სამშაბათი, 16 ივლისი, 2019

ამოცანა 1. ვთქვათ $\mathbb{Z}$ არის ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ისეთი, რომ ყოველი მთელი a და b რიცხვებისთვის

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

ამოცანა 2. სამკუთხედ ABC-ში, A_1 წერტილი ძევს BC გვერდზე, ხოლო B_1 წერტილი ძევს AC გვერდზე. ვთქვათ P და Q არიან შესაბამისად AA_1 და BB_1 სეგმენტის ისეთი წერტილები, რომ PQ პარალელურია AB-სი. ვთქვათ P_1 არის PB_1 წრფის ისეთი წერტილი, რომ B_1 მოთავსებულია მკაცრად P და P_1-ს შორის და ამასთან, $\angle PP_1C = \angle BAC$. ანალოგიურად, ვთქვათ Q_1 არის QA_1 წრფის ისეთი წერტილი, რომ A_1 ძევს მკაცრად Q და Q_1 წერტილებს შორის და $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

დაამტკიცეთ, რომ P, Q, P_1 და Q_1 წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

ამოცანა 3. სოციალურ ქსელში გაერთიანებულია 2019 მომხმარებელი, რომელთაგან ზოგიერთი ერთმანეთის მეგობარია. მეგობრობა ორმხრივია, ანუ თუ მომხმარებელი A არის მომხმარებელი B-ს მეგობარი, მაშინ B-ც არის A-ს მეგობარი. ყოველ ჯერზე ხორციელდება ერთი შემდეგი სახის *ცვლილება*:

> სამი A, B და C მომხმარებელი, რომელთაგან A მეგობარია B-სი და C-სი, ხოლო B და C ერთმანეთის მეგობრები არ არიან, ერთმანეთში ერთდროულად იცვლიან თავიანთი მეგობრობის სტატუსს, კერძოდ B და C ხდებიან მეგობრები, ხოლო A და B და ასევე A და C მეგობრობას წყვეტენ. ყველა სხვა დანარჩენი მეგობრობის სტატუსი რჩება უცვლელი.

თავდაპირველად, 1010 მომხმარებლიდან ყოველს ჰყავს 1009 მეგობარი და 1009 მომხმარებლიდან ყოველს ჰყავს 1010 მეგობარი. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ცვლილებათა ისეთი მიმდევრობა, რომლის შემდეგაც ყოველ მომხმარებელს ეყოლება არაუმეტეს ერთი მეგობარი.

Language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

ოთხშაბათი, 17 ივლისი, 2019

ამოცანა 4. იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა (k, n) წყვილი ისეთი, რომ

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

ამოცანა 5. ბათის ბანკი უშვებს მონეტებს, რომელსაც ერთ მხარეს აწერია ასო H, ხოლო მეორე მხარეს აწერია ასო T. გუგამ ერთ რიგში დაალაგა, მარცხნიდან მარჯვნივ n ცალი ასეთი მონეტა. ის ყოველ ჯერზე ასრულებს შემდეგ ოპერაციას: თუ რიგში დევს ზუსტად $k > 0$ ცალი მონეტა ზედა მხარით H, მაშინ გუგა ატრიალებს მარცხნიდან k-ურ ადგილზე მყოფ მონეტას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ყველა მონეტა დევს ზედა მხარით T და გუგა არ ატარებს ოპერაციას. მაგალითად, თუ $n = 3$ და თავიდან დევს მონეტები შემდეგი კონფიგურაციით THT, მაშინ გუგას მიერ შესრულებულ ოპერაციათა თანმიმდევრობა გამოიყურება ასე $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, ანუ პროცესი მთავრდება სამი ოპერაციის შემდეგ.

ა) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი საწყისი კონფიგურაციის შემთხვევაში გუგას მოუწევს სასრული რაოდენობა ოპერაციების შესრულება.

ბ)ყოველი საწყისი C კონფიგურაციისთვის, $L(C)$-თი აღვნიშნოთ ოპერაციათა რაოდენობა, რომლის შემდეგაც პროცესი ჩერდება. მაგალითად, $L(THT) = 3$ და $L(TTT) = 0$. იპოვეთ $L(C)$ სიდიდის საშუალო არითმეტიკული, როცა C გარბის ყველა შესაძლო 2^n საწყის კონფიგურაციას.

ამოცანა 6. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში, რომელშიც $AB \neq AC$, ჩახაზულია წრეწირი ω ცენტრით I. ვთქვათ ω წრეწირი ეხება BC, CA და AB გვერდებს შესაბამისად D, E და F წერტილებში. D წერტილზე გამავალი EF-ის მართობული წრფე ω-ს მეორედ კვეთს R წერტილში. AR წრფე ω-ს მეორედ კვეთს P წერტილში. PCE და PBF სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები მეორედ იკვეთებიან Q წერტილში.

დაამტკიცეთ, რომ DI და PQ წრფეების გადაკვეთის წერტილი ძევს A წერტილზე გამავალ AI-ის მართობულ წრფეზე.