Martedì, 16 Luglio 2019

Problema 1. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che, per tutti gli interi a e b,
$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 2. In un triangolo ABC, il punto A_1 sta sul lato BC, e il punto B_1 sta sul lato AC. Siano P e Q punti sui segmenti AA_1 e BB_1, rispettivamente, tali che la retta PQ è parallela alla retta AB. Sia P_1 un punto sulla retta PB_1 tale che B_1 si trova strettamente tra P e P_1, e tale che $\angle PP_1C = \angle BAC$. Similmente, sia Q_1 un punto sulla retta QA_1 tale che A_1 si trova strettamente tra Q e Q_1, e tale che $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dimostrare che i punti P, Q, P_1, e Q_1 sono conciclici.

Problema 3. Un social network ha 2019 utenti. Alcuni di questi utenti sono amici tra di loro, e la relazione di amicizia è simmetrica. Eventi del tipo descritto qui sotto si possono verificare in successione, uno per volta:

> tre utenti A, B, e C tali che A è amico di B e C, ma B e C non sono amici, cambiano il loro stato di amicizia in maniera tale che B e C ora sono amici, ma A non è più amico né di B né di C. Tutte le altre relazioni di amicizia non cambiano durante questo evento.

All'inizio 1010 utenti hanno ciascuno esattamente 1009 amici, e 1009 utenti hanno ciascuno esattamente 1010 amici.

Dimostrare che esiste una successione di eventi di questo tipo al termine dei quali ogni utente è amico di al più un altro utente.

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Mercoledì, 17 Luglio 2019

Problema 4. Determinare tutte le coppie (k, n) di interi positivi tali che

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problema 5. La Banca di Bath ha coniato delle monete in cui una faccia è contrassegnata dalla lettera H e l'altra faccia è contrassegnata dalla lettera T. Alessandra ha n di queste monete allineate da sinistra a destra. Alessandra esegue ripetutamente la seguente operazione: se ci sono esattamente $k > 0$ monete con la lettera H verso l'alto, allora Alessandra capovolge la k-esima moneta a partire da sinistra; in caso contrario tutte le monete hanno la lettera T verso l'alto e Alessandra si ferma. Per esempio, se $n = 3$ il processo che parte dalla configurazione THT sarebbe

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

Alessandra si fermerebbe quindi dopo tre operazioni.

(a) Dimostrare che, per ogni configurazione iniziale, Alessandra si ferma dopo un numero finito di operazioni.

(b) Per ogni configurazione iniziale C, indichiamo con $L(C)$ il numero di operazioni prima che Alessandra si fermi. Per esempio, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$.

Determinare il valor medio di $L(C)$ al variare di C tra tutte le 2^n possibili configurazioni iniziali.

Problema 6. Sia I l'incentro di un triangolo acutangolo ABC con $AB \neq AC$. La circonferenza inscritta ω di ABC è tangente ai lati BC, CA, e AB in D, E, ed F, rispettivamente. La retta passante per D e perpendicolare a EF interseca nuovamente ω in R. La retta AR interseca nuovamente ω in P. Le circonferenze circoscritte ai triangoli PCE e PBF si intersecano nuovamente in Q.

Dimostrare che le rette DI e PQ si intersecano in un punto che appartiene alla retta passante per A e perpendicolare ad AI.

Language: Italian

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti