IMO 2014
Cape Town - South Africa

Language: **Georgian**

Day: **1**

სამშაბათი, 8 ივლისი, 2014

ამოცანა 1. ვთქვათ $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ დადებითი მთელი რიცხვების უსასრულო მიმდევრობაა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი მთელი რიცხვი $n \geq 1$ ისეთი, რომ

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

ამოცანა 2. ვთქვათ $n \geq 2$ მთელი რიცხვია. განიხილება $n \times n$ ჭადრაკის დაფა, რომელიც n^2 ცალი ერთეულოვანი კვადრატისგან (უჯრისგან) შედგება. ასეთ დაფაზე n ცალი ეტლის განლაგებას ეწოდება *მშვიდობიანი* თუ ყოველი სტრიქონი და ყოველი სვეტი შეიცავს მხოლოდ ერთ ეტლს. იპოვეთ უდიდესი მთელი დადებითი k ისეთი, რომ n ცალი ეტლის ყოველი მშვიდობიანი განლაგებისთვის არსებობს $k \times k$ კვადრატი, რომლის k^2 ცალი უჯრიდან არც ერთ უჯრაზე ეტლი არ იმყოფება.

ამოცანა 3. ამოზნექილ $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. H წერტილი არის A წერტილიდან BD–ზე დაშვებული მართობის ფუძე. S და T წერტილები შესაბამისად AB და AD გვერდების ისეთი წერტილებია, რომ H არის SCT სამკუთხედის შიგნით, ამასთან

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

დაამტკიცეთ, რომ BD წრფე არის TSH სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წუთი
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

Language: **Georgian**

Day: **2**

ოთხშაბათი, 9 ივლისი, 2014

ამოცანა 4. P და Q წერტილები დევს ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის BC გვერდზე ისე, რომ $\angle PAB = \angle BCA$ და $\angle CAQ = \angle ABC$. M და N წერტილები შესაბამისად AP და AQ წრფეების ისეთი წერტილებია, რომ P არის AM–ის შუაწერტილი, ხოლო Q არის AN–ის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ BM და CN წრფეების გადაკვეთის წერტილი დევს ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე.

ამოცანა 5. ყოველი მთელი დადებითი n–თვის, კეიპტაუნის ბანკი უშვებს მონეტებს, თითოეული მონეტის ღირებულებაა $\frac{1}{n}$. მოცემულია სასრული რაოდენობა ასეთი მონეტებისა (არა აუცილებლად განსხვავებული ღირებულებების), რომელთა ჯამური ღირებულება არ აღემატება $99 + \frac{1}{2}$. დაამტკიცეთ, რომ შესაძლებელია დავყოთ ეს სასრული რაოდენობა მონეტებისა 100 ჯგუფად ან უფრო ნაკლებ ჯგუფად ისე, რომ ყოველ ჯგუფში მონეტების ჯამური ღირებულება იყოს არაუმეტეს 1–ისა.

ამოცანა 6. ვიტყვით, რომ სიბრტყეზე მოცემული წრფეთა სიმრავლე იმყოფება *ზოგად მდგომარეობაში*, თუ არც ერთი ორი წრფე ერთმანეთის პარალელური არაა და არც ერთი სამი წრფე ერთ წერტილზე არ გადის. ზოგად მდგომარეობაში მყოფი წრფეთა სიმრავლე სიბრტყეს ჰყოფს არეებად; ვუწოდოთ *შემოსაზღვრული არე* ისეთ არეს, რომელსაც სასრული ფართობი აქვს. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი საკმარისად დიდი n–თვის მართებულია შემდეგი წინადადება: ზოგად მდგომარეობაში მყოფ ნებისმიერ n ცალ წრფეთა სიმრავლეში შეგვიძლია შევღებოთ არანაკლებ $\sqrt{n}$ ცალი წრფე ლურჯ ფერად ისე, რომ ყოველი შემოსაზღვრული არის საზღვარი მთლიანად არ იქნება ლურჯი ფერის.

შენიშვნა: შედეგი რომელშიც $\sqrt{n}$ შეფასების ნაცვლად მიღებულია $c\sqrt{n}$, შეფასდება ქულებით, რომელიც დამოკიდებული იქნება c კონსტანტაზე.