

יום שני, 21 בספטמבר 2020

שאלה 1. יהא $ABCD$ מרובע קמור. הנקודה P נמצאת בפנים המרובע $ABCD$. נתון כי מתקיימים שוויונות היחסים הבאים:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

הוכיחו כי שלושת הישרים הבאים נפגשים בנקודה: חוצה הזווית הפנימי של $\angle ADP$, חוצה הזווית הפנימי של $\angle PCB$ והאנך האמצעי של הקטע AB .

שאלה 2. המספרים הממשיים a, b, c, d מקיימים $a \geq b \geq c \geq d > 0$ וכן $a + b + c + d = 1$. הוכיחו כי

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

שאלה 3. נתונות $4n$ אבנים בעלות משקלים $1, 2, 3, \dots, 4n$. כל אחת מהאבנים צבועה באחד מ- n צבעים, ויש בדיוק ארבע אבנים מכל צבע. הראו כי ניתן לחלק את האבנים לשתי ערימות, כך ששני התנאים הבאים מתקיימים:

- המשקלים הכוללים של שתי הערימות שווים זה לזה.
- בכל ערימה יש בדיוק שתי אבנים מכל צבע.

יום שלישי, 22 בספטמבר 2020

שאלה 4. יהא $n > 1$ שלם. על צלע הר ממוקמות n^2 תחנות, כולן בגבהים שונים. ישנן שתי חברות רכבלים, A ו- B , שכל אחת מהן מתפעלת k רכבלים. כל רכבל מוביל נוסעים מאחת התחנות לתחנה אחרת, גבוהה יותר (ללא עצירות ביניים). ל- k הרכבלים של A יש k נקודות התחלה שונות ו- k נקודות סיום שונות, ולכל שניים מהם, הרכבל שמתחיל גבוה יותר גם מסיים גבוה יותר. אותם התנאים חלים גם עבור הרכבלים של B . נאמר ששתי תחנות הן **מקושרות** על ידי חברה מסוימת אם ניתן להגיע מהתחנה הנמוכה מהשתיים אל הגבוהה על ידי שימוש ברכבל אחד או יותר של החברה (מעברים אחרים בין התחנות אסורים). מצאו את השלם החיובי הקטן ביותר k עבורו בהכרח קיימות שתי תחנות אשר מקושרות על ידי שתי החברות.

שאלה 5. נתונה חפיסה של $n > 1$ קלפים. על כל קלף כתוב מספר שלם חיובי. החפיסה מקיימת את התכונה שהממוצע החשבוני של המספרים על כל זוג קלפים הוא גם הממוצע ההנדסי של המספרים על אוסף כלשהו של קלפים המכיל קלף אחד לפחות. עבור אילו ערכי n נובע שהמספרים על כל הקלפים בהכרח שווים זה לזה?

שאלה 6. הוכיחו כי קיים קבוע חיובי c עבורו הטענה הבאה נכונה: לכל מספר שלם $n > 1$, ולכל קבוצה S של n נקודות במישור שכל שתיים מהן נמצאות במרחק לפחות 1 זו מזו, קיים ישר ℓ המחלק את S ועבורו מתקיים שהמרחק של כל נקודה ב- S מ- ℓ הוא לפחות $cn^{-1/3}$. (אומרים כי ישר ℓ **מחלק** קבוצת נקודות S אם קטע כלשהו המחבר זוג נקודות מ- S נחתך עם ℓ .)

הערה. תוצאות חלשות יותר בהן $cn^{-1/3}$ מוחלף ב- $cn^{-\alpha}$ עשויות לזכות בניקוד בהתאם לערך הקבוע $\alpha > 1/3$.