måndag, 21. september 2020

Problem 1. Betrakta den konvexa fyrhörningen $ABCD$ och en punkt P strikt inuti $ABCD$. Följande relationer gäller:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Visa att följande tre linjer har en gemensam punkt: de inre bisektriserna till vinklarna $\angle ADP$ och $\angle PCB$ samt mittpunktnormalen till sträckan AB.

Problem 2. De reella talen a, b, c, d är sådana att $a \geq b \geq c \geq d > 0$ och $a + b + c + d = 1$. Visa att

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problem 3. Det finns $4n$ stenar med vikterna $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Varje sten är färglagd i en av n färger och det finns fyra stenar av varje färg. Visa att vi kan placera stenarna i två högar så att följande villkor båda är uppfyllda:

- Båda högarnas totala vikt är densamma.
- Båda högarna innehåller två stenar av varje färg.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

tisdag, 22. september 2020

Problem 4. Låt $n > 1$ vara ett heltal. Det finns n^2 hållplatser på en bergssluttning, alla på olika höjd. Två linbanebolag, A och B, har vardera k vagnar. Varje vagn går från en hållplats till en annan hållplats som är högre belägen (utan några mellanliggande stopp). De k vagnarna som tillhör bolag A startar vid k olika hållplatser och stannar vid k olika hållplatser. En vagn som startar högre upp än en annan vagn, stannar också högre upp. Samma villkor gäller för bolag B. Två hållplatser kallas *sammanlänkade* av ett bolag om det går att starta vid den lägre belägna hållplatsen och ta sig till den högre belägna hållplatsen genom att använda en eller flera vagnar som tillhör det bolaget (det är inte tillåtet att ta sig mellan hållplatser på något annat sätt).

Bestäm det minsta positiva heltalet k som garanterar att det finns två hållplatser som är sammanlänkade av båda bolagen.

Problem 5. På vart och ett av $n > 1$ kort står ett positivt heltal. Dessa kort har egenskapen att det aritmetiska medelvärdet av de två talen på vilket par av kort som helst också är det geometriska medelvärdet av talen på någon uppsättning av ett eller flera kort.

För vilka n måste alla tal på korten vara lika?

Problem 6. Visa att det finns en positiv konstant c sådan att följande påstående är sant:

Betrakta ett heltal $n > 1$, och en mängd $\mathcal{S}$ av n punkter i planet så att avståndet mellan varje par av olika punkter i $\mathcal{S}$ är åtminstone 1. Det följer att det finns en linje ℓ som separerar $\mathcal{S}$ sådan att avståndet mellan varje punkt i $\mathcal{S}$ och linjen ℓ är åtminstone $cn^{-1/3}$.

(En linje ℓ *separerar* en mängd av punkter $\mathcal{S}$ om någon sträcka mellan två punkter i $\mathcal{S}$ skär linjen ℓ.)

Observera. Svagare resultat med $cn^{-\alpha}$ i stället för $cn^{-1/3}$ kan ge poäng beroende på värdet av konstanten $\alpha > 1/3$.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.