srijeda, 15. srpnja 2009.

1. zadatak Neka je n prirodan broj i neka su $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, \ldots, n\}$, takvi da su brojevi $a_i(a_{i+1} - 1)$ djeljivi s n za sve $i = 1, \ldots, k-1$.
Dokaži da broj $a_k(a_1 - 1)$ nije djeljiv s n.

2. zadatak Neka je ABC trokut i O središte njegove opisane kružnice. Neka su P i Q unutarnje točke stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom. Točke K, L i M su redom polovišta dužina $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$ i $\overline{PQ}$, a Γ kružnica koja prolazi točkama K, L i M.
Pravac PQ je tangenta kružnice Γ. Dokaži da je $|OP| = |OQ|$.

3. zadatak Neka je $s_1, s_2, s_3, \ldots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, takav da su sljedeća dva njegova podniza

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{i} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

aritmetički nizovi. Dokaži da je niz $s_1, s_2, s_3, \ldots$ također aritmetički.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

četvtak, 16. srpnja 2009.

4. zadatak U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$. Simetrale kutova $\angle CAB$ i $\angle ABC$ sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D i E redom. Neka je K središte kružnice upisane trokutu ADC.
Neka mjera kuta $\angle BEK$ iznosi $45°$. Odredi sve moguće vrijednosti mjere kuta $\angle CAB$.

5. zadatak Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. funkcije definirane na skupu prirodnih brojeva koje poprimaju vrijednosti u skupu prirodnih brojeva) takve da, za sve prirodne brojeve a i b, postoji nedegenerirani trokut sa stranicama duljina

$$a, \quad f(b) \quad \text{i} \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trokut je *nedegeneriran* ako njegovi vrhovi nisu kolinearni.)

6. zadatak Dani su međusobno različiti prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i dan je skup M koji se sastoji od $n-1$ prirodnih brojeva i ne sadrži broj $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Skakavac skače duž brojevnog pravca: polazeći iz točke s koordinatom 0, on treba napraviti n skokova udesno. Pritom duljine njegovih skokova trebaju biti jednake brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u nekom poretku.
Dokaži da je taj poredak moguće odabrati tako da skakavac ne prođe kroz nijednu točku s koordinatom iz skupa M.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova