

Version Croatian

Srijeda, 25. srpnja 2007.

Zadatak 1. Dani su realni brojevi a_1, a_2, \dots, a_n . Za svako i ($1 \leq i \leq n$), definirano je

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

i

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokaži da za svake realne brojeve $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, vrijedi

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Pokaži da postoji realni brojevi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ takvi da u (*) vrijedi jednakost.

Zadatak 2. Promatraj pet točaka A, B, C, D i E takvih da je $ABCD$ paralelogram a $BCED$ tetivni četverokut. Neka je ℓ pravac koji prolazi točkom A . Prepostavi da ℓ siječe dužinu \overline{CD} u unutrašnjoj točki F i pravac BC u G . Prepostavimo da je $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokaži da je ℓ simetrala kuta DAB .

Zadatak 3. Na matematičkom natjecanju neki natjecatelji su prijatelji. Prijateljstvo je uzajamno obostrano. Grupu natjecatelja zvat ćemo *družina* ako su svaka dva među njima prijatelji. (Specijalno, grupa s manje od dva natjecatelja je družina.) Broj članova družine zvat ćemo njezinom *veličinom*.

Ako je na tom natjecanju najveća veličina družine paran broj, dokaži da se natjecatelji mogu smjestiti u dvije prostorije tako da najveća veličina družinâ u jednoj prostoriji bude jednaka najvećoj veličini družinâ u drugoj.

*Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijeđi 7 bodova*

Croatian Version

Četvrtak, 26. srpnja 2007.

Zadatak 4. U trokutu ABC simetrala kuta BCA siječa opisanu mu kružnicu ponovo u točki R , simetralu stranice \overline{BC} u P , a simetralu strane \overline{AC} u Q . Polovište stranice \overline{BC} je K , a polovište stranice \overline{AC} je L . Dokaži da su površine trokuta RPK i RQL jednake.

Zadatak 5. Neka su a i b pozitivni cijeli brojevi. Pokaži da ako $4ab - 1$ dijeli $(4a^2 - 1)^2$, tada je $a = b$.

Zadatak 6. Neka je n pozitivan cijeli broj. Promatraj

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kao skup od $(n+1)^3 - 1$ točaka u trodimenzionalnom prostoru. Odredi najmanji mogući broj ravnina, čija unija sadrži sve točke skupa S , ali ne sadrži točku $(0, 0, 0)$.

*Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijeđi 7 bodova*