53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Arabic (Moroccan)

Day: 1

الثلاثاء 10 يوليوز 2012

المسألة 1. ليكن ABC مثلثا و J هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث و المقابلة للرأس A (**cercle exinscrit**) . هذه الدائرة مماسة للضلع $[BC]$ في M ومماسة للمستقيمين (AB) و (AC) في K و L على التوالي .
المستقيمان (LM) و (BJ) يتقاطعان في F و المستقيمان (KM) و (CJ) يتقاطعان في G .
لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (AF) و (BC) و لتكن T نقطة تقاطع المستقيمين (AG) و (BC).
بين أن M هي منتصف القطعة $[ST]$.
(الدائرة الخارجية للمثلث و المقابلة للرأس A هي الدائرة المماسة للضلع $[BC]$ و المماسة لامتداد نصف المستقيم $[AB)$ ما بعد النقطة B و المماسة لامتداد نصف المستقيم $[AC)$ ما بعد النقطة C).

المسألة 2. ليكن $n \geq 3$ عددا صحيحا و لتكن a_2 و a_3 و ... و a_n أعدادا حقيقية موجبة قطعا حيث $a_2 a_3 ... a_n = 1$. بين أن

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 ... (1+a_n)^n > n^n .$$

المسألة 3. لعبة تخمين الكذب هي لعبة بين لاعبين A و B . قواعد هذه اللعبة تعتمد على عددين صحيحين موجبين قطعا n و k . هذان العددان معروفان لكلا اللاعبين.
في بداية اللعبة يختار A عددين صحيحين x و N بحيث $1 \leq x \leq N$. اللاعب A يحتفظ سرا بالعدد x، وبكل أمانة يكشف عن العدد N للاعب B. يحاول اللاعب B التعرف على العدد x من خلال أسئلة يوجهها للاعب A على النحو التالي : في كل سؤال يختار B مجموعة عشوائية S من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا،ثم يسأل A إذا كان x ينتمي لـ S . يمكن للاعب B أن يكرر هذا النوع من الأسئلة من المرات حسب رغبته،ويمكنه أيضا طرح نفس السؤال أكثر من مرة و متى يريد. على اللاعب A أن يجيب لحظيا على أسئلة اللاعب B ب نعم أو لا،مع إمكانية الكذب في الإجابة ما شاء من المرات. القيد الوحيد أنه في كل $k+1$ من الإجابات المتتالية، تكون على الأقل واحدة منها صحيحة (صادقة). بعد أن ينتهي B من طرح العدد الذي يرغب من أسئلته ، عليه أن يحدد مجموعة X تحتوي على الأكثر على n من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا.
إذا كان x ينتمي إلى X يكون B فائزا ،ماعدا ذلك فهو خاسر. بين أن:

1. إذا كان $n \geq 2^k$ ،فإنه يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.
2. لكل عدد k كبير بما فيه الكفاية يوجد عدد صحيح $n \geq 1{,}99^k$ بحيث لا يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.

مدة الإنجاز : أربع ساعات ونصف
تمنح سبع نقط لكل مسألة

الأربعاء 11 يوليوز 2012

المسألة 4.

أوجد جميع الدوال $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ التي تحقق المتساوية التالية :

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

لكل الأعداد الصحيحة a و b و c بحيث $a+b+c=0$.

(نرمز ب $\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة).

المسألة 5 .

ليكن ABC مثلثا حيث $\angle BCA=90^\circ$ و لتكن D موقع الارتفاع المنشأ من C.

لتكن X نقطة داخل القطعة $[CD]$ و لتكن K نقطة من القطعة $[AX]$ بحيث $BK=BC$. بصورة مشابهة لتكن L نقطة من القطعة $[BX]$ بحيث $AL=AC$. لتكن M هي نقطة تقاطع (AL) و (BK).

بين أن $MK=ML$.

المسألة 6.

أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا n التي من أجلها توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_n بحيث :

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$$