



Pazartesi, 19. Temmuz 2021

Soru 1. $n \geq 100$ bir tam sayı olsun. Aslı $n, n+1, \dots, 2n$ sayılarının her birini farklı bir karta yazıyor. Daha sonra bu $n+1$ kartı karıştırarak iki gruba ayırıyor. Bu grplardan en az birinde, üzerindeki sayıların toplamı tam kare olan iki kartın bulunduğu gösteriniz.

Soru 2. Tüm x_1, \dots, x_n gerçek sayıları için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Soru 3. $|AB| > |AC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $\angle DAB = \angle CAD$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. $[AC]$ kenarı üzerinde $\angle ADE = \angle BCD$ olacak şekilde bir E noktası, $[AB]$ kenarı üzerinde $\angle FDA = \angle DBC$ olacak şekilde bir F noktası ve AC doğrusu üzerinde $|CX| = |BX|$ olacak şekilde bir X noktası alınıyor. ADC ve EXD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun. BC , EF ve O_1O_2 doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.



Salı, 20. Temmuz 2021

Soru 4. Γ çemberinin merkezi I olsun. $ABCD$ dışbükey dörtgeninin $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ kenarlarının her biri Γ çemberine tegettir. AIC üçgeninin çevrel çemberi Ω olsun. $[BA]$ nin A yönünde uzantısı Ω ile X noktasında, $[BC]$ nin C yönünde uzantısı Ω ile Z noktasında kesişiyor. $[AD]$ ve $[CD]$ nin D yönünde uzantıları Ω ile sırasıyla Y ve T noktalarında kesişiyor.

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 5. Tüylü ve Ziplak isimli iki sincap kış için 2021 tane ceviz toplamıştır. Ziplak, cevizleri 1 den 2021 e kadar olan sayılarla numaralandırıyor ve en sevdikleri ağacın etrafında çembersel bir düzende 2021 tane küçük delik açıyor. Ertesi sabah Ziplak, Tüylü'nün her deliğe bir ceviz yerleştirdiğini, fakat yerleştirirken cevizlerin numaralarına hiç dikkat etmediğini fark ediyor. Bundan mutsuz olan Ziplak, 2021 hamleden oluşan bir hamleler dizisi uygulayarak cevizlerin yerlerini değiştirmeye karar veriyor. k inci hamlede Ziplak, k numaralı cevizin iki komşusunun yerlerini birbirleriyle değiştiriyor. Öyle bir k sayısının var olduğunu gösteriniz ki; Ziplak, k inci hamlede $a < k < b$ koşuluna uyan a ve b numaralı cevizlerin yerlerini değiştirmiştir olsun.

Soru 6. $m \geq 2$ bir tam sayı, A (pozitif olmak zorunda olmayan) tam sayılardan oluşan bir sonlu küme ve $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ kümeleri A nin alt kümeleri olsun. Her $k = 1, 2, \dots, m$ için B_k kümесinin elemanlarının toplamı m^k dir. A kümesinin en az $m/2$ eleman içerdigini gösteriniz.