



Thai (tha), day 1

วันอังคารที่ ๑๖ กรกฎาคม ๒๕๖๒

โจทย์ข้อ ๑. ให้  $\mathbb{Z}$  แทนเซตของจำนวนเต็ม จงหาฟังก์ชัน  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ทั้งหมดซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็ม  $a$  และ  $b$

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

โจทย์ข้อ ๒. ในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  จุด  $A_1$  อยู่บนด้าน  $BC$  และจุด  $B_1$  อยู่บนด้าน  $AC$  ให้  $P$  และ  $Q$  เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง  $AA_1$  และ  $BB_1$  ตามลำดับ โดยที่  $PQ$  ขนานกับ  $AB$  ให้  $P_1$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $PB_1$  ซึ่ง  $B_1$  อยู่ระหว่าง  $P$  และ  $P_1$  และ  $\angle PP_1C = \angle BAC$  ในทำนองเดียวกัน ให้  $Q_1$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $QA_1$  ซึ่ง  $A_1$  อยู่ระหว่าง  $Q$  และ  $Q_1$  และ  $\angle CQ_1Q = \angle CBA$

จงพิสูจน์ว่าจุด  $P, Q, P_1$  และ  $Q_1$  อยู่บนวงกลมเดียวกัน

โจทย์ข้อ ๓. เครื่อข่ายสังคมออนไลน์เครือข่ายหนึ่งมีผู้ใช้ 2019 คน โดยผู้ใช้งานคู่เป็นเพื่อนกัน ถ้าผู้ใช้  $A$  เป็นเพื่อนกับผู้ใช้  $B$  แล้วผู้ใช้  $B$  จะเป็นเพื่อนกับผู้ใช้  $A$  ด้วย เหตุการณ์ต่อไปนี้สามารถเกิดขึ้นได้เรื่อย ๆ ครั้งละหนึ่งเหตุการณ์

ผู้ใช้สามคน  $A, B$  และ  $C$  ซึ่ง  $A$  เป็นเพื่อนกับทั้ง  $B$  และ  $C$  แต่  $B$  และ  $C$  ไม่เป็นเพื่อนกัน สามารถเปลี่ยนสถานะความเป็นเพื่อน โดยที่  $B$  และ  $C$  จะกลายเป็นเพื่อนกัน แต่  $A$  จะเลิกเป็นเพื่อนกับ  $B$  และ  $C$  ส่วนสถานะความเป็นเพื่อนอื่น ๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

เมื่อแรกเริ่ม ผู้ใช้ 1010 คนมีเพื่อนคนละ 1009 คน และผู้ใช้ 1009 คนที่เหลือมีเพื่อนคนละ 1010 คน จงพิสูจน์ว่า มีลำดับของเหตุการณ์ดังกล่าว ที่ทำให้ผู้ใช้แต่ละคนเหลือเพื่อนอย่างมากหนึ่งคน



Thai (tha), day 2

วันพุธที่ ๑๗ กรกฎาคม ๒๕๖๒

โจทย์ข้อ ๔. จงหาค่าอันดับของจำนวนเต็มบวก  $(k, n)$  ทั้งหมดซึ่ง

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

โจทย์ข้อ ๕. ธนาคารแห่งเมืองบางเจ้าได้เรียกจำนวนหนึ่งที่มีตัวอักษร  $H$  บนหน้าหนึ่งและตัวอักษร  $T$  บนอีกหน้าหนึ่งของเหรียญ และรีเรียงเหรียญดังกล่าวจำนวน  $n$  เหรียญเป็นเส้นตรงจากซ้ายไปขวา เขาทำกระบวนการต่อไปนี้ซ้ำ ๆ ถ้ามีเหรียญแสดงหน้า  $H$  อよู่  $k > 0$  เหรียญพอดี เขาจะพลิกเหรียญที่  $k$  นับจากด้านซ้าย แต่ถ้าทุกเหรียญแสดงหน้า  $T$  เขายังหยุด

ยกตัวอย่างเช่น เมื่อ  $n = 3$  และรูปแบบตั้งต้นเป็น  $THT$  ลำดับของกระบวนการดังกล่าวจะเป็น

$$THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$$

ซึ่งสิ้นสุดหลังจากทำการแบ่งครั้ง

- (a) จงแสดงว่า สำหรับรูปแบบตั้งต้นใด ๆ และรีจะสามารถทำการแบ่งครั้งที่ขาดแคลน  $C$  ให้เพียงจำกัดครั้งเดียว  $L(C)$  เป็นจำนวนครั้งที่แฮร์รีทำการแบ่งครั้งที่ขาดแคลน  $C$  ให้เพียงจำกัดครั้งเดียว เช่น  $L(THT) = 3$  และ  $L(TTT) = 0$  จงหาค่าเฉลี่ยของ  $L(C)$  เมื่อแทน  $C$  ด้วยรูปแบบตั้งต้นทั้ง  $2^n$  รูปแบบที่เป็นไปได้

โจทย์ข้อ ๖. ให้  $I$  เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม  $ABC$  ซึ่ง  $AB \neq AC$  วงกลมแนบใน  $\omega$  ของ  $ABC$  สัมผัสด้าน  $BC$ ,  $CA$  และ  $AB$  ที่จุด  $D$ ,  $E$  และ  $F$  ตามลำดับ เส้นตรงที่ผ่าน  $D$  และตั้งฉากกับ  $EF$  ตัดกับ  $\omega$  อีกครั้งที่จุด  $R$  เส้นตรง  $AR$  ตัดกับ  $\omega$  อีกครั้งที่จุด  $P$  วงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยม  $PCE$  และ  $PBF$  ตัดกันอีกครั้งที่จุด  $Q$

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง  $DI$  และ  $PQ$  ตัดกันบนเส้นตรงที่ผ่าน  $A$  และตั้งฉากกับ  $AI$