

Երկուշաբթի, հուլիսի 9, 2018

Խնդիր 1. Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյանն արտագծած է Γ շրջանագիծը: Դիցուք AB և AC հատվածների վրա նշված են համապատասխանաբար D և E կետերն այնպես, որ $AD = AE$: Դիցուք BD և CE հատվածների միջնուղղահայացները Γ շրջանագծի AB և AC փոքր աղեղները հատում են համապատասխանաբար F և G կետերում: Ապացուցել, որ DE և FG ուղիղները զուգահեռ են կամ համընկնում են:

Խնդիր 2. Գտնել բոլոր $n \geq 3$ բնական թվերը, որոնց համար գոյություն ունեն a_1, a_2, \dots, a_{n+2} թվեր, որոնց համար $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, ինչպես նաև ցանկացած $i = 1, 2, \dots, n$ բնական թվի համար բավարարվում է

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

առնչությունը:

Խնդիր 3. Նակապասկայան եռանկյուն կանվանենք հավասարակողմ եռանկյան փեսքով աղյուսակը, որի ցանկացած թիվ, բացառությամբ ամենաներքևի տողում գրված թվերի, հավասար է իրենից անմիջապես ներքև գտնվող երկու թվերի տարբերության բացարձակ արժեքին: Ստորև բերված է 4 տող ունեցող հակապասկայան եռանկյուն, որում հանդիպում են 1-ից մինչև 10 բոլոր բնական թվերը:

$$\begin{array}{cccc} & & & 4 \\ & & 2 & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Պարզել, թե արդյո՞ք գոյություն ունի 2018 տող ունեցող և 1-ից մինչև $1 + 2 + \dots + 2018$ բոլոր բնական թվերը պարունակող հակապասկայան եռանկյուն:

Երեքշաբթի, հուլիսի 10, 2018

Խնդիր 4. Կոորդինատական հարթության վրա բնական կոորդինատներով (x, y) այն կետերը, որոնց համար x և y կոորդինատները չեն գերազանցում 20-ը կանվանենք ”աղյուսակային կետեր”:

Սկզբում բոլոր 400 աղյուսակային կետերն ազատ են: Գուրգենն ու Սմբարը հերթով քայլեր են կատարում, ընդ որում սկսում է Գուրգենը: Իր քայլով Գուրգենը զբաղեցնում է որևէ ազատ աղյուսակային կետ՝ վրան դնելով կարմիր քար, ընդ որում կարմիր քարեր պարունակող ցանկացած երկու աղյուսակային կետերի միջև եղած հեռավորությունը պետք է փափուկ լինի $\sqrt{5}$ -ից: Իր քայլին Սմբարը զբաղեցնում է ցանկացած ազատ աղյուսակային կետ՝ վրան դնելով կապույտ քար: (Կապույտ քարի զբաղեցրած աղյուսակային կետի հեռավորությունը այլ քարի կողմից զբաղեցված աղյուսակային կետից կարող է լինել ցանկացած): Խաղը դադարում է հենց որ խաղացողներից որևէ մեկը չի կարողանում քայլ կատարել:

Գտնել K -ի ամենամեծ արժեքը, որ Գուրգենը ի վիճակի է փեղադրել առնվազն K կարմիր քար՝ անկախ Սմբարի գործողություններից:

Խնդիր 5. Դիցուք տրված է բնական թվերի a_1, a_2, \dots անվերջ հաջորդականությունը: Նայանի է, որ գոյություն ունի $N > 1$ բնական թիվ, որ ցանկացած $n \geq N$ թվի համար

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

արտահայտության արժեքը բնական թիվ է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի M բնական թիվ, որ ցանկացած $m \geq M$ թվի համար փեղի ունի $a_m = a_{m+1}$ հավասարությունը:

Խնդիր 6. Դիցուք $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան համար $AB \cdot CD = BC \cdot DA$: Դիցուք $ABCD$ քառանկյան ներսում նշված է X կետն այնպես, որ

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{և} \quad \angle XBC = \angle XDA :$$

Ապացուցել, որ $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$: