субота, 8 липня 2023

Задача 1. Знайдіть усі складені натуральні числа $n > 1$ які задовольняють такій умові: якщо $d_1, d_2, \ldots, d_k$ – це усі натуральні дільники числа n, причому $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, то $d_{i+1} + d_{i+2}$ ділиться націло на d_i для всіх $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Задача 2. Дано гострокутний трикутник ABC, у якому $AB < AC$. Нехай Ω – описане коло трикутника ABC. Точка S – середина дуги CB кола Ω, що містить точку A. Перпендикуляр з точки A на пряму BC перетинає пряму BS в точці D та вдруге перетинає коло Ω в точці $E \neq A$. Пряма, що проходить через точку D паралельно прямій BC, перетинає пряму BE в точці L. Позначимо описане коло трикутника BDL через ω. Нехай кола ω та Ω вдруге перетинаються в точці $P \neq B$.
Доведіть, що дотична до кола ω, яка проведена з точки P, перетинає пряму BS в точці, що належить внутрішній бісектрисі кута $\angle BAC$.

Задача 3. Для кожного натурального $k \geqslant 2$, знайдіть усі нескінченні послідовності натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots$, для яких існує многочлен P вигляду $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, де $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ – цілі невід'ємні числа, такий що

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$.

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

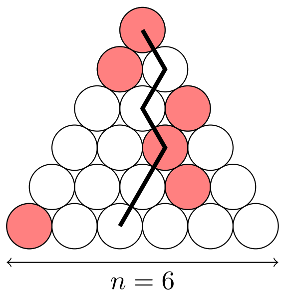
неділя, 9 липня 2023

Задача 4. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ – це попарно різні додатні дійсні числа, такі що

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

є цілим для всіх $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Доведіть, що $a_{2023} \geqslant 3034$.

Задача 5. Дано натуральне число n. *Японський трикутник* складається з $1 + 2 + \cdots + n$ кіл, розташованих у формі рівностороннього трикутника так, що для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$, i рядок містить i-й кіл, та рівно одне з них пофарбовано у червоний колір. *Шляхом ніндзя* в японсьому трикутнику назвемо довільну послідовність з n кіл, що отримується таким чином: починаємо з єдиного кола у верхньому ряду і послідовно спускаємось з кола до одного з двох кіл, що знаходяться одразу під даним та закінчуємо нижньому ряду. На рисунку зображено приклад японського трикутника для $n = 6$ разом із прикладом шляху ніндзя для цього трикутника, який містить два червоних кола.



В залежності від n, знайдіть найбільше натуральне k таке, що в довільному японському трикутнику існує шлях ніндзя, який містить мінімум k червоних кіл.

Задача 6. Дано рівносторонній трикутник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 – внутрішні точки трикутника ABC такі, що $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, та

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Нехай прямі BC_1 та CB_1 перетинаються в точці A_2, прямі CA_1 та AC_1 перетинаються в точці B_2, і прямі AB_1 та BA_1 перетинаються в точці C_2.
Доведіть, що якщо трикутник $A_1B_1C_1$ різносторонній, то перетином описаних кіл трикутників AA_1A_2, BB_1B_2 та CC_1C_2 є рівно дві точки.

(Зауваження: різностороннім називається трикутник, сторони якого мають попарно різні довжини.)

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.