Keskiviikko, 7. heinäkuuta 2010

Tehtävä 1. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille yhtälö

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

pätee kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z\rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on $\leq z$.)

Tehtävä 2. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja olkoon Γ ABC:n ympäri piirretty ympyrä. Suora AI leikkaa Γ:n myös pisteessä D. Olkoon E kaaren $\widehat{BDC}$ piste ja F sivun BC piste siten, että

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Olkoon vielä G janan IF keskipiste. Todista, että suorat DG ja EI leikkaavat ympyrän Γ pisteessä.

Tehtävä 3. Olkoon $\mathbb{N}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joille

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

on neliöluku kaikilla m, $n \in \mathbb{N}$.

Työaika: 4 tuntia 30 minuuttia
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

Torstai, 8. heinäkuuta 2010

Tehtävä 4. Olkoon P kolmion ABC sisäosan piste. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ myös pisteissä K, L ja M, tässä järjestyksessä. Pisteeseen C piirretty Γ:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä S. Oletetaan, että $SC = SP$. Todista, että $MK = ML$.

Tehtävä 5. Jokaisessa kuudesta rasiassa B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ja B_6 on aluksi yksi kolikko. Kahdentyyppiset siirrot ovat sallittuja:

Siirto 1: Valitaan epätyhjä rasia B_j, $1 \le j \le 5$, poistetaan rasiasta B_j yksi kolikko ja lisätään kaksi kolikkoa rasiaan B_{j+1}.

Siirto 2: Valitaan epätyhjä rasia B_k, $1 \le k \le 4$, poistetaan rasiasta B_k yksi kolikko ja vaihdetaan rasioiden B_{k+1} ja B_{k+2} (mahdollisesti tyhjät) sisällöt keskenään.

Selvitä, voiko jokin näiden siirtojen äärellinen jono johtaa tilanteeseen, jossa rasiat B_1, B_2, B_3, B_4 ja B_5 ovat tyhjiä ja rasiassa B_6 on tasan $2010^{2010^{2010}}$ kolikkoa. ($a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Tehtävä 6. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jono positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku s, siten että

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

kaikilla $n > s$. Todista, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut ℓ ja N, $\ell \le s$, siten että $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ kaikilla $n \ge N$.