

Turkish version

Birinci Gün
25 Temmuz 2007

Soru 1. a_1, a_2, \dots, a_n gerçel sayıları verilmiş olsun. Her i ($1 \leq i \leq n$) için,

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

olarak tanımlayalım ve

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olsun.

a. Tüm $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ gerçel sayıları için,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

olduğunu kanıtlayınız.

b. (*) da eşitliğin gerçekleşmesini sağlayan $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

Soru 2. A, B, C, D ve E den oluşan beş nokta, $ABCD$ bir paralelkenar ve $BCED$ konveks bir kirisler dörtgeni olacak biçimde verilmiş olsun. A dan geçen bir ℓ doğrusu, $[DC]$ doğru parçasını bir F iç noktasında ve BC doğrusunu da bir G noktasında kessin. $|EF| = |EG| = |EC|$ olduğunu varsayalım. ℓ nin, \widehat{DAB} açısının açısı ortayı olduğunu kanıtlayınız.

Soru 3. Bir matematik yarışmasına katılan yarışmacılardan bazıları arkadaşlardır. Arkadaşlık her zaman karşılıklıdır. Bir yarışmacı grubundaki her yarışmacı çifti arkadaşsa, bu gruba bir *klik* diyelim. (Özellikle, ikiden az yarışmacıdan oluşan her grup bir kliktir.) Bir kliğin eleman sayısına bu kliğin *büyüklüğü* diyelim.

Bu yarışmadaki kliklerin büyüklüklerinin aldığı en büyük değer bir çift sayı olsun. Tüm yarışmacıların, bir odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değeri, diğer odadaki kliklerin büyüklüklerinin en büyük değerine eşit olacak biçimde iki odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*

Turkish version

İkinci Gün
26 Temmuz 2007

Soru 4. Bir ABC üçgeninde, \widehat{BCA} açısının açı ortayı, üçgenin çevrel çemberini ikinci kez R de, $[BC]$ nin orta dikmesini P de ve $[AC]$ nin orta dikmesini de Q da kesiyor. $[BC]$ nin orta noktası K ve $[AC]$ nin orta noktası L olsun. RPK ve RQL üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu kanıtlayınız.

Soru 5. a ve b pozitif tam sayılar olsun. $4ab - 1$, $(4a^2 - 1)^2$ yi bölüyorsa, $a = b$ olduğunu kanıtlayınız.

Soru 6. n pozitif bir tam sayı olsun. Üç boyutlu uzayda $(n + 1)^3 - 1$ noktadan oluşan

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kümesi veriliyor. Birleşimleri S kümesini kapsayan, ama $(0, 0, 0)$ noktasını içermeyen düzlemlerin sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*