sestdiena, 8. jūlijs 2023

1. uzdevums. Atrast visus saliktus skaitļus $n > 1$, kuriem piemīt īpašība: ja $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n pozitīvie dalītāji, kur $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, tad skaitlis d_i dala skaitli $d_{i+1} + d_{i+2}$ katram $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

2. uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram izpildās $AB < AC$. Ar Ω apzīmēsim trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju. Punks S ir riņķa līnijas Ω loka CB, kurš satur punktu A, viduspunkts. Perpendikuls no punkta A pret taisni BC krusto nogriezni BS punktā D un riņķa līniju Ω punktā $E \neq A$. Taisne, kas satur punktu D un ir paralēla taisnei BC, krusto taisni BE punktā L. Apzīmēsim trijstūra BDL apvilkto riņķa līniju ar ω. Pieņemsim, ka ω krusto Ω punktā $P \neq B$.
Pierādīt, ka pieskare riņķa līnijai ω punktā P krusto taisni BS punktā, kurš atrodas uz leņķa $\angle BAC$ iekšējās bisektrises.

3. uzdevums. Katram naturālam skaitlim $k \geqslant 2$ atrast visas bezgalīgas naturālu skaitļu virknes $a_1, a_2, \ldots$, kurām piemīt īpašība, ka eksistē polinoms P formā $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, kur $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ir nenegatīvi veseli skaitļi, un

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

katram naturālam skaitlim $n \geqslant 1$.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

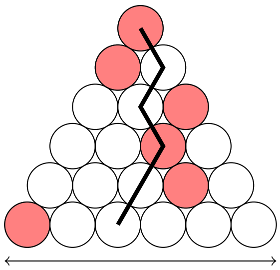
svētdiena, 9. jūlijs 2023

4. uzdevums. Doti pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$, kuri ir pa pāriem dažādi, ar īpašību, ka skaitlis

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

ir vesels skaitlis katram $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Pierādīt, ka $a_{2023} \geqslant 3034$.

5. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n. *Japānas trijstūris* sastāv no $1 + 2 + \cdots + n$ riņķa līnijām, kuras ir izkārtotas vienādmalu trijstūra formā tā, lai katram $i = 1, 2, \ldots, n$ ir spēkā, ka $i^{\text{tā}}$ rinda satur i riņķa līnijas, tieši viena no kurām ir nokrāsota sarkana. Par *nindžas ceļu* Japānas trijstūrī sauksim ceļu no n riņķa līnijām, kurš sākas augšējās rindas riņķa līnijā, un tad katrai izvēlētajai riņķa līnijai aiziet uz vienu no divām riņķa līnijām zem tās, līdz tas beidzas apakšējā rindā. Šeit ir piemērs Japānas trijstūrim, kad $n = 6$, ar nindžas ceļu, kurš satur divas sarkanas riņķa līnijas.



Kā funkciju no n, atrast lielāko naturālo skaitli k ar īpašību, ka jebkuram Japānas trijstūrim eksistē nindžas ceļš, kurš satur vismaz k sarkanas riņķa līnijas.

6. uzdevums. Dots vienādmalu trijstūris ABC. Punkti A_1, B_1, C_1 atrodas ABC iekšpusē ar īpašību, ka $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ un

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Taisnes BC_1 un CB_1 krustojas punktā A_2, taisnes CA_1 and AC_1 krustojas punktā B_2, taisnes AB_1 un BA_1 krustojas punktā C_2.
Pierādīt, ka, ja trijstūris $A_1B_1C_1$ ir dažādmalu, tad trijstūru AA_1A_2, BB_1B_2 un CC_1C_2 apvilktās riņķa līnijas visas satur divus kopīgus punktus.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.