

الثلاثاء، 15. جويه 2025

مسألة 1. نقول عن مستقيم من المستوى أنه شمسي إذا كان لا يوازي أيا من محور الفواصل، محور التراتيب، و المستقيم ذي المعادلة $x + y = 0$

ليكن $3 \geq n$ عددا طبيعيا معطى. حدد كل الأعداد الطبيعية k بحيث يوجد n مستقيما مختلفا من المستوى تتحقق الشرطين التاليين :

- من أجل كل عددين طبيعيين غير معروفين a و b حيث $n+1 \leq a+b$ ، النقطة التي احداثياتها (a, b) تقع على أحد المستقيمات على الأقل؛ و
- يوجد من بينها بالضبط k مستقيما شمسيا.

مسألة 2. لتكن Ω و Γ دائرتين مركبتاهما M و N ، على الترتيب، بحيث نصف قطر الدائرة Ω أصغر تماما من نصف قطر الدائرة Γ .
نفرض أن Ω و Γ نتقاطعان في نقطتين متمايزتين A و B . المستقيم (MN) يقطع Ω في C و Γ في D ، بحيث النقط D, N, M, C ، موجودة عليه بهذا الترتيب. لتكن النقطة P مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD . المستقيم (AP) يقطع Ω ثانية في $E \neq A$. المستقيم (AP) يقطع Γ ثانية في $F \neq A$. لتكن H نقطة تلاقى ارتفاعات المثلث PMN .

أثبت أن المستقيم الذي يشمل H و يوازي (AP) يمس الدائرة المحيطة بالمثلث BEF .

مسألة 3. لتكن \mathbb{N}^* مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة. نقول عن دالة $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ أنها متازة إذا كانت العلاقة

$$f(a) - b^a \equiv f(b)^{f(a)} \pmod{b}$$

من أجل كل عددين طبيعيين غير معروفين a و b .

أوجد أصغر ثابت حقيقي c بحيث $f(n) \leq cn$ من أجل كل دالة متازة f وكل عدد طبيعي غير معروف n .

الأربعاء، 16. جويه 2025

مسألة 4. قاسم تام لعدد طبيعي m هو قاسم موجب لـ m يختلف عن m نفسه.
 نلخص ... a_1, a_2, \dots, a_n متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية غير المعدومة، لكل حد منها على الأقل ثلاثة قواسم تامة. من أجل كل عدد طبيعي $1 \leq n$ ، العدد الطبيعي a_{n+1} هو مجموع الثلاثة قواسم التامة الكبرى لـ a_n .
 أوجد كل القيم الممكنة لـ a_1 .

مسألة 5. إلياس و ياسين يلعبان لعبة المتكاولة، وهي لعبة ثنائية تعتمد على عدد حقيقي موجب تماماً λ معروف عند اللاعبين. في الدور رقم n للعبة (بداء بـ $1 = n$)، يكون ما يلي:

- إذا كان n عدداً فردياً، يختار إلياس عدداً حقيقياً موجباً x_n حيث

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- إذا كان n زوجياً، يختار ياسين عدداً حقيقياً موجباً x_n حيث

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

إذا كان أحد اللاعبين لا يستطيع اللعب في دوره، تنتهي اللعبة ويفوز اللاعب الآخر. إذا استمرت اللعبة إلى الأبد، لا يفوز أي من اللاعبين. كل الأعداد المختارة x_n معروفة لدى اللاعبين.

حدد كل قيمة λ التي من أجلها يمكن لإلياس استراتيجية للفوز كل قيمة التي من أجلها يمكن لyasin استراتيجية للفوز.

مسألة 6. تعتبر شبكة 2025×2025 من مربعات وحدة. تريد ليان وضع بلاطات مستطيلة على الشبكة، يمكن أن تكون أبعادها مختلفة، حيث كل ضلع لكل بلاطة يقع على خط من خطوط الشبكة و كل مربع مغطى على الأكثر بلاطة واحدة.
 أوجد أصغر عدد ممكن من البلاطات التي تحتاج ليان وضعها على الشبكة حتى يبقى بالضبط في كل صف وفي كل عمود من الشبكة مربع واحد غير مغطى بأي بلاطة.