Bosnian version

Prvi dan
srijeda, 25. juli 2007.

Problem 1. Neka su dati realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za svako i $(1 \leq i \leq n)$ stavimo

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Neka je

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokaži da za proizvoljne realne brojeve $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ vrijedi

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Dokaži da postoje realni brojevi $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ takvi da u $(*)$ imamo jednakost.

Problem 2. Posmatrajmo pet tačaka A, B, C, D i E takvih da je $ABCD$ paralelogram, a $BCED$ tetivni četvorougao. Neka prava ℓ prolazi kroz tačku A, siječe duž DC u unutrašnjoj tačci F i pravu BC u G. Pretpostavimo da je $EF = EG = EC$. Dokaži da je ℓ simetrala ugla DAB.

Problem 3. Na matematičkom takmičenju, neki takmičari su prijatelji. Prijateljstvo je uvijek uzajamno. Grupu takmičara ćemo nazvati *družina* ako su svaka dva među njima prijatelji. (Specijalno, grupa od manje od dva takmičara je takođe družina.) Broj članova družine zvaćemo njenom *veličinom.*

Poznato je da je maksimalna veličina družine na tom takmičenju paran broj. Dokaži da se takmičare može smjestiti u dvije prostorije tako da maksimalna veličina družinâ u jednoj prostoriji bude jednaka maksimalnoj veličini družinâ u drugoj.

Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem nosi 7 bodova.

Bosnian version

Drugi dan
četvrtak, 26. juli 2007.

Problem 4. U trouglu ABC simetrala ugla BCA presijeca opisanu kružnicu trougla u tačci R, simetralu strane BC u tačci P, a simetralu strane AC u tačci Q. Neka je K sredina strane BC, a L sredina strane AC. Dokaži da trouglovi RPK i RQL imaju jednaku površinu.

Problem 5. Neka su a i b pozitivni cijeli brojevi takvi da je broj $(4a^2-1)^2$ djeljiv sa $4ab-1$. Dokaži da je $a=b$.

Problem 6. Neka je n pozitivan cio broj. Posmatrajmo

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x+y+z > 0\}$$

kao skup od $(n+1)^3-1$ tačaka u trodimenzionalnom prostoru. Odredi najmanji mogući broj ravni čija unija sadrži sve tačke skupa S, a ne sadrži tačku $(0,0,0)$.

Dozvoljeno vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem nosi 7 bodova.