

الجمعة 10 جويلية 2015

المسألة 1. نقول عن مجموعة منتهية S من نقط المستوى إنها متوازنة إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين A و B في S توجد نقطة C في S تحقق $AC = BC$. نقول عن S إنها بدون مركز إذا كان من أجل كل ثلاث نقط مختلفة A و B و C في S لا توجد نقطة P في S تحقق $PA = PB = PC$.

أ. أثبت أنه لكل عدد صحيح $n \geq 3$ ، توجد مجموعة متوازنة مكونة من n نقطة.

ب. حدّد كل الأعداد الصحيحة $n \geq 3$ التي لأجلها توجد مجموعة متوازنة بدون مركز مكونة من n نقطة.

المسألة 2. حدّد كل الثلاثيات المرتبة (a, b, c) من الأعداد الصحيحة الموجبة تماما التي لأجلها تكون المقادير

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

قوى للعدد 2.

(نسمي قوة للعدد 2 كل عدد صحيح يكتب على شكل 2^n ، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 0.)

المسألة 3. ليكن ABC مثلثا حادّ الزوايا فيه $AB > AC$ ، و Γ دائرته المحيطة، و H ملتقى ارتفاعاته، و F قدم ارتفاعه المنشأ من الرأس A . النقطة M هي منتصف الضلع $[BC]$. لتكن Q النقطة على الدائرة Γ التي تحقق $\widehat{HQA} = 90^\circ$. لتكن K النقطة على الدائرة Γ التي تحقق $\widehat{HKQ} = 90^\circ$. لنفرض أنّ النقط A, B, C, K, Q مختلفة وهي وفق هذا الترتيب على الدائرة Γ .

أثبت أنّ الدائرتين المحيطتين بالمثلثين KQH و FKM متماستان.

السبت 11 جويليا 2015

المسألة 4. مثلث ABC ، مثلث (Ω) دائرته المحيطة و O مركزها. الدائرة (Γ) ذات المركز A تقطع الضلع $[BC]$ في النقطتين D و E ، بحيث تكون النقط B, D, E, C كلها مختلفة وتقع على المستقيم (BC) بهذا الترتيب. لتكن F و G نقطتي تقاطع الدائرتين (Γ) و (Ω) ، بحيث تقع النقط A, F, B, C, G على الدائرة (Ω) بهذا الترتيب. لتكن K نقطة التقاطع الثانية للدائرة المحيطة بالمثلث BDF مع الضلع $[AB]$. لتكن L نقطة التقاطع الثانية للدائرة المحيطة بالمثلث CGE مع الضلع $[CA]$.

أثبت أنه إذا كان المستقيمان (FK) و (GL) مختلفين ويتقاطعان في النقطة X ، فإن النقطة X تقع على المستقيم (AO) .

المسألة 5. لتكن \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية. جد جميع الدوال $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التي تحقق المعادلة

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

لكل عددين حقيقيين x و y .

المسألة 6. متتالية الأعداد الصحيحة a_1, a_2, \dots تحقق الشرطين:

$$(i) \quad 1 \leq a_j \leq 2015 \quad \text{لكل } j \geq 1$$

$$(ii) \quad k + a_k \neq \ell + a_\ell \quad \text{لكل } 1 \leq k < \ell$$

أثبت وجود عددين صحيحين موجبين تماما b و N بحيث

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

لكل عددين صحيحين m و n يحققان $n > m \geq N$.