

יום שלישי, 16 ביולי 2024

שאלה 1. מצאו את כל המספרים הממשיים α עבורם מתקיים שלכל n שלם חיובי, המספר השלם

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

הוא כפולה של n . (כאן $\lfloor z \rfloor$ מסמן את השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל- z . לדוגמה, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ וכן $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

שאלה 2. מצאו את כל הזוגות של שלמים חיוביים (a, b) עבורם קיימים שלמים חיוביים g ו- N המקיימים

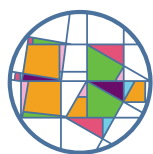
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

לכל $n \geq N$ שלם. (כאן $\gcd(x, y)$ מסמן את המחלק המשותף המרבי של השלמים x ו- y .)

שאלה 3. תהא סדרה אינסופית של שלמים חיוביים, ויהא N שלם חיובי. נתון כי לכל $n > N$, a_n שווה למספר המופעים של a_{n-1} ברשימה a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

הוכיחו כי לפחות אחת מהסדרות a_1, a_3, a_5, \dots ו- a_2, a_4, a_6, \dots היא מחזורית החל ממקום מסוים.

(סדרה אינסופית b_1, b_2, b_3, \dots נקראת **מחזורית החל ממקום מסוים** אם קיימים שלמים חיוביים p ו- M עבורם מתקיים $b_{m+p} = b_m$ לכל $m \geq M$.)



יום רביעי, 17 ביולי 2024

שאלה 4. יהא ABC משולש בו מתקיים $AB < AC < BC$. נסמן ב- ω את המעגל החסום ב- ABC וב- I את מרכזו. נסמן ב- X את הנקודה על הישר BC ששונה מ- C עבורה הישר המקביל ל- AC דרך X משיק ל- ω . בדומה, נסמן ב- Y את הנקודה על הישר BC ששונה מ- B עבורה הישר המקביל ל- AB דרך Y משיק ל- ω . נסמן את נקודת החיתוך השנייה של AI עם המעגל החסום של ABC ב- $P \neq A$. נסמן ב- K וב- L את אמצעי הצלעות AC ו- AB , בהתאמה. הוכיחו כי $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

שאלה 5. טורבו החילזון משחק במשחק על לוח משבצות עם 2024 שורות ו-2023 עמודות. ב-2022 ממשבצות הלוח מתחבאות מפלצות. בהתחלה טורבו לא יודע היכן ממוקמת אף מפלצת, אבל הוא יודע שיש בדיוק מפלצת אחת בכל שורה חוץ מבראשונה ובאחרונה, ושכל עמודה יש לכל היותר מפלצת אחת.

טורבו מנסה מספר פעמים להגיע מהשורה הראשונה לאחרונה. בכל ניסיון, הוא בוחר משבצת התחלה כלשהי בשורה הראשונה, וזוחל ממשבצת למשבצת סמוכה לפי צלע שוב ושוב. (מותר לטורבו לחזור למשבצת שכבר ביקר בה.) אם טורבו מגיע למשבצת עם מפלצת, הניסיון מסתיים, ואיילה מחזירה אותו לשורה הראשונה עבור הניסיון הבא. המפלצות לא זזות, וטורבו זוכר אם יש או אין מפלצת בכל משבצת בה ביקר. אם טורבו מגיע למשבצת כלשהי בשורה האחרונה, הניסיון מסתיים והמשחק נגמר.

מצאו את המספר הקטן ביותר n עבורו לטורבו יש אסטרטגיה שמבטיחה שיצליח להגיע לשורה האחרונה תוך n ניסיונות או פחות, ללא תלות במיקומי המפלצות.

שאלה 6. נסמן ב- \mathbb{Q} את קבוצת המספרים הרציונליים. פונקציה $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ תקרא **קולחת** אם מתקיימת התכונה הבאה: לכל $x, y \in \mathbb{Q}$ מתקיים

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{או} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

הראו כי קיים c שלם עבורו לכל פונקציה קולחת f ישנם לכל היותר c מספרים רציונליים שונים מהצורה $f(r) + f(-r)$ עבור r רציונלי כלשהו, ומצאו את הערך הקטן ביותר האפשרי של c .