utorok, 16. júla 2024

Úloha 1. Určte všetky reálne čísla α také, že pre každé kladné celé číslo n je celé číslo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

násobkom n. (Zápisom $\lfloor z \rfloor$ označujeme najväčšie celé číslo neprevyšujúce z. Napríklad, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ a $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Úloha 2. Určte všetky dvojice kladných celých čísel (a, b), pre ktoré existujú kladné celé čísla g a N také, že

$$\mathrm{NSD}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

platí pre všetky celé čísla $n \geqslant N$. (Zápisom $\mathrm{NSD}(x, y)$ označujeme najväčšieho spoločného deliteľa celých čísel x a y.)

Úloha 3. Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel a nech N je kladné celé číslo. Predpokladajme, že pre každé $n > N$ je a_n rovné počtu výskytov čísla a_{n-1} medzi číslami $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Dokážte, že aspoň jedna z postupností $a_1, a_3, a_5, \ldots$ a $a_2, a_4, a_6, \ldots$ je časom periodická.

(Nekonečná postupnosť $b_1, b_2, b_3, \ldots$ je *časom periodická*, ak existujú kladné celé čísla p a M také, že $b_{m+p} = b_m$ pre všetky $m \geqslant M$.)

streda, 17. júla 2024

Úloha 4. Nech ABC je trojuholník, v ktorom platí $|AB| < |AC| < |BC|$. Označme ω kružnicu vpísanú do trojuholníka ABC a I jej stred. Nech X je bod na priamke BC rôzny od bodu C taký, že priamka prechádzajúca bodom X rovnobežná s AC sa dotýka ω. Podobne, nech Y je bod na priamke BC rôzny od bodu B taký, že priamka prechádzajúca bodom Y rovnobežná s AB sa dotýka ω. Priamka AI pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC druhýkrát v bode $P \neq A$. Označme K a L postupne stredy strán AC a AB.

Dokážte, že $|\sphericalangle KIL| + |\sphericalangle YPX| = 180°$.

Úloha 5. Slimák Turbo hrá hru v tabuľke s 2024 riadkami a 2023 stĺpcami. V 2022 políčkach tabuľky sa schovávajú príšery. Na začiatku Turbo nevie, kde sa príšery nachádzajú, ale vie, že v každom riadku, okrem prvého a posledného sa nachádza práve jedna príšera a v každom stĺpci sa nachádza maximálne jedna príšera.

Turbo robí sériu pokusov, aby sa dostal z prvého riadku do posledného. V každom pokuse začína na ľubovoľnom políčku prvého riadku. Následne sa opakovane posúva do susedného políčka, ktoré zdieľa spoločnú stranu s jeho aktuálnym políčkom. (Turbo sa môže vrátiť do už navštívených políčok.) Ak sa dostane do políčka s príšerou, jeho pokus končí a je premiestnený naspäť do prvého riadku, aby začal nový pokus. Príšery sa nehýbu a Turbo si pamätá, či políčko, ktoré už navštívil, obsahuje príšeru, alebo nie. Ak sa dostane do ľubovoľného políčka v poslednom riadku, jeho pokus končí a tiež aj celá hra.

Určte najmenšiu hodnotu n, pre ktorú má Turbo stratégiu, ktorá zaručí dosiahnutie posledného riadku najneskôr v n-tom pokuse, bez ohľadu na rozmiestnenie príšer.

Úloha 6. Nech $\mathbb{Q}$ je množina všetkých racionálnych čísel. Funkcia $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sa nazýva *kúpeľná*, ak má nasledujúcu vlastnosť: Pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$ platí aspoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{alebo} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokážte, že existuje celé číslo c také, že pre ľubovoľnú kúpeľnú funkciu f existuje najviac c rôznych racionálnych čísel vyjadriteľných v tvare $f(r)+f(-r)$ pre nejaké racionálne číslo r a nájdite najmenšiu možnú hodnotu c.