понедељак, 11. јул 2022

Задатак 1. Банка у Ослу користи две врсте новчића: алуминијумске (означене са A) и бакарне (означене са B). Марија има n алуминијумских и n бакарних новчића, поређаних у низ, слева на десно, у неком поретку. *Ланац* је било који подниз узастопних новчића исте врсте. За дати фиксиран природан број $k \leqslant 2n$, Марија понавља следећу операцију: проналази најдужи ланац који садржи k-ти новчић са леве стране и премешта све новчиће тог најдужег ланца на леви крај низа. На пример, за $n = 4$ и $k = 4$, полазећи од низа $AABBBABA$ Марија добија:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Одредити све парове (n, k), где је $1 \leqslant k \leqslant 2n$, такве да за сваки почетни низ, Марија у неком тренутку током извођења операција, долази до ситуације да је првих n новчића са леве стране исте врсте.

Задатак 2. Означимо са $\mathbb{R}^+$ скуп позитивних реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за свако $x \in \mathbb{R}^+$, постоји тачно једно $y \in \mathbb{R}^+$ за које је

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задатак 3. Нека је k природан број, а S коначан скуп непарних простих бројева. Доказати да постоји највише један начин (до на ротацију и/или осну симетрију) да распоредимо елементе скупа S на кружницу тако да се производ свака два суседна броја може написати у облику $x^2 + x + k$ за неки природан број x.

уторак, 12. јул 2022

Задатак 4. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао у којем је $BC = DE$. Унутар петоугла $ABCDE$ налази се тачка T таква да је $TB = TD$, $TC = TE$ и $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$. Нека права AB сече праве CD и CT у тачкама P и Q, тим редом. Претпоставимо да се тачке P, B, A и Q појављују у том редоследу на правој на којој леже. Нека права AE сече праве CD и DT у тачкама R и S, тим редом. Претпоставимо да се тачке R, E, A и S појављују у том редоследу на правој на којој леже. Доказати да се тачке P, S, Q и R налазе на истој кружници.

Задатак 5. Одредити све тројке (a, b, p) природних бројева, такве да је p прост број и важи једнакост

$$a^p = b! + p.$$

Задатак 6. Нека је n природан број. *Балтичка табла* је квадратна табла димензија $n \times n$ у чија поља су уписани сви природни бројеви од 1 до n^2 тако да свако поље садржи тачно један број. Два поља табле су суседна ако имају заједничку страницу. Свако поље које је суседно само са пољима која садрже само веће бројеве назива се *долина*. *Узбрдица* је низ од једног или више поља табле такав да важе сва три следећа услова:

(i) прво поље у низу је долина,

(ii) свака два узастопна поља у низу су суседна поља табле,

(iii) бројеви написани у пољима низа иду у растућем поретку.

Одредити, у функцији од броја n, најмању могућу вредност укупног броја различитих узбрдица у Балтичкој табли.

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак носи 7 поена.