الثلاثاء, 16. جويليه 2024

مسألة 1. أوجد كل الأعداد الحقيقية α بحيث مهما كان العدد الطبيعي المخالف للصفر n، تكون العبارة

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

من مضاعفات العدد n. ($\lfloor z \rfloor$ يرمز إلى أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي z. مثلاً $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ و $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

مسألة 2. أوجد كل الأزواج (a, b) من الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر بحيث يوجد عددان طبيعيان مخالفان للصفر g و N يحققان

$$\mathrm{pgcd}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

مهما كان العدد الطبيعي $n \geqslant N$. ($\mathrm{pgcd}(x, y)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين x و y.)

مسألة 3. لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتالية من الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر، وليكن N عدداً طبيعياً مخالفاً للصفر. نفترض أنّه أياً كان $n > N$ ، يكون a_n مساوياً لعدد مرات ظهور العدد a_{n-1} في القائمة $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

أثبت أنّ متتالية على الأقل من المتتاليتين $a_1, a_3, a_5, \ldots$ و $a_2, a_4, a_6, \ldots$ دوريّة بدءاً من حدّ معيّن.

(نقول إنّ متتالية $b_1, b_2, b_3, \ldots$ دورية بدءاً من حدّ معيّن إذا وُجِد عددان طبيعيان مخالفان للصفر p و M بحيث يكون $b_{m+p} = b_m$ أياً كان $m \geqslant M$.)

الأربعاء, 17، جويليه 2024

مسألة 4. ليكن ABC مثلثاً بحيث $AB < AC < BC$. نرمز بالرمز I إلى مركز الدائرة ω الداخلية في المثلث ABC. لتكن X النقطة من المستقيم BC المختلفة عن C بحيث يكون المستقيم الموازي للمستقيم AC والمار بالنقطة X مماساً للدائرة ω. بالمثل، لتكن Y النقطة من المستقيم BC المختلفة عن B بحيث يكون المستقيم الموازي للمستقيم AB والمار بالنقطة Y مماساً للدائرة ω. يقطع AI الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مجدداً في $P \neq A$. ليكن K و L منتصفي AC و AB، بالترتيب. أثبت أنّ $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

مسألة 5. يلعب الحلزون سريع لعبة على رقعة مؤلفة من 2024 سطراً و2023 عموداً. هناك وحوشٌ مختبئة في 2022 خانة من خانات الرقعة. في البدء، لا يعرف سريع أماكن وجود الوحوش، ولكنه يعرف أنّه يوجد بالتحديد وحشٌ واحدٌ فقط في كل سطر باستثناء السطرين الأوّل والأخير، وأن كلّ عمود يحوي وحشاً واحداً على الأكثر. يقوم سريع بعدّة محاولات لينتقل من السطر الأوّل إلى السطر الأخير. في كلّ محاولة يبدأ من خانة يختارها من السطر الأوّل، ثمّ ينتقل تكراراً من خانة إلى خانة تجاورها تشترك معها بضلع. (يسمح لسريع أثناء حركته بالعودة إلى خانة زارها سابقاً.) إذا وصل سريع إلى خانة تحوي وحشاً، تنتهي محاولته، ويرجع إلى السطر الأوّل ليبدأ محاولة جديدة. الوحوش لا تتحرّك، وسريع يتذكّر ما إذا كانت خانة قد زارها سابقاً تحوي وحشاً أو لا. إذا وصل سريع إلى خانة في السطر الأخير، تنتهي محاولته، وتتوقف اللعبة. عيّن العدد الأصغري n الذي يكون في حالته لسريع إستراتيجية تضمن له الوصول إلى السطر الأخير في المحاولة رقم n أو قبل ذلك، وذلك بقطع النظر عن مواقع الوحوش على الرقعة.

مسألة 6. لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الكسرية النسبية. نقول عن دالة $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ إنها **جيدة** إذا حقّقت الخاصة الآتية: مهما كان x, y من $\mathbb{Q}$، يكون

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{أو} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

أثبت وجود عدد صحيح c بحيث، في حالة أي دالة جيدة f، توجد أعداد كسرية نسبية مختلفة عددها c على الأكثر من الصيغة $f(r) + f(-r)$، حيث r عدد كسري نسبي ما، وأوجِدْ أصغر قيمة ممكنة للعدد c.