Ukrainian Version. Перший день.
25 липня 2007 року.

Задача 1. Дані дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для кожного i $(1 \leq i \leq n)$ покладемо

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Нехай

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Доведіть, що для довільних дійсних чисел $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ виконується нерівність

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Покажіть, що існують такі дійсні числа $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, для яких нерівність $(*)$ обертається у рівність.

Задача 2. Задано п'ять точок A, B, C, D, E таким чином, що $ABCD$ є паралелограмом, а навколо чотирикутника $BCED$ можна описати коло. Пряма ℓ проходить через точку A, перетинає відрізок DC у його внутрішній точці F, а пряму BC — у точці G. Припустимо, що $EF = EG = EC$. Доведіть, що пряма ℓ є бісектрисою кута DAB.

Задача 3. Деякі учасники математичного змагання товаришують один з одним, причому якщо A товаришує з B, то й B товаришує з A. Назвемо групу учасників *клікою*, якщо кожні двоє з неї товаришують. (Зокрема, довільна група, що складається менш, ніж з двох людей, є клікою.) Назвемо кількість людей у кліці її *розміром*.

Відомо, що найбільший розмір кліки, що складається з учасників змагання, є парним числом. Доведіть, що можливо розсадити усіх учасників у дві кімнати таким чином, щоб найбільший розмір кліки в одній кімнаті дорівнював найбільшому розміру кліки у другій кімнаті.

Час роботи: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється у 7 балів.

Ukrainian Version. Другий день.
26 липня 2007 року.

Задача 4. Бісектриса кута BCA трикутника ABC вдруге перетинає його описане коло у точці R, а серединні перпендикуляри до сторін BC і AC — у точках P і Q відповідно. Точки K і L — середини відрізків BC і AC відповідно. Доведіть, що площі трикутників RPK і RQL рівні.

Задача 5. Натуральні числа a і b такі, що число $(4a^2-1)^2$ ділиться на $4ab-1$. Доведіть, що $a=b$.

Задача 6. Нехай n — натуральне число. Розглянемо множину

$$S=\big\{(x,y,z)\ :\ x,y,z\in\{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\big\},$$

яка складається з $(n+1)^3-1$ точок тривимірного простору. Знайдіть найменшу можливу кількість площин, об'єднання яких містить всі точки з S, проте не містить точку $(0,0,0)$.

Час роботи: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється у 7 балів.