ponedjeljak, 21. rujna 2020

Zadatak 1. Dan je konveksan četverokut $ABCD$. Točka P nalazi se u unutrašnjosti četverokuta $ABCD$. Vrijede sljedeći razmjeri:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokaži da se sljedeća tri pravca sijeku u jednoj točki: simetrale unutarnjih kutova $\sphericalangle ADP$ i $\sphericalangle PCB$ i simetrala dužine $\overline{AB}$.

Zadatak 2. Dani su realni brojevi a, b, c, d takvi da vrijedi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ i $a + b + c + d = 1$. Dokaži da vrijedi

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Zadatak 3. Dano je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:

- Ukupne težine obje hrpe su jednake.
- Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

utorak, 22. rujna 2020

Zadatak 4. Dan je prirodni broj $n > 1$. Na planini postoji n^2 postaja koje su sve na međusobno različitim visinama. Svaka od dvije kompanije koje upravljaju žičarama, A i B, posjeduje k žičara; svaka žičara omogućuje prijevoz od jedne postaje do druge koja je na većoj visini (bez međupostaja). Svih k žičara kompanije A imaju k različitih početnih postaja i k različitih završnih postaja, pri čemu žičara koja počinje na većoj visini i završava na većoj visini. Isti uvjet vrijedi za kompaniju B. Kažemo da kompanija *povezuje* dvije postaje ako je moguće iz niže doseći višu koristeći jednu ili više žičara te kompanije (druga kretanja između postaja nisu dozvoljena).

Odredi najmanji prirodni broj k za koji sigurno postoje dvije postaje koje povezuju obje kompanije.

Zadatak 5. Dan je snop od $n > 1$ karata. Na svakoj karti je napisan jedan prirodni broj. Snop ima svojstvo da je aritmetička sredina brojeva napisanih na proizvoljnom paru karata jednaka geometrijskoj sredini brojeva napisanih na nekom skupu koji se sastoji od jedne ili više karata iz snopa.

Za koje n nužno slijedi da su brojevi napisani na svim kartama iz snopa jednaki?

Zadatak 6. Dokaži da postoji pozitivna konstanta c takva da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je $n > 1$ prirodni broj i $\mathcal{S}$ skup od n točaka u ravnini takvih da je udaljenost između svake dvije različite točke skupa $\mathcal{S}$ barem 1. Tada slijedi da postoji pravac ℓ koji razdvaja skup $\mathcal{S}$ takav da je udaljenost bilo koje točke skupa $\mathcal{S}$ od pravca ℓ barem $cn^{-1/3}$.

(Pravac ℓ *razdvaja* skup $\mathcal{S}$ ako neka dužina čije su krajnje točke u skupu $\mathcal{S}$ siječe ℓ.)

Napomena. Za slabiji rezultat pri čemu je $cn^{-1/3}$ zamijenjeno s $cn^{-\alpha}$ mogu se dobiti bodovi ovisno o vrijednosti konstante $\alpha > 1/3$.