Dushanba, 11 iyul, 2016 yil

1-masala. BCF uchburchakning B uchidagi burchak to‘g‘ri burchak bo‘lsin. CF to‘g‘ri chiziqda A nuqta olingan, bunda $FA = FB$ va F nuqta A va C nuqtalar orasida joylashgan. D nuqta shunday tanlanganki, bunda $DA = DC$ va AC - $\angle DAB$ ning bissektrisasi. E nuqta shunday tanlanganki, bunda $EA = ED$ va AD - $\angle EAC$ ning bissektrisasi. M nuqta CF kesmaning o‘rtasi bo‘lsin. $AMXE$ parallelogram bo‘ladigan X nuqta olingan (bu yerda $AM \parallel EX$ va $AE \parallel MX$). BD, FX va ME tog‘ri chiziqlar bir nuqtada kesishini isbotlang.

2-masala. Shunday musbat butun n sonlar barchasi topilsinki, ular uchun $n \times n$ o‘lchamdagi jadvalning har bir katagiga I, M va O harflardan bittasini yozish mumkin, bunda quyidagi shartlar bajariladi:

- jadvalning ixtiyoriy qatorida va ixtiyoriy ustunida aynan uchdan bir qismini I harflari, aynan uchdan bir qismini M harflari va aynan uchdan bir qismini O harflari tashkil qiladi; hamda
- kataklari soni uchga karrali bo‘lgan ixtiyoriy diagonalida aynan uchdan bir qismini I harflari, aynan uchdan bir qismini M harflari va aynan uchdan bir qismini O harflari tashkil qiladi.

Eslatma. Agar $n \times n$ o‘lchamdagi jadvalning qatorlari va ustunlari 1 dan boshlab n gacha bo‘lgan natural sonlar bilan oddiy tartibda nomerlansa, u holda har bir katakka musbat butun sonlarning (i, j) juftligi mos keladi, bu yerda $1 \le i, j \le n$. Bunda $n > 1$ uchun jadvalda ikki turdagi jami $4n - 2$ ta diagonallar bor. Birinchi turdagi diagonallar $i + j$ o‘zgarmas son bo‘ladigan (i, j) kataklardan, ikkinchi turdagi diagonallar esa $i - j$ o‘zgarmas son bo‘ladigan (i, j) kataklardan tashkil topgan.

3-masala. Koordinatalar tekisligida qavariq $P = A_1 A_2 \dots A_k$ ko‘pburchak berilgan. $A_1, A_2, \dots, A_k$ uchlar butun koordinatalarga ega bo‘lib, hammasi bitta aylanada yotibdi. P ko‘pburchakning yuzini S deb belgilaymiz. Berilgan toq butun musbat n son uchun P ning barcha tomonlari uzunliklarining kvadratlari butun sonlar bo‘lib, ular n ga qoldiqsiz bo‘linadi. $2S$ son n ga qoldiqsiz bo‘linadigan butun son ekanligini isbotlang.

Seshanba, 12 iyul, 2016 yil

4-masala. Musbat butun sonlardan tashkil topgan to'plam nozik deyiladi, agar unda kamida ikkita element bo'lsa hamda uning har bir elementi shu to'plamdagi kamida bitta boshqa elementi bilan umumiy tub bo'luvchiga ega bo'lsa. $P(n) = n^2 + n + 1$ bo'lsin. Shunday eng kichik b musbat butun sonni topingki, u uchun

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

to'plam nozik bo'ladigan nomanfiy butun a son mavjud.

5-masala. Doskada

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

tenglama yozilgan. Ko'rinib turibdiki, uning har tarafida 2016 tadan chiziqli ko'paytuvchi yozilgan. k ning eng kichik qiymatini topish talab qilinmoqda, bunda tenglamadagi 4032 ta chiziqli ko'paytuvchilardan aynan k tasi o'chirilsa, har bir tarafda kamida bitta ko'paytuvchi qoladi hamda hosil bo'lgan tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo'lmaydi.

6-masala. Tekislikda $n \geq 2$ ta kesma shunday joylashganki, ulardan har ikkitasi ichki nuqta bo'yicha kesishadi hamda xech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega emas. Botir har kesmaning ikki uchidan bittasini tanlab unga qurbaqani o'tirg'izmoqda, bunda qurbaqa shu kesmaning boshqa uchiga qarab o'tiradi. Bundan keyin Botir $n-1$ marta qarsak chalmoqda. Har bir qarsakda qurbaqalardan har biri zudlik bilan o'tirgan kesmadagi keyingi kesishish nuqtasiga olg'a sakramoqda. Bunda qurbaqalar o'zlarining sakrash yo'nalishlarini o'zgartirmaydilar. Botir boshida qurbaqalarni shunday o'tirg'izmoqchiki, bunda qurbaqalardan xech qaysi ikkitasi xech qachon bir vaqtda bitta kesishish nuqtasida bo'lmasin.

(a) Agar n - toq bo'lsa, u holda Botir o'z maqsadiga erisha olishini isbotlang.

(b) Agar n - juft bo'lsa, u holda Botir o'z maqsadiga xech qachon erisha olmasligini isbotlang.

Vaqt: 4 soat va 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi