Вторник, 8 июля 2014 г.

Задача 1. Пусть $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность целых положительных чисел. Докажите, что существует единственное целое число $n \geqslant 1$ такое, что

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Задача 2. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Дана шахматная доска $n \times n$, состоящая из n^2 единичных клеток. Расстановка n ладей в клетках этой доски называется *мирной*, если в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду находится ровно по одной ладье. Найдите наибольшее целое положительное k такое, что для каждой мирной расстановки n ладей найдется клетчатый квадрат $k \times k$, ни в одной из k^2 клеток которого нет ладьи.

Задача 3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BD. Точки S и T выбраны на отрезках AB и AD соответственно так, что точка H находится внутри треугольника SCT, и выполнены равенства

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника TSH.

Время на работу: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Среда, 9 июля 2014 г.

Задача 4. Точки P и Q выбраны на стороне BC остроугольного треугольника ABC так, что $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M и N выбраны на прямых AP и AQ соответственно так, что P — середина отрезка AM, а Q — середина отрезка AN. Докажите, что прямые BM и CN пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 5. Банк Кейптауна выпускает монеты номиналом $\frac{1}{n}$ для каждого целого положительного числа n. Дан конечный набор таких монет, сумма номиналов которых не превосходит $99+\frac{1}{2}$ (номиналы монет не обязательно различны). Докажите, что все монеты этого набора можно разбить на 100 или меньшее число групп так, чтобы сумма номиналов монет в каждой группе не превышала 1.

Задача 6. Будем говорить, что прямые на плоскости являются прямыми *общего положения*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку. Любые несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части; *ограниченными* частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.

Замечание: за доказательство утверждения задачи, в котором $\sqrt{n}$ заменено на $c\sqrt{n}$, будут начисляться баллы, в зависимости от константы c.

Время на работу: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов