



Баасан, 2015 оны 7 сарын 10

**Бодлого 1.** Хавтгайн төгсгөлөг тооны цэгүүдээс тогтох  $S$  олонлогийн ялгаатай дурын  $A$  ба  $B$  цэгүүдийн хувьд  $AC = BC$  байх  $C \in S$  цэг олдож байвал  $S$ -ийг *тэнцвэрт* олонлог гэж нэрлэе.  $S$  олонлогийн ялгаатай дурын  $A$ ,  $B$  ба  $C$  цэгүүдийн хувьд  $PA = PB = PC$  байх  $P \in S$  цэг олдохгүй бол  $S$ -ийг *төвгүй* олонлог гэе.

(a) Бүхэл тоо  $n \geq 3$  бүрийн хувьд  $n$  ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт* олонлог олдохыг үзүүл.

(b)  $n$  ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт*, *төвгүй* олонлог оршин байх бүх бүхэл  $n \geq 3$ -ийг ол.

**Бодлого 2.**  $ab - c$ ,  $bc - a$  ба  $ca - b$  тоонууд тус бүрдээ 2-ын зэрэгт байх бүх эерэг бүхэл тоон  $(a, b, c)$  гурвалыг ол.

(Ямар нэг сөрөг биш  $n$ -ийн хувьд  $2^n$  хэлбэрт бичигдэх тоог 2-ын зэрэгт гэнэ.)

**Бодлого 3.**  $AB > AC$  байх хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжин өгөв.  $\Gamma$  нь түүнийг багтаасан тойрог,  $H$  нь ортотөв,  $F$  нь  $A$  оройгоос татсан өндрийн суурь болог.  $BC$  талын дундаж цэгийг  $M$  гэе.  $Q$  нь  $\Gamma$  дээрх  $\angle HQA = 90^\circ$  байх цэг,  $K$  нь  $\Gamma$  дээрх  $\angle HKQ = 90^\circ$  байх цэг байг. Энд  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  ба  $Q$  цэгүүд давхардахгүй бөгөөд  $\Gamma$  тойрог дээр энэ дарааллын дагуу байрласан гэж үзнэ.

$KQH$  ба  $FKM$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд шүргэлцэнэ гэж батал.



Бямба, 2015 оны 7 сарын 11

**Бодлого 4.**  $ABC$  гурвалжин нь  $O$  төвтэй  $\Omega$  тойрогт багтдаг.  $A$  цэгт төвтэй  $\Gamma$  тойрог  $BC$  хэрчмийг  $D$  ба  $E$  цэгүүдээр огтлолцдог бөгөөд  $B, D, E$  ба  $C$  цэгүүд  $BC$  шулуун дээр энэ дарааллын дагуу бүгд ялгаатай байрладаг.  $\Gamma$  ба  $\Omega$  тойргууд  $F$  ба  $G$  цэгүүдээр огтлолцдог бөгөөд  $\Omega$  тойрог дээр  $A, F, B, C$  ба  $G$  гэсэн дарааллын дагуу байрладаг.  $BDF$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AB$  хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг  $K$  гэе.  $CGE$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $CA$  хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг  $L$  гэе.

$FK$  ба  $GL$  шулуунууд ялгаатай бөгөөд  $X$  цэгт огтлолцдог байг.  $AO$  шулуун  $X$  цэгийг дайрна гэж батал.

**Бодлого 5.** Дурын бодит  $x, y$  тоонуудын хувьд

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

байх бүх  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функцийг ол. Энд  $\mathbb{R}$ -ээр бодит тоон олонлогийг тэмдэглэв.

**Бодлого 6.** Бүхэл тоон  $a_1, a_2, \dots$  дараалал дараах нөхцлүүдийг биелүүлдэг. Үүнд:

(i) Бүхэл тоо  $j \geq 1$  бүрийн хувьд  $1 \leq a_j \leq 2015$ ;

(ii) Бүхэл тоонууд  $1 \leq k < \ell$  бүрийн хувьд  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ .

$n > m \geq N$  байх дурын бүхэл  $m, n$  тоонуудын хувьд

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

биелэх эерэг бүхэл  $b$  ба  $N$  тоонууд олдохыг батал.