Þriðjudagur, 23. júlí, 2013

Dæmi 1. Sannið að fyrir sérhvert par af jákvæðum heiltölum k og n eru til k jákvæðar heiltölur $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ekki nauðsynlega ólíkar) þannig að

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Dæmi 2. 4027 punktar í sléttu eru kallaðir *kólembísk uppsetning* ef 2013 þeirra eru rauðir og 2014 þeirra eru bláir og engir þrír punktar liggja á sömu línu. Sléttunni er skipt í nokkur svæði með því að teikna nokkrar línur. Staðsetning línanna er sögð góð með tilliti til kólembísku uppsetningarinnar ef eftirfarandi tveimur skilyrðum er fullnægt:

- engin lína liggur í gegnum einhvern punktanna,
- ekkert svæði inniheldur punkta í báðum litum.

Finnið minnsta gildi k þannig að fyrir sérhverja kólembíska uppsetningu 4027 punkta er til góð staðsetning k línanna.

Dæmi 3. Látum utanverðan snertihring ABC á móti punktinum A snerta hliðina BC í punktinum A_1. Skilgreinum punktana B_1 á CA og C_1 á AB sama hátt með utanverðum snertihringjum á móti B og C. Gerum ráð fyrir að miðpunktur umritaðs hrings þríhyrningsins $A_1B_1C_1$ liggi á umritaða hring þríhyrningsins ABC. Sannið að þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur.

Utanverði snertihringur *þríhyrningsins ABC á móti horninu A er hringurinn sem snertir hliðina BC, hálflínuna AB handan B og hálflínuna AC handan C. Utanverður snertihringur á móti B og C eru skilgreindir á sambærilegan hátt.*

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er virði 7 stiga

Miðvikudagur, 24. júlí, 2013

Dæmi 4. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með hæðamiðju H og látum W vera punkt á hliðinni BC þó ekki B eða C. Punktarnir M og N eru fótpunktar hæðanna í B og C. Táknum umritaða hring BWN með ω_1 og látum X vera punkt á ω_1 þannig að WX sé miðstrengur ω_1. Á sama hátt skilgreinum við ω_2 sem umritaða hring CWM og látum Y vera punkt á ω_2 þannig að WY sé miðstrengur ω_2. Sýnið að X, Y og H liggja á sömu línu.

Dæmi 5. Látum $\mathbb{Q}_{>0}$ vera mengi jákvæðra ræðra talna. Látum $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ vera fall sem uppfyllir eftirfarandi þrjú skilyrði:

(i) fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gildir $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gildir $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) til er ræð tala $a > 1$ þannig að $f(a) = a$.

Sannið að $f(x) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Dæmi 6. Látum $n \geq 3$ vera heiltölu og athugum hring með $n+1$ númeruðum punktum með jöfnu millibili. Athugum allar mögulegar númeringar punktanna með tölunum $0, 1, \ldots, n$ þannig að hver tala sé notuð nákvæmlega einu sinni. Tvær slíkar númeringar teljast eins ef önnur fæst út frá hinni með því að snúa hringnum. Númering er sögð *falleg* ef fyrir sérhver fjögur númer $a < b < c < d$ með $a + d = b + c$ þá sker strengurinn á milli a og d ekki strenginn á milli b og c.

Látum M vera fjölda fallegra númeringa og látum N vera fjölda raðaðra para (x, y) af jákvæðum heiltölum þannig að $x + y \leq n$ og $\gcd(x, y) = 1$. Sannið að

$$M = N + 1.$$

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er virði 7 stiga