mandag, 21. september 2020

Opgave 1. Betragt en konveks firkant $ABCD$. Punktet P er et indre punkt i $ABCD$. Der gælder følgende :

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Vis at følgende tre linjer skærer hinanden i samme punkt: De indre vinkelhalveringslinjer til $\angle ADP$ og $\angle PCB$ og midtnormalen til linjestykket AB.

Opgave 2. De reelle tal a, b, c, d opfylder at $a \geq b \geq c \geq d > 0$ og $a + b + c + d = 1$. Vis at

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Opgave 3. Der er $4n$ sten som vejer henholdsvis $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Hver sten er farvet i én af n farver, og der er fire sten af hver farve. Vis at vi kan fordele stenene i to bunker så følgende to betingelser begge er opfyldt:

- Begge bunker af sten vejer det samme.
- Hver bunke indeholder to sten af hver farve.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

tirsdag, 22. september 2020

Opgave 4. Der er et helt tal $n > 1$. Der er n^2 stationer på en bjergside alle beliggende i forskellige højder. To svævebaneselskaber A og B har hver k svævebaner, og hver svævebane kører fra en station til en højere beliggende station (uden mellemliggende stop). De k svævebaner fra selskab A har k forskellige startstationer og k forskellige slutstationer, og en svævebane der starter højere end en anden, ender også højere end denne. De samme betingelser er opfyldt af B. Vi siger at to stationer er *forbundet* af et selskab hvis man kan starte på den lavere beliggende station og nå til den højere beliggende station ved at benytte én eller flere svævebaner fra dette selskab (ingen andre rejseformer mellem stationer er tilladt).

Bestem det mindste positive heltal k for hvilket der med sikkerhed findes to stationer der er forbundet af begge selskaber.

Opgave 5. En stak kort med $n > 1$ kort er givet. Der står et positivt helt tal på hvert kort. Kortstakken har den egenskab at for hvert par af kort er det aritmetiske gennemsnit af tallene på disse to kort også det geometriske gennemsnit af tallene på et udvalg af ét eller flere kort.

For hvilke n følger det at tallene på alle kortene er ens?

Opgave 6. Vis at der findes en positiv konstant c så følgende er sandt:

Betragt et helt tal $n > 1$, og lad $\mathcal{S}$ være en mængde af n punkter i planen så afstanden mellem vilkårlige to forskellige punkter i $\mathcal{S}$ er mindst 1. Der findes da en linje ℓ der deler $\mathcal{S}$ så afstanden fra et vilkårligt punkt i $\mathcal{S}$ til ℓ er mindst $cn^{-1/3}$.

(En linje ℓ *deler* en mængde af punkter $\mathcal{S}$ hvis der findes et linjestykke mellem to punkter i $\mathcal{S}$ som skærer ℓ).

Bemærkning: Svagere resultater hvor $cn^{-1/3}$ er erstattet af $cn^{-\alpha}$, kan blive tildelt point afhængig af værdien af konstanten $\alpha > 1/3$.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.