Понедельник, 18 июля 2011 г.

Задача 1. Для множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, состоящего из четырех попарно различных целых положительных чисел, обозначим через s_A сумму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через n_A обозначим количество пар индексов (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, для которых s_A делится на $a_i + a_j$. Найдите все множества A, состоящие из четырех попарно различных целых положительных чисел, для которых n_A принимает наибольшее возможное значение.

Задача 2. Пусть $\mathcal{S}$ — конечное множество точек на плоскости, содержащее хотя бы две точки. Известно, что никакие три точки множества $\mathcal{S}$ не лежат на одной прямой. Назовем *мельницей* следующий процесс. Вначале выбирается прямая ℓ, на которой лежит ровно одна точка $P \in \mathcal{S}$. Прямая ℓ вращается по часовой стрелке вокруг *центра* P до тех пор, пока она впервые не пройдет через другую точку множества $\mathcal{S}$. В этот момент эта точка, обозначим ее Q, становится новым центром, и прямая продолжает вращаться по часовой стрелке вокруг точки Q до тех пор, пока она снова не пройдет через точку множества $\mathcal{S}$. Этот процесс продолжается бесконечно.
Докажите, что можно выбрать некоторую точку P множества $\mathcal{S}$ и некоторую прямую ℓ, проходящую через P, так, что для мельницы, начинающейся с прямой ℓ, каждая точка множества $\mathcal{S}$ выступит в роли центра бесконечное число раз.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

для всех действительных x и y. Докажите, что $f(x) = 0$ для всех $x \leq 0$.

Вторник, 19 июля 2011 г.

Задача 4. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Задача 5. Пусть f — функция, определенная на множестве целых чисел, принимающая целые положительные значения. Известно, что для любых целых m и n разность $f(m) - f(n)$ делится на $f(m-n)$. Докажите, что для любых целых m и n таких что $f(m) \leq f(n)$, число $f(n)$ делится на $f(m)$.

Задача 6. Пусть ABC — остроугольный треугольник, и Γ — описанная около него окружность. Пусть прямая ℓ — некоторая касательная к окружности Γ, и пусть ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c — прямые, симметричные прямой ℓ относительно прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c, касается окружности Γ.