

12 Јули, 2006

**Задача 1.** Нека  $I$  е центарот на впишаната кружница во триаголник  $ABC$ . Во внатрешноста на триаголникот е избрана точка  $P$ , таква да

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажи дека  $AP \geq AI$ , и дека равенството важи ако и само ако точката  $P$  се совпаѓа со точката  $I$ .

**Задача 2.** Нека  $P$  е правилен многуаголник со 2006 страни. За дијагоналата на  $P$  велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на  $P$  на два дела, така да секој од нив се состои од непарен број на страни од  $P$ . Страните на  $P$  исто така ги нарекуваме *добри*.

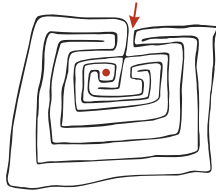
Да ги разгледаме поделбите на многуаголникот  $P$  на триаголници со помош на 2003 дијагонали, така да кои било две од тие дијагонали немаат заедничка точка во внатрешноста на  $P$ . Одреди го максималниот број на рамнокраки триаголници со две добри страни, кои може да се добијат при некоја таква поделба.

**Задача 3.** Најди го најмалиот реален број  $M$ , таков да неравенството

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за сите реални броеви  $a, b$  и  $c$ .

*Време за работа: 4 часа и 30 минути  
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода*



13 Јули, 2006

**Задача 4.** Најди ги сите парови  $(x, y)$  од цели броеви, такви да важи

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Задача 5.** Нека  $P(x)$  е полином од  $n$ -ти степен ( $n > 1$ ) со цели коефициенти и нека  $k$  е природен број. Да го разгледаме полиномот

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

каде  $P$  се појавува  $k$  пати. Докажи дека постојат најмногу  $n$  цели броеви  $t$  такви да  $Q(t) = t$ .

**Задача 6.** На секоја страна  $b$  на конвексен многуаголник  $P$  ѝ ја придружуваме максималната плоштина на триаголникот, на кој една од страните се совпаѓа со  $b$  и кој е содржан во  $P$ . Докажи дека збирот од сите плоштини, придружени на страните на многуаголникот, е поголема или еднаква на двојната плоштина на многуаголникот.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути  
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода*