

utorak, 16. juli 2024

Zadatak 1 Odrediti sve realne brojeve α takve da za svaki prirodan broj n vrijedi da je cijeli broj

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

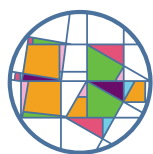
djeljiv sa n . (Pri tome $\lfloor z \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji ili jednak z . Na primjer, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ i $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Zadatak 2 Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje postoje prirodni brojevi g i N takvi da vrijedi

$$NZD(a^n + b, b^n + a) = g$$

za sve cijele brojeve $n \geq N$. (Pri tome $NZD(x, y)$ označava najveći zajednički djelioc brojeva x i y .)

Zadatak 3 Neka je a_1, a_2, a_3, \dots beskonačan niz prirodnih brojeva i neka je N prirodan broj. Pretpostavimo da za svako $n > N$ vrijedi da je a_n jednak broju pojavljivanja broja a_{n-1} u nizu a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Dokazati da je bar jedan od nizova a_1, a_3, a_5, \dots i a_2, a_4, a_6, \dots eventualno periodičan. (Beskonačan niz b_1, b_2, b_3, \dots je *eventualno periodičan* ako postoje prirodni brojevi p i M takvi da vrijedi $b_{m+p} = b_m$ za sve $m \geq M$.)



srijeda, 17. juli 2024

Zadatak 4 Neka je ABC trougao u kojem vrijedi $AB < AC < BC$. Označimo centar upisane kružnice i upisanu kružnicu trougla ABC sa I i ω , redom. Neka je X tačka na pravoj BC različita od C takva da je prava kroz X paralelna sa AC tangenta na kružnicu ω . Slično, neka je Y tačka na pravoj BC različita od B takva da je prava kroz Y paralelna sa AB tangenta na kružnicu ω . Prava AI siječe opisanu kružnicu trougla ABC ponovo u $P \neq A$. Neka su K i L sredine stranica AC i AB , redom. Dokazati da vrijedi $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Zadatak 5 Puž Turbo igra igru na ploči sa 2024 redova i 2023 kolona. U 2022 polja ploče nalaze se skrivena čudovišta. Na početku, Turbo ne zna gdje se čudovišta nalaze, ali zna da postoji tačno jedno čudovište u svakom redu ploče osim u prvom i zadnjem redu te da svaka kolona sadrži najviše jedno čudovište.

Turbo pravi niz pokušaja da dođe iz prvog u zadnji red. U svakom pokušaju, bira u kojem polju u prvom redu će početi, a onda se redom pomjera u bilo koje susjedno polje koje ima zajedničku stranicu s trenutnim poljem na kojem se nalazi. (Dozvoljeno mu je da se vrati u polje koje je nekada prije posjetio.) Ako dođe u polje u kojem se nalazi čudovište, njegov pokušaj se završava i on se vraća u prvi red ploče da započne novi pokušaj. Čudovišta se ne pomjeraju i Turbo pamti za svako polje koje je posjetio sadrži li čudovište ili ne. Ako Turbo dođe u bilo koje polje u zadnjem redu, njegov pokušaj se završava i to označava kraj igre.

Odrediti najmanju vrijednost broja n za koju Turbo ima strategiju koja mu garantuje da u n ili manje pokušaja dođe do zadnjeg reda ploče, neovisno od pozicija čudovišta.

Zadatak 6 Neka je \mathbb{Q} skup racionalnih brojeva. Funkciju $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ nazivamo *lijepom* ako vrijedi sljedeće: za sve $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ili} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokazati da postoji cijeli broj c takav da za bilo koju lijepu funkciju f postoji najviše c različitih racionalnih brojeva koji se mogu zapisati kao $f(r) + f(-r)$ za neki racionalan broj r , i odrediti najmanju moguću vrijednost broja c .