Sişenbe, 15. iýul 2025

Mesele 1. Eger tekizlikde göni çyzyk Ox okuna, Oy okuna we $x+y=0$ göni çyzyklaryň hiç birine parallel **bolmasa**, beýle göni çyzygy *gowy göni çyzyk* diýip atlandyralyň.

$n \geqslant 3$ bitin san berlen. Aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan n sany dürli göni çyzyk bar bolan, ähli k otrisatel däl bitin sanlary kesgitläň:

- $a+b \leqslant n+1$ şerti kanagatlandyrýan, islendik a we b položitel bitin sanlar üçin (a,b) nokat, azyndan berlen n sany göni çyzyklaryň birinde ýatýar;
- Berlen n sany göni çyzygyň takyk k sany gowy göni çyzyk.

Mesele 2. Goý Ω we Γ töwerekleriň merkezleri degişlilikde M we N nokatlar bolsun, bu ýerde Ω töweregiň radiusy Γ töweregiň radiusyndan kiçi. Ω we Γ töwerekler iki sany dürli A we B nokatlarda kesişýär. MN göni çyzyk Ω töweregi C nokatda we Γ töweregi bolsa D nokatda kesip, C, M, N we D nokatlar bir gönüde görkezilen tertipde ýerleşdirilen. ACD üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi P nokat bolsun. AP göni çyzyk Ω töweregi ikinji gezek E nokatda ($E \neq A$) kesýär. AP göni çyzyk Γ töweregi ikinji gezek F nokatda ($F \neq A$) kesýär. H nokat PMN üçburçlugyň beýiklikleriniň kesişme nokady bolsun.

H nokatdan geçýän, hem-de AP göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň BEF üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregine galtaşýandygyny subut ediň.

Mesele 3. $\mathbb{N}$ položitel bitin sanlaryň köplügi bolsun. Islendik a we b položitel bitin sanlar üçin aşakdaky şerti kanagatlandyrýan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funksiýany *erjel* funksiýa diýýäris: Eger

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ tapawut } f(a) \text{ sana bölünýär.}$$

Islendik erjel funksiýalar we bitin položitel sanlar üçin $f(n) \leqslant cn$ ýerine ýetýän c hemişelik hakyky sanyň in kiçi bahasyny tapyň.

Language: Turkmen

Synaga berlen wagt: 4 sagat 30 minut.
Her mesele 7 utuk bilen bahlandyrylar.

Çarşenbe, 16. iýul 2025

Mesele 4. N položitel bitin sanyň N sanyň özünden tapawutly bolan položitel bölüjüsine *Hususy bölüji* diýilýär.

$a_1, a_2, \ldots$ tükeniksiz položitel bitin sanlaryň yzygiderliginde onyň agzasy bolan her bir sanyň iň az üç sany hususy bölüjisi bar. Her bir $n \geqslant 1$, üçin a_{n+1} bitin san a_n sanyň iň uly üç sany hususy bölüjileriniň jemine deň.

a_1 sanyň ähli bolup biljek bahalaryny tapyň.

Mesele 5. Myrat we Jelil indiki *Deňsizlik* oýnuny oýnaýarlar, oýun iki oýunçy üçin niýetlenip bu oýnuň düzgünleri položitel hakyky λ sana bagly hem-de ol san iki oýunçada başdan belli. Oýnuň n-nji ädiminde ($n = 1$ den başlap) indikiler bolup geçýär:

- Eger n san täk bolsa Myrat otrisatel däl x_n sany

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n,$$

  bolar ýaly saýlaýar.

- Eger n san jübüt bolsa, Jelil otrisatel däl x_n sany

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n,$$

  bolar ýaly saýlaýar.

Eger oýunçy şerti kanagatlandyrýan sany saýlap bilmese onda oýun gutarýar we beýleki oýunçy utýar. Eger oýun tükeniksiz dowam etse oýunçylaryň hiç biri ýeňiji bolmaýar. Ähli saýlanan sanlar iki oýunçada belli.

Myradyň ýeniji bolmak strategiýasy bar bolan λ sanyň ähli bahalaryny tapyň we Jeliliň ýeňiji bolmak strategiýasy bar bolan λ sanlaryň ähli bahalaryny tapyň.

Mesele 6. Birlik ölçegli kwadratjyklardan düzülen 2025×2025 ölçegli gözenek berlen bolsun. Hamza bu uly kwadratda gönüburçly plitkalar bilen (plitkalaryň ölçegleri dürli bolmagy mümkin), her plitkanyň taraplary gözenegiň çyzyklarynda ýatar ýaly we gözenekdäki her birlik kwadrat iň köp bir sany plitka bilen ýapylar ýaly şekilde doldurasy gelýär.

Plitkalary gözenegiň her setirinde we her sütüninde üsti hiç bir plitka bilen ýapylmadyk takyk bir sany birlik öýjük bolar ýaly ýerleşdirmek Hamza üçin minimum näçe sany plitka zerurdygyny tapyň.