จันทร์, 19. กรกฎาคม 2021

โจทย์ข้อ 1. ให้ $n \geqslant 100$ เป็นจำนวนเต็ม อีวานเขียนจำนวน $n, n+1, \ldots, 2n$ ลงบนไพ่ โดยที่แต่ละจำนวนอยู่บนไพ่ที่แตกต่างกัน จากนั้นเขาสับไพ่ $n+1$ ใบนี้ และแบ่งไพ่ทั้งหมดเป็นสองกอง จงพิสูจน์ว่า กองไพ่อย่างน้อยหนึ่งในสองกองนี้มีไพ่สองใบที่ผลบวกของจำนวนบนไพ่ดังกล่าวเป็นกำลังสองสมบูรณ์

โจทย์ข้อ 2. จงแสดงว่าอสมการ

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง $x_1, \ldots, x_n$

โจทย์ข้อ 3. ให้ D เป็นจุดภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC ซึ่ง $AB > AC$ ที่ทำให้ $\angle DAB = \angle CAD$ จุด E บนส่วนของเส้นตรง AC สอดคล้องเงื่อนไข $\angle ADE = \angle BCD$, จุด F บนส่วนของเส้นตรง AB สอดคล้องเงื่อนไข $\angle FDA = \angle DBC$ และจุด X บนเส้นตรง AC สอดคล้องเงื่อนไข $CX = BX$ ให้ O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ADC และ EXD ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง BC, EF และ O_1O_2 ตัดกันที่จุดเดียว

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน

อังคาร, 20. กรกฎาคม 2021

โจทย์ข้อ 4. ให้ Γ เป็นวงกลมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลาง และ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมนูนซึ่งส่วนของเส้นตรง AB, BC, CD และ DA แต่ละเส้นสัมผัสกับ Γ ให้ Ω เป็นวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม AIC ส่วนต่อของ BA ไปทาง A (ไม่รวม BA) ตัด Ω ที่ X และส่วนต่อของ BC ไปทาง C (ไม่รวม BC) ตัด Ω ที่ Z ส่วนต่อของ AD และ CD ไปทาง D (ไม่รวม AD และ CD) ตัด Ω ที่ Y และ T ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

โจทย์ข้อ 5. กระรอกสองตัวนามว่าบุชชีและจัมปี ได้รวบรวมวอลนัต 2021 ลูกสำหรับฤดูหนาว จัมปีกำกับวอลนัตเหล่านี้ด้วยหมายเลขตั้งแต่ 1 ไปจนถึง 2021 และขุดหลุมเล็ก ๆ 2021 หลุม เป็นแนววงกลมบนพื้นดินรอบต้นไม้ต้นโปรดของกระรอกทั้งสอง ในเช้าวันรุ่งขึ้น จัมปีพบว่าบุชชีได้วางวอลนัตหนึ่งลูกในแต่ละหลุม โดยไม่สนใจหมายเลขของวอลนัต จัมปีรู้สึกไม่พอใจ จึงตัดสินใจเรียงลำดับวอลนัตใหม่ โดยเคลื่อนย้ายวอลนัต 2021 ครั้ง โดยในการเคลื่อนย้ายครั้งที่ k จัมปีสลับตำแหน่งของวอลนัตสองลูกที่วางอยู่ติดกับวอลนัตหมายเลข k จงพิสูจน์ว่า มีค่า k ที่ในการเคลื่อนย้ายครั้งที่ k จัมปีสลับวอลนัตหมายเลข a และ b โดยที่ $a < k < b$

โจทย์ข้อ 6. ให้ $m \geqslant 2$ เป็นจำนวนเต็ม, ให้ A เป็นเซตจำกัดของจำนวนเต็ม (ไม่จำเป็นต้องเป็นบวก) และให้ $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ เป็นสับเซตของ A สมมุติว่า สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, m$ ผลบวกของสมาชิกของ B_k เท่ากับ m^k จงพิสูจน์ว่า A มีสมาชิกอย่างน้อย $m/2$ ตัว

Language: Thai

เวลา ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที
โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน