Lunedì, 11 luglio 2022

Problema 1. La “Bank of Oslo” conia monete di due tipi: di argento (indicate con A) e di bronzo (indicate con B). Milena ha n monete d’argento e n monete di bronzo, che sono allineate inizialmente da sinistra a destra in un qualche ordine arbitrario. Una *catena* è una qualunque sequenza di monete consecutive dello stesso tipo. Fissato un intero positivo $k \leqslant 2n$, Milena esegue ripetutamente la seguente operazione: identifica la catena più lunga che contiene la k-esima moneta da sinistra e sposta tutte le monete di quella catena all’estremità sinistra della fila. Per esempio, se $n = 4$ e $k = 4$, partendo dalla disposizione $AABBBABA$ si ottiene in successione

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Determinare tutte le coppie (n, k) con $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tali che, per ogni disposizione iniziale, a un certo momento durante la procedura le n monete più a sinistra sono tutte dello stesso tipo.

Problema 2. Sia $\mathbb{R}_{>0}$ l’insieme dei numeri reali positivi.

Determinare tutte le funzioni $f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste esattamente un $y \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problema 3. Sia k un intero positivo e sia S un insieme finito di numeri primi dispari. Dimostrare che c’è al massimo un modo (a meno di rotazioni e riflessioni) di disporre gli elementi di S intorno a una circonferenza in modo che ogni prodotto di due numeri che sono vicini sia della forma $x^2 + x + k$ per qualche intero positivo x.

Language: Italian

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 7 punti.

Martedì, 12 luglio 2022

Problema 4. Sia $ABCDE$ un pentagono convesso tale che $BC = DE$. Supponiamo che esista un punto T interno a $ABCDE$ tale che $TB = TD$, $TC = TE$ e $\angle ABT = \angle TEA$. La retta AB interseca le rette CD e CT, rispettivamente, nei punti P e Q; supponiamo che i punti P, B, A, Q compaiano sulla retta in quest'ordine. Analogamente, la retta AE interseca le rette CD e DT, rispettivamente, nei punti R e S; supponiamo che i punti R, E, A, S compaiano sulla retta in quest'ordine.

Dimostrare che i punti P, S, Q, R appartengono a una stessa circonferenza.

Problema 5. Determinare tutte le terne (a, b, p) di interi positivi con p primo tali che

$$a^p = b! + p.$$

Problema 6. Sia n un intero positivo. Un *quadrato nordico* è una tabella $n \times n$ che contiene tutti gli interi da 1 a n^2 in modo che in ogni casella ci sia esattamente un numero. Due caselle distinte sono considerate adiacenti se hanno un lato in comune. Ogni casella che è adiacente solo a caselle che contengono numeri più grandi è chiamata una *valle*. Un *cammino ascendente* è una sequenza di una o più caselle tali che:

(i) la prima casella della sequenza è una valle,

(ii) due caselle consecutive della sequenza sono sempre adiacenti,

(iii) i numeri contenuti nelle caselle della sequenza sono in ordine crescente.

Determinare, in funzione di n, il minimo numero possibile di cammini ascendenti presenti in un quadrato nordico.

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 7 punti.