Dienstag, den 23. Juli 2013

Aufgabe 1. Man beweise: Für jedes Paar positiver ganzer Zahlen k und n existieren k positive ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nicht notwendigerweise verschieden), so dass

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

gilt.

Aufgabe 2. Eine Konfiguration aus 4027 Punkten in der Ebene heißt *kolumbianisch*, wenn sie aus 2013 roten und 2014 blauen Punkten besteht, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Durch das Einzeichnen einiger Geraden wird die Ebene in mehrere Regionen unterteilt. Eine Menge von Geraden heißt *gut* für eine kolumbianische Konfiguration, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Keine Gerade geht durch einen Punkt der Konfiguration.
- Keine Region enthält Punkte beider Farben.

Man bestimme den minimalen Wert von k, so dass es für jede kolumbianische Konfiguration von 4027 Punkten eine gute Menge von k Geraden gibt.

Aufgabe 3. Der A gegenüber liegende Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seite BC im Punkt A_1. Die Punkte B_1 auf der Seite CA und C_1 auf der Seite AB seien, unter Verwendung der B bzw. C gegenüber liegenden Ankreise, analog definiert. Man nehme an, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.
Man beweise, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(Der *Ankreis* von ABC, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt, ist der Kreis, der die Strecke BC sowie den Strahl AB jenseits von B und den Strahl AC jenseits von C berührt. Die B bzw. C gegenüber liegenden Ankreise werden analog definiert.)

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, den 24. Juli 2013

Aufgabe 4. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H. Ferner sei W ein innerer Punkt der Strecke BC. Es bezeichnen M und N die Höhenfußpunkte von B bzw. C. Außerdem bezeichne ω_1 den Umkreis von BWN und X den Punkt auf ω_1, so dass WX ein Durchmesser von ω_1 ist. Analog bezeichne ω_2 den Umkreis von CWM und Y den Punkt auf ω_2, so dass WY ein Durchmesser von ω_2 ist.
Man beweise, dass die Punkte X, Y und H auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 5. Es sei $\mathbb{Q}_{>0}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Ferner sei $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt $f(x)f(y) \geq f(xy)$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

(iii) Es gibt eine rationale Zahl $a > 1$, für die $f(a) = a$ gilt.

Man beweise, dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 6. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Man betrachte einen Kreis, auf dem $n+1$ Punkte in jeweils gleichem Abstand markiert sind. Man betrachte alle Beschriftungen dieser Punkte mit den Zahlen $0, 1, \ldots, n$, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt. Zwei solche Beschriftungen werden als gleich angesehen, wenn man die eine durch Drehung des Kreises aus der anderen erhalten kann. Eine Beschriftung heißt *schön*, wenn für je vier Zahlen $a < b < c < d$ mit $a + d = b + c$ die Sehne zwischen a und d nicht die Sehne zwischen b und c schneidet.
Es bezeichne M die Anzahl der schönen Beschriftungen und N die Anzahl der geordneten Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen mit $x + y \leq n$ und $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$.
Man beweise

$$M = N + 1.$$

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.