Salı, 15 Temmuz 2025

Soru 1. Düzlemdeki bir doğru; x-ekseni, y-ekseni ve $x+y=0$ doğrularının hiçbirine paralel **değilse** bu doğruya *parlak* diyelim.

$n \geqslant 3$ verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Hangi k negatif olmayan tam sayıları için, düzlemde aşağıdaki koşulları sağlayan n farklı doğrunun bulunduğunu belirleyiniz:

- $a+b \leqslant n+1$ koşulunu sağlayan tüm a, b pozitif tam sayıları için, (a,b) noktası bu doğrulardan en az birinin üzerindedir;
- bu n tane doğrunun tam olarak k tanesi parlak doğrudur.

Soru 2. Ω ve Γ çemberlerinin merkezleri sırasıyla M ve N olsun, ve Ω çemberinin yarıçapı Γ çemberinin yarıçapından daha küçük olsun. Ω ve Γ çemberleri birbirlerinden farklı A ve B noktalarında kesişiyor. MN doğrusu Ω ile C noktasında ve Γ ile D noktasında, bu noktalar bulundukları doğru üzerinde C, M, N ve D sırası ile yer alacak şekilde kesişiyor. ACD üçgeninin çevrel çemberinin merkezi P olsun. AP doğrusunun Ω ile ikinci kesişim noktası $E \neq A$ olsun. AP doğrusunun Γ ile ikinci kesişim noktası $F \neq A$ olsun. PMN üçgeninin diklik merkezi H olsun.

H noktasından geçen ve AP doğrusuna paralel olan doğrunun BEF üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

(Bir üçgenin *diklik merkezi*, o üçgenin yüksekliklerinin kesişim noktasıdır.)

Soru 3. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayıların kümesi olsun. Bir $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu, tüm a ve b pozitif tam sayıları için

$$f(a) \text{ böler } b^a - f(b)^{f(a)}$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona *güzel* diyelim.

Tüm güzel f fonksiyonları ve tüm n pozitif tam sayıları için $f(n) \leqslant cn$ olmasını sağlayan en küçük c gerçel sabit sayısını bulunuz.

Süre 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.

Çarşamba, 16 Temmuz 2025

Soru 4. Bir $a_1, a_2, \ldots$ sonsuz pozitif tam sayı dizisinde, her terimin en az üç tane kendisine eşit olmayan böleni vardır. Bu dizide, her $n \geqslant 1$ için, a_{n+1} sayısı a_n sayısının kendisine eşit olmayan en büyük üç boleninin toplamına eşittir.

a_1 sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Soru 5. Aslı ve Betül bir *Avustralya oyunu* oynamaktadır, bu oyun iki kişiliktir ve kuralları her iki oyuncunun da bildiği bir λ pozitif gerçel sayısına bağlıdır. Oyunun n. hamlesinde ($n = 1$ ile başlayarak) aşağıdaki hamleler yapılmaktadır:

- n tek sayı ise, Aslı
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n$$
olacak şekilde bir x_n negatif olmayan gerçel sayısı seçmektedir.

- n çift sayı ise, Betül
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n$$
olacak şekilde bir x_n negatif olmayan gerçel sayısı seçmektedir.

Kurallara uygun bir x_n sayısı seçemeyen oyuncu oyunu kaybediyor ve diğer oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun sonsuza kadar devam ederse hiçbir oyuncu oyunu kazanmıyor. Her iki oyuncu da seçilen tüm sayıları bilmektedir.

λ sayısının hangi değerlerinde Aslı'nın kazanma stratejisinin bulunduğunu ve hangi değerlerinde Betül'ün kazanma stratejisinin bulunduğunu belirleyiniz.

Soru 6. Birim karelerden oluşan bir 2025×2025 satranç tahtası verilmiştir. Zehra, bu satranç tahtasının üzerine bazı dikdörtgenler yerleştiriyor. Bu dikdörtgenlerin boyutları birbirlerinden farklı olabilir, her dikdörtgenin her kenarı bu satranç tahtasının birim karelerinin kenarlarını oluşturan doğrular üzerinde yer alıyor, ve her birim kare en fazla bir tane dikdörtgen tarafından kaplanıyor.

Zehra'nın bu tahtayı her satırda ve her sütunda hiçbir dikdörtgen tarafından kaplanmayan tam olarak bir birim kare bulunacak şekilde kaplayabilmesi için en az kaç tane dikdörtgen kullanması gerektiğini bulunuz.

Süre 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.