



*E martë, 10 korrik, 2012*

**Problemi 1.** Për trekëndëshin  $ABC$  pika  $J$  është qendra e rrethit të brendashkruar nga jashtë përballë kulmit  $A$ . Ky rreth e takon brinjën  $BC$  në pikën  $M$ , kurse zgjatjet e brinjëve  $AB$  dhe  $AC$  në pikat  $K$  dhe  $L$ , respektivisht. Drejtëzat  $LM$  dhe  $BJ$  priten në pikën  $F$ , kurse drejtëzat  $KM$  dhe  $CJ$  priten në pikën  $G$ . Le të jetë  $S$  pikëprerja e drejtëzave  $AF$  dhe  $BC$ , kurse  $T$  pikëprerja e drejtëzave  $AG$  dhe  $BC$ .

Vërtetoni se  $M$  është mesi i segmentit  $ST$ .

(*Rrethi i brendashkruar nga jashtë i trekëndëshit  $ABC$  përballë kulmit  $A$  është rrethi i cili takon brinjën  $BC$ , gjysmëdrejtëzën  $AB$  përtej pikës  $B$  dhe gjysmëdrejtëzën  $AC$  përtej pikës  $C$ .*)

**Problemi 2.** Le të jetë  $n \geq 3$  një numër i plotë, kurse  $a_2, a_3, \dots, a_n$  numra realë pozitivë të tillë që  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Vërtetoni se

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**Problemi 3.** *Loja e gënjeshtarit të hamendur* është një lojë që luhet ndërmjet dy lojtarëve  $A$  dhe  $B$ . Rregullat e lojës varen nga dy numra të plotë pozitivë  $k$  dhe  $n$ , të cilët janë të njohur për të dy lojtarët.

Në fillim të lojës, lojtari  $A$  zgjedh numrat e plotë  $x$  dhe  $N$  të tillë që  $1 \leq x \leq N$ . Lojtari  $A$  e mban numrin  $x$  sekret, kurse numrin  $N$  ia tregon lojtarit  $B$ . Tani, lojtari  $B$  provon të marrë informata rreth numrit  $x$ , duke i parashtruar pyetje lojtarit  $A$  si vijon: së pari lojtari  $B$  specifikon një bashkësi arbitrare të numrave të plotë pozitivë  $S$  (lejohet edhe përsëritja e bashkësisë  $S$  që ndoshta ka qenë në pyetjet paraprake), dhe pastaj e pyet lojtarin  $A$  nëse numri  $x$  i takon  $S$ . Lojtari  $B$  mund të parashtojë një numër arbitrar të pyetjeve të tilla. Lojtari  $A$  duhet që menjëherë t'i përgjigjet pyetjeve të lojtarit  $B$  me përgjigjet *po* ose *jo*, por i lejohet të gënjejë sa herë që ai (ajo) dëshiron. I vetmi kufizim që duhet të rrespektohet është që, prej  $k + 1$  përgjigjeve të njëpasnjëshme, të paktën një përgjigje duhet të jetë e saktë.

Pasi  $B$  të ketë parashtruar aq shumë pyetje sa ai dëshiron, ai duhet të përcaktojë një bashkësi  $X$  me më së shumti  $n$  numra të plotë pozitivë. Nëse  $x$  i takon bashkësisë  $X$ , atëherë  $B$  fiton; në të kundërtën, ai humb. Vërtetoni se:

1. Nëse  $n \geq 2^k$ , atëherë  $B$  mund të sigurojë fitoren.
2. Për të gjithë numrat mjaft të mëdhenj  $k$ , ekziston ndonjë numër i plotë  $n \geq 1.99^k$  ashtu që  $B$  nuk mund të sigurojë ndonjë fitore.



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Albanian**

Day: **2**

*E mërkurë, 11 korrik, 2012*

**Problemi 4.** Gjeni të gjitha funksionet  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  të tilla që, për të gjithë numrat e plotë  $a, b, c$  që plotësojnë kushtin  $a + b + c = 0$ , vlen barazimi:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Këtu  $\mathbb{Z}$  paraqet bashkësinë e numrave të plotë.)

**Problemi 5.** Le të jetë  $ABC$  trekëndësh me  $\angle BCA = 90^\circ$ , kurse  $D$  le të jetë këmbëza e lartësisë e tërhequr nga kulmi  $C$ . Le të jetë  $X$  pikë në brendinë e segmentit  $CD$ . Le të jetë  $K$  pikë në segmentin  $AX$  ashtu që  $BK = BC$ . Ngjashëm, le të jetë  $L$  pikë në segmentin  $BX$  ashtu që  $AL = AC$ . Le të jetë  $M$  pikëprerja e  $AL$  dhe  $BK$ .

Tregoni se  $MK = ML$ .

**Problemi 6.** Gjeni të gjithë numrat e plotë pozitivë  $n$  për të cilët ekzistojnë numrat e plotë jonegativë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ashtu që

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

*Language: Albanian*

*Koha: 4 orë e 30 minuta  
Secili problem ka 7 pikë*