Ponedjeljak, 18. jul 2011.

Zadatak 1. Za skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čiji su elementi četiri različita prirodna broja, sa s_A označimo zbir $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Označimo sa n_A broj parova $(i, j), 1 \le i < j \le 4$, takvih da je s_A djeljivo sa $a_i + a_j$.

Naći sve skupove A čiji su elementi četiri različita prirodna broja, za koje n_A dostiže najveću moguću vrijednost.

Zadatak 2. Neka je $\mathcal{S}$ konačan skup tačaka u ravni koji sadrži bar dvije tačke. U skupu $\mathcal{S}$ ne postoje tri tačke koje leže na istoj pravoj. *Vjetrenjačom* ćemo zvati sljedeći proces. Prvo biramo pravu ℓ na kojoj se nalazi tačno jedna tačka $P \in \mathcal{S}$. Prava ℓ rotira oko centra P u smjeru kretanja kazaljke na satu sve dok se na njoj ne nađe neka tačka iz $\mathcal{S}$ različita od P. U tom trenutku ta tačka, označimo je sa Q, postaje novi centar rotacije a prava ℓ nastavlja da rotira u smjeru kretanja kazaljke na satu sve dok se na njoj ne nađe neka tačka iz $\mathcal{S}$ različita od Q. Proces traje beskonačno dugo.

Dokazati da je moguće izabrati neku tačku P iz $\mathcal{S}$ i neku pravu ℓ, pri čemu prava ℓ sadrži tačku P i nijednu drugu tačku iz $\mathcal{S}$, tako da je u *vjetrenjači* koja počinje sa pravom ℓ, svaka od tačaka iz $\mathcal{S}$ centar rotacije beskonačno mnogo puta.

Zadatak 3. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x + y) \le yf(x) + f(f(x))$$

za sve realne brojeve x i y.

Dokazati da je $f(x) = 0$ za svako $x \le 0$.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena

Utorak, 19. jul 2011.

Zadatak 4. Dat je prirodan broj n. Imamo vagu sa tasovima i n tegova čije su težine $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Svih n tegova se jedan za drugim razmješta na tasove, odnosno u svakom od n koraka bira se teg, koji još nije smješten na vagu i smješta se na lijevi ili desni tas; pri tome teg se stavlja tako da ni u jednom trenutku težina na desnom tasu nije veća od one na lijevom. Odrediti broj načina na koji se može sprovesti ovaj niz koraka.

Zadatak 5. Neka je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takva da je za sve cijele brojeve m i n razlika $f(m) - f(n)$ djeljiva sa $f(m-n)$.

Dokazati da je, za sve cijele brojeve m i n za koje je $f(m) \leqslant f(n)$, broj $f(n)$ djeljiv sa $f(m)$.

Zadatak 6. Neka je ABC oštrougli trougao i neka je Γ njegova opisana kružnica. Neka je ℓ proizvoljna tangenta na kružnici Γ i neka su ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c prave simetrične pravoj ℓ u odnosu na prave BC, CA i AB, redom.

Dokazati da kružnica opisana oko trougla određenog pravama ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c dodiruje kružnicu Γ.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena