*Antradienis, 2012-07-10*

**1 uždavinys.** Apskritimas, kurio centras yra taške $J$ ir kuris yra trikampio $ABC$ išorėje, liečia kraštinę $BC$ taške $M$, liečia spindulį $AB$ taške $K$ (už taško $B$) ir liečia spindulį $AC$ taške $L$ (už taško $C$). Tiesės $LM$ ir $BJ$ kertasi taške $F$, o tiesės $KM$ ir $CJ$ kertasi taške $G$. Tegul $S$ yra tiesių $AF$ ir $BC$ susikirtimo taškas, o $T$ – tiesių $AG$ ir $BC$ susikirtimo taškas.

Įrodykite, kad $M$ yra atkarpos $ST$ vidurio taškas.

**2 uždavinys.** Tegul $n \geq 3$ yra sveikasis skaičius ir tegul $a_2, a_3, \ldots, a_n$ yra tokie teigiami realieji skaičiai, kad $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Įrodykite, kad

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**3 uždavinys.** Du žaidėjai $A$ ir $B$ žaidžia žaidimą. Žaidimo taisyklės priklauso nuo dviejų natūraliųjų skaičių $k$ ir $n$, kuriuos abu žaidėjai žino.

Pradžioje žaidėjas $A$ pasirenka du natūraliuosius skaičius $x$ ir $N$, kur $1 \leq x \leq N$. Jis teisingai pasako žaidėjui $B$ skaičių $N$, bet nepasako skaičiaus $x$. Norėdamas sužinoti informaciją apie skaičių $x$ žaidėjas $B$ gali uždavinėti klausimus žaidėjui $A$. Kiekvieną kartą klausdamas žaidėjas $B$ pasirenka bet kurį natūraliųjų skaičių aibės poaibį $S$ ir klausia ar skaičius $x$ priklauso $S$. Jis gali užduoti tiek klausimų, kiek tik jis nori, be to, gali užduoti tokį patį klausimą keletą kartų ir kada tik nori. Žaidėjas $A$ visada turi iš karto atsakyti į kiekvieną žaidėjo $B$ klausimą *taip* arba *ne*. Atsakydamas į $B$ klausimą $A$, jeigu tik nori, gali ir pameluoti, tačiau iš bet kurių jo $k+1$ iš eilės pasakyto atsakymo bent vienas turi būti teisingas.

Žaidėjas $B$ gali užduoti kiek tik nori klausimų, o baigęs klausinėti jis turi nurodyti kokią nors aibę $X$, sudarytą iš daugiausiai $n$ natūraliųjų skaičių. Jeigu skaičius $x$ priklauso tai aibei $X$, tai $B$ laimi, o priešingu atveju pralaimi. Įrodykite, kad

1. Jei $n \geq 2^k$, tai $B$ visada gali laimėti.

2. Koks bebūtų pakankamai didelis natūralusis skaičius $k$, egzistuoja toks natūralusis skaičius $n \geq 1.99^k$, kad $B$ negali garantuotai laimėti.



*Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių*
*Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais*

*Trečiadienis, 2011-07-11*

**4 uždavinys.** Raskite visas funkcijas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kurioms su visais sveikaisiais skaičiais $a, b, c$, tenkinančiais sąlygą $a+b+c=0$, galioja lygybė

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Čia $\mathbb{Z}$ žymi visų sveikųjų skaičių aibę.)

**5 uždavinys.** Duotas trikampis $ABC$, kuriame $\angle BCA = 90^0$. Tegul $D$ yra aukštinės, einančios iš viršūnės $C$ į kraštinę $AB$, pagrindas. Taškas $X$ yra atkarpos $CD$ vidinis taškas. Tegul $K$ yra toks atkarpos $AX$ taškas, kad $BK = BC$. Analogiškai, tegul $L$ yra toks atkarpos $BX$ taškas, kad $AL = AC$. Tegul $M$ yra tiesių $AL$ ir $BK$ susikirtimo taškas.

Įrodykite, kad $MK = ML$.

**6 uždavinys.** Raskite visus natūraliuosius skaičius $n$, su kuriais egzistuoja tokie sveikieji neneigiami skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kad

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$



*Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių*
*Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais*