سه شنبه، ۱۶. ژوئیه ۲۰۲۴

مسئله‌ی ۱. همه‌ی اعداد حقیقی α را طوری پیدا کنید که برای هر عدد صحیح و مثبت n، عدد صحیح

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

مضربی از n باشد. (توجه کنید که $\lfloor z \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کم‌تر یا مساوی z است. به طور مثال، $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ و $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

مسئله‌ی ۲. همه‌ی دوتایی‌های (a, b) را از اعداد صحیح و مثبت طوری پیدا کنید که اعداد صحیح و مثبت g و N وجود داشته باشند که برای همه‌ی اعداد صحیح $n \geqslant N$ داشته باشیم:

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

(توجه کنید که منظور از $\gcd(x, y)$ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح x و y است.)

مسئله‌ی ۳. دنباله‌ی نامتناهی $a_1, a_2, a_3, \ldots$ از اعداد صحیح و مثبت داده شده است، و N عددی صحیح و مثبت است. فرض کنید، برای هر $n > N$، a_n برابر با تعداد دفعاتی است که a_{n-1} میان اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ آمده است. نشان دهید دست کم یکی از دو دنباله‌ی $a_1, a_3, a_5, \ldots$ و $a_2, a_4, a_6, \ldots$ از جایی به بعد متناوب است. (دنباله‌ی نامتناهی $b_1, b_2, b_3, \ldots$ را از جایی به بعد متناوب گوییم اگر اعداد صحیح و مثبت p و M وجود داشته باشند که برای هر $m \geqslant M$ داشته باشیم $b_{m+p} = b_m$.)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.

چهارشنبه، ۱۷ ژوئیه ۲۰۲۴

مسئله‌ی ۴. مثلث ABC با شرط $AB < AC < BC$ داده شده است. فرض کنید ω دایره‌ی محاطی مثلث ABC و I مرکز آن است. روی خط BC نقطه‌ی X متفاوت از C طوری قرار دارد که خط گذرنده از X و موازی AC بر ω مماس است. به طورمشابه، روی خط BC نقطه‌ی Y متفاوت از B طوری قرار دارد که خط گذرنده از Y و موازی AB بر ω مماس است. فرض کنید AI دایره‌ی محیطی مثلث ABC را برای دومین بار در $P \neq A$ قطع می‌کند. فرض کنید K و L به ترتیب نقاط وسط AC و AB هستند. نشان دهید $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

مسئله‌ی ۵. سریعک، حلزونی است که روی یک جدول با 2024 سطر و 2023 ستون بازی می‌کند. در 2022 خانه‌ی جدول هیولاهایی پنهان شده‌اند. سریعک در ابتدا محل هیچ یک از هیولاها را نمی‌داند، اما می‌داند که در هر سطر به غیر از سطرهای نخست و پایانی دقیقا یک هیولا قرار دارد و در هر ستون حداکثر یک هیولا قراردارد. سریعک چندین بار تلاش می‌کند تا از سطر نخست به سطر پایانی برود. در هر تلاش، یکی از خانه‌های سطر نخست را برای شروع برگزیده، سپس در هر گام به یکی از خانه‌های مجاورضلعی خود می‌خیزد. (او می تواند به خانه‌ای که پیش‌تر درآن بوده است نیز بازگردد.) اگر او به خانه‌ای برسد که درآن هیولا قرار دارد، تلاش او پایان یافته و برای شروع یک تلاش مجدد به سطر اول بازگردانده می‌شود. هیولاها حرکت نمی‌کنند، و سریعک به یاد دارد که هر خانه‌ای که درآن بوده است دارای هیولا است یا خیر. هرگاه او به خانه‌ای در سطر پایانی برسد، تلاش وی پایان می‌یابد و بازی به اتمام خواهد رسید. حداقل مقدار n را طوری پیدا کنید که سریعک بتواند راه‌بردی را پیاده‌سازی کند که مستقل از جای‌گاه هیولاها، در تلاش n ـام یا زودتر به سطر پایانی برسد.

مسئله‌ی ۶. فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا باشد. تابع $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را **جالب** می‌نامیم اگربرای هر $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{یا} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

نشان دهید عدد صحیح c وجود دارد که برای هر تابع جالب f، حداکثر c عدد گویای متمایز به صورت $f(r) + f(-r)$ قابل نمایش باشند، که r عددی گویاست. هم‌چنین کم‌ترین مقدار ممکن c را پیدا کنید.