2023 年 7 月 8 日星期六

問題 1. 試找出所有滿足下述條件的合數 $n>1$：若 $d_1, d_2, \ldots, d_k$ 為 n 的所有正因數，其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$，則對每一個 $1\leqslant i\leqslant k-2$，都有 d_i 整除 $d_{i+1}+d_{i+2}$。

問題 2. 設 ABC 為銳角三角形，其中 $AB<AC$。設 Ω 為 ABC 的外接圓，而點 S 為 Ω 上包含 A 點的弧 CB 的中點。過 A 作與 BC 垂直的直線，該直線和 BS 交於點 D，並和 Ω 再交於點 $E\neq A$。設過 D 並與 BC 平行的直線和 BE 交於點 L；又將三角形 BDL 的外接圓記為 ω。設 ω 與 Ω 再交於點 $P\neq B$。

試證：圓 ω 在點 P 的切線和直線 BS 交在 $\angle BAC$ 的內角平分線上。

問題 3. 對每一個整數 $k\geqslant 2$，試找出所有具有下述性質的無窮正整數數列 $a_1, a_2, \ldots$：存在以下形式的多項式 $P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+\cdots+c_1x+c_0$，其中 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ 為非負的整數，使得

$$P(a_n)=a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

對每一個整數 $n\geqslant 1$ 均成立。

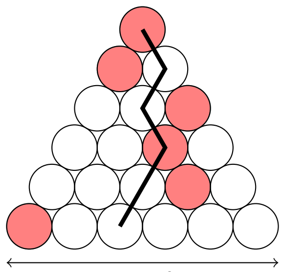
2023 年 7 月 9 日星期日

問題 4. 設 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ 爲兩兩相異的正實數，使得對所有 $n = 1, 2, \ldots, 2023$，

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

均爲整數。試證 $a_{2023} \geqslant 3034$。

問題 5. 設 n 爲正整數。*日式三角形*是將 $1 + 2 + \cdots + n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有 $i = 1, 2, \ldots, n$，由上往下數的第 i 列有 i 個圓，且每一列都有一個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的*忍者通道*，是一串由最上列到最下列的 n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。下圖是一個 $n = 6$ 的日式三角形的例子，其中畫有一條包含兩個紅色圓的忍者通道。



試找出 k 的最大值 (以 n 表示)，保證在每一個日式三角形中，有一條包含至少 k 個紅色圓的忍者通道。

問題 6. 設 ABC 是一個正三角形。設 A_1, B_1, C_1 是三角形 ABC 的內部點，其中 $BA_1 = A_1C$，$CB_1 = B_1A$，$AC_1 = C_1B$，並且

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

設 BC_1 與 CB_1 交於 A_2，CA_1 與 AC_1 交於 B_2，AB_1 與 BA_1 交於 C_2。

試證：若 $A_1B_1C_1$ 形成一個不等邊三角形，則三角形 AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 的三個外接圓，會同時通過兩相異點。

(*註. 不等邊三等形係指任兩邊都不等長的三角形。*)