

sobota, 8. júla 2023

Úloha 1. Nájdite všetky zložené kladné celé čísla n také, že ak sú d_1, d_2, \dots, d_k všetky jeho kladné delitele a $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, tak pre každé i také, že $1 \leq i \leq k - 2$, platí, že číslo d_i je deliteľom čísla $d_{i+1} + d_{i+2}$.

Úloha 2. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AB| < |AC|$. Označme Ω jemu opísanú kružnicu a S stred jej oblúka s krajnými bodmi C a B obsahujúceho bod A . Nech kolmica z bodu A na priamku BC pretína úsečku BS v bode D a kružnicu Ω v bode E rôznom od A . Nech rovnobežka s priamkou BC cez bod D pretína priamku BE v bode L . Označme ω kružnicu opísanú trojuholníku BDL . Nech P je priesecník kružníci ω a Ω rôzny od B .

Dokážte, že dotyčnica ku kružnici ω v bode P pretína priamku BS na osi uhla BAC .

Úloha 3. Nech k je celé číslo také, že $k \geq 2$. Určte všetky nekonečné postupnosti kladných celých čísel (a_1, a_2, \dots) také, že existuje polynom P taký, že

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

kde c_0, c_1, \dots, c_{k-1} sú nezáporné celé čísla, a pre každé kladné celé číslo n platí

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}.$$

nedela, 9. júla 2023

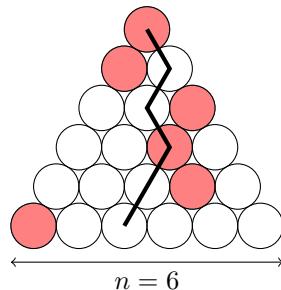
Úloha 4. Nech $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ sú navzájom rôzne kladné reálne čísla také, že pre každé n z množiny $\{1, 2, \dots, 2023\}$ platí

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

a číslo a_n je celé. Dokážte, že $a_{2023} \geq 3034$.

Úloha 5. Nech n je kladné celé číslo. Pod *japonským trojuholníkom* rádu n budeme rozumieť rozmiestnenie $1 + 2 + \dots + n$ dotykmí prepojených zhodných krúžkov do tvaru rovnostranného trojuholníka s n riadkami tak, že pre každé i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ obsahuje i . riadok práve i krúžkov, z ktorých práve jeden je červený. V japonskom trojuholníku budeme pod *nindža cestou* rozumieť postupnosť n krúžkov, ktorá sa začína v najvrchnejšom krúžku, v každom kroku pokračuje jedným z dvoch krúžkov, ktoré sú hned pod ním, a končí sa v najspodnejšom riadku.

Na obrázku je príklad japonského trojuholníka rádu 6 a v ňom príklad nindža cesty obsahujúcej 2 červené krúžky:



Najdite najväčšie k také, že v každom japonskom trojuholníku rádu n existuje nindža cesta obsahujúca aspoň k červených krúžkov.

Úloha 6. Nech ABC je rovnostranný trojuholník. Nech A_1, B_1, C_1 sú jeho vnútorné body také, že $|BA_1| = |A_1C|, |CB_1| = |B_1A|, |AC_1| = |C_1B|$ a

$$|\angle BA_1C| + |\angle CB_1A| + |\angle AC_1B| = 480^\circ.$$

Nech sa priamky BC_1 a CB_1 pretínajú v bode A_2 , priamky CA_1 a AC_1 v bode B_2 a priamky AB_1 a BA_1 v bode C_2 .

Dokážte, že ak je trojuholník $A_1B_1C_1$ rôznostranný, tak existujú dva rôzne body ležiace na všetkých troch kružničiach opísaných trojuholníkom $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$.