Piątek, 10. lipca 2015

Zadanie 1. Skończony zbiór $\mathcal{S}$ składający się z punktów na płaszczyźnie nazwiemy *zbalansowanym*, jeśli dla każdej pary różnych punktów A i B należących do $\mathcal{S}$ istnieje punkt C należący do $\mathcal{S}$ taki, że $AC = BC$. Powiemy, że $\mathcal{S}$ jest *bezśrodkowy*, jeśli nie istnieje trójka parami różnych punktów A, B i C należących do $\mathcal{S}$, dla której istniałby punkt P należący do $\mathcal{S}$ spełniający $PA = PB = PC$.

(a) Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ istnieje zbalansowany zbiór składający się z n punktów.

(b) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$, dla których istnieje zbalansowany bezśrodkowy zbiór składający się z n punktów.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, dla których każda z liczb

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

jest potęgą dwójki.

(*Potęgą dwójki nazywamy liczbę całkowitą postaci* 2^n, *gdzie* n *jest nieujemną liczbą całkowitą.*)

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC w którym $AB > AC$. Niech Γ będzie okręgiem opisanym na tym trójkącie, H będzie jego ortocentrum, zaś F będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Punkt M jest środkiem boku BC. Niech Q będzie punktem na okręgu Γ dla którego $\angle HQA = 90°$, zaś K będzie punktem na okręgu Γ dla którego $\angle HKQ = 90°$. Przypuśćmy, że punkty A, B, C, K i Q są parami różne i leżą w tej właśnie kolejności na okręgu Γ.

Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach KQH oraz FKM są do siebie styczne.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

Sobota, 11. lipca 2015

Zadanie 4. Okrąg Ω o środku w punkcie O jest opisany na trójkącie ABC. Okrąg Γ o środku w punkcie A przecina odcinek BC w punktach D i E, przy czym punkty B, D, E oraz C są parami różne i leżą w tej właśnie kolejności na prostej BC. Punkty F i G są punktami przecięcia okręgów Γ i Ω, przy czym punkty A, F, B, C oraz G leżą w tej właśnie kolejności na okręgu Ω. Niech K będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BDF z odcinkiem AB. Niech L będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie CGE z odcinkiem CA.

Przypuśćmy, że proste FK i GL są różne i przecinają się w punkcie X. Udowodnić, że punkt X leży na prostej AO.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie 6. Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots$ liczb całkowitych spełniający następujące warunki:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ dla wszystkich $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ dla wszystkich $1 \leqslant k < \ell$.

Wykazać, że istnieją dodatnie liczby całkowite b oraz N takie, że

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

dla wszystkich liczb całkowitych m i n spełniających $n > m \geqslant N$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.