

星期二, 16. 七月 2024

問題 1. 試求所有實數  $\alpha$ , 使得對於所有正整數  $n$ , 整數

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

皆為  $n$  的倍數。(此處  $\lfloor z \rfloor$  表示不大於  $z$  的最大整數。舉例來說,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  且  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ 。)

問題 2. 試求所有正整數對  $(a, b)$  使得存在正整數  $g$  與  $N$  滿足

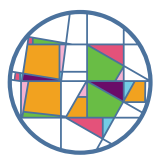
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

對於所有整數  $n \geq N$  皆成立。(此處  $\gcd(x, y)$  表示  $x$  和  $y$  的最大公因數。)

問題 3. 令  $a_1, a_2, a_3, \dots$  為無限長的正整數列, 且  $N$  為一正整數。假設對於所有  $n > N$ ,  $a_n$  等於整數  $a_{n-1}$  在數列  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  中出現的次數。

證明在  $a_1, a_3, a_5, \dots$  與  $a_2, a_4, a_6, \dots$  此兩數列中, 至少有一者最終會循環。

(我們稱一個無窮數列  $b_1, b_2, b_3, \dots$  最終會循環, 若存在正整數  $p$  與  $M$  使得  $b_{m+p} = b_m$  對於所有  $m \geq M$  皆成立。)



星期三, 17. 七月 2024

問題 4. 令  $ABC$  為一三角形, 其中  $AB < AC < BC$ 。令  $ABC$  的內心與內切圓分別為  $I$  和  $\omega$ 。令  $X$  為  $BC$  線上異於  $C$  的點, 使得過  $X$  且平行  $AC$  的直線與  $\omega$  相切。類似地, 令  $Y$  為  $BC$  線上異於  $B$  的點, 使得過  $Y$  且平行  $AB$  的直線與  $\omega$  相切。令  $AI$  與  $ABC$  外接圓再次交於  $P \neq A$ 。令  $K$  與  $L$  分別為  $AC$  與  $AB$  的中點。

證明  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ 。

問題 5. 蝸牛渦寶在一個 2024 橫列、2023 直排的棋盤上進行遊戲。棋盤上有 2022 隻隱形的怪獸。遊戲開始時, 渦寶不知道怪物的位置, 但牠知道除了第一橫列與最後一橫列外, 每一橫列都恰有一隻怪獸, 且每一直排都至多只有一隻怪獸。

渦寶將發起若干次探險, 嘗試從第一橫列爬到最後一橫列。每一次探險, 牠選擇第一橫列的一格作為起點, 接著開始爬行, 每一步都選擇移動到一個與其所在格子有公共邊的格子 (牠可以造訪之前去過的格子)。若其抵達有怪物的格子, 則該次探險結束, 而渦寶會回到第一橫列開始新的探險。怪物不會移動, 且渦寶會記得牠造訪過的各格中有沒有怪物。若牠抵達最後一橫列, 則探險結束且遊戲結束。

試求最小可能的  $n$ , 讓渦寶存在一個策略, 使得不論怪物如何分佈, 牠都可以保證在  $n$  次探險內抵達最後一橫列。

問題 6. 令  $\mathbb{Q}$  為所有有理數所成的集合。一個函數  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  被稱為媽祖的, 若其滿足以下性質: 對於每一組  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{或} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

至少一者成立。證明存在一個整數  $c$ , 使得對於任何媽祖的函數  $f$ , 皆至多有  $c$  個可被表示為  $f(r) + f(-r)$  的相異有理數, 其中  $r$  為有理數; 並求  $c$  的最小可能值。