

Chorshanba, 2009 yil 15 iyul

**1-masala.**  $\{1, \dots, n\}$  to'plamda o'zaro teng bo'limgan  $a_1, \dots, a_k$  natural sonlar olingan, bu yerda  $n$  – natural son va  $k \geq 2$ . Agar har bir  $i = 1, \dots, k - 1$  uchun  $a_i(a_{i+1} - 1)$  soni  $n$  ga qoldiqsiz bo'linsa,  $a_k(a_1 - 1)$  soni  $n$  ga qoldiqsiz bo'linmasligini isbotlang.

**2-masala.**  $ABC$  ucburchakka tashqi chizilgan aylana markazini  $O$  deb belgilaylik.  $P$  va  $Q$  nuqtalar mos ravishda  $CA$  va  $AB$  kesmalarning ichki nuqtalari bo'lsin.  $K, L$  va  $M$  nuqtalar mos ravishda  $BP, CQ$  va  $PQ$  kesmalarning o'rtalari bo'lsin.  $K, L$  va  $M$  nuqtalar orqali o'tadigan aylanani  $\Gamma$  deb belgilaylik. Agar  $PQ$  to'g'ri chiziq  $\Gamma$  aylanaga urinsa,  $OP = OQ$  tenglik bajarilishini isbotlang.

**3-masala.** Natural sonlardan iborat bo'lgan qat'iy o'suvchi  $s_1, s_2, s_3, \dots$  ketma-ketlik berilgan. Ma'lumki,

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ va } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

qismiy ketma-ketliklarning ikkalasi ham arifmetik progressiya bo'ladi.  $s_1, s_2, s_3, \dots$  ketma-ketlik o'zi ham arifmetik progressiya bo'lishini isbotlang.

Language: Uzbek

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut  
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi

Payshanba, 2009 yil 16 iyul

**4-masala.**  $ABC$  uchburchakda  $AB = AC$  bo'lsin.  $\angle CAB$  va  $\angle ABC$  burchaklarning bissektrisalari  $BC$  va  $CA$  tomonlar bilan mos ravishda  $D$  va  $E$  nuqtalarda kesishadi.  $K$  nuqta  $ADC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo'lsin. Agar  $\angle BEK = 45^\circ$  bo'lsa,  $\angle CAB$  burchakning barcha mo'mkin bo'lgan qiyatlarini toping.

**5-masala.** Shunday  $f : N \rightarrow N$  funksiyalar (ya'ni natural sonlar to'plamida aniqlangan va natural qiyatlarni qabul qiladigan funksiyalar) barchasi topilsinki, istalgan natural  $a$  va  $b$  sonlar uchun

$$a, f(b) \text{ va } f(b + f(a) - 1)$$

sonlari qandaydir maxsusmas uchburchak tomonlarining uzunliklari bo'ladi.

(Hamma uchlari bitta to'g'ri chiziqdiga yotmaydigan uchburchak *maxsusmas* deyiladi).

**6-masala.** O'zaro teng bo'limgan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  natural sonlar berilgan.  $M$  to'plam  $n-1$  ta natural sonlardan iborat va  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  soni  $M$  to'plamga tegishli emas. Chiqirtka koordinata o'qining 0 koordinatali nuqtadan boshlab o'ng tomonga qarab  $n$  ta sakrashni bajarishi kerak. Bunda sakrash uzunliklari biror tartibda olingan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlarga teng bo'lishi shart. Tartibni shunday tanlash mumkinligini isbotlangki, bunda chigirtka  $M$  to'plamga tegishli bo'lgan nuqtalarining hech qaysisiga qo'nmasligi ta'minlanadi.

Language: Uzbek

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 minut  
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi