12. juli 2006.

Zadatak 1. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC. U unutrašnjosti trougla ABC data je tačka P takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka P podudara sa tačkom I.

Zadatak 2. Neka je P pravilan poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona P kažemo da je *dobra* ako njene krajnje tačke dijele rub od P na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona P. Za stranice poligona P takođe kažemo da su *dobre*.

Posmatramo podjele poligona P na trouglove pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku tačku u unutrašnjosti poligona P. Odrediti maksimalni broj jednakokrakih trouglova sa dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

Zadatak 3. Odrediti najmanji realan broj M takav da nejednakost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve a, b i c.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

13. juli 2006.

Zadatak 4. Naći sve parove (x, y) cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 .$$

Zadatak 5. Neka je $P(x)$ polinom stepena n $(n>1)$ sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Posmatrajmo polinom

$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokazati da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t)=t$.

Zadatak 6. Svakoj stranici b konveksnog poligona P pridružena je maksimalna površina trougla kojem je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu P. Dokazati da je zbir svih površina pridruženih stranicama poligona P veći ili jednak od dvostruke površine poligona P.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova