

Poniedziałek, 9 lipca 2018

Zadanie 1. Okrąg Γ jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC , przy czym $AD = AE$. Symetralne odcinków BD i CE przecinają krótsze łuki AB i AC okręgu Γ odpowiednio w punktach F i G . Wykazać, że proste DE i FG są równoległe (lub są tą samą prostą).

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 3$, dla których istnieją takie liczby rzeczywiste a_1, a_2, \dots, a_{n+2} , że $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ oraz

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$.

Zadanie 3. *Trójkątem antypascalowskim* nazwiemy tablicę w kształcie trójkąta równobocznego, w którą wpisano liczby w taki sposób, że każda liczba, z wyjątkiem liczb umieszczonych w najniższym wierszu, jest równa wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb znajdujących się bezpośrednio pod nią. Przykładowo, poniżej został przedstawiony trójkąt antypascalowski o czterech wierszach zawierający wszystkie liczby całkowite od 1 do 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje trójkąt antypascalowski o 2018 wierszach zawierający wszystkie liczby całkowite od 1 do $1 + 2 + \dots + 2018$.

Wtorek, 10 lipca 2018

Zadanie 4. *Pozycją* nazwiemy każdy taki punkt (x, y) na płaszczyźnie, że x i y są dodatnimi liczbami całkowitymi nie większymi od 20.

Początkowo wszystkie 400 pozycji jest niezajętych. Ania i Bartek naprzemiennie kładą kamienie na pozycjach, przy czym zaczyna Ania. W każdym swoim ruchu Ania kładzie nowy czerwony kamień na niezajętej pozycji tak, aby odległość pomiędzy każdymi dwoma pozycjami zajętymi przez czerwone kamienie była różna od $\sqrt{5}$. W każdym swoim ruchu Bartek kładzie nowy niebieski kamień na dowolnej niezajętej pozycji. (Pozycja zajęta przez niebieski kamień może być w dowolnej odległości od innych zajętych pozycji.) Gra kończy się, gdy któryś z graczy nie może wykonać ruchu.

Wyznaczyć największą taką liczbę K , że Ania może zawsze tak dobrać swoje ruchy, by niezależnie od ruchów Bartka położyć co najmniej K czerwonych kamieni.

Zadanie 5. Niech a_1, a_2, \dots będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita $N > 1$, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq N$ liczba

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

jest całkowita. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita M , że $a_m = a_{m+1}$ dla wszystkich $m \geq M$.

Zadanie 6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punkt X leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{oraz} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Udowodnić, że $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.