



понедељак, 18. 07. 2011.

**1. задатак.** За задани скуп  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , састављен од четири различита природна броја, означимо суму елемената  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  са  $s_A$ . Нека је  $n_A$  број парова индекса  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , за које број  $a_i + a_j$  дијели  $s_A$ . Одредити све такве скупове  $A$ , састављене од четири различита природна броја, за које  $n_A$  постиже максимални вриједност.

**2. задатак.** Нека је  $S$  коначан скуп тачака у равни који садржи бар двије тачке. Никоје три тачке скупа  $S$  нису колинеарне. *Вјетрењача* је сљедећи поступак у којем на самом почетку бирамо праву  $l$  која садржи тачно једну тачку  $P \in S$ .

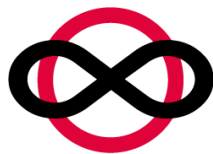
Праву  $l$  ротира у смјеру казаљке на сату око *центра*  $P$  до првог момента у којем права садржи неку другу тачку скупа  $S$  (означимо ову тачку са  $Q$ ). Након тога, права ротира у смјеру казаљке на сату око новог центра  $Q$  до (првог) момента у којем права садржи неку другу тачку скупа  $S$ . Овај поступак се понавља бесконачно много пута, при чему је центар ротације увијек тачка из скупа  $S$ .

Доказати да је могуће одабрати неку тачку  $P \in S$  и неку праву  $l$  која садржи тачку  $P$ , тако да за добијену *вјетрењачу* свака тачка скупа  $S$  постаје *центар* ротације бесконачно много пута.

**3. задатак.** Нека функција  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задовољава сљедећи услов

$$f(x + y) \leq y \cdot f(x) + f(f(x)),$$

за све реалне бројеве  $x$  и  $y$ . Доказати да је  $f(x) = 0$  за све  $x \leq 0$ .



*уторак, 19. 07. 2011.*

**4. задатак.** Нека је  $n$  природан број. Дата је равнотежна вага са два таса и  $n$  утега са тежинама  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Све утеге морамо поставити на вагу, један за другим. У сваком кораку одаберемо један од утега који још није постављен на вагу и поставимо га на лијеви или десни тас ваге, тако да тежина десног таса није већа од тежине лијевог таса.

Одредити број начина на које је ово постављање могуће урадити.

**5. задатак.** Задана је функција  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , са скупа цијелих бројева на скуп природних бројева, таква да је разлика  $f(m) - f(n)$  дјeljива бројем  $f(m - n)$ , за било која два цијела броја  $m$  и  $n$ .

Доказати да је број  $f(n)$  дјeljив бројем  $f(m)$ , за све цијеле бројеве  $m$  и  $n$  за које је  $f(m) \leq f(n)$ .

**6. задатак.** Задан је оштроугли троугао  $ABC$  са описаном кружницом  $\Gamma$ . Нека је права  $l$  тангентна са кружницом  $\Gamma$ , а нека су праве  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  праве симетричне правој  $l$  у односу на странице  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , респективно. Доказати да је кружница описана око троугла одређеног правама  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  тангентна са кружницом  $\Gamma$ .