

월요일, 11. 7 월 2022

문제 1. 오슬로 은행은 두 종류의 동전을 발행한다. 하나는 알루미늄동전 (A 로 나타낸다) 이고, 다른 하나는 구리동전 (B 로 나타낸다) 이다. 영준이는 알루미늄동전 n 개와 구리동전 n 개를 갖고 있고, 이것들을 적당한 순서로 한 줄로 배열하였다. 이 동전의 수열 내에서, 연속된 한 종류의 동전으로 이루어진 부분수열을 체인이라 하자. 주어진 고정된 양의 정수 $k \leq 2n$ 에 대하여, 영준이는 다음 작업을 반복적으로 수행한다.

그는 왼쪽에서 k -번째 동전을 포함하는 가장 긴 체인에 대하여, 그 체인에 있는 모든 동전들을 그 줄의 가장 왼쪽으로 옮긴다. 예를 들어, 만일 $n = 4$, $k = 4$ 이고, 처음의 배열 $AABBBABA$ 에서 시작한다면 작업의 과정은 다음과 같다.

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

처음의 초기배열이 어떤 것이더라도, 작업 과정의 어떤 순간에는 가장 왼쪽의 n 개의 동전이 모두 같은 종류가 되도록 하는 순서쌍 (n, k) , $1 \leq k \leq 2n$, 을 모두 구하여라.

문제 2. \mathbb{R}^+ 는 양의 실수 전체의 집합이다. 각각의 $x \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $y \in \mathbb{R}^+$ 가 유일하게 존재하는 함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 를 모두 구하여라.

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

문제 3. k 는 양의 정수이고, S 는 유한 개의 홀수 소수로 이루어진 집합이라 하자. S 의 원소들을 다음 조건을 만족하도록 한 원의 둘레에 배치하는 방법은 (회전과 대칭한 것을 같은 것으로 간주하면) 많아야 한 가지뿐임을 보여라. 조건: 이웃한 두 수의 곱은, 어떤 양의 정수 x 에 대하여, $x^2 + x + k$ 꼴이다.

화요일, 12. 7 월 2022

문제 4. 볼록오각형 $ABCDE$ 에 대하여 $BC = DE$ 이다. $ABCDE$ 내부에 있는 점 T 에 대하여 $TB = TD$, $TC = TE$, $\angle ABT = \angle TEA$ 이다. 직선 AB 가 직선 CD , CT 와 만나는 점을 각각 P , Q 라 할 때, 네 점 P, B, A, Q 가 순서대로 한 직선 위에 있다고 하자. 직선 AE 가 직선 CD , DT 와 만나는 점을 각각 R, S 라 할 때, 네 점 R, E, A, S 가 순서대로 한 직선 위에 있다고 하자. 네 점 P, S, Q, R 이 한 원 위에 있음을 보여라.

문제 5. 다음 등식을 만족하는 양의 정수들의 쌍 (a, b, p) (단, p 는 소수) 를 모두 구하여라.

$$a^p = b! + p.$$

문제 6. 양의 정수 n 에 대하여, 복구형 스퀘어란 $n \times n$ 칸으로 이루어진 정사각형 보드로서 1 부터 n^2 까지의 각 정수가 각 칸에 정확히 하나씩 쓰여져 있다. 서로 다른 두 칸이 인접한다는 말은 이 칸들이 하나의 변을 공유한다는 말이다. 어느 한 칸의 숫자가 그 칸에 인접한 모든 칸들의 숫자보다 더 작을 때 그 칸을 계곡이라고 부르자. 오르막길이란 칸들로 이루어진 수열로서 다음 조건을 모두 만족한다.

- (i) 수열의 첫번째 칸은 계곡이다.
- (ii) 수열 안의 연속한 두 칸은 인접한다.
- (iii) 수열의 칸에 쓰여져 있는 숫자들은 증가한다.

한 복구형 스퀘어 안에 있는 오르막길의 총 개수의 가능한 가장 작은 값을 n 의 식으로 나타내어라.