الثلاثاء, 15. جوييه 2025

مسألة 1. نقول عن مستقيم في المستوي أنه صيفي إذا كان غير موازي لأي من محور الفواصل، محور التراتيب، و المستقيم ذي المعادلة $x+y=0$. ليكن $n \geqslant 3$ عددا طبيعيا معطى. حدد كل الأعداد الطبيعية k بحيث يوجد n مستقيما مختلفا في المستوي يحقق الشرطين التاليين :

- مهما كانت الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر a و b حيث $a+b \leqslant n+1$، النقطة التي احداثياها (a,b) تقع على أحد المستقيمات على الأقل؛ و
- يوجد بالضبط k مستقيما صيفي من بينها.

مسألة 2. لتكن Ω وΓ دائرتين مركزاهما M وN, على الترتيب, بحيث نصف قطر الدائرة Ω أصغر تماما من نصف قطر الدائرة Γ. نفرض أن Ω وΓ تتقاطع في نقطتين مختلفتين A وB. المستقيمMN يقطعΩ في C وΓ في D, بحيث النقط C, M, N وD موجودة بهذا الترتيب على المستقيم. لتكن النقطة P مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD. المستقيم AP يقطع Ω ثانية في $E \neq A$. المستقيم AP يقطع Γ ثانية في$F \neq A$. لتكنH نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث PMN. أثبت أن المستقيم الذي يشمل H و يوازي AP يمس الدائرة المحيطة بالمثلث BEF.

مسألة 3. لتكن$\mathbb{N}^*$ مجموعة الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر. نقول عن دالة $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ أنها ممتازة إذا كانت العلاقة

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ يقبل القسمة على } f(a)$$

مهما كانت الأعداد المخالفة للصفر a و b. أوجد أصغرعدد حقيقي c بحيث $f(n) \leqslant cn$ مهما كانت الدالة الممتازة f ومهما كان العدد الطبيعي المخالف للصفر n.

Language: Arabic (Tunisian)

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
لكلّ مسألة 7 درجات

الأربعاء, 16. جويلية 2025

مسألة 4. قاسم تام لعدد طبيعي m هو قاسم موجب لـ m يختلف عن m نفسه.

لتكن $a_1, a_2, \ldots$ سلسلة غير منتهية من الأعداد الطبيعية المخالفة للصفر، كلّ عدد منها له على الأقل ثلاثة قواسم تامة. مهما كان العدد الطبيعي $n \geqslant 1$، العدد الطبيعي a_{n+1} هو مجموع الثلاثة قواسم التامة الكبرى لـ a_n. أوجد كل القيم الممكنة لـ a_1.

مسألة 5. أمير و سامي يلعبان لعبة المتكاولة، وهي لعبة ثنائية تعتمد على عدد حقيقي موجب مخالف للصفر λ معروف عند اللاعبين. في الدور رقم n للعبة (بدءا بـ $n = 1$)، يكون ما يلي:

- إذا كان n عددا فرديا، يختار أميرعددا حقيقيا غير سالب x_n حيث

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- إذا كان n زوجيا، يختارسامي عددا حقيقيا غير سالب x_n حيث

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

إذا كان لاعب لا يستطيع اللعب في دوره، تنتهي اللعبة و يفوز اللاعب الآخر. إذا استمرت اللعبة إلى الأبد، لا يفوز أي من اللاعبين. كل الأعداد المختارة x_n معروفة لدى اللاعبين. حدد كل قيم λ التي تعطي أميراسراتيجية للفوز، و كل القيم التي تعطي سامي استراتيجية للفوز.

مسألة 6. نعتبر شبكة 2025×2025 من مربعات وحدة. تريد نور وضع بلاطات مستطيلة على الشبكة، يمكن أن تكون أبعادها مختلفة، حيث كل ضلع لكل بلاطة يقع على خط من خطوط الشبكة و كل مربع مغطى على الأكثر ببلاطة واحدة. أوجد أصغر عدد ممكن من البلاطات اللازم وضعها على الشبكة بحيث يبقى بالضبط في كل صف و في كل عمود من الشبكة مربع واحد غير مغطى بأي بلاطة.