화요일, 2014 년 7 월 8 일

문제 1. $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 이 정의 옹근수들의 무한렬이라고 하자. 이때

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \le a_{n+1}$$

이 서는 옹근수 $n \ge 1$이 유일존재한다는것을 증명하여라.

문제 2. $n \ge 2$은 옹근수이다. 이제 n^2개의 단위정방형들로 이루어진 $n \times n$장기판을 생각하자. 이 판우의 n개 장기쪽의 한 배치는(장기쪽은 모두 단위정방형아낙에 배치된다.) 만일 매 행과 매 렬이 꼭 한개의 장기쪽을 포함한다면 《평화롭다》고 부른다.

이때 n개 장기쪽의 임의의 평화로운 배치에 대하여서도 그안의 k^2개의 단위정방형들 모두가 장기쪽을 하나도 포함하지 않는 그러한 $k \times k$정방형이 존재하게 되는 최대의 정의 옹근수 k를 구하여라.

문제 3. 볼록 4각형 $ABCD$가 $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$를 만족한다. 점 H는 A에서 BD에 그은 수직선의 밑점이다. 점 S와 T는 각각 변 AB와 변 AD우의 점들로서 H가 3각형 SCT의 아낙에 놓이고

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ$$

가 선다고 한다.

이때 직선 BD가 3각형 TSH의 외접원에 접한다는것을 증명하여라.

수요일, 2014 년 7 월 9 일

문제 4. 점 P 와 Q 는 뾰족3각형 ABC 의 변 BC 우의 점들로서 $\angle PAB = \angle BCA$, $\angle CAQ = \angle ABC$ 를 만족한다. 점 M 과 N 을 각각 직선 AP 와 AQ 우에서 P 가 AM 의 가운데점, Q 가 AN 의 가운데점이 되게 취하였다.

이때 직선 BM 과 CN 은 3각형 ABC 의 외접원우에서 사귄다는것을 증명하여라.

문제 5. 매 정의 옹근수 n 에 대하여 케이프타운은행은 그것의 값이 $\frac{1}{n}$ 인 동전들을 만들어낸다. 전체값이 $99+\frac{1}{2}$ 을 넘지 않는 이러한 동전들의 유한모임이(값이 같은 동전들이 여러개 있을수 있다.) 주어졌다고 하자. 그러면 이 동전들의 모임을 100 개 또는 이보다 더 작은 개수의 무지들로 가르되 매 무지에서 동전들의 전체값이 1 이하로 되게 할수 있다는것을 증명하여라.

문제 6. 평면에서 직선들의 한 모임은 만일 그 어느 두 직선도 평행이 아니고 그 어느 세 직선도 한 점에서 사귀지 않으면 《일반위치에 있다》고 말한다.

일반위치에 있는 직선들의 모임은 평면을 구역들로 가른다. 이 구역들중 어떤것들은 유한한 면적을 가지는데 이것들을 《유한구역》이라고 부르자.

이때 충분히 큰 모든 n 에 대하여, 일반위치에 있는 n 개직선들의 임의의 모임에서 적어도 $\sqrt{n}$ 개의 직선을 푸른색으로 칠하되 그 경계를 이루는 변들 모두가 푸른색인 유한구역이 존재하지 않도록 할수 있다는것을 증명하여라.

주의. $\sqrt{n}$ 대신에 $c\sqrt{n}$ 을 가지고 증명한 결과는 상수 c 의 값에 따라 점수가 배당될것이다.

제한시간 : 4 시간 30 분
문제당 : 7 점