Сейсенбі, 23 шілде, 2013 ж.

Есеп 1. Кез келген k және n натурал сандары үшін,

$$1+\frac{2^k-1}{n} = \left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

орындалатын $m_1, m_2, \ldots, m_k$ натурал сандар (әртүрлі болуға міндетті емес) табылатынын дәлелдеңдер.

Есеп 2. Егер жазықтықта 2013 нүкте қызыл мен 2014 нүкте көк болса, және осы 4027 нүктелер арасында кез келген үш нүкте бір түзудің бойында болмаса, онда осындай конфигурациясын *Колумбиялық* деп атаймыз. Кейбір түзулерін салып жазықтық бірнеше аймақтарға бөлінеді. Келесі үш шарт орындалса, онда түзулердің орналыстыруы Колумбиялық конфигурациясы үшін *жақсы* болады:

- конфигурацияның нүкте арқылы сызылған түзуі табылмайды;
- әрбір аймақтың ішінде екі түстен нүктелер табылмайды.

Кез келген 4027 нүктелерден тұратын Колумбиялық конфигурациясы үшін k түзулердің жақсы орналыстыруы міндетті табылатынын kның минималды мәнін анықтаңдар.

Есеп 3. ABC үшбұрышының A төбесіне сәйкес сырттай-іштей сызылған шеңбер BC кесіндісін A_1 нүктесінде жанайды. Дәл осылай, B және C төбелеріне сәйкес сырттай-іштей сызылған шеңберлер CA кесіндісінде B_1 ал AB кесіндісінде C_1 нүктелерді сәйкесінше белгілейік. $A_1B_1C_1$ үшбұрышының сырттай сызылған шеңбердің центрі ABC үшбұрышының сырттай сызылған шеңбердің бойында жатса, онда ABC тікбұрышты үшбұрыш болатын дәлелдеңдер.

ABC үшбұрышының A төбесіне сәйкес сырттай-іштей сызылған шеңбер *деп BC қабырғасын және AB және AC қабырғаларының созындыларын жанайтын шеңберді атаймыз. Дәл осылай, B және C төбелері үшін сырттай-іштей сызылған шеңберлер анықталған.*

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады

Сәрсенбі, 24 шілде, 2013 ж.

Есеп 4. ABC сүйір-бұрышты үшбұрышында H ортоцентрі және BC кесіндісінде B мен C арасындағы W нүктесі берілген. B және C төбелерінің биіктіктердің табандары M және N деп сәйкесінше белгіленген. BWN үшбұрышының сырттай сызылған шеңберді ω_1 деп атайық, және WX кесіндісі ω_1дің диаметрі болатын ω_1 шеңбердің бойында жататын X нүктесі алынған. Дәл осылай, CWM үшбұрышының сырттай сызылған шеңберді ω_2 деп атайық, және WY кесіндісі ω_2нің диаметрі болатын ω_2 шеңбердің бойында жататын Y нүктесі алайық. X, Y және H нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

Есеп 5. $\mathbb{Q}_{>0}$ барлық оң рационал сандарының жиыны. Келесі үш шартты орындалатын $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ функциясын қарастырайық:

(i) барлық $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ үшін $f(x)f(y) \geq f(xy)$ теңсіздігі орындалады;

(ii) барлық $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ үшін $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ теңсіздігі орындалады;

(iii) кейбір $a > 1$ рационал саны үшін $f(a) = a$ екенін белгілі.

Барлық $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ үшін $f(x) = x$ болатын дәлелдеңдер.

Есеп 6. $n \geq 3$ натурал саны болсын. Шеңберді тең доғаларға бөлетін $n+1$ нүкте шеңбердің бойында алынған. Барлық нүктелерді белгілеу үшін $0, 1, \ldots, n$ сандардан әр сан тек бір рет пайдаланып барлық тәсілдерді қарастырайық; осындай екі тәсілден біреуі шеңбер айналып екіншісі шықса, олар бірдей деп санайды. Егер $a + d = b + c$ болатын $a < b < c < d$ кез келген нүктелердің белгілерге a мен d белгілермен нүктелерді қосатын хордасы b мен c белгілермен нүктелерді қосатын хордасымен қиылыспайтын болса, онда осындай белгілеуінің тәсілін *әдемі* деп атаймыз.

M барлық әдемі белгілеулерінің тәсілдердің саны болсын, ал $x + y \leq n$ және ЕҮОБ$(x, y) = 1$ болатын барлық (x, y) натурал сандарының реттелген жұптықтардың саны N болсын.

$$M = N + 1$$

екенің дәлелдеңдер.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады