mánudagur, 11. júlí 2022

Dæmi 1. Oslóarbanki gefur út tvær gerðir peninga: Álpeninga (táknaða með A) og bronspeninga (táknaða með B). María hefur n álpeninga og n bronspeninga, sem raðað hefur verið í einhverja handahófskennda röð. Við köllum hlutrunu samliggjandi peninga af sömu gerð *keðju*. Fyrir fasta jákvæða heiltölu $k \leqslant 2n$, þá endurtekur María eftirfarandi aðgerð: Hún finnur lengstu keðjuna sem inniheldur k-ta peninginn frá vinstri og flytur alla peninga þeirrar keðju til vinstri við enda raðarinnar. Svo dæmi sé tekið: Ef $n = 4$, $k = 4$ og upphafleg röð peninganna er $AABBBABA$ þá myndi röð peninganna þróast

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Finnið allar tvenndir (n, k) þar sem $1 \leqslant k \leqslant 2n$, þannig að sama hver upphafleg röð peninganna sé, þá komi að tímapunkti þar sem allir n peningarnir lengst til vinstri séu af sömu gerð.

Dæmi 2. Táknum mengi jákvæðra rauntalna með $\mathbb{R}^+$. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ þannig að fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}^+$ megi finna nákvæmlega eitt $y \in \mathbb{R}^+$ sem fullnægir

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Dæmi 3. Látum k vera jákvæða heiltölu og látum S vera endanlegt mengi af oddafrumtölum. Sannið að það sé í mesta lagi ein leið (upp að snúningum og speglunum) að raða stökum S í hring þannig að margfeldi sérhverra samliggjandi talna í hringnum sé á forminu $x^2 + x + k$ fyrir einhverja jákvæða heiltölu x.

Language: Icelandic

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.
Hvert dæmi er 7 stiga virði.

þriðjudagur, 12. júlí 2022

Dæmi 4. Látum $ABCDE$ vera kúptan fimmhyrning þannig að $BC = DE$. Gerum ráð fyrir að T sé punktur innan í $ABCDE$ þannig að $TB = TD$, $TC = TE$ og $\angle ABT = \angle TEA$. Línan AB sker línurnar CD og CT í punktum P og Q, í sömu röð. Gerum ráð fyrir að punktarnir P, B, A, Q liggi saman á línu í þessari röð. Línan AE sker línurnar CD og DT í punktum R og S, í sömu röð. Gerum ráð fyrir að punktarnir R, E, A, S liggi saman á línu í þessari röð. Sannið að punktarnir P, S, Q og R liggi allir á hring.

Dæmi 5. Finnið allar þrenndir jákvæðra heiltalna (a, b, p) þar sem p er frumtala og

$$a^p = b! + p.$$

Dæmi 6. Látum n vera jákvæða heiltölu. Borð með $n \times n$ reiti, þar sem sérhver reitur inniheldur nákvæmlega eina tölu og sérhver heiltalnanna 1 til n^2 kemur fyrir, kallast *norrænn ferningur*. Tveir ólíkir reitir eru aðlægir ef þér deila sameiginlegri hlið. *Dalur* er reitur þannig að sérhver aðlægur reitur hans inniheldur stærri tölu. *Fjallgönguleið* er runa af einum eða fleiri reitum þannig að:

(i) Fyrsti reitur rununnar er dalur,

(ii) samliggjandi reitir rununnar eru aðlægir reitir ferningsins, og

(iii) tölurnar í reitunum koma fyrir í vaxandi röð.

Finnið, sem fall af n, minnsta heildarfjölda fjallgönguleiða í norrænum ferning.