



*e hënë, 19. korrik 2021*

**Detyra 1.** Le të jetë  $n \geq 100$  një numër i plotë. Ivani shënon numrat  $n, n+1, \dots, 2n$  secilin në letër të ndryshme. Ai pastaj i përzier ato  $n+1$  letra, dhe i ndan në dy grumbuj. Tregoni se të paktën njëri nga grumbujt përmban dy letra të tilla që shuma e numrave të tyre është katror i plotë.

**Detyra 2.** Tregoni se mosbarazia

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

vlen për të gjithë numrat realë  $x_1, \dots, x_n$ .

**Detyra 3.** Le të jetë  $D$  një pikë e brendshme e trekëndëshit këndngusht  $ABC$  me  $AB > AC$  ashtu që  $\angle DAB = \angle CAD$ . Pika  $E$  në segmentin  $AC$  plotëson kushtin  $\angle ADE = \angle BCD$ , pika  $F$  në segmentin  $AB$  plotëson kushtin  $\angle FDA = \angle DBC$ , dhe pika  $X$  në drejtëzën  $AC$  plotëson kushtin  $CX = BX$ . Le të jenë  $O_1$  dhe  $O_2$  qendrat e rrathëve të jashtëshkruar në trekëndëshat  $ADC$  dhe  $EXD$ , përkatësisht. Tregoni se drejtëzat  $BC$ ,  $EF$ , dhe  $O_1O_2$  priten në një pikë (janë konkurrente).



*e martë, 20 korrik 2021*

**Detyra 4.** Le të jetë  $\Gamma$  një rreth me qendër  $I$ , dhe  $ABCD$  një katërkëndësh konveks i tillë që secili prej segmenteve  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  dhe  $DA$  të jetë tangjent në  $\Gamma$ . Le të jetë  $\Omega$  rrethi i jashtëshkruar në trekëndëshin  $AIC$ . Zgjatja e  $BA$  përtej  $A$  e takon  $\Omega$  në  $X$ , dhe zgjatja e  $BC$  përtej  $C$  e takon  $\Omega$  në  $Z$ . Zgjatjet e  $AD$  dhe  $CD$  përtej  $D$  e takojnë  $\Omega$  në  $Y$  dhe  $T$ , përkatësisht. Tregoni se

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**Detyra 5.** Dy ketrat, Bushi dhe Jumpi, për sezonën e dimrit kanë mbledhur 2021 arra. Jumpi numëron arrat nga 1 deri në 2021, dhe hap 2021 vrima të vogëla në një model rrethor në tokë rreth pemës së tyre të preferuar. Të nesërmen në mëngjes, Jumpi vëren se Bushi kishte vendosur nga një arrë në secilën vrimë, por nuk i kishte kushtuar vëmendje numërimit. I pakënaqur, Jumpi vendos të rendisë përsëri arrat duke bërë një varg prej 2021 lëvizjesh. Në lëvizjen  $k$ -të, Jumpi shkëmben pozitat e dy arrave që janë fqinje me arrën me numër  $k$ . Tregoni se ekziston një vlerë  $k$  e tillë që, në lëvizjen  $k$ -të, Jumpi shkëmben disa arra  $a$  dhe  $b$  të tilla që  $a < k < b$ .

**Detyra 6.** Le të jetë  $m \geq 2$  një numër i plotë,  $A$  le të jetë një bashkësi e fundme e numrave të plotë (jo doemos pozitiv) dhe  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  le të jenë nënbashkësi të  $A$ -së. Supozojmë se për çdo  $k = 1, 2, \dots, m$  shuma e elementeve të  $B_k$  është  $m^k$ . Tregoni se  $A$  përmban të paktën  $m/2$  elemente.