Language: **Turkish**

Day: **1**

Salı, 23 Temmuz, 2013

Soru 1. Her k ve n pozitif tam sayı ikilisi için,

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

eşitliğini sağlayan $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (farklı olmaları gerekmeyen) pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

Soru 2. Düzlem üzerindeki 4027 noktanın herhangi üçü doğrusal olmayıp, 2013 tanesi kırmızı ve 2014 tanesi mavi ise, bu 4027 noktaya bir *Kolombiya* konfigürasyonu diyelim. Düzlemde çizilen birkaç doğru düzlemi bölgelere ayırır. Bir doğrular kümesi, bir Kolombiya konfigürasyonu için aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, bu küme bu konfigürasyon için *iyi* kabul ediliyor.

- doğrulardan her biri, konfigürasyonun hiçbir noktasından geçmemektedir;
- her iki rengi birden içeren bölge bulunmamaktadır.

4027 noktalı herhangi bir Kolombiya konfigürasyonu verildiğinde, bu konfigürasyon için iyi olan ve k doğrudan oluşan bir küme bulunuyorsa, k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Soru 3. Bir ABC üçgeninde A köşesinin karşısındaki dışteğet çember BC kenarına A_1 noktasında teğet olsun. Benzer şekilde, B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberleri kullanarak CA kenarı üzerinde B_1 ve AB kenarı üzerinde C_1 noktalarını tanımlayalım. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel merkezi ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde ise, ABC üçgeninin bir dik üçgen olduğunu gösteriniz.

ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki dışteğet çember*; BC kenarına, B'nin ötesinde AB ışınına ve C'nin ötesinde AC ışınına teğet olan çemberdir. B ve C köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberler de benzer biçimde tanımlanıyor.*

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir

Çarşamba, 24 Temmuz, 2013

Soru 4. Diklik merkezi H olan bir dar açılı ABC üçgeninde W, BC kenarı üzerinde B ve C den farklı bir nokta olsun. M ve N noktaları, sırasıyla B ve C ye ait yükseklik ayağı olsun. BWN nin çevrel çemberi w_1 olmak üzere; w_1 üzerinde bir X noktası, $[WX]$ doğru parçası w_1 in bir çapı olacak şekilde seçiliyor. Benzer biçimde CWM nin çevrel çemeri w_2 olmak üzere; w_2 üzerinde bir Y noktası, $[WY]$ doğru parçası w_2 nin bir çapı olacak şekilde seçiliyor. X, Y ve H noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

Soru 5. Pozitif rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}_{>0}$ ile gösterelim. Bir $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlamaktadır:

(i) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) her $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ için, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) $f(a) = a$ olacak şekilde bir $a > 1$ rasyonel sayısı vardır.

Her $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ için $f(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

Soru 6. $n \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere, bir çember üzerinde çemberi eşit yaylara bölen $n+1$ nokta işaretlenmiştir. $0, 1, \ldots, n$ sayılarının her biri tam olarak bir kez kullanılarak işaretli noktalara yazılmasına numaralandırma diyelim. Biri diğerinden çemberin döndürülmesi ile elde edilen iki numaralandırma aynı sayılmaktadır. Bir numaralandırmada, $a + d = b + c$ koşulunu sağlayan her $a < b < c < d$ için uçlarında a ve d yazan kiriş ile uçlarında b ve c yazan kiriş kesişmiyorsa, bu numaralandırmaya *güzel* diyelim.

Güzel numaralandırmaların sayısı M, $x + y \leq n$ ve $\mathit{obeb}(x, y) = 1$ koşullarını sağlayan (x, y) pozitif tam sayı sıralı ikiliierin sayısı N olsun.

$$M = N + 1$$

olduğunu gösteriniz.

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir