

Δευτέρα, 11 Ιουλίου 2016

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο BCF ορθογώνιο στο B . Έστω A σημείο της ευθείας CF τέτοιο ώστε $FA = FB$ και το F να βρίσκεται μεταξύ των A και C . Σημείο D επιλέγεται έτσι ώστε $DA = DC$ και η AC να είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle DAB$. Σημείο E επιλέγεται έτσι ώστε $EA = ED$ και η AD να είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle EAC$. Έστω M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος CF . Έστω X σημείο που είναι τέτοιο ώστε το $AMXE$ να είναι παραλληλόγραμμο (όπου $AM \parallel EX$ και $AE \parallel MX$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BD , FX και ME περνούν από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους σε κάθε κελί ενός $n \times n$ πίνακα μπορεί να τοποθετηθεί ένα από τα γράμματα I , M και O κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα, το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι I , το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι M και το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι O ,
- σε κάθε διαγώνιο, αν ο αριθμός των γραμμάτων που είναι τοποθετημένα στα κελιά της είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε το ένα τρίτο των γραμμάτων είναι I , το ένα τρίτο είναι M και το ένα τρίτο είναι O .

Σημείωση: Οι γραμμές και οι οι στήλες ενός $n \times n$ πίνακα αριθμούνται από 1 μέχρι n κατά την φυσική τους σειρά. Έτσι κάθε κελί αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι θετικών ακεραίων (i, j) με $1 \leq i, j \leq n$. Για $n > 1$, ο πίνακας έχει $4n - 2$ διαγωνίους δύο τύπων. Μια διαγώνιος του πρώτου τύπου αποτελείται από όλα τα κελιά (i, j) για τα οποία το άθροισμα $i + j$ έχει σταθερή τιμή και μια διαγώνιος του δεύτερου τύπου αποτελείται από τα κελιά (i, j) για τα οποία η διαφορά $i - j$ έχει σταθερή τιμή.

Πρόβλημα 3. Έστω $P = A_1 A_2 \dots A_k$ είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο. Οι κορυφές A_1, A_2, \dots, A_k έχουν ακέραιες συντεταγμένες και βρίσκονται όλες πάνω σε ένα κύκλο. Έστω S είναι το εμβαδόν του πολυγώνου P . Δίνεται ένας περιττός ακέραιος n τέτοιος ώστε τα τετράγωνα των μηκών των πλευρών του πολυγώνου P είναι ακέραιοι που διαιρούνται με τον αριθμό n . Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2S$ είναι ένας ακέραιος που διαιρείται με τον αριθμό n .

Τρίτη, 12 Ιουλίου 2016

Πρόβλημα 4. Ένα σύνολο θετικών ακέραιων αριθμών ονομάζεται *εύοσμο*, αν αυτό περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία και καθένα από τα στοιχεία του έχει έναν κοινό πρώτο παράγοντα με ένα τουλάχιστον από τα υπόλοιπα στοιχεία του. Έστω $P(n) = n^2 + n + 1$. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του θετικού ακεραίου b έτσι ώστε να υπάρχει ένας μη αρνητικός ακεραίος a για τον οποίο το σύνολο

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

είναι *εύοσμο*;

Πρόβλημα 5. Η εξίσωση

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

γράφεται στον πίνακα, με 2016 γραμμικούς παράγοντες σε κάθε μέλος της. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του k για την οποία είναι δυνατόν να σβήσουμε ακριβώς k από τους 4032 γραμμικούς παράγοντες των δύο μελών της εξίσωσης έτσι ώστε ένας τουλάχιστον παράγοντας να μείνει σε κάθε μέλος και η εξίσωση που προκύπτει να μην έχει πραγματικές λύσεις;

Πρόβλημα 6. Δίνονται $n \geq 2$ ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο έτσι ώστε κάθε δύο από αυτά τέμνονται σε ένα εσωτερικό τους σημείο και δεν υπάρχουν τρία από αυτά που να περνούν από το ίδιο σημείο. Ο Τζέφ πρέπει να διαλέξει ένα άκρο από κάθε ευθύγραμμο τμήμα και να τοποθετήσει ένα βάτραχο σε αυτό, που να κοιτάζει προς το άλλο άκρο του τμήματος. Έστερα αυτός θα κάνει $n-1$ χειροκροτήματα. Σε κάθε χειροκρότημα, κάθε βάτραχος πηδά αμέσως προς το επόμενο σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματός του. Οι βάτραχοι ποτέ δεν αλλάζουν την κατεύθυνση των πηδημάτων τους. Ο Τζέφ θέλει να τοποθετήσει τους βατράχους κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην συμβεί ποτέ να βρεθούν δύο από αυτούς στο ίδιο σημείο τομής την ίδια χρονική στιγμή.

- (α') Να αποδείξετε ότι ο Τζέφ μπορεί πάντοτε να πραγματοποιήσει την επιθυμία του, όταν ο αριθμός n είναι περιττός.
- (β') Να αποδείξετε ότι ο Τζέφ δεν μπορεί ποτέ να πραγματοποιήσει την επιθυμία του, όταν ο n είναι άρτιος.