



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Finnish

Day: 1

Tiistai, 10. heinäkuuta 2012

**Tehtävä 1.** Kolmion  $ABC$  kärkeä  $A$  vastassa olevan sivuumpyrän keskipiste on  $J$ . Sivuumpyrän ja sivun  $BC$  sivuamispiste on  $M$ . Ympyrä sivuaa suoraa  $AB$  pisteessä  $K$  ja suoraa  $AC$  pisteessä  $L$ . Suorien  $LM$  ja  $BJ$  leikkauspiste on  $F$  ja suorien  $KM$  ja  $CJ$  leikkauspiste on  $G$ . Olkoon vielä  $S$  suorien  $AF$  ja  $BC$  ja  $T$  suorien  $AG$  ja  $BC$  leikkauspiste. Todista, että  $M$  on janan  $ST$  keskipiste.

(Kolmion  $ABC$  kärkeä  $A$  vastassa oleva *sivuumpyrä* on ympyrä, joka sivuaa janaa  $BC$ , puolisuoraa  $AB$  jatkeella ja puolisuoraa  $AC$  jatkeella.)

**Tehtävä 2.** Olkoon  $n \geq 3$  ja olkoot  $a_2, a_3, \dots, a_n$  positiivisia reaalilukuja, joille pätee  $a_2a_3 \cdots a_n = 1$ . Todista, että

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

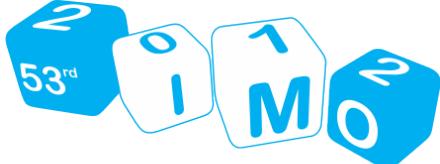
**Tehtävä 3.** *Valehteluleikki* on peli, jossa on kaksi pelaajaa  $A$  ja  $B$ . Pelin säännöt perustuvat positiivisiin kokonaislukuihin  $k$  ja  $n$ , jotka ovat molempien pelaajien tiedossa.

Pelin alussa  $A$  valitsee kokonaisluvut  $x$  ja  $N$ ,  $1 \leq x \leq N$ .  $A$  pitää luvun  $x$  salassa, mutta ilmoittaa  $B$ :lle rehellisesti luvun  $N$ .  $B$  pyrkii saamaan tietoa luvusta  $x$  tekemällä  $A$ :lle kysymyksiä. Jokaisessa kysymyksessä hän esittää jonkin positiivisten kokonaislukujen joukon  $S$  (samaa joukkoa on voitu käyttää jo aikaisemmassa kysymyksessä) ja kysyy  $A$ :ltä, kuuluuko  $x$  joukkoon  $S$ .  $B$  voi tehdä niin monta kysymystä kuin haluaa.  $A$ :n on heti vastattava jokaiseen  $B$ :n kysymykseen joko *kyllä* tai *ei*, mutta hän voi valehdella niin usein kuin haluaa. Ainoa rajoitus on, että jokaisen  $k+1$ :n peräkkäisen vastauksen joukossa on oltava ainakin yksi rehellinen. Kysyttyään niin monta kysymystä kuin on halunnut,  $B$  ilmoittaa positiivisten kokonaislukujen joukon  $X$ , jossa on enintään  $n$  alkiota. Jos  $x$  kuuluu joukkoon  $X$ ,  $B$  voittaa. Muussa tapauksessa hän häviää. Todista, että

1. jos  $n \geq 2^k$ , niin  $B$ :llä on voittostrategia;
2. jokaista tarpeeksi suurta  $k$ :ta kohden on olemassa sellainen  $n \geq 1,99^k$ , että  $B$ :llä ei ole voittostrategiaa.

Language: Finnish

Työaika 4 tuntia 30 minuuttia  
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.



53<sup>rd</sup> International Mathematical Olympiad  
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Finnish**

Day: **2**

Keskiviikko, 11. heinäkuuta 2012

**Tehtävä 4.** Määritä kaikki ne funktiot  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , joille pätee

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

kaikille sellaisille kokonaisluvuille  $a, b, c$ , joilla  $a + b + c = 0$ . (Tässä  $\mathbb{Z}$  tarkoittaa kokonaislukujen joukkoa.)

**Tehtävä 5.** Kolmiossa  $ABC$  on  $\angle BCA = 90^\circ$  ja  $D$  on  $C$ :stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon  $X$  janan  $CD$  sisäpiste. Olkoon  $K$  se janan  $AX$  piste, jolle  $BK = BC$  ja  $L$  se janan  $BX$  piste, jolle  $AL = AC$ . Olkoon  $M$   $AL$ :n ja  $BK$ :n leikkauuspiste. Osoita, että  $MK = ML$ .

**Tehtävä 6.** Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $n$ , joille on olemassa sellaiset ei-negatiiviset kokonaisluvut  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , että

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: *Finnish*

Työaika 4 tuntia 30 minuuttia.  
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.