

Language: Malay

Day: 1

Jumaat, 10 Julai 2015

**Soalan 1.** Kita katakan bahawa suatu set terhingga  $\mathcal{S}$  yang terdiri daripada titik-titik pada suatu satah adalah *seimbang* jika, bagi mana-mana dua titik berbeza  $A$  dan  $B$  dalam  $\mathcal{S}$ , wujud suatu titik  $C$  dalam  $\mathcal{S}$  sehingga  $AC = BC$ . Kita katakan bahawa  $\mathcal{S}$  adalah *bebas pusat* jika bagi mana-mana tiga titik berbeza  $A$ ,  $B$  dan  $C$  dalam  $\mathcal{S}$ , tidak wujud titik  $P$  dalam  $\mathcal{S}$  sehingga  $PA = PB = PC$ .

- Buktikan bahawa bagi semua integer  $n \geq 3$ , wujud suatu set seimbang yang terdiri daripada  $n$  titik.
- Tentukan semua integer  $n \geq 3$  dimana wujud suatu set seimbang dan bebas pusat yang terdiri daripada  $n$  titik.

**Soalan 2.** Tentukan semua tigaan integer positif  $(a, b, c)$  sehingga setiap satu daripada nombor

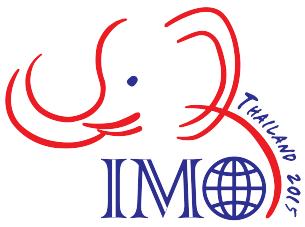
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

bersamaan suatu kuasaan 2.

(Suatu kuasaan 2 ialah suatu integer dalam bentuk  $2^n$ , dengan  $n$  sebarang integer bukan negatif.)

**Soalan 3.** Katakan  $ABC$  ialah suatu segitiga bersudut tirus dengan  $AB > AC$ . Katakan  $\Gamma$  ialah bulatan lilitnya,  $H$  ortopusatnya, dan  $F$  tapak altitud dari  $A$ . Katakan  $M$  ialah titik tengah bagi  $BC$ . Katakan  $Q$  ialah titik pada  $\Gamma$  sehingga  $\angle HQA = 90^\circ$ , dan katakan  $K$  ialah titik pada  $\Gamma$  sehingga  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Andaikan bahawa titik-titik  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  dan  $Q$  adalah berbeza, dan terletak pada  $\Gamma$  dalam aturan sedemikian.

Buktikan bahawa bulatan lilit bagi segitiga-segitiga  $KQH$  dan  $FKM$  adalah bertangen kepada satu sama lain.



Language: Malay

Day: 2

Sabtu, 11 Julai 2015

**Soalan 4.** Segitiga  $ABC$  mempunyai bulatan lilit  $\Omega$  dan pusat bulatan lilit  $O$ . Suatu bulatan  $\Gamma$  dengan pusat  $A$  bersilang dengan tembereng  $BC$  pada titik  $D$  dan  $E$ , sehingga  $B, D, E$  dan  $C$  adalah berbeza dan terletak pada garis  $BC$  dalam aturan sedemikian. Katakan  $F$  dan  $G$  ialah titik persilangan bagi  $\Gamma$  dan  $\Omega$ , sehingga  $A, F, B, C$  dan  $G$  terletak pada  $\Omega$  dalam aturan sedemikian. Katakan  $K$  ialah titik persilangan kedua bagi bulatan lilit segitiga  $BDF$  dan tembereng  $AB$ . Katakan  $L$  ialah titik persilangan kedua bagi bulatan lilit segitiga  $CGE$  dan tembereng  $CA$ .

Andaikan bahawa garis-garis  $FK$  dan  $GL$  adalah berbeza dan bersilang pada titik  $X$ . Buktikan bahawa  $X$  terletak pada garis  $AO$ .

**Soalan 5.** Katakan  $\mathbb{R}$  ialah set semua nombor nyata. Tentukan semua fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yang memenuhi persamaan

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

bagi semua nombor nyata  $x$  dan  $y$ .

**Soalan 6.** Jujukan integer  $a_1, a_2, \dots$  memenuhi syarat-syarat berikut:

- (i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  bagi semua  $j \geq 1$ ;
- (ii)  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  bagi semua  $1 \leq k < \ell$ .

Buktikan bahawa wujud dua integer positif  $b$  dan  $N$  sehingga

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

bagi semua integer  $m$  dan  $n$  yang memenuhi  $n > m \geq N$ .