12. srpnja 2006.

Zadatak 1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. U unutrašnjosti trokuta ABC dana je točka P takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokažite da je $|AP| \geq |AI|$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se točka P podudara sa točkom I.

Zadatak 2. Neka je P pravilni poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona P kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub od P na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona P. Za stranice poligona P također kažemo da su *dobre*.

Promatrajmo podjele poligona P na trokute pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona P. Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

Zadatak 3. Odredite najmanji realni broj M takav da nejednakost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve a, b i c.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

13. srpnja 2006.

Zadatak 4. Nađite sve parove (x, y) cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Zadatak 5. Neka je $P(x)$ polinom stupnja n, $n>1$, sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Promatrajmo polinom

$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokažite da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t)=t$.

Zadatak 6. Svakoj stranici b konveksnog poligona P pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu P. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama poligona P veći ili jednak od dvostruke površine poligona P.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova