星期二, 15. 七月 2025

第 1 题. 称坐标平面上的一条直线为*阳光的*, 如果它与 x-轴、y-轴和直线 $x+y=0$ 均不平行.

给定整数 $n \geqslant 3$. 求所有非负整数 k, 使得存在平面上两两不同的 n 条直线满足下面两个条件:

- 对所有满足 $a+b \leqslant n+1$ 的正整数 a 和 b, 这 n 条直线中至少有一条经过点 (a,b);
- 这 n 条直线中恰有 k 条是阳光的.

第 2 题. 设圆 Ω 和圆 Γ 的圆心分别为点 M 和点 N, 且 Ω 的半径小于 Γ 的半径. 设两圆 Ω 与 Γ 交于相异的两点 A, B. 设直线 MN 与圆 Ω 的交点之一为 C, 直线 MN 与圆 Γ 的交点之一为 D, 且点 C, M, N, D 在直线上顺次排列. 记 P 为三角形 ACD 的外心. 直线 AP 交圆 Ω 于点 $E \neq A$, 直线 AP 交圆 Γ 于点 $F \neq A$. 设点 H 为三角形 PMN 的垂心.

证明: 过 H 且平行于 AP 的直线与三角形 BEF 的外接圆相切.

(三角形的*垂心*是三角形三条高所在直线的交点.)

第 3 题. 记 $\mathbb{N}^*$ 是所有正整数构成的集合. 一个函数 $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 称为*超棒的*, 如果对任意正整数 a, b, 均有

$$f(a) \text{ 整除 } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

求最小的实数 c, 使得 $f(n) \leqslant cn$ 对所有超棒的函数 f 和所有正整数 n 成立.

星期三, 16. 七月 2025

第 4 题. 正整数 N 的一个正因子称为 N 的“非自身因子”, 如果它不等于 N.

无穷正整数序列 $a_1, a_2, \ldots$ 满足, 其每一项都至少有三个非自身因子, 且对 $n \geqslant 1$, a_{n+1} 是 a_n 的最大的三个非自身因子之和.

求 a_1 的所有可能值.

第 5 题. 甲乙两人玩一个双人游戏, 其规则依赖于一个双方都知道的正实数 λ. 在此游戏的第 n 轮 (从 $n = 1$ 开始), 玩家按照如下规则操作:

- 若 n 是奇数, 甲选取一个非负实数 x_n 满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- 若 n 是偶数, 乙选取一个非负实数 x_n 满足

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

若某位玩家无法选取满足要求的 x_n, 则游戏结束且另一位玩家获胜. 若此游戏可以永远进行下去, 则两人皆不算获胜. 双方都知道之前每一轮中选取过的数.

求所有使得甲有必胜策略的 λ, 并求所有使得乙有必胜策略的 λ.

第 6 题. 在一个由单位方格组成的 2025×2025 方格表上放置若干 (可能大小不同的) 长方形瓷砖, 使得每片瓷砖的边界都在方格表的网格线上, 且每个单位方格至多被一片瓷砖覆盖.

若要使得方格表中每行与每列都恰有一个单位方格没有被瓷砖覆盖, 求长方形瓷砖数量的最小可能值.