

Երկուշաբթի, 21 սեպտեմբերի 2020թ

Խնդիր 1. Դիցուք  $ABCD$  ռեզուցիկ քառանկյան ներսում նշված է  $P$  կետն այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC :$$

Ապացուցել, որ  $\angle ADP \leq \angle PCB$  անկյունների կիսորդները և  $AB$  հատվածի միջնուղղայացք հատվում են մեկ կետում:

Խնդիր 2. Դիցուք տրված են  $a, b, c, d$  իրական թվերը, ընդ որում  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  և  $a + b + c + d = 1$ : Ապացուցել, որ

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1:$$

Խնդիր 3. Դիցուք տրված են  $4n$  քարեր, որոնք ունեն  $1, 2, 3, \dots, 4n$  գանգվածները: Քարերից յուրաքանչյուրը ներկած է  $n$  գույներից որևէ մեկով, ընդ որում յուրաքանչյուր գույնով ներկած է ճիշտ չորս քար: Ապացուցել, որ քարերը հնարավոր են բաժանել երկու կույտերի այնպես, որ միաժամանակ տեղի ունենան հետևյալ երկու պայմանները.

- կույտերի գանգվածներն իրար հավասար են,
- յուրաքանչյուր կույտ պարունակում է յուրաքանչյուր գույնի երկու քար:

Երեքաբթի, 22սեպտեմբերի 2020թ

Խնդիր 4. Դիցուք տրված է  $n$  ( $n > 1$ ) բնական թիվը և Արագածի լանջին տեղակայված են  $n^2$  հատ կայաններ, ընդ որում բոլոր կայաններն ել գտնվում են տարբեր բարձրությունների վրա: Դիցուք  $A$  և  $B$  կազմակերպություններից յուրաքանչյուրը շահագործում է  $k$  հատ օդախուց: Յուրաքանչյուր օդախուց իրականացնում է փոխադրում որևէ կայանից դեպի ավելի վերև գտնվող մեկ այլ կայան՝ առանց միջանկյալ կանգառի: Հայտնի է, որ  $A$  կազմակերպության  $k$  օդախուցերն ունեն  $k$  իրարից տարբեր սկզբնական կայաններ և  $k$  իրարից տարբեր վերջնական կայաններ, ինչպես նաև ավելի վերևից շահժումը սկսող օդախուցի վերջնական կայանը գտնվում է ավելի բարձր: Նույն պայմաններին բավարարում են  $B$  կազմակերպության օդախուցերը: Երկու կայան կոչվում են որևէ կազմակերպության կողմից միացված, եթե ինարավոր է սկսել ներքեւում գտնվող կայանից և այդ կազմակերպության մեկ կամ մի քանի օդախուցերից օգտվելով հասնել վերևի կայան (կայանների միջև այլ տեղաշարժ չի թույլատրվում):

Գտնել  $k$ -ի փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում կգտնվեն երկու կայաններ, որոնք միացված են երկու կազմակերպությունների կողմից:

Խնդիր 5. Դիցուք տրված են  $n$  ( $n > 1$ ) քարտեր, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա գրված է որևէ բնական թիվ: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու քարտերի վրա գրված երկու թվերի միջին թվաբանականը հավասար է մեկ կամ մի քանի քարտերի վրա գրված թվերի միջին երկրաչափականին: Պարզել, թե  $n$ -ի  $n^{\alpha}$  արժեքների դեպքում այդ պայմանից կստացվի, որ բոլոր քարտերի վրա գրված թվերն իրար հավասար են:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $c$  դրական թիվ, որի համար տեղի ունի հետևյալ անորումը.

Դիցուք  $S$  -ը հարթության վրա նշված  $n$  ( $n > 1$ ) կետերի բազմություն է, որ իրարից տարբեր ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը առնվազն  $1$  է: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $S$  բազմությունը բաժանող այնպիսի  $\ell$  ուղիղ, որ  $S$  բազմության յուրաքանչյուր կետի հեռավորությունը  $\ell$  ուղիղ առնվազն  $cn^{-1/3}$  է:

( $\ell$ -ը բաժանում է կետերի  $S$  բազմությունը, եթե այն հատում է  $S$ -ին պատկանող որևէ երկու կետեր միացնող հատվածը:)

Դիտողություն. Կախված  $\alpha > 1/3$  հաստատունի արժեքից  $cn^{-1/3}$ -ի փոխարեն ավելի թույլ  $cn^{-\alpha}$  կարգի գնահատականների համար կարող են տրվել միավորներ: