

2018 年 7 月 9 日星期一

**問題 1.** 令  $\Gamma$  為銳角三角形  $ABC$  的外接圓。點  $D$  和  $E$  分別在線段  $AB$  和  $AC$  上，使得  $AD = AE$ 。  $BD$  和  $CE$  的中垂線分別和  $\Gamma$  的劣弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{AC}$  相交於點  $F$  和  $G$ 。證明直線  $DE$  與  $FG$  平行（或是同一條線）。

**問題 2.** 找出所有大於等於 3 的整數  $n$ ，使得存在實數  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ ，滿足  $a_{n+1} = a_1$ ， $a_{n+2} = a_2$ ，且對於  $i = 1, 2, \dots, n$ ，都有

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

**問題 3.** 如果一個由數字排成的正三角形陣列，除了最下方一列外，每個數字都是它正下方兩數相減的絕對值，則我們稱之為**反巴斯卡三角**。舉例來說，下面這個包含 1 到 10 所有整數的正三角形陣列，就是一個有 4 列的反巴斯卡三角。

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

請問，是否存在一個 2018 列的反巴斯卡三角，包含所有從 1 到  $1 + 2 + \dots + 2018$  的整數？

2018 年 7 月 10 日星期二

**問題 4.** 平面上的一個點  $(x, y)$ , 若  $x, y$  都是小於或等於 20 的正整數, 被稱作**網格**。

一開始, 全部 400 個網格都是空的。甲和乙兩人輪流放石頭。先由甲開始。在甲的回合, 甲將一個新的紅石頭放到一個空的網格上, 使得任意兩個放紅石頭的網格距離都不是  $\sqrt{5}$ . 而輪到乙時, 乙將一個新的藍石頭放到任何一個空的網格上 (放藍石頭的網格與其他放石頭的網格之間的距離, 不管是多少都可以)。直到其中一個人不能再放石頭時, 他們就停止。

求出最大的  $K$  使得不論乙怎麼放藍石頭, 甲都保證至少可放  $K$  個紅石頭。

**問題 5.** 令  $a_1, a_2, \dots$  為一個無窮長的正整數數列。假設整數  $N > 1$ , 滿足對每個  $n \geq N$ ,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

都是整數。證明存在一個正整數  $M$  使得當  $m \geq M$  時,  $a_m = a_{m+1}$  恆成立。

**問題 6.** 一個凸四邊形  $ABCD$ , 滿足  $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ . 點  $X$  在  $ABCD$  內部, 滿足

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{且} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

證明  $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ .