Isnin, 11 Julai 2016

Soalan 1. Segitiga BCF bersudut tegak pada B. Misalkan A ialah titik pada garis CF sehinggakan $FA = FB$ dan F terletak di antara A dan C. Titik D dipilih sehinggakan $DA = DC$ dan AC adalah pembahagi dua sama $\angle DAB$. Titik E dipilih sehinggakan $EA = ED$ dan AD adalah pembahagi dua sama $\angle EAC$. Misalkan M ialah titik tengah CF. Misalkan X ialah suatu titik sehinggakan $AMXE$ merupakan segi empat selari (dimana $AM \parallel EX$ dan $AE \parallel MX$). Buktikan bahawa garis-garis BD, FX, dan ME bersilang pada titik yang sama.

Soalan 2. Cari semua integer-integer positif n dimana setiap kotak dalam suatu jadual $n \times n$ boleh dimasukkan dengan satu daripada huruf-huruf I, M, dan O sehinggakan:

- dalam setiap baris dan setiap lajur, satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf I, satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf M dan satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf O; dan
- dalam mana-mana pepenjuru, jika bilangan masukannya merupakan gandaan tiga, satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf I, satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf M dan satu pertiga daripada masukan-masukan merupakan huruf O.

Nota: Setiap baris dan lajur suatu jadual $n \times n$ masing-masing dilabelkan dengan 1 hingga n secara berurutan. Oleh itu setiap kotak ditandai dengan pasangan integer positif (i, j) dengan $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Bagi $n > 1$, jadual tersebut mempunyai $4n - 2$ *pepenjuru* yang terdiri daripada dua jenis. Pepenjuru jenis pertama terdiri daripada semua kotak (i, j) dimana $i + j$ adalah malar, dan pepenjuru jenis kedua terdiri daripada semua kotak (i, j) dimana $i - j$ adalah malar.

Soalan 3. Misalkan $P = A_1A_2 \ldots A_k$ ialah suatu poligon cembung dalam satu satah. Bucu-bucu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mempunyai koordinat-koordinat integer dan terletak pada suatu bulatan. Misalkan S merupakan luas bagi P. Satu integer positif ganjil n diberi sehinggakan nilai-nilai kuasa dua bagi panjang sisi-sisi P boleh dibahagikan dengan n. Buktikan bahawa $2S$ adalah integer yang boleh dibahagikan dengan n.

Masa: 4 jam dan 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah

Selasa, 12 Julai 2016

Soalan 4. Suatu set integer-integer positif dipanggil *harum* jika ia mempunyai sekurang-kurangnya dua elemen dan setiap elemennya berkongsi faktor perdana dengan sekurang-kurangnya satu elemen lain. Takrifkan $P(n) = n^2 + n + 1$. Apakah nilai terkecil yang mungkin bagi integer positif b sehinggakan wujud satu integer bukan negatif a agar

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

merupakan set harum?

Soalan 5. Persamaan

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

ditulis di papan hitam, dengan 2016 faktor linear pada kedua-dua belah persamaan. Apakah nilai terkecil k yang memungkinkan sebanyak k daripada 4032 faktor-faktor linear tersebut dipadamkan supaya sekurang-kurangnya satu faktor kekal pada kedua-dua belah persamaan dan persamaan yang terhasil tidak mempunyai penyelesaian nyata?

Soalan 6. Terdapat $n \geqslant 2$ segmen garis dalam satu satah sehinggakan setiap dua segmen garis bersilang, dan tiada tiga segmen yang bertemu pada satu titik. Suhaimi harus memilih salah satu titik hujung daripada setiap segmen dan meletakkan seekor katak di situ, yang mana katak itu menghadap ke titik hujung yang satu lagi. Kemudian dia akan menepuk tangan sebanyak $n-1$ kali. Setiap kali dia menepuk tangan, tiap-tiap katak akan terus melompat ke hadapan dan mendarat ke titik persilangan berikutnya pada segmen yang sama. Katak-katak tersebut tidak pernah mengubah arah lompatan mereka. Suhaimi berhajat meletakkan katak-katak tersebut supaya tidak akan ada dua katak yang mendarat di titik persilangan yang sama pada masa yang sama.

(a) Buktikan bahawa Suhaimi sentiasa dapat memenuhi hajatnya jika n adalah ganjil.

(b) Buktikan bahawa Suhaimi sentiasa tidak dapat memenuhi hajatnya jika n adalah genap.

Masa: 4 jam dan 30 minit
Setiap soalan bernilai 7 markah