



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Italian (ita), day 1

sabato, 8. luglio 2023

Problema 1. Determinare tutti i numeri composti $n > 1$ con la seguente proprietà: se i divisori positivi di n sono ordinati a formare una lista d_1, d_2, \dots, d_k tale che

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n,$$

allora si ha che d_i divide $d_{i+1} + d_{i+2}$ per ogni i tale che $1 \leq i \leq k - 2$.

(Nota: un numero composto è un intero $n > 1$ che non è un numero primo.)

Problema 2. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Sia Ω la circonferenza circoscritta al triangolo ABC . Sia S il punto medio dell'arco CB di Ω che contiene A . La perpendicolare a BC passante per A interseca la retta BS in D , e interseca nuovamente Ω in $E \neq A$. La parallela a BC passante per D interseca la retta BE in L . Sia ω la circonferenza circoscritta al triangolo BDL , e sia $P \neq B$ il punto in cui ω incontra nuovamente Ω .

Dimostrare che la tangente a ω in P e la retta BS si intersecano in un punto situato sulla bisettrice interna di $\angle BAC$.

Problema 3. Determinare, per ogni intero $k \geq 2$, l'insieme di tutte le successioni infinite a_1, a_2, \dots di interi positivi per cui esiste un polinomio P della forma

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

dove c_0, c_1, \dots, c_{k-1} sono interi non negativi, tale che

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}$$

per ogni intero $n \geq 1$.



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Italian (ita), day 2

domenica, 9. luglio 2023

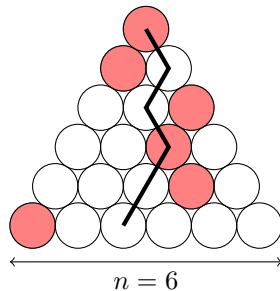
Problema 4. Siano $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ numeri reali positivi a due a due distinti tali che

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

è un intero per ogni $n = 1, 2, \dots, 2023$.

Dimostrare che $a_{2023} \geq 3034$.

Problema 5. Sia n un intero positivo. Un *triangolo nipponico* è costituito da $1 + 2 + \dots + n$ cerchi disposti a formare un triangolo equilatero in cui, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, la i -esima riga contiene esattamente i cerchi, dei quali esattamente uno è colorato di rosso. Un *percorso ninja* in un triangolo nipponico è una sequenza di n cerchi che inizia con il cerchio della prima riga, prosegue andando ripetutamente da un cerchio a uno dei due cerchi immediatamente al di sotto, e termina con un cerchio dell'ultima riga. Ecco un esempio di un triangolo nipponico con $n = 6$, con indicato un percorso ninja che contiene due cerchi rossi.



Determinare, in funzione di n , il più grande intero k tale che in ogni triangolo nipponico esiste un percorso ninja che contiene almeno k cerchi rossi.

Problema 6. Sia ABC un triangolo equilatero. Siano A_1, B_1, C_1 punti interni ad ABC tali che $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, e

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Le rette BC_1 e CB_1 si intersecano in A_2 , le rette CA_1 e AC_1 si intersecano in B_2 , e le rette AB_1 e BA_1 si intersecano in C_2 .

Dimostrare che, se il triangolo $A_1B_1C_1$ è scaleno, allora le tre circonferenze circoscritte ai triangoli AA_1A_2 , BB_1B_2 e CC_1C_2 passano tutte per due punti comuni.

(Nota: un triangolo è scaleno se i suoi tre lati hanno lunghezze a due a due distinte.)