Language: **Hebrew**

Day: **1**

Wednesday, July 7, 2010
יום רביעי 7 ביולי, 2010

בעיה 1. מצא את כל הפונקציות $f:R\to R$ כך שהשוויון

$$f\left(\lfloor x\rfloor y\right)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

יתקיים לכל $x,y\in R$. (כאן, הסימן $\lfloor z\rfloor$ מציין את המספר השלם הגדול ביותר הקטן או שווה ל- z.)

בעיה 2. יהי I מרכז המעגל החסום של המשולש ABC, ויהי Γ המעגל החוסם את המשולש. נניח כי הישר AI חותך את המעגל Γ שנית בנקודה D. תהי E נקודה על הקשת $\widehat{BDC}$, ותהי F נקודה על הצלע BC כך ש

$$\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC$$

לבסוף, תהי G אמצע הקטע IF. הוכח כי הישרים DG ו- EI נחתכים על המעגל Γ.

בעיה 3. תהי N קבוצת כל המספרים השלמים והחיוביים. מצא את כל הפונקציות $g:N\to N$ כך ש

$$\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$$

הוא ריבוע שלם עבור כל $m,n\in N$.

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

Language: **Hebrew**

Day: **2**

Thursday, July 8, 2010
יום חמישי 8 ביולי, 2010

בעיה 4. תהי P נקודה בתוך המשולש ABC. הישרים AP, BP, CP חותכים את המעגל Γ , שהוא המעגל החוסם של המשולש ABC, שוב, בנקודות K, L, M, בהתאמה. המשיק למעגל Γ בנקודה C חותך את הישר AB בנקודה S. נניח כי $SC=SP$. הוכח כי $MK=ML$.

בעיה 5. בתוך כל אחת משש התיבות $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ יש בהתחלה מטבע אחת. מותר לבצע שני סוגים של פעולות:

פעולה מסוג 1: בחר תיבה לא ריקה B_j עבור $1\le j\le 5$. הוצא מטבע אחת מתוך תיבה B_j והוסף שתי מטבעות לתיבה B_{j+1}.

פעולה מסוג 2: בחר תיבה לא ריקה B_k עבור $1\le k\le 4$. הוצא מטבע אחת מתוך תיבה B_k והחלף את התוכן (שיכול להיות ריק) של תיבות B_{k+1} ו B_{k+2}.

קבע אם קיימת סדרה סופית של פעולות מהסוג הנזכר לעיל, כך שבסופה יהיו התיבות B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ריקות, ותיבה B_6 תכיל בדיוק $2010^{2010^{2010}}$ מטבעות. (שים לב כי $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$)

בעיה 6. תהי $a_1, a_2, a_3, \ldots$ סדרת מספרים ממשיים חיוביים. נניח כי עבור מספר שלם חיובי כלשהו s, מתקיים

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \mid 1\le k\le n-1\right\}$$

עבור כל $n>s$.

הוכח כי קיימים מספרים שלמים חיוביים ℓ ו N כך ש $\ell\le s$ וכך ש $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ לכל $n\ge N$.

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות