12 ივნისი 2006 წელი

ამოცანა 1. ვაჭვია I ცენტრად ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. ეს სამკუთხედის შიგნით აღებულია P წერტილი ისე, რომ

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

დაამტკიცეთ, რომ $AP \geq AI$ და ტოლობას აქვს ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა P ემთხვევა I-ს.

ამოცანა 2. ვაჭვია P ცენტრად წესიერი 2006-კუთხედი. P-ს ეწოდება ეზოლური კარი, თუ მის ბოლოებში P-ს სწორკუთხა აყენებს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითეული შეიცავს ერთი ერთეულის სიგრძის გვერდებისაგან. P-ს გვერდებს აგრეთვე ეზოლური კარი.

ვაჭვია P დაყოფილია სამკუთხედებად 2003 რომლებიც ეზოლურია, რომელთაგან თითეული ორ ერთ აქვს საერთო წვეროები P-ს შიგნით. იპოვეთ, რამდენი წესით დაყოფილია, თუ თითოეული რომლებიც ამ ლოცვრილ სამკუთხედებისა, რომელიც აქვთ ორი კარი გვერდი.

ამოცანა 3. იპოვეთ უმცირესი ნამდვილი რიცხვი M, რომლისთვისაც სრულდება

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

სრულდება ყოველი a, b და c ნამდვილი რიცხვისთვის.

მუშაობის დრო 4 სთ. და 30 წთ.

ამოცანა ღირს 7 ქულა.

13 ივნისი 2006 წელი

ამოცანა 4. იპოვეთ (x, y) მთელი რიცხვთა ყველა წყვილი, რომლისთვის

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

ამოცანა 5. ვთქვათ $P(x)$ არის $n > 1$ ხარისხის ჭეშმარიტი მთელკოეფიციენტიანი მრავალწევრი, ხოლო K – ნებისმიერი ნაკლებად დადებითი რიცხვი. განვიხილოთ ჭეშმარიტი

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$$

იქ P გამოყენებულია K-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს არაუმეტეს n რაოდენობის ისეთი მთელი t რიცხვისა, რომლისთვისაც $Q(t) = t$.

ამოცანა 6. ამოზნექილი P ჭეშმარიტი მრავალკუთხედის ყოველ b გვერდს შეესაბამება ოლიოლი იმ ფერადებულ შორის, რომელიც აქვს სამკუთხედს მოცემულ P-ს შიგნით და რომელიც ერთი გვერდი ემთხვევა b-ს.

დაამტკიცეთ, რომ ფერადების ჯერი, რომელიც შეესაბამება P-ს ყველა გვერდს ორ ერთ ნაკლები P-ს ტოლფერადებად ფერადებზე.