E hënë, 11 korrik 2016

Problem 1. Trekëndëshi BCF ka një kënd të drejtë me kulm B. Le të jetë A pika në drejtëzën CF e tillë që $FA = FB$ dhe F shtrihet ndërmjet A dhe C. Pika D është zgjedhur ashtu që $DA = DC$ dhe AC është simetralia e $\angle DAB$. Pika E është zgjedhur ashtu që $EA = ED$ dhe AD është simetralia e $\angle EAC$. Le të jetë pika M mesi i CF. Le të jetë X pika e tillë që $AMXE$ është një paralelogram (ku $AM \parallel EX$ dhe $AE \parallel MX$). Të vërtetohet se BD, FX dhe ME kalojnë nëpër të njëjtën pikë.

Problem 2. Të gjenden të gjithë numrat e plotë pozitivë n për të cilët secila qelizë e një tabele katrore $n \times n$ mund të plotësohet me njërën nga shkronjat I, M dhe O në atë mënyrë që:

- në secilin rresht dhe secilën shtyllë një e treta e qelizave përmbajnë I, një e treta përmbajnë M dhe një e treta përmbajnë O; dhe
- në çdo diagonale, në qoftë se numri i qelizave në diagonalen është shumëfish i 3, atëherë një e treta e qelizave përmbajnë I, një e treta përmbajnë M dhe një e treta përmbajnë O.

Vërejtje: Rreshtat dhe shtyllat e një tabele $n \times n$ shënohen secila me 1 deri n në renditje të natyrshme. Kështu secila qelizë korrespondon me një çift numrash të plotë pozitivë (i, j) me $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Për $n > 1$ tabela ka $4n - 2$ *diagonale* dy llojesh. Një diagonale e llojit të parë përbëhet nga të gjitha qelizat (i, j) për të cilat $i + j$ është konstantë, dhe një diagonale e llojit të dytë përbëhet nga të gjitha qelizat (i, j) për të cilat $i - j$ është konstantë.

Problem 3. Le të jetë $P = A_1A_2 \ldots A_k$ një shumëkëndësh konveks në rrafsh. Kulmet A_1, A_2, $\ldots$, A_k kanë koordinata numra të plotë dhe shtrihen në një rreth. Le të jetë S syprina e P. Është dhënë një numër i plotë pozitiv n i tillë që katrorët e gjatësive të brinjëve të P janë numra të plotë të plotëpjesëtueshëm me n. Të vërtetohet se $2S$ është numër i plotë i plotëpjesëtueshëm me n.

E martë, 12 korrik 2016

Problem 4. Një bashkësi numrash të plotë pozitivë quhet *aromatike* në qoftë se përmban së paku dy elemente dhe secili element ka një faktor të thjeshtë të përbashkët me së paku njërin nga elementët tjerë. Le të jetë $P(n) = n^2+n+1$. Cila është vlera më e vogël e mundshme e numrit të plotë pozitiv b ashtu që të ekzistojë numër i plotë jonegativ a për të clilin bashkësia

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

është aromatike?

Problem 5. Ekuacioni

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

është shkruar në tabelë, me 2016 faktorë linearë në secilën anë. Cila është vlera më e vogël e k për të cilën është e mundur të fshihen saktësisht k nga këta 4032 faktorë linearë ashtu që në secilën anë të mbetet së paku nga një faktor dhe ekuacioni i fituar të mos ketë zgjidhje reale?

Problem 6. Janë dhënë $n \geqslant 2$ segmente drejtëzash në rrafsh ashtu që çdo dy segmente priten në pika të brendshme dhe asnjë treshe segmentesh nuk kalojnë nëpër të njëjtën pikë. Geoff duhet të zgjedhë njërin skaj të secilit segment dhe ta vejë një bretkosë në të, me fytyrë nga skaji tjetër. Atëherë ai do të përplasë shuplakët $n-1$ herë. Secilën herë që përplas shuplakët secila bretkosë do të kërcejë menjëherë para në pikëprerjen e ardhshme në segmentin e saj. Bretkosat kurrë nuk e ndryshojnë drejtimin e kërcimeve të tyre. Geoff dëshiron t'i vendosë bretkosat ashtu që asnjë çift i tyre asnjëherë nuk do të zëjë të njëjtën pikëprerje njëkohësisht.

(a) Të vërtetohet se Geoff gjithmonë mund të plotësojë dëshirën e tij në qoftë se n është tek.

(b) Të vërtetohet se Geoff kurrë nuk mund të plotësojë dëshirën e tij në qoftë se n është çift.