

Pazartesi, 9 Temmuz 2018

Soru 1. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberi Γ olsun. $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçaları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları $|AD| = |AE|$ olacak şekilde alınıyor. $[BD]$ ve $[CE]$ nin orta dikmeleri Γ nın küçük \widehat{AB} ve \widehat{AC} yaylarını sırasıyla F ve G noktalarında kesiyor. DE ve FG doğrularının paralel olduklarını veya aynı doğru olduklarını gösteriniz.

Soru 2. Hangi $n \geq 3$ tam sayıları için, $a_{n+1} = a_1$ ve $a_{n+2} = a_2$ olup her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

eşitliğini sağlayan a_1, a_2, \dots, a_{n+2} gerçel sayıları bulunur?

Soru 3. Eşkenar üçgen şeklindeki bir sayı dizilişinde en alttaki satır dışındaki her bir sayı kendisinin hemen altındaki iki sayının farkının mutlak değerine eşitse bu dizilişe bir *tuhaf Pascal üçgeni* diyelim. Örneğin, aşağıda 1 den 10 a kadar tüm tam sayıları içeren dört satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni gösterilmiştir.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

1 den $1 + 2 + \dots + 2018$ sayısına kadar tüm tam sayıları içeren 2018 satırlı bir tuhaf Pascal üçgeni var mıdır?

Salı, 10 Temmuz 2018

Soru 4. Koordinat düzleminde, x ve y nin 20 den küçük veya eşit pozitif tam sayılar olduğu her (x, y) noktasına *yuva* diyelim.

Başlangıçta, 400 yuvanın hiç biri taş içermiyor. İlk hamleyi Aslı yapmak üzere Aslı ve Burcu sırayla hamle yapıyorlar. Aslı her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir kırmızı taşı, kırmızı taş içeren herhangi iki yuvanın arasındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten farklı olmak koşuluyla yerleştiriyor. Burcu her hamlesinde, taş içermeyen bir yuvaya yeni bir mavi taş yerleştiriyor. (Mavi taş içeren bir yuva ile diğer herhangi bir yuvanın arasındaki uzaklık ile ilgili herhangi bir koşul yoktur.) Sırası gelen kişi hamle yapamıyorsa, iki kişi de taş yerleştirmeyi bırakıyor.

Burcu mavi taşlarını nasıl yerleştirirse yerleştirsin, Aslı en az K adet kırmızı taş yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, K nin alabileceği en büyük değer nedir?

Soru 5. Bir a_1, a_2, \dots sonsuz pozitif tam sayı dizisi ile bir $N > 1$ tam sayısı için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ifadesi, her $n \geq N$ için bir tam sayıya eşit oluyor. Her $m \geq M$ için $a_m = a_{m+1}$ olacak şekilde bir M pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

Soru 6. Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ eşitliği sağlamıyor. $ABCD$ nin iç bölgesindeki bir X noktası

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ve} \quad \angle XBC = \angle XDA$$

eşitliklerini sağlıyor. $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.