уторак, 16. јули 2024

Задатак 1. Одредити све реалне бројеве α такве да за сваки природан број n вриједи да је цијели број

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

дјељив са n. (При томе $\lfloor z \rfloor$ означава највећи цијели број мањи или једнак z. На примјер, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ и $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Задатак 2. Одредити све парове (a, b) природних бројева за које постоје природни бројеви g и N такви да вриједи

$$NZD(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

за све цијеле бројеве $n \geqslant N$. (При томе $NZD(x, y)$ означава највећи заједнички дјелиоц бројева x и y.)

Задатак 3. Нека је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ бесконачан низ природних бројева и нека је N природан број. Претпоставимо да за свако $n > N$ вриједи да је a_n једнак броју појављивања броја a_{n-1} у низу $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Доказати да је бар један од низова $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и $a_2, a_4, a_6, \ldots$ евентуално периодичан.

(Бесконачан низ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ је *евентуално периодичан* ако постоје природни бројеви p и M такви да вриједи $b_{m+p} = b_m$ за све $m \geqslant M$.)

Language: Serbian (BIH)

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.

сриједа, 17. јули 2024

Задатак 4. Нека је ABC троугао у којем вриједи $AB < AC < BC$. Означимо центар уписане кружнице и уписану кружницу троугла ABC са I и ω, редом. Нека је X тачка на правој BC различита од C таква да је права кроз X паралелна са AC тангента на кружницу ω. Слично, нека је Y тачка на правој BC различита од B таква да је права кроз Y паралелна са AB тангента на кружницу ω. Права AI сијече описану кружницу троугла ABC поново у $P \neq A$. Нека су K и L средине страница AC и AB, редом. Доказати да вриједи $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задатак 5. Пуж Турбо игра игру на плочи са 2024 редова и 2023 колона. У 2022 поља плоче налазе се скривена чудовишта. На почетку, Турбо не зна гдје се чудовишта налазе, али зна да постоји тачно једно чудовиште у сваком реду плоче осим у првом и задњем реду те да свака колона садржи највише једно чудовиште.

Турбо прави низ покушаја да дође из првог у задњи ред. У сваком покушају, бира у којем пољу у првом реду ће почети, а онда се редом помјера у било које сусједно поље које има заједничку страницу с тренутним пољем на којем се налази. (Дозвољено му је да се врати у поље које је некада прије посјетио.) Ако дође у поље у којем се налази чудовиште, његов покушај се завршава и он се враћа у први ред плоче да започне нови покушај. Чудовишта се не помјерају и Турбо памти за свако поље које је посјетио садржи ли чудовиште или не. Ако Турбо дође у било које поље у задњем реду, његов покушај се завршава и то означава крај игре.

Одредити најмању вриједност броја n за коју Турбо има стратегију која му гарантује да у n или мање покушаја дође до задњег реда плоче, неовисно од позиција чудовишта.

Задатак 6. Нека је $\mathbb{Q}$ скуп рационалних бројева. Функцију $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ називамо *лијепом* ако вриједи сљедеће: за све $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Доказати да постоји цијели број c такав да за било коју лијепу функцију f постоји највише c различитих рационалних бројева који се могу записати као $f(r) + f(-r)$ за неки рационалан број r, и одредити најмању могућу вриједност броја c.

Вријеме за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 поена.