

วันจันทร์ที่ ๒๑ กันยายน พ.ศ. ๒๕๖๓

โจทย์ข้อ 1. พิจารณารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก  $ABCD$  จุด  $P$  เป็นจุดภายในของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก  $ABCD$  สัดส่วนต่อไปนี้  
เป็นจริง

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงทั้งสามเส้นต่อไปนี้ตัดกันที่จุดเดียว: เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม  $\angle ADP$ , เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม  $\angle PCB$  และ เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของส่วนของเส้นตรง  $AB$

โจทย์ข้อ 2. จำนวนจริง  $a, b, c, d$  สอดคล้องกับ  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  และ  $a + b + c + d = 1$  จงพิสูจน์ว่า

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

โจทย์ข้อ 3. มีหินอยู่  $4n$  ก้อนซึ่งมีน้ำหนัก  $1, 2, 3, \dots, 4n$  หินแต่ละก้อนมีสีเป็นหนึ่งในสี  $n$  สี และในแต่ละสีมีหินอยู่สี่ก้อน จงแสดงว่าสามารถแบ่งหินเหล่านี้ออกเป็นสองกองโดยสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้

- น้ำหนักรวมของแต่ละกองมีค่าเท่ากัน
- แต่ละกองบรรจุหินสองก้อนจากแต่ละสี

วันอังคารที่ ๒๒ กันยายน พ.ศ. ๒๕๖๓

**โจทย์ข้อ 4.** มีจำนวนเต็ม  $n > 1$  มีสถานียู่  $n^2$  สถานีบนทางขึ้นเขา ณ ระดับความสูงที่แตกต่างกัน มีบริษัท กระเช้าไฟฟ้าสองบริษัท  $A$  และ  $B$  ซึ่งแต่ละบริษัทให้บริการกระเช้า  $k$  กระเช้า แต่ละกระเช้าขนส่งจากสถานีหนึ่งไปยังอีกสถานีหนึ่งที่สูงกว่า (โดยไม่มีการหยุดระหว่างทาง) กระเช้า  $k$  กระเช้าของบริษัท  $A$  เริ่มต้นการให้บริการที่สถานี  $k$  สถานีที่แตกต่างกัน และสิ้นสุดที่สถานี  $k$  สถานีที่แตกต่างกัน และกระเช้าที่เริ่มที่สถานีที่สูงกว่าจะสิ้นสุดที่สถานีที่สูงกว่าด้วย เงื่อนไขเดียวกันนี้เป็นจริงสำหรับบริษัท  $B$  เช่นกัน กล่าวหาว่าสถานีสองสถานีเชื่อมต่อกัน โดยบริษัทหนึ่งถ้าสามารถเดินทางจากสถานีที่ต่ำกว่าไปยังสถานีที่สูงกว่าได้โดยใช้กระเช้าหนึ่งกระเช้าเป็นอย่างน้อยของบริษัทนั้นเพียงบริษัทเดียว (โดยไม่มีการเดินทางระหว่างสถานีในรูปแบบอื่น)

จงหาจำนวนเต็มบวก  $k$  เล็กสุดที่การันตีว่ามีสถานีสองสถานีที่เชื่อมต่อกันโดยทั้งสองบริษัท

**โจทย์ข้อ 5.** ไฟฟ้ารับหนึ่งมีไฟอยู่  $n > 1$  ใบ มีจำนวนเต็มบวกหนึ่งจำนวนเขียนอยู่บนไฟแต่ละใบ ไฟสำหรับนี้มีสมบัติว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวเลขบนไฟแต่ละคู่จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวเลขบนไฟของบางคอลเลกชันที่มีไฟหนึ่งใบขึ้นไปด้วย

สำหรับ  $n$  ใดบ้างที่ทำให้สรุปได้ว่าตัวเลขบนไฟมีค่าเท่ากันทั้งหมด

**โจทย์ข้อ 6.** จงพิสูจน์ว่ามีค่าคงตัวบวก  $c$  ซึ่งทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

พิจารณานับจำนวนเต็ม  $n > 1$  และเซต  $S$  ของจุด  $n$  จุดบนระนาบซึ่งจุดสองจุดที่แตกต่างกันใด ๆ ใน  $S$  มีระยะห่างอย่างน้อย 1 จะได้ว่ามีเส้นตรง  $\ell$  ที่แยก  $S$  โดยที่ระยะห่างจากจุดใด ๆ ใน  $S$  ไปยัง  $\ell$  มีค่าอย่างน้อย  $cn^{-1/3}$

(เส้นตรง  $\ell$  แยก เซต  $S$  ของจุด ถ้าบางส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใน  $S$  ตัดกันภายในกับ  $\ell$ )

หมายเหตุ. หากได้ข้อสรุปที่อ่อนกว่าเป็น  $cn^{-\alpha}$  แทนที่จะเป็น  $cn^{-1/3}$  อาจมีคะแนนโดยขึ้นอยู่กับค่าของค่าคงตัว  $\alpha > 1/3$