Vrijdag 10 juli 2015

Opgave 1. We noemen een eindige verzameling $\mathcal{S}$ van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in $\mathcal{S}$ een punt C in $\mathcal{S}$ is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat $\mathcal{S}$ *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in $\mathcal{S}$ geen punt P in $\mathcal{S}$ is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geqslant 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

(b) Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Opgave 2. Bepaal alle drietallen (strikt) positieve gehele getallen (a, b, c) zodanig dat elk van de getallen

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

een tweemacht is.

(*Een tweemacht is een getal van de vorm* 2^n, *waarbij* n *een geheel getal is en* $n \geqslant 0$.)

Opgave 3. Zij ABC een scherphoekige driehoek met $|AB| > |AC|$. Zij Γ zijn omgeschreven cirkel, H zijn hoogtepunt en F het voetpunt van de hoogtelijn uit A. Zij M het midden van lijnstuk BC. Zij Q het punt op Γ zodat $\angle HQA = 90°$ en zij K het punt op Γ zodat $\angle HKQ = 90°$. Veronderstel dat de punten A, B, C, K en Q allemaal verschillend zijn en in deze volgorde op Γ liggen.

Bewijs dat de omgeschreven cirkels van driehoeken KQH en FKM elkaar raken.

Zaterdag 11 juli 2015

Opgave 4. Driehoek ABC heeft omgeschreven cirkel Ω met middelpunt O. Een cirkel Γ met middelpunt A snijdt het lijnstuk BC in de punten D en E, zodanig dat B, D, E en C allemaal verschillend zijn en in deze volgorde op BC liggen. Laat F en G de snijpunten van Γ en Ω zijn, zodanig dat A, F, B, C en G in deze volgorde op Ω liggen. Zij K het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek BDF en het lijnstuk AB. Zij L het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek CGE en het lijnstuk CA.

Veronderstel dat de (rechte) lijnen FK en GL verschillend zijn en elkaar snijden in het punt X. Bewijs dat X op de (rechte) lijn AO ligt.

Opgave 5. Zij $\mathbb{R}$ de verzameling reële getallen. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan de vergelijking

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

voor alle reële getallen x en y.

Opgave 6. De rij gehele getallen $a_1, a_2, \ldots$ voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ voor alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ voor alle $1 \leqslant k < \ell$.

Bewijs dat er twee (strikt) positieve gehele getallen b en N bestaan zodanig dat

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

voor alle gehele getallen m en n met $n > m \geqslant N$.

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard