Måndag, den 9 juli 2018

Uppgift 1. Låt Γ vara den omskrivna cirkeln till en spetsvinklig triangel ABC. Punkterna D och E ligger på sträckorna AB och AC, respektive, så att $AD = AE$. Mittpunktsnormalerna till BD och CE skär de kortare bågarna AB och AC av Γ i punkterna F och G, respektive.

Visa att linjerna DE och FG är parallella eller sammanfaller.

Uppgift 2. Bestäm alla heltal $n \geq 3$ för vilka det existerar reella tal $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, sådana att $a_{n+1} = a_1$ och $a_{n+2} = a_2$, och

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

för $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uppgift 3. En *anti-Pascal triangel* är en uppställning av tal, formad som en liksidig triangel och sådan att, med undantag för talen i den nedersta raden, varje tal är den icke-negativa differensen mellan de två talen direkt under det. Till exempel är följande tabell en anti-Pascal triangel med fyra rader, som innehåller varje heltal från 1 till 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Finns det en anti-Pascal triangel med 2018 rader som innehåller varje heltal från 1 till $1+2+\cdots+2018$?

Tisdag, den 10 juli 2018

Uppgift 4. En *ort* är varje punkt (x, y) i planet sådan att x och y är båda positiva heltal mindre än eller lika med 20. Från början är var och en av de 400 orterna tom. Amy och Ben placerar i tur och ordning stenar på orter, med Amy som lägger den första stenen.

När det är Amys tur, placerar hon en ny röd sten på vilken som helst tom ort, sådan att avståndet mellan två orter med röda stenar inte är lika med $\sqrt{5}$.

När det är Bens tur, placerar han en ny blå sten på vilken som helst tom ort. (En ort med en blå sten får ligga på vilket som helst avstånd från andra upptagna orter.)

Amy och Ben avslutar så fort någon av de inte kan placera en ny sten.

Bestäm det största talet K, sådant att Amy med säkerhet kan lägga K röda stenar, oberoende av hur Ben lägger sina blå stenar.

Uppgift 5. Låt $a_1, a_2, \dots$ vara en oändlig följd av positiva heltal. Antag att det finns ett heltal $N > 1$ sådant att, för alla $n \geq N$, talet

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

är ett heltal. Visa att det finns ett positivt heltal M sådant att $a_m = a_{m+1}$ för alla $m \geq M$.

Uppgift 6. En konvex fyrhörning $ABCD$ uppfyller $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. En punkt X ligger i det inre av $ABCD$ på så sätt att

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{och} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Visa att $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.