2011년 7월 18일, 월요일

문제 1. 네 개의 서로 다른 양의 정수들의 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 에 대하여 $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 라 하고, n_A 를 $a_i + a_j$ 가 s_A 의 약수가 되는 쌍 (i, j) (단, $1 \le i < j \le 4$) 의 개수라 하자. 네 개의 서로 다른 양의 정수로 이루어진 집합들 중에서 어떠한 집합들 A 에 대하여 n_A 가 최대가 되는가?

문제 2. 평면 위의 두 개 이상의 유한 개의 점으로 이루어진 집합 $\mathcal{S}$ 가 있다. 이 집합의 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않다. *풍차*란 다음과 같은 과정을 의미한다: $\mathcal{S}$ 중의 단 한 점 P 를 지나는 직선 ℓ 로부터 시작하여, P 를 회전의 *중심*으로 하여 ℓ 을 시계방향으로 회전시키다가 이 직선이 처음으로 $\mathcal{S}$ 에 속하는 다른 점 Q 를 만나면, 다시 Q 를 새로운 회전중심으로 하여 시계방향으로 회전을 계속 진행한다. 이러한 진행을 $\mathcal{S}$ 의 점들을 회전중심으로 하여 무한 번 계속한다.

적당한 $P \in \mathcal{S}$ 와 이 점을 지나는 적당한 직선에서 시작된 풍차가 $\mathcal{S}$ 의 각 점들을 회전중심으로 무한히 여러번 사용하게 됨을 보여라.

문제 3. 실수의 집합에서 실수의 집합으로 가는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 다음 조건을 만족한다: 모든 실수 x, y 에 대하여 부등식

$$f(x + y) \le y f(x) + f(f(x))$$

가 성립한다. 모든 $x \le 0$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 임을 보여라.

제한시간: 4 시간 30 분

문항 당 7점

2011 년 7월 19일, 화요일

문제 4. 양의 정수 n 이 주어져 있다. 천칭 저울 하나와 무게가 각각 $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ 인 n 개의 분동이 있다. n 번의 시행을 통해 모든 분동을 저울 위에 올려 놓는다. 첫번째 시행에서는 한 분동을 고른 후 왼쪽 접시에 올려 놓는다. 그 다음 시행부터는 각 시행마다 하나의 분동을 고른 후 왼쪽 접시에 놓을지 오른쪽 접시에 놓을 지 선택한다. 오른쪽 접시의 무게가 왼쪽 접시의 무게보다 더 무겁지 않도록 하며 n 번의 시행을 하는 방법의 총 개수를 구하여라.

문제 5. 모든 정수의 집합에서 양의 정수의 집합으로 가는 함수 f 가 있다. 임의의 정수 m, n 에 대하여 $f(m-n)$ 이 $f(m)-f(n)$ 를 나눈다고 한다. $f(m) \leq f(n)$ 을 만족하는 임의의 정수 m, n 에 대하여 $f(m)$ 이 $f(n)$ 의 약수임을 보여라

문제 6. 예각삼각형 ABC 의 외접원 Γ 에 접하는 어떤 직선 ℓ 이 있다. 세 직선 ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c 는 직선 ℓ 을 세 직선 BC, CA, AB 에 대하여 각각 대칭이동하여 얻은 직선이다. 세 직선 ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c 에 의해 결정되는 삼각형의 외접원이 원 Γ 에 접함을 보여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문항 당 7 점