.

Zadatak 6. Promatrajmo ploču dimenzije 2025×2025 sastavljenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi na ploču postaviti određen broj pravokutnika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravokutnika leži na rubovima jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravokutnikom.

Odredi minimalni broj pravokutnika koje Matilda treba postaviti tako da svaki redak i svaki stupac ploče sadrži točno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva ni jedan pravokutnik.