

12. červenec 2006

**Úloha 1.** Necht  $I$  je střed kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$  a  $P$  jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že  $|AP| \geq |AI|$ , přičemž rovnost nastane, právě když  $P = I$ .

**Úloha 2.** Necht  $P$  je pravidelný 2006-úhelník. Jeho úhlopříčka se nazývá *dobrá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku  $P$  na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku  $P$  je rovněž *dobrá*.

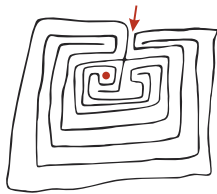
Předpokládejme, že  $P$  je rozdělen na trojúhelníky 2003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě nemají společný bod uvnitř  $P$ . Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku  $P$  mají dvě dobré strany.

**Úloha 3.** Určete nejmenší reálné číslo  $M$  takové, že nerovnost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla  $a, b, c$ .

*Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.  
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.*



13. červenec 2006

**Úloha 4.** Určete všechny dvojice  $(x, y)$  celých čísel, pro něž platí

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Úloha 5.** Nechť  $P(x)$  je polynom stupně  $n > 1$  s celočíselnými koeficienty a  $k$  nechť je kladné celé číslo. Uvažujme polynom  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , kde  $P$  je uvažováno  $k$ -krát. Dokažte, že existuje nejvýše  $n$  celých čísel  $t$  takových, že  $Q(t) = t$ .

**Úloha 6.** Každé straně  $b$  konvexního mnohoúhelníku  $P$  přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v  $P$  a jehož jedna strana je  $b$ . Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku  $P$  je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku  $P$ .

*Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.  
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.*