E hënë, 9 korrik 2018

Problem 1. Le të jetë Γ rrethi i jashtashkruar i një trekëndëshi këndngushtë ABC. Pikat D dhe E shtrihen në segmentet AB dhe AC, përkatësisht, ashtu që $AD = AE$. Simetralet e BD dhe CE presin harqet e vogla AB dhe AC të Γ në pikat F dhe G, përkatësisht. Vërtetoni se drejtëzat DE dhe FG janë paralele.

Problem 2. Gjeni të gjithë numrat e plotë $n \geq 3$ për të cilët ekzistojnë numra realë $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ të tillë që $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ dhe

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

për $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problem 3. *Trekëndësh anti-Pascal* është një tabelë në formë trekëndëshi barabrinjësh me numra të tillë që, përveç numrave në rreshtin e poshtëm, secili numër është i barabartë me vlerën absolute të ndryshimit të dy numrave menjëherë nën të. Për shembull, tabela vijuese është një trekëndësh anti-Pascal me katër rreshta i cili përmban çdo numër të plotë nga 1 deri në 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

A ekziston trekëndësh anti-Pascal me 2018 rreshta i cili përmban çdo numër të plotë nga 1 deri në $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë

E martë, 10 korrik 2018

Problem 4. *Pozicion* është çdo pikë (x, y) në rrafsh e tillë që x dhe y janë numra të plotë pozitivë më të vegjël ose të barabartë me 20.

Fillimisht, secili nga 400 pozicionet është i lirë. Ana dhe Beni vendosin gurë me rradhë duke filluar nga Ana. Në rradhën e saj, Ana vendos një gur të ri të kuq në një pozicion të lirë ashtu që distanca ndërmjet cilavedo dy pozicione të zëna me gurë të kuq të mos jetë e barabartë me $\sqrt{5}$. Në rradhën e tij, Beni vendos një gur të ri të kaltër në cilindo pozicion të lirë. (Një pozicion i zënë me gur të kaltër lejohet të jetë në çfarëdo distance me çfarëdo pozicioni tjetër të zënë.) Ata ndalojnë sapo një lojtar të mos mund të vendosë një gur.

Gjeni vlerën më të madhe të K të tillë që Ana të sigurojë se vendos së paku K gurë të kuq, sido që Beni t'i vendosë gurët e tij të kaltër.

Problem 5. Le të jetë a_1, $a_2, \ldots$ një varg i pafundmë numrash të plotë pozitivë. Supozojmë se ekziston numër i plotë $N > 1$ i tillë që për çdo $n \geq N$ numri

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

është i plotë. Vërtetoni se ekziston një numër i plotë pozitiv M i tillë që $a_m = a_{m+1}$ për çdo $m \geq M$.

Problem 6. Një katërkëndësh konveks $ABCD$ plotëson $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Pika X shtrihet brenda $ABCD$ ashtu që

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{dhe} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Vërtetoni se $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë