E martë, 18 Korrik 2017

Problemi 1. Për çdo numër të plotë $a_0 > 1$, përcaktohet vargu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i tillë që:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{në qoftë se } \sqrt{a_n} \text{ është numër i plotë,} \\ a_n + 3 & \text{ndryshe,} \end{cases} \qquad \text{për çdo } n \geqslant 0.$$

Të gjenden të gjitha vlerat e a_0 për të cilat gjendet një numër A që $a_n = A$ për një numër të pafundëm vlerash të n-së.

Problemi 2. Le të jetë $\mathbb{R}$ bashkësia e numrave realë. Të gjenden të gjitha funksionet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tilla që, për çdo dy numra realë x dhe y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problemi 3. Një gjahtar dhe një lepur i padukshëm zhvillojnë së bashku një lojë në planin Euklidian. Pika, A_0, në të cilën është pozicionuar fillimisht lepuri dhe pika B_0, në të cilën është pozicionuar fillimisht gjahtari, përputhen me njëra tjetrën. Pas $n-1$ raundesh loje, lepuri është pozicionuar në pikën A_{n-1} dhe gjahtari është pozicionuar në pikën B_{n-1}. Në raundin e $n^{\text{të}}$ të lojës, realizohen në renditjen e dhënë tre kushtet e mëposhtme.

(i) Lepuri lëviz në mënyrë të padukshme duke u pozicionuar në pikën A_n në mënyrë të tillë që largësia midis pikave A_{n-1} dhe A_n është ekzaktësisht 1.

(ii) Një pajisje gjurmuese për lepurin i raporton gjahtarit një pikë P_n. E vetmja garanci që i siguron pajisja gjahtarit është që largësia midis pikave P_n dhe A_n është të shumtën 1.

(iii) Gjahtari lëviz në mënyrë të dukshme dhe pozicionohet në pikën B_n në mënyrë të tillë që largësia midis pikave B_{n-1} dhe B_n është ekzaktësisht 1.

A është gjithmonë e mundur që, sido që të lëvizë lepuri, dhe cilado që të jetë pika që i raportohet gjahtarit nga pajisja gjurmuese, gjahtari të zgjedhë mënyrën se si ai të lëvizë që pas 10^9 raundesh loje të sigurojë që largësia midis tij dhe lepurit të jetë të shumtën 100?

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë

E mërkurë, 19 Korrik 2017

Problemi 4. Le të jenë R dhe S dy pika të ndryshme të cilat ndodhen në një rreth Ω të tilla që RS nuk është diametër i tij. Drejtëza ℓ është tagente me rrethin Ω në pikën R. Pika T merret e tillë që pika S është mesi i segment drejtëzës RT. Pika J merret në harkun më të shkurtër RS të rrethit Ω në mënyrë të tillë që rrethi Γ që i jashtëshkruhet trekëndëshit JST pret drejtëzën ℓ në dy pika të ndryshme. Le të jetë A pika e përbashkët e rrethit Γ dhe drejtëzës ℓ që ndodhet më afër pikës R. Drejtëza AJ pret përsëri rrethin Ω në pikën K. Vërtetoni që drejtëza KT është tagente me rrethin Γ.

Problemi 5. Jepet numri i plotë $N \geqslant 2$. Një grup prej $N(N+1)$ futbollistësh, ku çdo dy prej tyre kanë gjatësi të ndryshme, janë vendosur në një rresht. Sër Aleksi dëshiron të heq nga ky rresht $N(N-1)$ futbollistë duke lënë në rreshtin që rezulton $2N$ futbollistë për të cilin vlejnë N kushtet e mëposhtme:

(1) nuk ndodhet asnjë futbollist midis dy futbollistëve më të gjatë,

(2) nuk ndodhet asnjë futbollist midis dy futbollistëve me gjatësinë e tretë dhe të katërt më të madhe,

$\vdots$

(N) nuk ndodhet asnjë futbollist midis dy futbollistëve me gjatësinë më të vogël.

Tregoni se një situatë e tillë është gjithmonë e mundur.

Problemi 6. Një çift i renditur (x, y) numrash të plotë është *pikë primitive* në qoftë se pjesëtuesi më i madh i përbashkët i x dhe y është 1. Në qoftë se jepet një bashkësi e fundme pikash primitive S, tregoni se gjendet një numër i plotë pozitiv n dhe numrat e plotë a_0, a_1, $\ldots$, a_n të tillë që, për çdo (x, y) në S, të kemi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$