

12 Юли 2006

**Задача 1.** Нека  $ABC$  е триъгълник с център на вписаната окръжност  $I$ . Точка  $P$  от вътрешността на триъгълника е такава, че

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Да се докаже, че  $AP \geq AI$ , като равенството се достига тогава и само тогава, когато  $P = I$ .

**Задача 2.** Нека  $P$  е правилен 2006-ъгълник. Диагонал на  $P$  се нарича *добър*, ако краищата му делят контура на  $P$  на две части, всяка от които се състои от нечетен брой страни. Страните на  $P$  също се считат за *добри*.

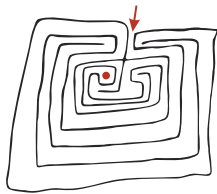
Нека  $P$  е разделен на триъгълници посредством 2003 диагонала, някои два от които не се пресичат във вътрешността на  $P$ . Да се намери максималният брой равнобедрени триъгълници с две добри страни, които могат да се получат при такова разделяне на  $P$ .

**Задача 3.** Да се намери най-малкото реално число  $M$ , за което неравенството

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

е изпълнено за произволни реални числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Време за работа: 4 часа 30 минути  
Всяка задача се оценява със 7 точки



13 Юли 2006

**Задача 4.** Да се намерят всички двойки  $(x, y)$  от цели числа, за които

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Задача 5.** Нека  $P(x)$  е полином от степен  $n > 1$  с цели коефициенти и нека  $k$  е естествено число. Разглеждаме полинома  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , където  $P$  се появява  $k$  пъти. Да се докаже, че съществуват най-много  $n$  цели числа  $t$ , за които  $Q(t) = t$ .

**Задача 6.** На всяка страна  $b$  на изпъкнал многоъгълник  $P$  е съпоставено максималното лице на триъгълник със страна  $b$ , който се съдържа в  $P$ . Да се докаже, че сборът на лицата, съпоставени на страните на  $P$  е поне два пъти по-голям от лицето на  $P$ .

*Време за работа: 4 часа 30 минути  
Всяка задача се оценява със 7 точки*