



Utorak, 10. jul 2012.

**1. zadatak** U trouglu  $ABC$  tačka  $J$  je centar spolja pripisane kružnice naspram tjemena  $A$ . Ova kružnica dodiruje stranicu  $BC$  u tački  $M$ , a produžetke stranica  $AB$  i  $AC$  u tačkama  $K$  i  $L$  redom. Prave  $LM$  i  $BJ$  sijeku se u tački  $F$ , a prave  $KM$  i  $CJ$  u tački  $G$ . Neka je  $S$  presječna tačka pravih  $AF$  i  $BC$ , a neka je  $T$  presječna tačka pravih  $AG$  i  $BC$ .

Dokazati da je  $M$  središte duži  $ST$ .

(*Spolja pripisana kružnica* trougla  $ABC$  naspram tjemena  $A$  je kružnica koja dodiruje stranicu  $BC$  i produžetke stranica  $AB$  i  $AC$ .)

**2. zadatak** Neka je  $n \geq 3$  prirodni broj, i neka su  $a_2, a_3, \dots, a_n$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Dokazati da vrijedi

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

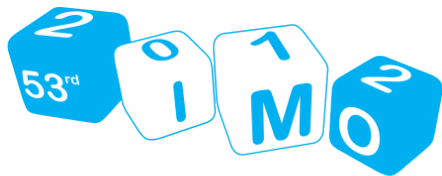
**3. zadatak** *Pogadalice* je igra koju igraju dva igrača,  $A$  i  $B$ . Pravila igre zavise od prirodnih brojeva  $k$  i  $n$  koji su poznati i jednom i drugom igraču.

Na početku igre igrač  $A$  bira prirodne brojeve  $x$  i  $N$  takve da je  $1 \leq x \leq N$ . Igrač  $A$  ne saopštava informacije o broju  $x$ , a saopštava tačnu vrijednost broja  $N$  igraču  $B$ . Nakon toga igrač  $B$  pokušava da dobije informacije o broju  $x$  postavljajući igraču  $A$  pitanja sledećeg oblika: u svakom pitanju igrač  $B$  bira proizvoljan podskup  $S$  skupa prirodnih brojeva (može birati isti podskup više puta) i pita igrača  $A$  da li broj  $x$  pripada skupu  $S$ . Igrač  $B$  može postaviti pitanja koliko želi. Nakon svakog pitanja igrač  $A$  mora odmah odgovoriti sa *da* ili *ne*, ali smije lagati koliko god puta želi, jedino ograničenje je da među proizvoljnih  $k + 1$  uzastopnih odgovora barem jedan mora biti istinit.

Nakon što  $B$  postavi onoliko pitanja koliko smatra potrebnim, on mora odabrati skup  $X$  koji se sastoji od najviše  $n$  prirodnih brojeva. Ako broj  $x$  pripada skupu  $X$  onda igrač  $B$  pobjeđuje; inače  $B$  gubi.

Dokazati da:

1. Ako je  $n \geq 2^k$ , onda igrač  $B$  može garantovati pobjedu.
2. Za svako dovoljno veliko  $k$ , postoji prirodni broj  $n \geq 1.99^k$  takav da igrač  $B$  ne može garantovati pobjedu.



*Srijeda, 11.jul 2012.*

**4. zadatak** Odrediti sve funkcije  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takve da, za sve cijele brojeve  $a, b, c$  koji zadovoljavaju  $a + b + c = 0$ , vrijedi sledeća jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Skup  $\mathbb{Z}$  je skup cijelih brojeva.)

**5. zadatak** Neka je  $ABC$  trougao u kome je  $\angle BCA = 90^\circ$  i neka je  $D$  podnožje visine iz tjemena  $C$ . Neka je  $X$  tačka na duži  $CD$  različita od krajeva te duži. Neka je  $K$  tačka na duži  $AX$  takva da je  $BK = BC$ . Analogno, neka je  $L$  tačka na duži  $BX$  takva da je  $AL = AC$ . Neka je  $M$  presječna tačka pravih  $AL$  i  $BK$ .

Dokazati da je  $MK = ML$ .

**6. zadatak** Odrediti sve prirodne brojeve  $n$  za koje postoje nenegativni cijeli brojevi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  takvi da vrijedi

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$