Понеделник,11. Јули, 2016

Задача 1.

Во триаголникот BCF аголот во темето B е прав. Нека A е точка од правата CF така што $FA=FB$ при што F се наоѓа меѓу A и C. Точката D е избрана така што $DA=DC$ и правата AC е симетрала на аголот $\angle DAB$. Точката E е избрана така што $EA=ED$ и правата AD е симетрала на аголот $\angle EAC$. Нека M е средна точка на отсечката CF. Нека X е точка таква што $AMXE$ е паралелограм(притоа $AM \| EX$ и $AE \| MX$). Докажи дека правите BD, FX и ME се сечат во една точка.

Задача 2.

Определи ги сите позитивни цели броеви n за кои квадратна шема со димензии $n \times n$ може да се пополни, така што во секое единечно квадратче да се запише една од буквите I, M и O, при што се исполнети следните услови:

• во секоја редица и секоја колона, една третина од запишаните букви се I, една третина од запишаните букви се M и една третина од запишаните букви се O; и

• во секоја дијагонала, ако бројот на единечни квадрати од кои е составена е делив со 3, тогаш една третина од запишаните букви се I, една третина од запишаните букви се M и една третина од запишаните букви се O.

Забелешка. Редиците и колоните од квадратната шема се означени со броевите од 1 до n на вообичаен начин. Според тоа, на секое единечно квадратче одговара пар природни броеви (i, j) при што $1 \leq i, j \leq n$. За $n>1$ квадратната шема има $4n-2$ *дијагонали* од два вида. Дијагонала од првиот вид се состои од сите единечни квадратчиња (i, j) за кои $i+j$ е константа, додека дијагонала од другиот вид се состои од сите единечни квадратчиња (i, j) за кои $i-j$ е константа.

Задача 3.

Нека $P=A_1A_2 \ldots A_k$ е конвексен полигон зададен во рамнина. Темињата $A_1, A_2, \ldots, A_k$ се со целобројни координати и припаѓаат на една кружница. Нека S е плоштина на P. Притоа n е позитивен непарен цел број таков што квадратите на должините на страните на P се цели броеви деливи со n. Докажи дека $2S$ е цел број делив со n.

Вторник, 12. јули, 2016

Задача 4. Едно множество составено од позитивни цели броеви го нарекуваме *миризливо* ако тоа содржи најмалку два елементи, и ако секој негов елемент има заеднички прост делител со најмалку еден од преостанатите негови елементи.

Нека $P(n)=n^2+n+1$. Која е најмалата можна вредност на позитивниот цел број b така што постои ненегативен цел број a за кој множеството

$$\{P(a), P(a+1), ..., P(a+b)\}$$

е миризливо?

Задача 5.

Равенката

$$(x-1)(x-2)...(x-2016)=(x-1)(x-2)...(x-2016)$$

е запишана на табла, и има 2016 линеарни множители на секоја страна од равенството. Која е најмалата можна вредност за k за која е можно да се избришат точно k од овие 4032 нејзини линеарни множители, при што на секоја страна на равенството мора да остане најмалку еден линеарен множител, а притоа новодобиената равенка да нема реални решенија?

Задача 6.

Во рамнина се зададени $n \geq 2$ отсечки така што било кои две од нив се сечат во внатрешна точка, и нема три од нив кои се сечат во иста точка. Џеф треба да избере по еден крај од секоја отсечка и во него да постави жаба која е свртена кон другиот крај на отсечката на која е поставена. Потоа тој ќе плесне со рацете $n-1$ пат. Секогаш кога Џеф ќе плесне со рацете, секоја жаба одма ќе скокне нанапред на следната пресечна точка на својата отсечка. Жабите никогаш не ја менуваат насоката во која скокаат. Џеф сака да ги постави жабите на тој начин да две жаби не може да се најдат во иста пресечна точка во ист момент.

а) Докажи дека Џеф секогаш може да ја постигне својата цел ако е n непарно.

б) Докажи дека Џеф никогаш не може да ја постигне својата цел ако е n парно.

Време за работа: 4часа и 30 минути
Секоја задача се вреднува со 7 поени