



Duşenbe, 19. ýul 2021

Mesele 1. Goý, $n \geq 100$ bitin san bolsun. Iwan $n, n+1, \dots, 2n$ sanlaryň her birini dürli kartlaryň ýüzüne ýazdy. Ol soňra bu $n+1$ sany kartlary garyýar, we olary islendik görnüşde iki topara bölýär. Ýüzlerine ýazylan sanlaryň jemi takyk kwadrat bolar ýaly bir topara degişli iki sany kartyň tapyljakdygyny subut ediň.

Mesele 2. Islendik x_1, \dots, x_n hakyky sanlar üçin

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

deňsizligi subut ediň.

Mesele 3. $AB > AC$ bolan ýiti burçly ABC üçburçlugyň içinde $\angle DAB = \angle CAD$ bolar ýaly D nokat alynýar. AC kesimde $\angle ADE = \angle BCD$ bolar ýaly E nokat, AB kesimde $\angle FDA = \angle DBC$ bolar ýaly F nokat, we AC göni çyzykda bolsa $CX = BX$ bolar ýaly X nokat alynýar. Goý, O_1 we O_2 nokatlar, degişlilikde, ADC we EXD üçburçluklaryň daşyndan çyzylan töwerekleriniň merkezleri bolsun. BC , EF , we O_1O_2 göni çyzyklaryň bir nokatdan geçýändigini subut ediň.



Sişenbe, 20. lýul 2021

Mesele 4. Goý, Γ töweregiň merkezi I nokat bolsun. Güberçek $ABCD$ dörtburçlugyň AB , BC , CD we DA taraplary Γ töwerege galtaşýar. Goý, Ω töwerek AIC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek bolsun. BA göni çyzygyň A nokatdan dowamy Ω töweregi X nokatda we BC göni çyzygyň C nokatdan dowamy bolsa Ω töweregi Z nokatda kesýär. AD we CD göni çyzyklaryň D nokatdan dowamy Ω töweregi, degişlilikde, Y we T nokatlarda kesýärler.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

bolýandygyny subut ediň.

Mesele 5. Çip we Deýl bilelikde gys üçin 2021 sany hoz ýygnadylar. Çip hozlary 1-den 2021-e çenli sanlar bilen belgiläp çykýar we özleriniň iň söýgüli agajynyň daşyndan töwerek görnüşde 2021 sany çukur gazýar. Ertesi irden Çip, Deýliň hozlaryň belgisine garamazdan her çukura bir sany hoz goýandygyny görýär. Muňa gynanyp, Çip hozlary täzeden tertipleşdirmek üçin 2021 sany göçüm etmegi karar berýär: k -nly göçümde, Çip k belgili hozuň iki gapdal goňşy hozlarynyň ýerini çalyşýar. k -nly göçümde Çip a we b belgili hozlaryň ýerini çalyşanda $a < k < b$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly k sanyň tapyljakdygyny subut ediň.

Mesele 6. Goý, $m \geq 2$ bitin san bolsun, A tükenikli agzadan ybarat bolan (položitel bolmaklygy zerur däl) bitin sanlaryň köplügi bolsun we $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ köplükler bolsa A köplügiň bölek köplükleri bolsun. Her bir $k = 1, 2, \dots, m$ üçin B_k köplügiň agzalarynyň jemi m^k sana deň bolsun. A köplügiň iň bolmanda $m/2$ sany agzasynyň bardygyny subut ediň.