International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Swedish**

Day: **1**

Måndag, den 18 juli, 2011

Uppgift 1. För varje mängd $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ bestående av fyra olika positiva heltal betecknas summan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ med s_A. Låt n_A beteckna antalet par (i, j), där $1 \leq i < j \leq 4$, för vilka $a_i + a_j$ är en delare till s_A.

Finn alla mängder A bestående av fyra olika positiva heltal för vilka n_A är det största möjliga.

Uppgift 2. Låt $\mathcal{S}$ vara en ändlig mängd bestående av minst två punkter i planet. Anta att tre punkter ur $\mathcal{S}$ aldrig är kolinjära. En *väderkvarn* kallar vi här ett förfarande som börjar med en linje ℓ som går genom en enda punkt $P \in \mathcal{S}$. Linjen ℓ roterar sedan medurs med P som *rotationscentrum* tills den för första gången stöter på ytterligare en punkt från $\mathcal{S}$. Denna punkt, Q, tar då över som rotationscentrum och linjen roterar nu medurs runt Q, tills den för första gången stöter på en annan punkt ur $\mathcal{S}$. Processen fortsätter så i all oändlighet.

Visa att man kan välja en punkt $P \in \mathcal{S}$ och en linje ℓ genom P, så att varje punkt ur $\mathcal{S}$ används oändligt många gånger som rotationscentrum av den resulterande väderkvarnen.

Uppgift 3. Låt f vara en funktion från mängden av de reella talen $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, som uppfyller

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

för alla reella tal x och y. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \leq 0$.

Tisdag, den 19 juli, 2011

Uppgift 4. Låt $n > 0$ vara ett heltal. Vi har en balansvåg med två skålar och n vikter som väger $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vikterna ska placeras på vågen, en efter en, på sådant sätt att den högra vågskålen aldrig väger mer än den vänstra. I varje steg väljs en av de vikterna som inte har placerats än och läggs i den vänstra eller den högra skålen. Proceduren avslutas när alla vikter ligger på vågen.

På hur många olika sätt kan detta göras?

Uppgift 5. Låt f vara en funktion från mängden av alla heltal till mängden av de positiva heltalen. Anta att skillnaden $f(m) - f(n)$ är delbar med $f(m - n)$ för varje två heltal m och n.

Visa att för alla heltal m och n sådana att $f(m) \leq f(n)$, är talet $f(n)$ delbart med $f(m)$.

Uppgift 6. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med omskriven cirkel Γ. Låt ℓ vara en tangent till Γ, och låt ℓ_a, ℓ_b och ℓ_c vara de linjer som fås genom att spegla ℓ i linjerna BC, CA och AB, respektive.

Visa att cirkeln omskriven kring triangeln som bestäms av linjerna ℓ_a, ℓ_b och ℓ_c tangerar cirkeln Γ.

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng