Tiistai, 18. heinäkuuta, 2017

Tehtävä 1. Määritellään jokaista kokonaislukua $a_0 > 1$ kohti sarja $a_0, a_2, a_2, \ldots$ seuraavasti:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{jos } \sqrt{a_n} \text{ on kokonaisluku,} \\ a_n + 3 & \text{muulloin,} \end{cases} \qquad \text{kaikille } n \geqslant 0.$$

Määritä kaikki sellaiset luvun a_0 arvot, joita kohti on olemassa sellainen luku A, että $a_n = A$ äärettömän monella luvun n arvolla.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että kaikille reaaliluvuille x ja y pätee

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Tehtävä 3. Metsästäjä ja näkymätön jänis pelaavat peliä euklidisella tasolla. Jäniksen aloituspiste A_0 ja metsästäjän aloituspiste B_0 ovat samat. Kun peliä on pelattu $n-1$ kierrosta, jänis on pisteessä A_{n-1} ja metsästäjä on pisteessä B_{n-1}. Pelin n. kierroksella tapahtuu kolme asiaa seuraavassa järjestyksessä:

(i) Jänis siirtyy näkymättömänä johonkin pisteeseen A_n, jolle etäisyys pisteiden A_{n-1} ja A_n välillä on tasan 1.

(ii) Jäljityslaite raportoi pisteen P_n metsästäjälle. Ainoa asia, minkä jäljityslaite takaa metsästäjälle, on että etäisyys pisteiden P_n ja A_n välillä on korkeintaan 1.

(iii) Metsästäjä siirtyy näkyvästi johonkin pisteeseen B_n, jolle etäisyys pisteiden B_{n-1} ja B_n välillä on tasan 1.

Onko metsästäjän aina mahdollista valita siirtonsa siten, että riippumatta siitä, miten jänis liikkuu ja siitä, mitkä pisteet jäljityslaite raportoi, hän voi 10^9 kierroksen jälkeen olla varma, että etäisyys hänen ja jäniksen välillä on korkeintaan 100?

Keskiviikko, 19. heinäkuuta, 2017

Tehtävä 4. Olkoot R ja S sellaisia ympyrän Ω eri pisteitä, että RS ei ole ympyrän Ω halkaisija. Olkoon ℓ ympyrän Ω tangenttisuora pisteessä R. Piste T on sellainen, että S on janan RT keskipiste. Piste J valitaan ympyrän Ω lyhyemmältä kaarelta RS siten, että kolmion JST ympäri piirretty ympyrä Γ leikkaa suoran ℓ kahdessa eri pisteessä. Olkoon A ympyrän Γ ja suoran ℓ se leikkauspiste, joka on lähempänä pistettä R. Olkoon K suoran AJ ja ympyrän Ω toinen leikkauspiste. Todista, että suora KT on ympyrän Γ tangentti.

Tehtävä 5. Olkoon kokonaisluku $N \geqslant 2$ annettu. $N(N+1)$ jalkapallon pelaajaa, joista mitkään kaksi eivät ole yhtä pitkiä, seisovat rivissä. Sir Alex haluaa poistaa tästä rivistä $N(N-1)$ pelaajaa siten, että jäljelle jäävien $2N$ pelaajan suhteen seuraavat N ehtoa pitävät:

(1) kukaan ei seiso kahden pisimmän pelaajan välissä,

(2) kukaan ei seiso 3. ja 4. pisimpien pelaajien välissä,

$\vdots$

(N) kukaan ei seiso kahden lyhimmän pelaajan välissä.

Osoita, että tämä on aina mahdollista.

Tehtävä 6. Järjestetty kokonaislukupari (x, y) on *primitiivinen piste*, jos lukujen x ja y suurin yhteinen tekijä on 1. Olkoon S annettu äärellinen primitiivisten pisteiden joukko. Todista, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n ja sellaiset kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_n$, että jokaiselle pisteelle $(x, y) \in S$ pätee

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$