



Понедельник, 18 июля 2011 г.

**Задача 1.** Для множества  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , состоящего из четырех попарно различных целых положительных чисел, обозначим через  $s_A$  сумму  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Через  $n_A$  обозначим количество пар индексов  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , для которых  $s_A$  делится на  $a_i + a_j$ . Найдите все множества  $A$ , состоящие из четырех попарно различных целых положительных чисел, для которых  $n_A$  принимает наибольшее возможное значение.

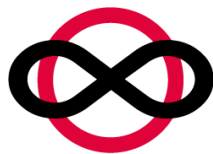
**Задача 2.** Пусть  $\mathcal{S}$  — конечное множество точек на плоскости, содержащее хотя бы две точки. Известно, что никакие три точки множества  $\mathcal{S}$  не лежат на одной прямой. Назовем *мельницей* следующий процесс. Вначале выбирается прямая  $\ell$ , на которой лежит ровно одна точка  $P \in \mathcal{S}$ . Прямая  $\ell$  вращается по часовой стрелке вокруг *центра*  $P$  до тех пор, пока она впервые не пройдет через другую точку множества  $\mathcal{S}$ . В этот момент эта точка, обозначим ее  $Q$ , становится новым центром, и прямая продолжает вращаться по часовой стрелке вокруг точки  $Q$  до тех пор, пока она снова не пройдет через точку множества  $\mathcal{S}$ . Этот процесс продолжается бесконечно.

Докажите, что можно выбрать некоторую точку  $P$  множества  $\mathcal{S}$  и некоторую прямую  $\ell$ , проходящую через  $P$ , так, что для мельницы, начинающейся с прямой  $\ell$ , каждая точка множества  $\mathcal{S}$  выступит в роли центра бесконечное число раз.

**Задача 3.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

для всех действительных  $x$  и  $y$ . Докажите, что  $f(x) = 0$  для всех  $x \leq 0$ .



*Вторник, 19 июля 2011 г.*

**Задача 4.** Дано целое число  $n > 0$ . Имеются чашечные весы и  $n$  гирь, веса которых равны  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Все  $n$  гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из  $n$  шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

**Задача 5.** Пусть  $f$  — функция, определенная на множестве целых чисел, принимающая целые положительные значения. Известно, что для любых целых  $m$  и  $n$  разность  $f(m) - f(n)$  делится на  $f(m - n)$ . Докажите, что для любых целых  $m$  и  $n$  таких что  $f(m) \leq f(n)$ , число  $f(n)$  делится на  $f(m)$ .

**Задача 6.** Пусть  $ABC$  — остроугольный треугольник, и  $\Gamma$  — описанная около него окружность. Пусть прямая  $\ell$  — некоторая касательная к окружности  $\Gamma$ , и пусть  $\ell_a, \ell_b$  и  $\ell_c$  — прямые, симметричные прямой  $\ell$  относительно прямых  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми  $\ell_a, \ell_b$  и  $\ell_c$ , касается окружности  $\Gamma$ .