Şenbe, 8. iýul 2023

Mesele 1. Şu şerti kanagatlandyrýan ähli bitin düzme $n > 1$ sanlary tapmaly: eger $d_1, d_2, \ldots, d_k$ sanlar n-iň hemme položitel bölüjileri bolsa, islendik $1 \leqslant i \leqslant k-2$ üçin d_i san $d_{i+1}+d_{i+2}$ sany bölýär. Bu ýerde, $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$.

Mesele 2. $AB < AC$ bolan ýiti burçly ABC üçburçluk berlen bolsun. Goý Ω—ABC-niň daşyndan çyzylan töwerek bolsun. Goý S—Ω-nyň A nokady öz içine alýan CB dugasynyň orta nokady bolsun. A-dan BC tarapa inderilen perpendikulýar BS-i D nokatda we Ω-ny bolsa ikinji gezek $E \neq A$ nokatda kesýär. D nokatdan geçip BC tarapa parallel bolan göni çyzyk BE göni çyzygy L nokatda kesýär. BDL üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregi ω bilen aňladalyň. Goý ω töwerek Ω töweregi ikinji gezek $P \neq B$ nokatda kessin.
ω töwerege P nokatda galtaşýan galtaşmanyň BS göni çyzygy $\angle BAC$ burçuň bissektrisasynyň üstünde kesýändigini subut ediň.

Mesele 3. $k \geqslant 2$ berlen bitin san. Tükeniksiz položitel bitin agzalardan ybarat bolan $a_1, a_2, \ldots$ yzygiderligi tapmaly: $a_1, a_2, \ldots$ yzygiderligi üçin käbir P köpagzasy tapylyp $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$ görnüşde bolmaly we islendik $n \geqslant 1$ üçin

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

şerti ýerine ýetmeli, bu ýerde $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ otrisatel däl bitin sanlar.

Synaga berlen wagt: 4 sagat 30 minut.
Her mesele 7 baldan ballandyrylar.

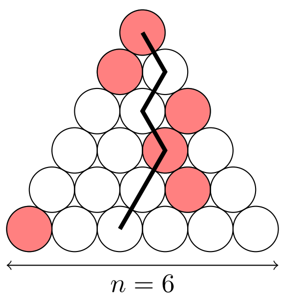
Ýekşenbe, 9. iýul 2023

Mesele 4. Goý $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ jübüt-jübütden tapawutly položitel hakyky sanlar bolup, islendik $n = 1, 2, \ldots, 2023$ üçin

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

aňlatma bitin san bolsun. $a_{2023} \geqslant 3034$ bolýandygyny subut etmeli.

Mesele 5. Goý n položitel bitin san bolsun. Her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ üçin i-nji setirinde takyk biri gyzyl reňkli bolan takyk i sany töweregi öz içine alýan $1 + 2 + \cdots + n$ töwereklerden ybarat bolan deňtaraply üçburçluk görnüşdäki şekile *Ýapon üçburçlugy* diýilýär. Ýapon üçburçlugynda iň ýokarky setirden başlap, yzygiderli, töwerekden şol töweregiň edil aşagynda ýerleşýän iki töwerekden birine gitmeklik we iň aşaky setirde bitirmeklik arkaly emele gelen n sany töwerekleriň yzygiderligine *nindzýa ýoly* diýilýär. Aşakda $n = 6$ üçin bir sany Ýapon üçburçlugy, we onuň bilen bilelikde şol üçburçlukda iki sany gyzyl töweregi öz içinde saklaýan bir sany nindzýa ýoly meselem görkezilendir.



Her bir Ýapon üçburçlugynda azyndan k sany gyzyl töweregi öz içinde saklaýan iň bolmanda bir sany nindzýa ýoly bolar ýaly k-nyň iň uly bahasyny n-iň üsti bilen tapmaly.

Mesele 6. Goý ABC deňtaraply üçburçluk bolsun. Goý A_1, B_1, C_1 nokatlar ABC-niň içinde ýerleşip, $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, we

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

şertlerini kanagatlandyrsyn. Goý BC_1 we CB_1 göni çyzyklar A_2 nokatda, goý CA_1 we AC_1 göni çyzyklar B_2 nokatda, we goý AB_1 we BA_1 göni çyzyklar bolsa C_2 nokatda kesişsin.
Eger $A_1B_1C_1$ üçburçluk dürli taraply üçburçluk bolsa, onda käbir iki dürli nokadyň AA_1A_2, BB_1B_2 we CC_1C_2 üçburçluklaryň daşyndan çyzylan üç töweregiň hemmesiniň üstünde ýatýandygyny subut etmeli.

(Bellik: Dürli taraply üçburçluk diýip islendik iki tarapynyn uzynlyklary deň bolmadyk üçburçluga aýdylýar.)

Language: Turkmen

Synaga berlen wagt: 4 sagat 30 minut.
Her mesele 7 baldan ballandyrylar.