Středa, 7.července, 2010

Úloha 1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

pro libovolná reálná x, y. (Symbol $\lfloor z \rfloor$ značí největší celé číslo nepřevyšující z.)

Úloha 2. Nechť I je střed kružnice vepsané a Γ kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Nechť přímka AI protíná kružnici Γ v bodě D ($D \neq A$). Dále nechť na oblouku BDC je dán bod E a na straně BC bod F tak, že platí

$$|\measuredangle BAF| = |\measuredangle CAE| < \tfrac{1}{2}|\measuredangle BAC|.$$

Konečně nechť G je středem úsečky IF. Dokažte, že průsečík přímek DG a EI leží na kružnici Γ.

Úloha 3. Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech celých kladných čísel. Určete všechny funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná celá kladná m, n je číslo

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

druhou mocninou celého kladného čísla.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každý problém je možno získat 7 bodů

Čtvrtek, 8. července 2010

Úloha 4. Nechť bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP a CP protínají kružnici Γ opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K, L a M (různých od A, B, C). Tečna ke kružnici Γ v bodě C protíná přímku AB v bodě S. Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML.

Úloha 5. V každé ze šesti schránek B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a B_6 je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

1) Vybrat neprázdnou schránku B_j, kde $1 \leq j \leq 5$, odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky B_{j+1}.
2) Vybrat neprázdnou schránku B_k, kde $1 \leq k \leq 4$, odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek B_{k+1} a B_{k+2}.

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5 byly prázdné a schránka B_6 obsahovala právě $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Připomínáme, že $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Úloha 6. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kladných reálných čísel. Nechť s je celé kladné takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a ℓ ($\ell \leq s$) taková, že $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ pro všechna $n \geq N$.