ponedjeljak, 21. septembar 2020

Zadatak 1 Neka je $ABCD$ konveksan četverougao. Tačka P je u unutrašnjosti četverougla $ABCD$ tako da vrijede proporcije:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokazati da se sljedeće tri prave sijeku u jednoj tački: unutrašnje simetrale uglova $\angle ADP$ i $\angle PCB$, te simetrala duži AB.

Zadatak 2 Realni brojevi a, b, c, d su takvi da vrijedi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ i $a + b + c + d = 1$. Dokazati da je

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Zadatak 3 Dato je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Svaki od kamenčića je obojen u jednu od n boja i svakom bojom su obojena tačno četiri kamenčića. Pokazati da možemo rasporediti kamenčiće u dvije hrpe tako da su zadovoljena sljedeća dva uslova:

- Ukupna težina kamenčića u obje hrpe je jednaka.
- Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

utorak, 22. septembar 2020

Zadatak 4 Dat je prirodan broj $n > 1$. Na jednoj planini postoji n^2 stanica koje su na međusobno različitim visinama. Svaka od dvije kompanije koje upravljaju žičarama, A i B, ima k žičara; svaka žičara omogućuje prevoz od jedne stanice do druge koja je na većoj visini (bez usputnih stajanja). Svih k žičara kompanije A imaju k različitih početnih stanica i k različitih krajnjih stanica, pri čemu žičara koja ima višu početnu stanicu ima i višu krajnju stanicu. Isto važi i za kompaniju B. Kažemo da jedna kompanija *povezuje* dvije stanice ako je moguće iz niže stići u višu korištenjem jedne ili više žičara te kompanije (pri čemu druga kretanja između stanica nisu dozvoljena).

Odrediti najmanji prirodan broj k za koji sigurno postoje dvije stanice koje povezuju obje kompanije.

Zadatak 5 Dat je špil od $n > 1$ karata. Na svakoj karti je napisan jedan prirodan broj. Špil ima osobinu da je aritmetička sredina brojeva napisanih na prizvoljnom paru karata iz špila jednaka geometrijskoj sredini brojeva napisanih na nekom skupu koji se sastoji od jedne ili više karata iz špila.

Za koje n slijedi da brojevi napisani na svim kartama špila moraju biti jednaki?

Zadatak 6 Dokazati da postoji pozitivna konstanta c takva da važi sljedeće tvrđenje:

Neka je $n > 1$ prirodan broj i $\mathcal{S}$ skup od n tačaka u ravni takav da je rastojanje između svake dvije tačke skupa $\mathcal{S}$ barem 1. Tada slijedi da postoji prava ℓ koja razdvaja $\mathcal{S}$ takva da je rastojanje od bilo koje tačke skupa $\mathcal{S}$ do prave ℓ barem $cn^{-1/3}$.

(Prava ℓ *razdvaja* skup tačaka $\mathcal{S}$ ako neka duž čiji su krajevi u skupu $\mathcal{S}$ siječe pravu ℓ.)

Napomena. Za slabije rezultate u kojima je $cn^{-1/3}$ zamijenjeno sa $cn^{-\alpha}$ mogu se dobiti poeni u zavisnosti od vrijednosti konstante $\alpha > 1/3$.

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.