Вторник, 8-ми јули, 2014.

Задача 1. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ е бесконечна низа од природни броеви. Докажи дека постои точно еден природен број n таков да важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Задача 2. Нека $n \geqslant 2$ е природен број. Да разгледаме шаховска табла $n \times n$ која се состои од n^2 единични квадрати. Распоред од n топови на таблата го нарекуваме *мирољубив* ако во секој ред и во секоја колона се наоѓа точно еден топ. Најди го најголемиот природен број k таков да, за секој мирољубив распоред од n топови, постои квадрат $k \times k$ кој не содржи топ на ниту еден од своите k^2 единични квадрати.

Задача 3. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Точката H е подножје на нормалата спуштена од точката A на правата BD. Точките S и T се избрани на страните AB и AD, соодветно, така да точката H се наоѓа внатре во триаголникот SCT и важи

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ \quad \text{и} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ\,.$$

Докажи дека правата BD ја допира опишаната кружница околу триаголникот TSH.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Среда, 9-ти јули, 2014.

Задача 4. Точките P и Q припаѓаат на страната BC на остроаголниот триаголник ABC и се такви да $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Точките M и N лежат на правите AP и AQ, соодветно, и се такви да точката P е средина на отсечката AM, а точката Q е средина на отсечката AN. Докажи дека правите BM и CN се сечат на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

Задача 5. Кејптаунската банка издава монети со вредности $\frac{1}{n}$, за секој природен број n. Ако имаме конечно многу такви монети (не е задолжително да бидат со различни вредности) со вкупна вредност не поголема од $99+\frac{1}{2}$, докажи дека можеме да ги поделиме во најмногу 100 групи така да вкупната вредност на монетите во секоја група не е поголема од 1.

Задача 6. За множество од прави во рамнината велиме дека е *во општа положба* ако никои две не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Множество од прави во општа положба ја дели рамнината на области; *ограничени* области во поделбата ги нарекуваме оние кои што имаат конечна плоштина. Докажи дека, за секој доволно голем n, во секое множество од n прави во општа положба е можно да се обојат во плаво барем $\sqrt{n}$ прави така да ниедна од ограничените области во поделбата нема потполно плава граница.

Забелешка: Доказот на тврдењето во кое $\sqrt{n}$ е заменето со $c\sqrt{n}$ ќе биде бодуван во зависност од вредноста на константата c.

Време за работа: 4 саати и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода