



Language: Hebrew

Day: 1

יום שני, 11 ביולי, 2016

שאלה 1. במשולש BCF , הזווית $B \neq$ ישרה. נסמן ב- A את הנקודה על הישר CF עבורה $FA = FB$ ו- F נמצאת בין A ו- C . הנקודה D נבחרת כך שיתקיים $AC - DA = DC$ ייחה את הזווית $DAB \neq$. הנקודה E נבחרת כך שיתקיים $AD - EA = ED$ ייחה את הזווית $EAC \neq$. נסמן ב- M את אמצע הקטע CF . נסמן ב- X את הנקודה עבורה $AMXE$ היא מקבילית (באשר $(AE \parallel MX) \wedge (AM \parallel EX)$). ME נפגשים בנקודה אחת. הוכחו כי הישרים BD , FX ו- ME נפגשים בנקודה אחת.

שאלה 2. מצאו את כל השלמיים החזוביים n עבורם ניתן למלא כל תא של טבלה $n \times n$ באחת מהאותיות I , M , O כך ש:

- בכל שורה ובכל עמודה, בדיק בשלישי מהתאים מופיע I , בשליש מופיע M ובשליש – O ;
- בכל אלכסון שמספר התאים שלו מחלק ב-3, בשליש מהתאים מופיע I , בשליש מופיע M ובשליש – O .

הערה: השורות והעמודות של טבלה $n \times n$ ממושפרות מ-1 עד n בסדר טבעי. בהתאם למספור, לכל תא בטבלה מתאים זוג שלמים (i, j) עם $n \leq i, j \leq 1$. עבור $i < j$, בטבלה יש $2n - 2 - 4n$ **אלכסונים** מנויים סוגים. אלכסון מהסוג הראשון מורכב מכל התאים (i, j) עבורם $j + i$ שווה לקבוע, ואלכסון מהסוג השני מורכב מכל התאים (i, j) עבורם $j - i$ שווה לקבוע.

שאלה 3. יהא $P = A_1A_2 \dots A_k$ מצולע מישורי קמור. הקודודים A_1, A_2, \dots, A_k הם בעלי קוורדינטות שלמות ונמצאים על מעגל אחד. נסמן ב- S את שטח המציגולע P . נתון שלם חזובי אי-זוגי n עבורו ריבועי אורכי הצלעות של P הם שלמיים המתחלקים ב- n . הוכחו כי $2S$ הוא שלם המתחלק ב- n .

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות



Language: Hebrew

Day: 2

יום שלישי, 12 ביולי, 2016

שאלה 4. קבוצת שלמים הויוביים נקראת ריתנית אם היא בעלת שני איברים לפחות, וכל איבר יש מהלך ראשוני משותף עם לפחות אחד האיברים האחרים. יהא $n + 1 = n^2 + P(n) = n^2 + n + 1$. מהו הערך המינימלי האפשרי של השלים החובי b עבורו קיים שלם אי-שלילי a כך שהקבוצה

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

היא ריתנית?

שאלה 5. על הלוח כתובה המשווה

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016)$$

בנובמבר 2016 גורמים לינאריים בכל אגף. מהו הערך המינימלי האפשרי של k עבורו ניתן למחוק k מתחום 4032 הגורמים הלינאריים הללו, כך שבכל אגף ישאר לפחות גורם אחד, ולמשווה המתקבלת לא יהיו פתרונות ממשיים?

שאלה 6. נתונים $2 \geq n$ קטיעים במשור, שכל שניים מהם נחככים בנקודה אשר פנימית לשנייהם, ואף שלושה לא נפגשים בנקודה אחת. לב ציריך לבחר נקודת קצה בכל אחד מהקטיעים, ולמגם עליה צפראע המופנית כלפי נקודת הקצה השנייה. לאחר מכן הוא ימחה כפיהם $1 - n$ פעמים. עם כל מהיהה, כל צפראע תקוףן קדימה לנקודת החיתוך הבאה על קטועה. צפראע לא יכולה לשנות את כיוון קפיצתה. מושאלת לב היא למקם את הצפראעים כך שאף שתים לעולם לא תמצאה באותו נקודת חיתוך באותו הזמן.

(א) עבור n אי-זוגי, הוכיחו כי לב תמיד יוכל להגשים את מושאלתו.

(ב) עבור n זוגי, הוכיחו כי לב לעולם לא יוכל להגשים את מושאלתו.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות