*2023* 년 *7* 월 *8* 일 토요일

**문제 1.** 다음 조건을 만족하는 합성수 $n > 1$ 을 모두 구하여라.

> (조건) $d_1, d_2, \ldots, d_k$ 가 $n$ 의 모든 양의 약수이고 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ 일 때, 모든 $1 \leqslant i \leqslant k-2$ 에 대하여 $d_i$ 는 $d_{i+1} + d_{i+2}$ 를 나눈다.

**문제 2.** 예각삼각형 $ABC$ 에 대하여 $AB < AC$ 이다. 삼각형 $ABC$ 의 외접원 $\Omega$ 에서 점 $A$ 를 포함하는 호 $\widehat{CB}$ 의 중점을 $S$ 라 하자. 변 $BC$ 에 수직이고 $A$ 를 지나는 직선이 $BS$ 와 점 $D$ 에서 만나고, $\Omega$ 와는 점 $E \neq A$ 에서 또 만난다. 점 $D$ 를 지나고 $BC$ 에 평행한 직선이 직선 $BE$ 와 점 $L$ 에서 만난다. 삼각형 $BDL$ 의 외접원 $\omega$ 와 $\Omega$ 가 만나는 점을 $P \neq B$ 라 하자. 원 $\omega$ 의 점 $P$ 에서의 접선이 직선 $BS$ 와 만나는 점이 $\angle BAC$ 의 내각의 이등분선 위에 있음을 보여라.

**문제 3.** 각 정수 $k \geqslant 2$ 에 대하여, 다음 조건을 만족하는 양의 정수로 이루어진 무한수열 $a_1, a_2, \ldots$ 을 모두 구하여라.

> (조건) 다항식 $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ (단, $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ 은 음이 아닌 정수) 가 존재하여, 모든 정수 $n \geqslant 1$ 에 대하여
>
> $$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$
>
> 이다.



제한시간: *4* 시간 *30* 분
문항당 *7* 점

*2023 년 7 월 9 일 일요일*

**문제 4.** $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ 은 서로 다른 양의 실수이다. 모든 $n = 1, 2, \ldots, 2023$ 에 대하여

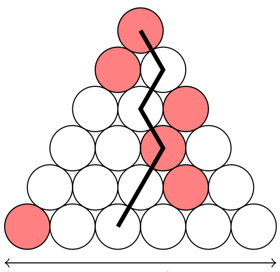
$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

이 정수일 때, $a_{2023} \geqslant 3034$ 임을 보여라.

**문제 5.** $n$ 은 양의 정수이다. 일본삼각형이란, $1 + 2 + \cdots + n$ 개의 원을 다음을 만족하도록 정삼각형 모양으로 배열한 것이다.

> 각 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여, 위에서부터 $i$ 번째 가로줄에 $i$ 개의 원이 놓여있고, 그 중 정확히 하나가 빨간색으로 색칠되어 있다.

닌자경로란, 일본삼각형의 첫 가로줄의 원에서 시작하여, 현재의 원에서 바로 아래 있는 두 원 중 하나로 내려가는 과정을 반복하여 마지막 가로줄에 도달할 때까지 지나온 $n$ 개의 원으로 이루어진 경로이다. 다음 그림은 $n = 6$ 일 때의 일본삼각형과 빨간색 원 두 개를 포함하는 닌자경로의 예이다.




다음 조건을 만족하는 가장 큰 $k$ 를 $n$ 에 관한 식으로 표현하여라.

> (조건) 각 일본삼각형에는 빨간색 원을 적어도 $k$ 개 포함하는 닌자경로가 존재한다.

**문제 6.** 정삼각형 $ABC$ 의 내부의 점 $A_1, B_1, C_1$ 은 $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ 와

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

를 만족한다. 직선 $BC_1$ 과 $CB_1$ 이 점 $A_2$ 에서 만나고, 직선 $CA_1$ 과 $AC_1$ 이 점 $B_2$ 에서 만나고, 직선 $AB_1$ 과 $BA_1$ 이 점 $C_2$ 에서 만난다. 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 부등변삼각형일 때, 세 삼각형 $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ 의 외접원들이 두 개의 공통점에서 만남을 보여라.

(Note: 부등변삼각형이란 어느 두 변도 길이가 같지 않은 삼각형이다.)