

Reede, 10. juuli, 2015

**Ülesanne 1.** Ütleme, et lõplik tasandi punktide hulk  $\mathcal{S}$  on *tasakaalus*, kui iga hulga  $\mathcal{S}$  kahe erineva punkti  $A$  ja  $B$  korral leidub selline hulga  $\mathcal{S}$  punkt  $C$ , et  $AC = BC$ . Ütleme, et hulk  $\mathcal{S}$  on *keskpunktideta*, kui hulga  $\mathcal{S}$  mitte mingi kolme erineva punkti  $A$ ,  $B$  ja  $C$  korral ei leidu sellist hulga  $\mathcal{S}$  punkti  $P$ , mille korral  $PA = PB = PC$ .

- (a) Näidata, et iga täisarvu  $n \geq 3$  korral leidub  $n$  punktist koosnev tasakaalus hulk.
- (b) Leida kõik sellised täisarvud  $n \geq 3$ , mille korral leidub  $n$  punktist koosnev keskpunktideta tasakaalus hulk.

**Ülesanne 2.** Leida kõik positiivsete täisarvude kolmikud  $(a, b, c)$ , mille korral arvud

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

on kahe astmed.

(Kahe aste on täisarv kujul  $2^n$ , kus  $n$  on mittenegatiivne täisarv.)

**Ülesanne 3.** Olgu  $ABC$  teravnurkne kolmnurk, kus  $AB > AC$ . Olgu selle kolmnurga ümberringjoon  $\Gamma$ , tema kõrguste lõikepunkt  $H$  ning punktist  $A$  tõmmatud kõrguse aluspunkt  $F$ . Olgu külje  $BC$  keskpunkt  $M$ . Olgu  $Q$  selline punkt ringjoonel  $\Gamma$ , et  $\angle HQA = 90^\circ$ , ja olgu  $K$  selline punkt ringjoonel  $\Gamma$ , et  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Eeldame, et  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  ja  $Q$  on kõik erinevad ja paiknevad ringjoonel  $\Gamma$  täpselt selles järjekorras.

Näidata, et kolmnurkade  $KQH$  ja  $FKM$  ümberringjooned puutuvad teineteist.

*Laupäev, 11. juuli 2015*

**Ülesanne 4.** Kolmnurga  $ABC$  ümberringjoon on  $\Omega$  keskpunktiga  $O$ . Ringjoon  $\Gamma$  keskpunktiga  $A$  lõikub küljega  $BC$  punktides  $D$  ja  $E$ , nii et punktid  $B, D, E$  and  $C$  on kõik erinevad ja asuvad sirgel  $BC$  selles järjekorras. Olgu  $F$  ja  $G$  ringjoonte  $\Gamma$  ja  $\Omega$  lõikepunktid, nii et  $A, F, B, C$  ja  $G$  asuvad ringjoonel  $\Omega$  selles järjekorras. Olgu  $K$  kolmnurga  $BDF$  ümberringjoone ja lõigu  $AB$  teine lõikepunkt. Olgu  $L$  kolmnurga  $CGE$  ümberringjoone ja lõigu  $CA$  teine lõikepunkt.

Eeldame, et sirged  $FK$  ja  $GL$  on erinevad ja lõikuvad punktis  $X$ . Näidata, et  $X$  asub sirgel  $AO$ .

**Ülesanne 5.** Olgu  $\mathbb{R}$  kõigi reaalarvude hulk. Leida kõik funktsioonid  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mis rahuldavad võrrandit

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

kõigi reaalarvude  $x$  ja  $y$  korral.

**Ülesanne 6.** Täisarvude jada  $a_1, a_2, \dots$  rahuldab järgmisi tingimusi:

- (i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  kõigi  $j \geq 1$  korral;
- (ii)  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  kõigi  $1 \leq k < \ell$  korral.

Näidata, et leiduvad positiivsed täisarvud  $b$  ja  $N$  nii, et

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

kõigi täisarvude  $m$  ja  $n$  korral, mis rahuldavad võrratust  $n > m \geq N$ .