Pondělí, 11. července 2016

Úloha 1. Trojúhelník BCF má pravý úhel u vrcholu B. Nechť A je bod na přímce CF takový, že $|FA| = |FB|$ a bod F leží mezi body A a C. Nechť D je bod takový, že $|DA| = |DC|$ a přímka AC je osou úhlu DAB. Dále nechť E je takový bod, že $|EA| = |ED|$ a přímka AD je osou úhlu EAC a nechť bod M je středem úsečky CF. Konečně nechť je X bod takový, že $AMXE$ je rovnoběžník (tedy $AM \parallel EX$ a $AE \parallel MX$). Dokažte, že přímky BD, FX a ME se protínají v jednom bodě.

Úloha 2. Nalezněte všechna kladná celá n pro něž je možné tabulku $n \times n$ zaplnit písmeny I, M a O (do každého políčka právě jeden znak) tak, že:

- v každém řádku i každém sloupci je třetina písmen I, třetina M a třetina O,
- na každé diagonále, jejíž počet políček je dělitelný třemi, je rovněž třetina písmen I, třetina M a třetina O.

Poznámka: Řádky a sloupce tabulky jsou očíslovány čísly od 1 do n. Každé políčko tabulky tak odpovídá dvojici přirozených čísel (i, j), kde $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pro $n > 1$, má tabulka $4n - 2$ *diagonál* dvou typů. Diagonály prvního typu sestávají ze všech políček (i, j), pro která je $i + j$ konstantní, diagonály druhého typu jsou pak tvořeny všemi políčky, pro která je $i - j$ konstantní.

Úloha 3. V rovině je dán konvexní mnohoúhelník $P = A_1A_2 \ldots A_k$. Vrcholy A_1, A_2, $\ldots$, A_k mají celočíselné souřadnice a leží na kružnici. Nechť S je obsah k-úhelníka P. Dále je dáno liché kladné celé n takové, že čtverce délek stran mnohoúhelníka P jsou přirozená čísla dělitelná číslem n. Dokažte, že $2S$ je přirozené číslo dělitelné číslem n.

Čas: 4 hodiny and 30 minut
Každá úloha je hodnocena až 7 body

Úterý, 12. července, 2016

Úloha 4. Množinu kladných celých čísel nazveme *voňavou*, jestliže obsahuje alespoň dva prvky a libovolný její prvek má nějakého (i více) společného prvočíselného dělitele s alespoň jedním jiným jejím prvkem. Uvažme polynom $P(n) = n^2 + n + 1$. Určete nejmenší celé kladné b, pro které existuje celé nezáporné a tak, že množnina

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

je voňavá.

Úloha 5. Na tabuli je napsána rovnice

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

sestávající z 2016 lineárních členů na každé straně. Určete minimální přirozené k, pro které je možné smazat právě k z těchto 4032 lineárních členů tak, že na každé straně zůstane alespoň jeden člen a výsledná rovnice nebude mít reálné řešení.

Úloha 6. V rovině je dáno n, $n \geqslant 2$, úseček tak, že se libovolné dvě z nich protínají ve vnitřním bodě obou, ale žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Pepa vybere koncový bod každé úsečky a umístí do něj žábu, směrem k druhému koncovému bodu. Poté $(n-1)$-krát tleskne. Na každé tlesknutí každá žába neprodleně poskočí na následující průsečík na své úsečce. Žádná žába nemění směr svých skoků. Pepa by chtěl umístit žáby tak, aby žádné dvě z nich nebyly po žádném tlesknutí ve stejném průsečíku.

(a) Dokažte, že Pepa tak může učinit, je-li n liché.

(b) Dokažte, že Pepa tak nemůže učinit, je-li n sudé.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Každá úloha je hodocena až 7 body