

Thứ Hai, ngày 11 tháng Bảy 2016

Bài 1. Cho tam giác BCF vuông tại B . Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng CF sao cho $FA = FB$ và F nằm giữa A và C . Lấy điểm D sao cho $DA = DC$ và AC là phân giác của $\angle DAB$. Lấy điểm E sao cho $EA = ED$ và AD là phân giác của $\angle EAC$. Gọi M là trung điểm của CF . Gọi X là điểm sao cho $AMXE$ là hình bình hành ($AM \parallel EX$ và $AE \parallel MX$). Chứng minh rằng các đường thẳng BD , FX và ME đồng qui.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n để có thể điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông $n \times n$ một chữ cái I , M hoặc O sao cho:

- ở mỗi hàng và ở mỗi cột, có đúng một phần ba số ô được điền chữ I , đúng một phần ba số ô được điền chữ M và đúng một phần ba số ô được điền chữ O ; đồng thời
- ở mỗi đường chéo mà số ô vuông con nằm trên đường chéo đó là một bội của 3, có đúng một phần ba số ô được điền chữ I , đúng một phần ba số ô được điền chữ M và đúng một phần ba số ô được điền chữ O .

Chú ý: Giả sử tất cả các hàng, cũng như tất cả các cột, của bảng ô vuông $n \times n$ được đánh số thứ tự lần lượt bởi các số nguyên từ 1 đến n . Khi đó, mỗi ô vuông con của bảng tương ứng với một cặp số nguyên dương (i, j) , trong đó $1 \leq i, j \leq n$. Với $n > 1$, bảng có $4n - 2$ đường chéo, được chia thành hai loại. Mỗi đường chéo loại 1 là một đường gồm tất cả các ô (i, j) mà $i + j$ là hằng số; mỗi đường chéo loại 2 là một đường gồm tất cả các ô (i, j) mà $i - j$ là hằng số.

Bài 3. Cho $P = A_1 A_2 \dots A_k$ là một đa giác lồi trong mặt phẳng tọa độ. Tất cả các đỉnh A_1, A_2, \dots, A_k đều có tọa độ nguyên và cùng nằm trên một đường tròn. Kí hiệu S là diện tích của P . Cho n là một số nguyên dương lẻ mà bình phương độ dài mỗi cạnh của P là một số nguyên chia hết cho n . Chứng minh rằng $2S$ là một số nguyên chia hết cho n .

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm

Thứ Ba, ngày 12 tháng Bảy 2016

Bài 4. Một tập hợp các số nguyên dương được gọi là *tập hương* nếu tập đó có ít nhất hai phần tử và mỗi phần tử của nó có ước nguyên tố chung với ít nhất một trong các phần tử còn lại. Đặt $P(n) = n^2 + n + 1$. Hãy tìm số nguyên dương b nhỏ nhất sao cho tồn tại số nguyên không âm a để tập hợp

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

là một tập hương.

Bài 5. Người ta viết lên bảng phương trình

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016),$$

với 2016 nhân tử bậc nhất ở mỗi vế. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để có thể xóa đi đúng k nhân tử trong số 4032 nhân tử bậc nhất nêu trên sao cho ở mỗi vế còn lại ít nhất một nhân tử và phương trình thu được không có nghiệm thực.

Bài 6. Trong mặt phẳng, cho $n \geq 2$ đoạn thẳng sao cho hai đoạn thẳng bất kì cắt nhau tại một điểm nằm trong mỗi đoạn và không có ba đoạn thẳng nào đồng qui. Với mỗi đoạn thẳng, thầy Minh chọn một đầu mút của nó rồi đặt lên đó một con ếch, sao cho mặt ếch hướng về đầu mút còn lại. Sau đó thầy vỗ tay $n-1$ lần. Mỗi lần thầy vỗ tay, mỗi con ếch ngay lập tức nhảy đến giao điểm gần nhất trên đoạn thẳng của nó. Tất cả các con ếch đều không thay đổi hướng nhảy của mình trong toàn bộ quá trình nhảy. Thầy Minh muốn đặt các con ếch sao cho sau mỗi lần thầy vỗ tay, không có hai con nào nhảy đến cùng một giao điểm.

(a) Chứng minh rằng thầy Minh luôn thực hiện được ý muốn của mình nếu n là số lẻ.

(b) Chứng minh rằng thầy Minh không thể thực hiện được ý muốn của mình nếu n là số chẵn.