

Ուրբաթ, 10 հուլիսի 2015թ.

Խնդիր 1: Տրված հարթությանը պատկանող վերջավոր քանակությամբ կետերի S բազմությունը կանվանենք **բալանասավորված**, եթե S բազմությանը պատկանող կամայական A և B իրարից տարբեր կետերի համար գոյություն ունի S բազմությանը պատկանող C կետ այնպես, որ $AC=BC$: S բազմությունը կանվանենք **էքսցենտրիկ**, եթե S բազմությանը պատկանող իրարից տարբեր կամայական երեք A, B և C կետերի համար գոյություն չունի S բազմությանը պատկանող P կետ այնպես, որ $PA=PB=PC$:

(ա) Ապացուցեք, որ կամայական $n \geq 3$ թվի համար գոյություն ունի **բալանասավորված** բազմություն, որին պատկանող կետերի քանակը հավասար է n :

(բ) Գտեք բոլոր $n \geq 3$ ամբողջ թվերը, որոնց համար գոյություն ունի **բալանասավորված էքսցենտրիկ** բազմություն, որին պատկանող կետերի քանակը հավասար է n :

Խնդիր 2: Գտեք դրական ամբողջ թվերի բոլոր (a, b, c) եռյակները այնպես, որ
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$
թվերից յուրաքանչյուրը երկուսի աստիճան է:

(երկուսի աստիճան կանվանենք 2^n տեսքի թիվը, որտեղ n -ը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է:)

Խնդիր 3: ABC սուրանկյուն եռանկյունում $AB > AC$: Դիցուք Γ -ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծն է, H -ը օրթոկենտրոնն է, F -ը A գագաթից տարված բարձրության հիմքն է, իսկ M -ը BC կողմի միջնակետն է: Դիցուք Q -ն Γ շրջանագծի այնպիսի կետ է, որ $\angle HQA = 90^\circ$, իսկ K -ն Γ շրջանագծի այնպիսի կետ է, որ $\angle HKQ = 90^\circ$: Դիցուք A, B, C, K, Q կետերը տարբեր են և Γ շրջանագծի վրա ունեն նշված հերթականությունը:
Ապացուցեք, որ KQH և FKM եռանկյունների արտագծած շրջանագծերը իրար շոշափում են:

Շաբաթ, 11 հուլիսի 2015թ.

Խնդիր 4: Դիցուք O կենտրոնով Ω շրջանագիծը ABC եռանկյանը արտագծած շրջանագիծն է: A կենտրոնով Γ շրջանագիծը հատում է BC հատվածը D և E կետերում այնպես, որ B, D, E, C կետերը տարբեր են և BC ուղղի վրա դասավորված են նշված հերթականությամբ: Դիցուք F և G կետերը Γ և Ω շրջանագծերի հատման կետերն են այնպես, որ A, F, B, C, G կետերը Ω շրջանագծի վրա դասավորված են նշված հերթականությամբ: Դիցուք K -ն BDF եռանկյան արտագծած շրջանագծի և AB հատվածի հատման երկրորդ կետն է, իսկ L -ը CGE եռանկյան արտագծած շրջանագծի և CA հատվածի հատման երկրորդ կետն է:

Դիցուք FK և GL ուղիղները տարբեր են և հատվում են X կետում: Ապացուցեք, որ X կետը պատկանում է AO ուղղին:

Խնդիր 5: Դիցուք \mathbb{R} -ը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է: Գտեք բոլոր $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիաները, որոնք կամայական x և y իրական թվերի համար բավարարում են

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

հավասարությանը:

Խնդիր 6: a_1, a_2, \dots ամբողջ թվերի հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ կամայական $j \geq 1$ թվերի համար;

(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ կամայական $1 \leq k < l$ թվերի համար:

Ապացուցեք, որ գոյություն ունի երկու դրական ամբողջ b և N թվեր այնպես, որ $n > m \geq N$ պայմանին բավարարող բոլոր m և n ամբողջ թվերի համար տեղի ունի

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2:$$