Terça-feira, 15 de julho 2025

Problema 1. Uma reta no plano é *ensolarada* se ela **não** é paralela ao eixo x, **não** é paralela ao eixo y e **não** é paralela à reta $x + y = 0$.

Seja $n \geqslant 3$ um número inteiro dado. Determine todos os inteiros não negativos k tais que existem n retas distintas no plano satisfazendo as duas seguintes condições:

- para todos os inteiros positivos a e b com $a + b \leqslant n + 1$, o ponto (a, b) está sobre pelo menos uma das retas; e
- exatamente k das n retas são ensolaradas.

Problema 2. Sejam Ω e Γ circunferências com centros M e N, respectivamente, tais que o raio de Ω é menor do que o raio de Γ. Suponha que Ω e Γ intersectam-se em dois pontos distintos A e B. A reta MN intersecta Ω em C e Γ em D, tais que os pontos C, M, N e D estão sobre a reta nesta ordem. Seja P o circuncentro do triângulo ACD. A reta AP intersecta Ω novamente em $E \neq A$. A reta AP intersecta Γ novamente em $F \neq A$. Seja H o ortocentro do triângulo PMN.

Prove que a reta passando por H paralela a AP é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo BEF.

(O *ortocentro* de um triângulo é o ponto de interseção das suas alturas.)

Problema 3. Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números inteiros positivos. Uma função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ é chamada *bonza* se

$$f(a) \text{ divide } b^a - f(b)^{f(a)}$$

para todos os inteiros positivos a e b.

Determine a menor constante real c tal que $f(n) \leqslant cn$ para todas as funções bonza f e todos os inteiros positivos n.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

Quarta-feira, 16 de julho 2025

Problema 4. Um *divisor próprio* de um inteiro positivo N é um divisor positivo de N diferente do próprio N.

A sequência infinita $a_1, a_2, \ldots$ é formada por inteiros positivos, cada um com pelo menos três divisores próprios. Para cada $n \geqslant 1$, o inteiro a_{n+1} é a soma dos três maiores divisores próprios de a_n.

Determine todos os valores possíveis de a_1.

Problema 5. Alice e Bazza jogam o *inekoalaty game*, um jogo para dois jogadores, cujas regras dependem de um número real positivo λ que é conhecido pelos dois. Na jogada n (começando com $n = 1$):

- Se n é ímpar, Alice escolhe um número real não negativo x_n tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Se n é par, Bazza escolhe um número real não negativo x_n tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Se um jogador não pode escolher um número adequado x_n, o jogo acaba e o outro jogador vence. Se o jogo continua indefinidamente, nenhum dos jogadores vence. Todos os números escolhidos são conhecidos por ambos os jogadores.

Determine todos os valores λ para os quais Alice tem uma estratégia vencedora e todos os valores para os quais Bazza tem uma estratégia vencedora.

Problema 6. Considere um tabuleiro 2025×2025 formado por quadrados unitários. Matilda deseja colocar no tabuleiro algumas peças retangulares, possivelmente de tamanhos diferentes, de modo que cada lado de cada retângulo esteja sobre lados de quadrados unitários e cada quadrado unitário seja coberto por no máximo um retângulo.

Determine o número mínimo de peças que Matilda necessita colocar de modo que cada linha e cada coluna do tabuleiro tenha exatamente um quadrado unitário que não esteja coberto por algum retângulo.