Lunedì, 11 luglio 2016

Problema 1. Il triangolo BCF è rettangolo in B. Sia A il punto sulla retta CF tale che $FA = FB$ e F si trova tra A e C. Il punto D è scelto in maniera tale che $DA = DC$ e AC è la bisettrice di $\angle DAB$. Il punto E è scelto in maniera tale che $EA = ED$ e AD è la bisettrice di $\angle EAC$. Sia M il punto medio di CF. Sia X il punto tale che $AMXE$ è un parallelogrammo (con $AM \parallel EX$ e $AE \parallel MX$).

Dimostrare che le rette BD, FX e ME concorrono.

Problema 2. Determinare tutti gli interi positivi n per cui ogni casella di una tabella $n \times n$ può essere riempita con una delle lettere I, M e O in maniera tale che le due condizioni seguenti siano soddisfatte:

- in ogni riga ed in ogni colonna, un terzo delle caselle contiene I, un terzo contiene M e un terzo contiene O;
- in ogni diagonale costituita da un numero di caselle multiplo di tre, un terzo delle caselle contiene I, un terzo contiene M e un terzo contiene O.

Nota: le righe e le colonne di una tabella $n \times n$ sono numerate da 1 a n nell'ordine naturale. Così ogni casella corrisponde a una coppia (i, j) di interi positivi ($1 \leqslant i, j \leqslant n$). Per $n > 1$, la tabella ha $4n - 2$ *diagonali* di due tipi. Una diagonale del primo tipo è costituita da tutte le caselle (i, j) per cui $i + j$ è una costante, mentre una diagonale del secondo tipo è costituita da tutte le caselle (i, j) per cui $i - j$ è una costante.

Problema 3. Sia $P = A_1A_2 \ldots A_k$ un poligono convesso nel piano. I vertici A_1, A_2, ..., A_k hanno coordinate intere e stanno su una circonferenza. Sia S l'area di P. Sia n un intero positivo dispari tale che i quadrati delle lunghezze dei lati di P sono tutti interi divisibili per n.

Dimostrare che $2S$ è un intero divisibile per n.

Durata: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Martedì, 12 luglio 2016

Problema 4. Un insieme di interi positivi si dice *profumato* se contiene almeno due elementi e ogni suo elemento ha un fattore primo in comune con almeno uno degli altri elementi. Sia $P(n) = n^2+n+1$.

Determinare il più piccolo intero positivo b per cui esiste un intero non-negativo a tale che l'insieme

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

è profumato.

Problema 5. Sulla lavagna è scritta l'equazione

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

che ha 2016 fattori lineari in ogni lato.

Determinare il più piccolo valore di k per cui è possibile cancellare esattamente k di questi 4032 fattori lineari in maniera tale che resti almeno un fattore per lato e l'equazione risultante non abbia soluzioni reali.

Problema 6. Sono dati $n \geqslant 2$ segmenti nel piano tali che due segmenti qualunque si tagliano in un punto diverso dagli estremi, e non ci sono tre segmenti con un punto in comune. Per ogni segmento, Ludo deve scegliere un estremo e piazzarci una rana rivolta verso l'altro estremo. Dopo batterà le mani $n-1$ volte. Ad ogni battito di mani, ogni rana salterà immediatamente in avanti fino al successivo punto di intersezione sul suo segmento. Le rane non cambiano mai la direzione dei loro salti. Ludo vuole piazzare le rane in maniera tale che non ci sia mai più di una rana in ogni punto di intersezione.

(a) Dimostrare che Ludo può sempre realizzare il suo desiderio se n è dispari.

(b) Dimostrare che Ludo non può mai realizzare il suo desiderio se n è pari.

Durata: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti