German version

Erster Tag
25. Juli 2007

Aufgabe 1. Gegeben seien eine positive ganze Zahl n und reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ sei

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

und sei

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Man beweise für beliebige reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{$*$}$$

(b) Man beweise, dass es reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ gibt, die Gleichheit in $(*)$ liefern.

Aufgabe 2. Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D und E, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist und $BCED$ ein konvexes Sehnenviereck. Sei ℓ eine Gerade durch A, welche die Strecke $\overline{DC}$ im inneren Punkt F und die Gerade BC in G schneidet. Ferner gelte $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$.
Man beweise, dass ℓ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle DAB$ ist.

Aufgabe 3. In einem mathematischen Wettbewerb sind einige Teilnehmende miteinander befreundet. Freundschaft beruhe auf Gegenseitigkeit. Eine Gruppe von Teilnehmenden heiße *Clique*, wenn je zwei von ihnen befreundet sind. (Insbesondere ist jede Gruppe von weniger als zwei Teilnehmenden eine Clique.) Die *Größe* einer Clique ist die Anzahl ihrer Mitglieder. Die maximale Größe einer Clique in diesem Wettbewerb sei gerade.
Man beweise, dass die Teilnehmenden so auf zwei Räume aufgeteilt werden können, dass die maximale Größe einer Clique in einem Raum gleich der maximalen Größe einer Clique im anderen Raum ist.

Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

German version

Zweiter Tag
26. Juli 2007

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BCA$ schneidet den Umkreis im Punkt R ($R \neq C$), die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{BC}$ im Punkt P und die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$ im Punkt Q. Der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ sei K und der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sei L.
Man beweise, dass die Dreiecke RPK und RQL den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 5. Es seien a und b positive ganze Zahlen.
Man beweise: Wenn $4ab - 1$ ein Teiler von $(4a^2 - 1)^2$ ist, so gilt $a = b$.

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Gegeben sei

$$S = \Big\{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\Big\},$$

eine Menge von $(n + 1)^3 - 1$ Punkten des drei-dimensionalen Raumes.
Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen, deren Vereinigung die Menge S umfasst, aber nicht den Punkt $(0, 0, 0)$.

Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.