



Language: Greek

Day: 1

Δευτέρα, 11 Ιουλίου 2016

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο BCF ορθογώνιο στο B . Έστω A σημείο της ευθείας CF τέτοιο ώστε $FA = FB$ και το F να βρίσκεται μεταξύ των A και C . Σημείο D επιλέγεται έτσι ώστε $DA = DC$ και η AC να είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle DAB$. Σημείο E επιλέγεται έτσι ώστε $EA = ED$ και η AD να είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle EAC$. Έστω M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος CF . Έστω X σημείο που είναι τέτοιο ώστε το $AMXE$ να είναι παραλληλόγραμμο (όπου $AM \parallel EX$ και $AE \parallel MX$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BD , FX και ME περνούν από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους σε κάθε κελλί ενός $n \times n$ πίνακα μπορεί να τοποθετηθεί ένα από τα γράμματα I , M και O κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα, το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι I , το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι M και το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι O ,
- σε κάθε διαγώνιο, αν ο αριθμός των γραμμάτων που είναι τοποθετημένα στα κελιά της είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι I , το ένα τρίτο είναι M και το ένα τρίτο είναι O .

Σημείωση: Οι γραμμές και οι στίλες ενός $n \times n$ πίνακα αριθμούνται από 1 μέχρι n κατά την φυσική τους σειρά. Ετσι κάθε κελλί αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι θετικών ακεραίων (i, j) με $1 \leq i, j \leq n$. Για $n > 1$, ο πίνακας έχει $4n - 2$ διαγωνίους δύο τύπων. Μια διαγώνιος του πρώτου τύπου αποτελείται από όλα τα κελιά (i, j) για τα οποία το άθροισμα $i + j$ έχει σταθερή τιμή και μια διαγώνιος του δεύτερου τύπου αποτελείται από τα κελιά (i, j) για τα οποία η διαφορά $i - j$ έχει σταθερή τιμή.

Πρόβλημα 3. Έστω $P = A_1 A_2 \dots A_k$ είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο. Οι κορυφές A_1, A_2, \dots, A_k έχουν ακέραιες συντεταγμένες και βρίσκονται όλες πάνω σε ένα κύκλο. Έστω S είναι το εμβαδόν του πολυγώνου P . Δίνεται ένας περιττός ακέραιος n τέτοιος ώστε τα τετράγωνα των μηκών των πλευρών του πολυγώνου P είναι ακέραιοι που διαιρούνται με τον αριθμό n . Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2S$ είναι ένας ακέραιος που διαιρείται με τον αριθμό n .

Τρίτη, 12 Ιουλίου 2016

Πρόβλημα 4. Ένα σύνολο θετικών ακέραιων αριθμών ονομάζεται εύοσμο, αν αυτό περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία και καθένα από τα στοιχεία του έχει έναν κοινό πρώτο παράγοντα με ένα τουλάχιστον από τα υπόλοιπα στοιχεία του. Έστω $P(n) = n^2 + n + 1$. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του θετικού ακεραίου b έτσι ώστε να υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος a για τον οποίο το σύνολο

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

είναι εύοσμο;

Πρόβλημα 5. Η εξίσωση

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016)$$

γράφεται στον πίνακα, με 2016 γραμμικούς παράγοντες σε κάθε μέλος της. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του k για την οποία είναι δυνατόν να σβήσουμε ακριβώς k από τους 4032 γραμμικούς παράγοντες των δύο μελών της εξίσωσης έτσι ώστε ένας τουλάχιστον παράγοντας να μείνει σε κάθε μέλος και η εξίσωση που προκύπτει να μην έχει πραγματικές λύσεις;

Πρόβλημα 6. Δίνονται $n \geq 2$ ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο έται ώστε κάθε δύο από αυτά τέμνονται σε ένα εσωτερικό τους σημείο και δεν υπάρχουν τρία από αυτά που να περνούν από το ίδιο σημείο. Ο Τζέφ πρέπει να διαλέξει ένα άκρο από κάθε ευθύγραμμο τμήμα και να τοποθετήσει ένα βάτραχο σε αυτό, που να κοιτάζει προς το άλλο άκρο του τμήματος. Υστερα αυτός θα κάνει $n-1$ χειροκροτήματα. Σε κάθε χειροκρότημα, κάθε βάτραχος πηδά αμέσως προς το επόμενο σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματός του. Οι βάτραχοι ποτέ δεν αλλάζουν την κατεύθυνση των πηδημάτων τους. Ο Τζέφ θέλει να τοποθετήσει τους βάτραχους κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην συμβεί ποτέ να βρεθούν δύο από αυτούς στο ίδιο σημείο τομής την ίδια χρονική στιγμή.

- (α') Να αποδείξετε ότι ο Τζέφ μπορεί πάντοτε να πραγματοποιήσει την επιθυμία του, όταν ο αριθμός n είναι περιττός.
- (β') Να αποδείξετε ότι ο Τζέφ δεν μπορεί ποτέ να πραγματοποιήσει την επιθυμία του, όταν ο n είναι άρτιος.