

Петак, 10. јул 2015.

1. задатак. Коначан скуп S тачака у равни зовемо *уравнотеженим* ако за сваке двије различите тачке A и B скупа S постоји тачка C у скупу S таква да је $\overline{AC} = \overline{BC}$. Скуп S зовемо *бесцентричним* ако ни за које три различите тачке A , B и C скупа S не постоји тачка P у S таква да је $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

- (а) Доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ постоји уравнотежен скуп који се састоји од n тачака.
- (б) Одредити све природне бројеве $n \geq 3$ за које постоји уравнотежен бесцентричан скуп од n тачака.

2. задатак. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да је сваки од бројева

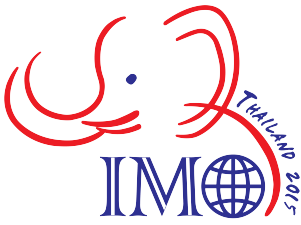
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

степен броја 2.

(Степен броја 2 је број облика 2^n , гдје је n ненегативан цио број.)

3. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека је Γ његова описана кружница, H ортоцентар, а F подножје висине из тјемена A . Тачка M је средиште дужи BC . Нека је Q тачка на кружници Γ таква да је $\angle HQA = 90^\circ$, а K тачка на кружници Γ таква да је $\angle HKQ = 90^\circ$. Сматрамо да су тачке A , B , C , K и Q међусобно различите и да леже на кружници Γ тим редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова KQH и FKM додирују.



Субота, 11. јул 2015.

4. задатак. Нека је Ω описана кружница троугла ABC и O њен центар. Кружница Γ са центром у тачки A сијече дуж BC у тачкама D и E тако да су тачке B, D, E и C међусобно различите и леже на правој BC тим редом. Нека су F и G тачке пресјека кружница Γ и Ω , при чему тачке A, F, B, C и G леже на кружници Ω тим редом. Нека је K друга тачка пресјека описане кружнице троугла BDF и дужи AB . Нека је L друга тачка пресјека описане кружнице троугла CGE и дужи CA .

Претпоставимо да су праве FK и GL различите и да се сијекну у тачки X . Доказати да тачка X лежи на правој AO .

5. задатак. Са \mathbb{R} је означен скуп свих реалних бројева. Одредити све функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

за све реалне бројеве x и y .

6. задатак. Низ цијелих бројева a_1, a_2, \dots задовољава следеће услове:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ за све $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за све $1 \leq k < \ell$.

Доказати да постоје природни бројеви b и N такви да важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

за све цијеле бројеве m и n за које је $n > m \geq N$.