

12 de julio de 2006

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Decimos que una diagonal de un polígono regular P de 2006 lados es un *segmento bueno* si sus extremos dividen al borde de P en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de P también se consideran *segmentos buenos*.

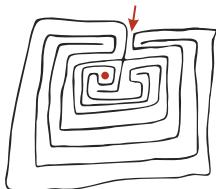
Supongamos que P se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ningún par de ellas se corta en el interior de P . Encuentre el máximo número de triángulos isósceles que puede haber tales que dos de sus lados son *segmentos buenos*.

Problema 3. Determine el menor número real M tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

se cumple para todos los números reales a, b, c .

*Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos.*



13 de julio de 2006

Problema 4. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considere el polinomio $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, donde P aparece k veces. Demuestre que hay a lo sumo n enteros t tales que $Q(t) = t$.

Problema 6. Asignamos a cada lado b de un polígono convexo P el área máxima que puede tener un triángulo que tiene a b como uno de sus lados y que está contenido en P . Demuestre que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es mayor o igual que el doble del área de P .

*Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos.*