



Language: Korean

Day: 1

2015년 7월 10일, 금요일

문제 1. 평면 위의 유한 개의 점들의 집합 S 의 임의의 서로 다른 두 점 A, B 에 대하여 $AC = BC$ 가 되도록 하는 S 의 점 C 가 존재하면, S 를 **평형적**이라 하자. S 의 어떤 서로 다른 세 점 A, B, C 에 대해서도 $PA = PB = PC$ 가 되도록 하는 S 의 점 P 가 존재하지 않으면, S 를 **비중심적**이라 하자.

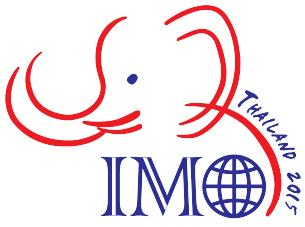
- (a) 임의의 양의 정수 $n \geq 3$ 에 대하여 n 개의 점으로 이루어진 평형적인 집합이 존재함을 보여라.
- (b) n 개의 점으로 이루어진 평형적이고 비중심적인 집합이 존재하게 되는 양의 정수 $n \geq 3$ 을 모두 구하여라.

문제 2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c) 를 모두 구하여라 :

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b \text{가 모두 } 2 \text{의 제곱수이다.}$$

(2의 제곱수란 음이 아닌 정수 n 에 대하여 2^n 꼴인 양의 정수를 말한다.)

문제 3. 예각삼각형 ABC 가 $AB > AC$ 를 만족한다. 이 삼각형의 외접원을 Γ , 수심을 H , 점 A 에서 대변에 내린 수선의 발을 F 라 하자. 또한 변 BC 의 중점을 M 이라 하자. 점 Q 는 $\angle HQA = 90^\circ$ 를 만족하는 원 Γ 위의 점이고, 점 K 는 $\angle HKQ = 90^\circ$ 를 만족하는 원 Γ 위의 점이다. 점 A, B, C, K, Q 가 모두 다르며, 이 순서로 원 Γ 위에 있다 하자. 삼각형 KQH 의 외접원과 삼각형 FKM 의 외접원이 서로 접함을 보여라.



Language: Korean

Day: 2

2015년 7월 11일, 토요일

문제 4. 삼각형 ABC 의 외접원을 Ω 라 하고, 외심을 O 라 하자. 점 A 를 중심으로 하는 원 Γ 가 선분 BC 와 두 점 D, E 에서 만난다. 이 때 B, D, E, C 는 모두 서로 다르고 이 순서대로 선분 BC 에 놓여 있다. F 와 G 는 두 원 Γ 와 Ω 의 교점이고 A, F, B, C, G 는 Ω 위에 이 순서대로 놓여 있다. K 는 삼각형 BDF 의 외접원과 선분 AB 의 교점 중 B 가 아닌 점이다. L 은 삼각형 CGE 의 외접원과 선분 CA 의 교점 중 C 가 아닌 점이다. 직선 FK 와 GL 이 서로 다르고 점 X 에서 만날 때, X 는 직선 AO 위에 있음을 보여라.

문제 5. 실수 전체의 집합을 \mathbb{R} 이라 하자. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라:

임의의 실수 x, y 에 대하여

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

이 성립한다.

문제 6. 정수로 이루어진 수열 a_1, a_2, \dots 이 다음 조건을 만족한다:

- (i) 모든 $j \geq 1$ 에 대하여 $1 \leq a_j \leq 2015$ 이다;
- (ii) 모든 $1 \leq k < \ell$ 에 대하여 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ 이다.

다음을 만족하는 두 양의 정수 b 와 N 이 존재함을 보여라:

$n > m \geq N$ 을 만족하는 모든 정수 m 과 n 에 대하여

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

이 성립한다.