e martë, 15. korrik 2025

Problem 1. Një drejtëz në plan quhet *diellore* nëse **nuk** është paralele as me boshtin x, as me boshtin y, dhe as me drejtëzën $x + y = 0$.

Le të jetë $n \geqslant 3$ një numër i plotë i dhënë. Gjeni të gjithë numrat e plotë jonegativë k të tillë që ekzistojnë n drejtëza të ndryshme në plan që plotësojnë njëkohësisht kushtet:

- për të gjithë numrat e plotë pozitivë a dhe b të tillë që $a+b \leqslant n+1$, pika (a, b) është të paktën në një nga drejtëzat
- saktësisht k nga n drejtëzat janë diellore.

Problem 2. Le të jenë Ω dhe Γ rrathë me qendra përkatësisht M dhe N, të tillë që rrezja e Ω është më e vogël se rrezja e Γ. Supozojmë se rrathët Ω dhe Γ priten në dy pika të ndryshme A dhe B. Drejtëza MN pret Ω në C dhe Γ në D, të tilla që pikat C, M, N dhe D ndodhen në drejtëz në ketë renditje. Le të jetë P qendra e rrethit të jashtëshkruar ACD. Drejtëza AP pret Ω përsëri në $E \neq A$. Drejtëza AP pret Γ përsëri në $F \neq A$. Le të jetë H ortoqendra e trekëndëshit PMN.

Vërtetoni se drejtëza paralele me AP që kalon nga pika H është tangjente në rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit BEF.

(*Ortoqendër* e një trekëndëshi është pikëprerja e lartësive të tij.)

Problem 3. Le të shënojmë me $\mathbb{N}$ bashkësinë e numrave të plotë pozitivë. Një funksion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ quhet *bonza* nëse

$$f(a) \ \text{ është pjesëtues i } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

për të gjithë numrat e plotë pozitivë a dhe b.

Gjeni konstanten më të vogël reale c të tillë që $f(n) \leqslant cn$ për të gjitha funksionet bonza f dhe të gjithë numrat e plotë pozitivë n.

e mërkurë, 16. korrik 2025

Problem 4. Një *pjesëtues i saktë* i një numri natyror N është një pjesëtues pozitiv i N i ndryshëm nga vetë N.

Vargu i pafundëm $a_1, a_2, \ldots$ përbëhet nga numra natyrorë, ku secili prej tyre ka të paktën tre pjesëtues të saktë. Për çdo $n \geqslant 1$, kufiza a_{n+1} është e barabartë me shumën e tre pjesëtuesëve të saktë më të mëdhenj të a_n.

Gjeni të gjitha vlerat e mundshme të a_1.

Problem 5. Alisa dhe Besa po luajnë *lojën inekoalaty*, një lojë me dy lojtarë, ku rregullat varen nga numri pozitiv real λ që është i njohur për të dy lojtarët. Në hapin e n-të të lojës (duke filluar me $n = 1$) ndodh si në vijim:

- Nëse n është tek, Alisa zgjedh një numër real jonegativ x_n të tillë që
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Nëse n është çift, Besa zgjedh një numër real jonegativ x_n të tillë që
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Nëse njëri lojtar nuk mundet të zgjedhë një numër të përshtatshëm x_n, loja përfundon dhe lojtari tjetër fiton. Nëse loja vazhdon pafundësisht, asnjëri nga lojtarët nuk fiton. Të gjithë numrat e zgjedhur janë të njohur nga dy lojtarët.

Gjeni të gjitha vlerat e λ për të cilat Alisa ka strategji fituese dhe të gjitha vlerat e λ për të cilat Besa ka strategji fituese.

Problem 6. Konsiderojmë tabelën 2025×2025 të përbërë nga katrorë njësi. Matilda dëshiron që të vendosë në tabelë disa pllaka drejtkëndore, jo detyrimisht me përmasa të njejta, të tilla që brinjët e pllakës janë paralele me brinjët e tabelës dhe çdo kulm i pllakës ndodhet në kulmin e një prej katrorëve njësi. Çdo katror njësi duhet të mbulohet nga jo më shumë se një pllakë.

Gjeni numrin më të vogël të pllakave që Matilda duhet të vendosë në mënyrë që çdo rresht dhe çdo shtyllë të ketë saktësisht një katror njësi që nuk është mbuluar nga ndonjë pllakë.