



Utorak, 10. jul 2012.

Zadatak 1. Zadati su trougao ABC ; tačka J je centar spolja upisane kružnice u odnosu na tjemenu A . Ta kružnica dodiruje stranu BC u tački M , a prave AB i AC dodiruje u tačkama K odnosno L . Prave LM i BJ se sijeku u tački F , a prave KM i CJ se sijeku u tački G . Neka je S tačka presjeka pravih AF i BC i neka je T tačka presjeka pravih AG i BC .

Dokazati da je M središte duži ST .

(Spolja upisana kružnica trougla ABC u odnosu na tjemenu A je kružnica koja dodiruje stranu BC , dodiruje polupravu AB iza B i dodiruje polupravu AC iza C .)

Zadatak 2. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka su a_2, a_3, \dots, a_n pozitivni realni brojevi takvi da je $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokazati da je

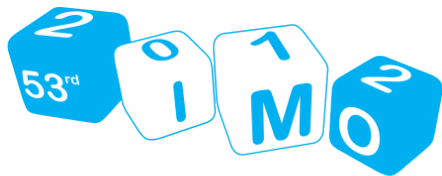
$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Zadatak 3. Dva igrača A i B igraju igru *pogađalice*. Pravila te igre zavise od dva prirodna broja k i n i te brojeve znaju oba igrača.

Na početku igre A bira prirodne brojeve x i N za koje važi $1 \leq x \leq N$. Igrač A taj broj x , a broj N tačno saopštava igraču B . Nakon toga igrač B pokušava da dobije informaciju o broju x postavljajući igraču A pitanja sljedećeg tipa: kod svakog pitanja B objavljuje po svom nahođenju izabran skup S čiji su elementi prirodni brojevi (isti skup je mogao koristiti kod nekog ranije postavljenog pitanja) i pita igrača A da li broj x pripada skupu S . Igrač B može postaviti koliko želi pitanja. Na svako pitanje igrač A mora odmah odgovoriti sa *da* ili sa *ne* i može slagati onoliko puta koliko želi; jedino ograničenje je da među svakih $k + 1$ uzastopnih odgovora bar jedan mora biti istinit.

Nakon što je B postavio onoliko pitanja koliko je želio, on mora da odabere skup X koji sadrži najviše n prirodnih brojeva. Ako x pripada skupu X tada je igrač B pobjednik; inače B gubi igru. Dokazati:

1. Ako je $n \geq 2^k$, tada B sebi može garantovati pobjedu.
2. Za dovoljno veliko k postoji prirodan broj $n \geq 1, 99^k$ za koji igrač B sebi ne može garantovati pobjedu.



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Montenegrin**

Day: **2**

Srijeda, 11. jul 2012.

Zadatak 4. Naći sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a, b, c za koje je $a+b+c=0$ važi sljedeća jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Sa \mathbb{Z} je označen skup cijelih brojeva.)

Zadatak 5. Neka je ABC trougao kod koga je $\angle BCA = 90^\circ$ i neka je D podnožje visine iz tjemena C . Neka je X unutrašnja tačka duži CD . Neka je K tačka duži AX za koju važi $BK = BC$. Analogno, neka je L tačka duži BX za koju važi $AL = AC$. Neka je M tačka presjeka pravih AL i BK .

Dokazati da je $MK = ML$.

Zadatak 6. Naći sve prirodne brojeve n za koje postoje nenegativni cijeli brojevi a_1, a_2, \dots, a_n takvi da je

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Montenegrin

*Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena*