15. červenec 2009

Úloha 1. Nechť n je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n. Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není dělitelné n.

Úloha 2. Nechť O je střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC. Dále nechť P a Q jsou vnitřní body po řadě stran CA a AB. Označme K, L, M po řadě středy úseček BP, CQ, PQ a Γ kružnici, která prochází body K, L a M. Předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici Γ. Dokažte, že $|OP| = |OQ|$.

Úloha 3. Nechť $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel taková, že obě její podposloupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{a} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

jsou aritmetické. Dokažte, že posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je také aritmetická.

Vyhrazený čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat nejvýše 7 bodů

16. červenec 2009

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| = |AC|$. Osy jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B protínají strany BC a CA po řadě v bodech D a E. Označme K střed kružnice vepsané trojúhelníku ADC. Předpokládejme, že $|\angle BEK| = 45°$. Najděte všechny možné velikosti úhlu CAB.

Úloha 5. Určete všechny takové funkce f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pro všechna kladná celá čísla a, b existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je *nedegenerovaný*, neleží-li všechny jeho vrcholy na téže přímce.)

Úloha 6. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Luční kobylka skáče podél číselné osy, přičemž začíná v bodě 0 a provede ve směru doprava n skoků o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v určitém pořadí. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobylka neoctne na žádném čísle z množiny M.