الاثنين، 9 تموز 2018

المسألة 1.

لتكن Γ الدائرة المارّة برؤوس مثلث حاد الزوايا ABC. تقع النقطتان D و E على الضلعين AB و AC بالترتيب، وبحيث يكون $AD = AE$. يقطع محور القطعة المستقيمة $[BD]$ القوس الصغير $\overset{\frown}{AB}$ من Γ في F، وكذلك يقطع محور القطعة المستقيمة $[CE]$ القوس الصغير $\overset{\frown}{AC}$ من Γ في G. أثبت أنّ المستقيمين (DE) و (FG) متوازيان أو منطبقان.

المسألة 2.

أوجد جميع الأعداد الطبيعيّة $n \geq 3$ التي في حالتها توجد أعداد حقيقيّة $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ تحقّق $a_{n+1} = a_1$ و $a_{n+2} = a_2$، و

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

في حالة $i = 1, 2, \ldots, n$.

المسألة 3.

مثلث باسكال العكسي هو مصفوفة مثلثّية متساوية الأضلاع من الأعداد، تُحقّق أنّ كلَّ عددٍ يساوي القيمةَ المطلقةَ للفرق بين العددين اللّذين يقعان تحته مباشرة، وذلك باستثناء السطر الأخير. مثلاً، في المصفوفة أدناه يوجد مثلث باسكال عكسي مؤلّف من أربعة أسطر يحتوي على كل عدد طبيعي من الأعداد بين 1 و 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

هل يوجد مثلث باسكال عكسي مؤلّف من 2018 سطراً ويحتوي على كلِّ عددٍ طبيعي من 1 إلى $1+2+\cdots+2018$؟

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال

Language: ARABIC –Syria

الثلاثاء، 10 تموز 2018

المسألة 4.

الموقع هو أية نقطة (x, y) في المستوي حيث x و y هما عددان طبيعيّان موجبان تماماً وأصغر من 20 أو يساويانه.

في البدء، جميع المواقع التي عددها 400 غير مشغولة. يتبادل اللّاعبان "آيمي" A و"بن" B الأدوار في وضع أحجار حيث تبدأ A أوّلاً. في دورها، تضع A حجراً أحمر جديداً في موقع غير مشغول بحيث تكون المسافة بين أي موقعين مشغولين بحجرين أحمرين مختلفة عن العدد $\sqrt{5}$. وفي دوره، يضع B حجراً أزرق جديداً في أي موقع غير مشغول. (يمكن لموقع مشغول بحجر أزرق أن يكون على أية مسافة من أي موقع مشغول آخر). يتوقّف اللعب بمجرّد أن يعجز أيّ لاعب عن وضع حجر.

أوجد أكبر عدد K، بحيث يمكن لـ A أن تضمن وضع على الأقلّ هذا العدد K من الأحجار الحمراء، وذلك بقطع النظر عن كيفية وضع B لأحجاره الزرقاء.

المسألة 5.

لتكن $a_1, a_2, \ldots$ متتالية لا نهائيّة من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً. نفترض وجود عدد طبيعي $N > 1$ بحيث، مهما كان n أكبر أو يساوي N، كان العدد

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

عدداً صحيحاً. أثبت وجود عدد طبيعي M بحيث $a_m = a_{m+1}$ وذلك مهما كان m أكبر أو يساوي M.

المسألة 6.

نتأمّل رباعياً محدباً $ABCD$ يُحقّق $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. النقطة X نقطة واقعة داخل $ABCD$ بحيث $\angle XAB = \angle XCD$ و $\angle XBC = \angle XDA$.

أثبت أنّ $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال

Language: ARABIC –Syria