



Уторак, 10.07.2012.

**1. задатак** У троуглу  $ABC$  тачка  $J$  је центар споља приписане кружнице наспрам тјемена  $A$ . Ова кружница додирује страницу  $BC$  у тачки  $M$ , а продужетке страница  $AB$  и  $AC$  у тачкама  $K$  и  $L$ , редом. Праве  $LM$  и  $BJ$  се сијеку у тачки  $F$ , а праве  $KM$  и  $CJ$  у тачки  $G$ . Нека је  $S$  пресјечна тачка правих  $AF$  и  $BC$ , а нека је  $T$  пресјечна тачка правих  $AG$  и  $BC$ .

Доказати да је  $M$  средиште дужи  $ST$ .

(Споља приписана кружница троугла  $ABC$  наспрам тјемена  $A$  је кружница која додирује страницу  $BC$  и продужетке страница  $AB$  и  $AC$ .)

**2. задатак** Нека је  $n \geq 3$  природан број и нека су  $a_2, a_3, \dots, a_n$  позитивни реални бројеви такви да је  $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ . Доказати да вриједи

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

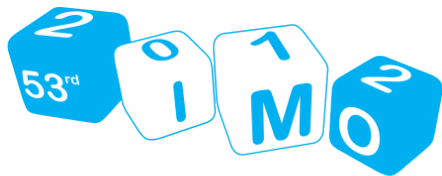
**3. задатак** *Погађалица* је игра коју играју два играча,  $A$  и  $B$ . Правила игре зависе од природних бројева  $k$  и  $n$  који су познати и једном и другом играчу.

На почетку игре играч  $A$  бира природне бројеве  $x$  и  $N$ , такве да је  $1 \leq x \leq N$ . Играч  $A$  не саопштава информацију о броју  $x$ , а саопштава тачну вриједност броја  $N$  играчу  $B$ . Након тога играч  $B$  покушава да добије информације о броју  $x$  постављајући играчу  $A$  питања следећег облика: у сваком питању играч  $B$  бира произвољан подскуп  $S$  скупа природних бројева (може бирати исти подскуп више пута) и пита играча  $A$  да ли број  $x$  припада скупу  $S$ . Играч  $B$  може поставити питања колико жели. Након сваког питања играч  $A$  мора одмах одговорити са *да* или *не*, али смије лагати колико год пута жели; једино ограничење је да међу произвољних  $k+1$  узастопних одговора барем један мора бити истинит.

Након што  $B$  постави онолико питања колико сматра потребним, он мора одабрати скуп  $X$  који се састоји од највише  $n$  природних бројева. Ако број  $x$  припада скупу  $X$  онда  $B$  побеђује; иначе  $B$  губи.

Доказати да:

1. Ако је  $n \geq 2^k$ , онда играч  $B$  може гарантовати побједу.
2. За свако довољно велико  $k$ , постоји природан број  $n \geq 1, 99^k$  такав да играч  $B$  не може гарантовати побједу.



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Serbian (BIH)

Day: 2

Сриједа, 11.07.2012.

**4. задатак** Одредити све функције  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  такве да, за све цијеле бројеве  $a, b, c$  који задовољавају  $a + b + c = 0$ , вриједи следећа једнакост:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Скуп  $\mathbb{Z}$  је скуп цијелих бројева.)

**5. задатак** Нека је  $ABC$  троугао у коме је  $\angle BCA = 90^\circ$  и нека је  $D$  подножје висине из тјемена  $C$ . Нека је  $X$  тачка на дужи  $CD$  различита од крајева те дужи. Нека је  $K$  тачка на дужи  $AX$  таква да је  $BK = BC$ . Аналогно, нека је  $L$  тачка на дужи  $BX$  таква да је  $AL = AC$ . Нека је  $M$  пресјечна тачка правих  $AL$  и  $BK$ .

Доказати да је  $MK = ML$ .

**6. задатак** Одредити све природне бројеве  $n$  за које постоје ненегативни цијели бројеви  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такви да вриједи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Serbian (BIH)

Вријеме рада: 4 сата и 30 минута  
Сваки задатак вриједи 7 поена