*понеделник, 19. јули 2021*

**Задача 1.** Нека $n \geqslant 100$ е цел број. Иван ги запишал броевите $n, n+1, \ldots, 2n$ секој на различна карта. Потоа ги измешал овие $n+1$ карти и ги поделил во две купчиња. Докажи дека барем во едно од овие две купчиња постојат две карти такви што збирот на нивните броеви е полн квадрат.

**Задача 2.** Докажи дека неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

важи за секои реални броеви $x_1, \ldots, x_n$.

**Задача 3.** Нека $D$ е внатрешна точка во остроаголен триагонлик $ABC$ за кој $AB > AC$, така што $\angle DAB = \angle CAD$. За точката $E$ на отсечката $AC$ важи $\angle ADE = \angle BCD$, за точката $F$ на отсечката $AB$ важи $\angle FDA = \angle DBC$ и за точката $X$ на правата $AC$ важи $CX = BX$. Нека $O_1$ и $O_2$ се центрите на опишаните кружници на триаголниците $ADC$ и $EXD$, соодветно. Докажи дека правите $BC$, $EF$ и $O_1O_2$ се сечат во една точка.



*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*
*За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.*

*вторник, 20. јули 2021*

**Задача 4.** Нека $\Gamma$ е кружница со центар $I$ и $ABCD$ е конвексен четириаголник така што секоја од отсечките $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ е тангента на $\Gamma$. Нека $\Omega$ е опишаната кружница околу триаголникот $AIC$. Продолжението на $BA$ преку $A$ ја сече $\Omega$ во точката $X$ и продолжението на $BC$ преку $C$ ја сече $\Omega$ во точката $Z$. Продолженијата на $AD$ и $CD$ преку $D$ ја сечат $\Omega$ во точките $Y$ и $T$, соодветно. Докажи дека

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**Задача 5.** Две верверички, Бушавко и Скокалко, собрале 2021 ореви за зимата. Скокалко ги нумерирал оревите од 1 до 2021 и ископал 2021 дупчиња наредени во кружна форма околу неговото омилено дрво. Следното утро Скокалко забележал дека Бушавко ставил по еден орев во секое дупче, но не внимавал на нумерирањето. Незадоволен од тоа, Скокалко одлучил да ги пререди оревите со помош на низа од 2021 чекори така што во $k$-тиот чекор, Скокалко ги заменува позициите на двата ореви соседни до оревот нумериран со $k$. Докажи дека постои $k$ така што во $k$-тиот чекор, Скокалко заменува некои ореви нумерирани со $a$ и $b$ за кои $a < k < b$.

**Задача 6.** Нека $m \geqslant 2$ е цел број, $A$ е конечно множество од цели броеви (кои не мора да бидат позитивни) и $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ се подмножества од $A$. Да претпоставиме дека за секој $k = 1, 2, \ldots, m$ збирот на елементите од $B_k$ е $m^k$. Докажи дека $A$ содржи барем $m/2$ елементи.

*Language: Macedonian* *Време за работа: 4 часа и 30 минути.*
*За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.*