

Երկուշաբթի, 21 սեպտեմբերի 2020թ

Խնդիր 1. Դիցուք $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան ներսում նշված է P կետն այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC:$$

Ապացուցել, որ $\angle ADP$ ու $\angle PCB$ անկյունների կիսորդները և AB հատվածի միջնուղղահայացը հատվում են մեկ կետում:

Խնդիր 2. Դիցուք տրված են a, b, c, d իրական թվերը, ընդ որում $a \geq b \geq c \geq d > 0$ և $a + b + c + d = 1$: Ապացուցել, որ

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1:$$

Խնդիր 3. Դիցուք տրված են $4n$ քարեր, որոնք ունեն $1, 2, 3, \dots, 4n$ զանգվածները: Քարերից յուրաքանչյուրը ներկած է n գույներից որևէ մեկով, ընդ որում յուրաքանչյուր գույնով ներկած է ճիշտ չորս քար: Ապացուցել, որ քարերը հնարավոր է բաժանել երկու կույտերի այնպես, որ միաժամանակ տեղի ունենան հետևյալ երկու պայմանները.

- կույտերի զանգվածներն իրար հավասար են,
- յուրաքանչյուր կույտ պարունակում է յուրաքանչյուր գույնի երկու քար:

Երեքշաբթի, 22 սեպտեմբերի 2020թ

Խնդիր 4. Դիցուք տրված է n ($n > 1$) բնական թիվը և Արագածի լանջին տեղակայված են n^2 հատ կայաններ, ընդ որում բոլոր կայաններն էլ գտնվում են տարբեր բարձրությունների վրա: Դիցուք A և B կազմակերպություններից յուրաքանչյուրը շահագործում է k հատ օդախուց: Յուրաքանչյուր օդախուց իրականացնում է փոխադրում որևէ կայանից դեպի ավելի վերև գտնվող մեկ այլ կայան՝ առանց միջանկյալ կանգառի: Հայտնի է, որ A կազմակերպության k օդախուցերն ունեն k իրարից տարբեր սկզբնական կայաններ և k իրարից տարբեր վերջնական կայաններ, ինչպես նաև ավելի վերևից շարժումը սկսող օդախուցի վերջնական կայանը գտնվում է ավելի բարձր: Նույն պայմաններին բավարարում են B կազմակերպության օդախուցերը: Երկու կայան կոչվում են որևէ կազմակերպության կողմից միացված, եթե հնարավոր է սկսել ներքևում գտնվող կայանից և այդ կազմակերպության մեկ կամ մի քանի օդախուցերից օգտվելով հասնել վերևի կայան (կայանների միջև այլ տեղաշարժ չի թույլատրվում):

Գտնել k -ի փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում կգտնվեն երկու կայաններ, որոնք միացված են երկու կազմակերպությունների կողմից:

Խնդիր 5. Դիցուք տրված են n ($n > 1$) քարտեր, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա գրված է որևէ բնական թիվ: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու քարտերի վրա գրված երկու թվերի միջին թվաբանականը հավասար է մեկ կամ մի քանի քարտերի վրա գրված թվերի միջին երկրաչափականին: Պարզել, թե n -ի ո՞ր արժեքների դեպքում այդ պայմանից կստացվի, որ բոլոր քարտերի վրա գրված թվերն իրար հավասար են:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ գոյություն ունի c դրական թիվ, որի համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

Դիցուք S -ը հարթության վրա նշված n ($n > 1$) կետերի բազմություն է, որ իրարից տարբեր ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը առնվազն 1 է: Այդ դեպքում գոյություն ունի S բազմությունը բաժանող այնպիսի ℓ ուղիղ, որ S բազմության յուրաքանչյուր կետի հեռավորությունը ℓ ուղղից առնվազն $cn^{-1/3}$ է:

(ℓ -ը բաժանում է կետերի S բազմությունը, եթե այն հատում է S -ին պատկանող որևէ երկու կետեր միացնող հատվածը:)

Դիտողություն. Կախված $\alpha > 1/3$ հաստատունի արժեքից $cn^{-1/3}$ -ի փոխարեն ավելի թույլ $cn^{-\alpha}$ կարգի գնահատականների համար կարող են տրվել միավորներ: