Dinsdag 16 juli 2019

Opgave 1. Laat $\mathbb{Z}$ de verzameling van gehele getallen zijn. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zodanig dat

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

voor alle gehele getallen a en b.

Opgave 2. In driehoek ABC ligt punt A_1 op lijnstuk BC en punt B_1 op lijnstuk AC. Laat P en Q punten op de lijnstukken AA_1 respectievelijk BB_1 zijn zodanig dat PQ evenwijdig is met AB. Zij P_1 een punt op lijn PB_1 zodanig dat B_1 (strikt) tussen P en P_1 ligt en $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analoog, zij Q_1 een punt op lijn QA_1 zodanig dat A_1 (strikt) tussen Q en Q_1 ligt en $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Bewijs dat de punten P, Q, P_1 en Q_1 op een cirkel liggen.

Opgave 3. Een sociaalnetwerksite heeft 2019 gebruikers van wie sommige paren vrienden zijn. Als gebruiker A bevriend is met gebruiker B, dan is gebruiker B ook bevriend met gebruiker A. Gebeurtenissen van de volgende soort kunnen herhaaldelijk een voor een plaatsvinden:

> Drie gebruikers A, B en C zodat A bevriend is met zowel B als C, maar B en C niet bevriend zijn, veranderen hun vriendschapsstatussen zodanig dat B en C vrienden worden, maar A niet langer bevriend is met B noch met C. Alle overige vriendschapsstatussen blijven onveranderd.

In het begin hebben 1010 gebruikers ieder 1009 vrienden en hebben 1009 gebruikers ieder 1010 vrienden. Bewijs dat er een reeks van zulke gebeurtenissen bestaat zodanig dat op het eind iedere gebruiker bevriend is met ten hoogste een andere gebruiker.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

Woensdag 17 juli 2019

Opgave 4. Bepaal alle paren (k, n) van positieve gehele getallen zodanig dat

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Opgave 5. De Bank van Bath geeft munten uit met een H op de ene kant en een T op de andere kant. Harry heeft n van deze munten van links naar rechts op een rij gelegd. Hij voert herhaaldelijk de volgende handeling uit: als er precies $k \geqslant 1$ munten zijn die met de H naar boven liggen, dan draait hij de k^{de} munt van links om; als alle munten met de T naar boven liggen, dan stopt hij.

Bijvoorbeeld, als $n = 3$ en hij start met de beginrij THT, dan krijgt hij achtereenvolgens $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ en stopt hij na drie handelingen.

(a) Bewijs dat Harry voor elke beginrij na een eindig aantal handelingen stopt.

(b) Voor elke beginrij C definiëren we $L(C)$ als het aantal handelingen totdat Harry stopt. Bijvoorbeeld: $L(THT) = 3$ en $L(TTT) = 0$. Bepaal de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle 2^n mogelijke beginrijen C.

Opgave 6. De ingeschreven cirkel ω van scherphoekige driehoek ABC met $|AB| \neq |AC|$ raakt de zijden BC, CA en AB in respectievelijk D, E en F, en heeft middelpunt I. De loodlijn op EF door D snijdt ω opnieuw in R. Lijn AR snijdt ω opnieuw in P. De omgeschreven cirkels van driehoeken PCE en PBF snijden elkaar opnieuw in Q.

Bewijs dat lijnen DI en PQ elkaar snijden op de loodlijn op AI door A.