



mánudagur, 19. júlí 2021

Dæmi 1. Látum $n \geq 100$ vera heiltölu. Ivan skrifar tölurnar $n, n+1, \dots, 2n$ á mismunandi spil. Síðan stokkar hann þessi $n+1$ spil, og skiptir þeim í tvo bunka. Sannið að a.m.k. annar bunkinn innihaldi einhver tvö spil þannig að summa talnanna á þeim sé ferningstala.

Dæmi 2. Sýnið að ójafnan

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

gildi fyrir allar rauntölur x_1, \dots, x_n .

Dæmi 3. Látum D vera punkt innan í hvasshyrndum þríhyrningi ABC með $AB > AC$, þannig að $\angle DAB = \angle CAD$. Punktur E á strikinu AC er þannig að $\angle ADE = \angle BCD$, punktur F á strikinu AB er þannig að $\angle FDA = \angle DBC$, og punktur X á línunni AC er þannig að $CX = BX$. Látum O_1 og O_2 vera miðjur umritaðra hringja þríhyrninganna ADC og EXD , í sömu röð. Sannið að línurnar BC , EF , og O_1O_2 liggi allar um sama punkt.



Þriðjudagur, 20. júlí 2021

Dæmi 4. Látum Γ vera hring með miðju I , og $ABCD$ vera kúptan ferhyrning þannig að sérhvert strikanna AB , BC , CD og DA sé snertill við Γ . Látum Ω vera umritaðan hring þríhyrnings AIC . Framlenging BA fram hjá A sker Ω í X , og framlenging BC fram hjá C sker Ω í Z . Framlengingar AD og CD fram hjá D skera Ω í Y og T , í sömu röð. Sýnið að

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Dæmi 5. Tveir íkornar, Hoppi og Skoppi, hafa safnað 2021 hnetum fyrir veturinn. Hoppi númerar hneturnar frá 1 upp í 2021, og grefur 2021 litlar holur í hring í kringum uppáhaldstréð þeirra. Morguninn eftir tekur Skoppi eftir því að Hoppi hafði sett hnetu í allar holurnar, en hafði ekkert hugsað út í númeringarnar. Skoppi er óánægður og endurraðar hnetunum með að framkvæma runu af 2021 aðgerðum. Í k -tu aðgerð víxlar Skoppi á hnetunum tveimur sem eru við hliðina á hnetu k . Sannið að til sé gildi á k þannig að í k -ta skrefi víxli Skoppi á einhverjum hnetum a og b þannig að $a < k < b$.

Dæmi 6. Látum $m \geq 2$ vera heiltölu, A vera endanlegt mengi af (ekki endilega jákvæðum) heiltölum, og $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ vera hlutmengi í A . Gerum ráð fyrir að fyrir sérhvert $k = 1, 2, \dots, m$ sé summa stakana í B_k jöfn m^k . Sannið að A innihaldi að minnsta kosti $m/2$ stök.