Tisdag, den 18 juli 2017

Problem 1. För varje heltal $a_0 > 1$, definiera följden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ genom:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{om } \sqrt{a_n} \text{ är ett haltal,} \\ a_n + 3 & \text{annars,} \end{cases} \qquad \text{för varje } n \geqslant 0.$$

Bestäm alla värden på a_0 för vilka det existerar ett tal A sådant att $a_n = A$ för oändligt många värden på n.

Problem 2. Låt $\mathbb{R}$ vara mängden av de reella talen. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f\,(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 3. En jägare och en osynlig hare spelar ett spel i det euklidiska planet. Antag att harens startpunkt, A_0, sammanfaller med jägarens startpunkt, B_0.

Efter $n-1$ omgångar av spelet finns haren i punkten A_{n-1}, medan jägaren är i punkten B_{n-1}. I n:te omgången av spelet, inträffar tre saker i följande ordning:

(i) Haren rör sig osynligt till en punkt A_n sådan att avståndet mellan A_{n-1} och A_n är exakt 1.

(ii) En spårningsapparat rapporterar en punkt P_n till jägaren. Det enda jägaren kan vara säker på är att avståndet mellan P_n och A_n är som mest 1.

(iii) Jägaren rör sig (helt synligt) till en punkt B_n sådan att avståndet mellan B_{n-1} och B_n är exakt 1.

Är det alltid möjligt för jägaren att, oavsett hur haren rör sig och oavsett rapporterna från spårningsapparaten, välja sina rörelser på ett sådant sätt att han efter 10^9 omgångar kan vara säker på att avståndet mellan honom och haren är som mest 100?

Onsdag, den 19 juli 2017

Problem 4. Låt R och S vara två olika punkter på en cirkel Ω sådana att RS inte är en diameter. Låt ℓ vara tangentlinjen till Ω genom punkten R.

Punkten T är sådan att S är mittpunkten på sträckan RT. Punkten J väljs på den kortare bågen RS av Ω så att den omskrivna cirkeln Γ till triangeln JST skär ℓ i två olika punkter. Låt A vara den av skärningspunkterna som ligger närmare R. Linjen AJ skär Ω igen i punkten K. Visa att linjen KT är en tangentlinje till Γ.

Problem 5. Låt $N \geqslant 2$ vara ett givet heltal. En mängd av $N(N+1)$ fotbollsspelare, parvis olika långa, står i en rad. Sir Alex will avlägsna $N(N-1)$ spelare från denna rad så att den nya raden av $2N$ spelare satisfierar följande N villkor:

(1) ingen person står mellan de två längsta spelarna,

(2) ingen person står mellan den tredje och den fjärde längsta spelaren,

$\vdots$

(N) ingen person står mellan de två kortaste spelarna.

Visa att detta är alltid möjligt.

Problem 6. Ett ordnad par (x, y) av heltal är en *primitiv punkt* om den största gemensama delaren till x och y är 1. Givet an ändlig mängd S av primitiva punkter, visa att det finns ett positivt heltal n och heltalen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sådana att, för varje (x, y) i S, gäller

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Tid: 4 timmar och 30 minuter
För varje problem kan man få upp till 7 poäng