E hënë, 18 korrik, 2011

Problem 1. Për çdo bashkësi $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ me katër numra të plotë pozitivë të ndryshëm, shënojmë me s_A shumën $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ dhe me n_A numrin e çifteve (i, j), ku $1 \leq i < j \leq 4$, për të cilat $a_i + a_j$ plotpjesëton s_A. Gjeni të gjitha bashkësitë e tilla A për të cilat n_A merr vlerën më të madhe të mundshme.

Problem 2. Le të jetë $\mathcal{S}$ një bashkësi e fundme pikash në plan që ka të paktën dy pika. Supozojmë që asnjë treshe pikash nga $\mathcal{S}$ nuk ndodhet mbi një drejtëz. Me *mulli ere* do të kuptojmë procesin që vijon: fillimisht merret një drejtëz ℓ e cila kalon nga një pikë e vetme $P \in \mathcal{S}$; drejtëza ℓ rrotullohet në kahun e lëvizjes së akrepave të orës me qendër rrotullimi pikën P derisa ajo të takojë për herë të parë një pikë tjetër Q nga $\mathcal{S}$; pika Q bëhet qendra e re e rrotullimit; drejtëza vazhdon rrotullimin tani me qendër në Q në kahun e lëvizjes së akrepave të orës derisa takon një pikë tjetër të $\mathcal{S}$; ky proces vazhdon pafundësisht. Tregoni që mund të zgjedhim një pikë P nga $\mathcal{S}$ dhe një drejtëz ℓ që kalon nga pika P, në mënyrë që mulliri i erës që fillon me drejtëzën ℓ, të përdorë si qendër rrotullimi çdo pikë të $\mathcal{S}$, një pafundësi herësh.

Problem 3. Le të jetë $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, një funksion me vlera reale i përcaktuar në bashkësinë e numrave realë që plotëson kushtin

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

për të gjithë numrat realë x dhe y. Provoni që $f(x) = 0$ për të gjithë $x \leq 0$.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë

E martë, 19 korrik, 2011

Problem 4. Le të jetë $n > 0$ një numër i plotë. Kemi një peshore me dy anë dhe n pesha me masa, përkatësisht, $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vendosim në peshore, një nga një, të gjitha n peshat, në mënyrë të tillë që ana e djathtë të mos jetë asnjëherë më e rëndë se ana e majtë e peshores. Në çdo hap, zgjedhim njërën nga peshat që nuk është vendosur ende në peshore dhe e vendosim atë ose në anën e majtë ose në anën e djathtë, derisa të gjitha peshat të jenë vendosur në peshore. Përcaktoni numrin e mënyrave me të cilat mund të bëhet kjo.

Problem 5. Le të jetë f një funksion i përcaktuar në bashkësinë e numrave të plotë dhe që merr vlera në bashkësinë e numrave të plotë pozitivë. Supozojmë që për çdo dy numra të plotë m dhe n, diferenca $f(m) - f(n)$ plotpjesëtohet nga $f(m-n)$. Provoni që, për të gjithë numrat e plotë m dhe n që plotësojnë kushtin $f(m) \leq f(n)$, numri $f(n)$ plotpjesëtohet nga $f(m)$.

Problem 6. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngushtë dhe Γ rrethi i jashtëshkruar. Le të jetë ℓ një drejtëz tangjente me Γ dhe ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c drejtëzat simetrike të ℓ në lidhje me drejtëzat, përkatësisht, BC, CA, AB. Tregoni që rrethi i jashtëshkruar trekëndëshit të përcaktuar nga drejtëzat ℓ_a, ℓ_b dhe ℓ_c është tangjent me rrethin Γ.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë