Thứ Ba, 23 tháng Bảy, 2013

Bài 1. Chứng minh rằng với hai số nguyên dương k và n tùy ý, luôn tồn tại k số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (không nhất thiết đôi một khác nhau) sao cho

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Bài 2. Một tập hợp gồm đúng 4027 điểm trên mặt phẳng được gọi là *tập Colombia* nếu không có ba điểm nào trong các điểm đó thẳng hàng, đồng thời có 2013 điểm được tô màu đỏ và 2014 điểm còn lại được tô màu xanh. Mặt phẳng được phân chia thành các miền khi ta kẻ một số đường thẳng. Một cách kẻ một số đường thẳng được gọi là *cách kẻ tốt* đối với tập Colombia cho trước nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

1. không đường thẳng nào đi qua dù chỉ một điểm thuộc tập hợp đó;
2. không miền nào chứa cả điểm màu đỏ và điểm màu xanh.

Tìm số k nhỏ nhất sao cho với tập Colombia tùy ý gồm đúng 4027 điểm, tồn tại một cách kẻ k đường thẳng là cách kẻ tốt.

Bài 3. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC tại điểm A_1. Điểm B_1 trên CA và điểm C_1 trên AB được định nghĩa một cách tương tự, bằng cách xét đường tròn bàng tiếp góc B và góc C, tương ứng. Giả sử tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Đường tròn bàng tiếp *góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với đoạn thẳng BC, phần kéo dài về phía B của cạnh AB và phần kéo dài về phía C của cạnh AC. Các đường tròn bàng tiếp góc B và góc C được định nghĩa một cách tương tự.*

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm.

Thứ Tư, 24 tháng Bảy, 2013

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC, khác với các điểm B và C. Các điểm M và N tương ứng là chân các đường cao hạ từ B và C. Kí hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN, và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1. Tương tự, kí hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM, và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2. Chứng minh rằng các điểm X, Y và H thẳng hàng.

Bài 5. Kí hiệu $\mathbb{Q}_{>0}$ là tập hợp các số hữu tỉ dương. Cho $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn ba điều kiện sau:

(i) với mọi $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) với mọi $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, ta có $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) tồn tại số hữu tỉ $a > 1$ sao cho $f(a) = a$.

Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Bài 6. Cho số nguyên $n \geq 3$. Xét một đường tròn và lấy $n + 1$ điểm nằm cách đều nhau trên đường tròn đó. Xét tất cả các cách ghi các số $0, 1, \dots, n$ lên các điểm đã lấy sao cho trong mỗi cách ghi, tại mỗi điểm được ghi một số và mỗi số được ghi đúng một lần. Hai cách ghi được coi là như nhau nếu cách ghi này có thể nhận được từ cách ghi kia nhờ một phép quay quanh tâm đường tròn. Một cách ghi được gọi là *đẹp* nếu với bốn số tùy ý $a < b < c < d$ mà $a + d = b + c$, dây cung nối hai điểm được ghi a và d không cắt dây cung nối hai điểm được ghi b và c.

Kí hiệu M là số các cách ghi đẹp và kí hiệu N là số các cặp có thứ tự (x, y) các số tự nhiên thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x + y \leq n$ và ƯCLN$(x, y) = 1$. Chứng minh rằng

$$M = N + 1.$$

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm.