Esmaspäev, 11. juuli 2022

Ülesanne 1. Oslo Pank annab välja kahte tüüpi münte: alumiiniumist (tähistatud A-ga) ning pronksist (tähistatud B-ga). Mariannel on n alumiiniumist münti ning n pronksist münti, mis on paigutatud ritta mingis suvalises algses järjestuses. *Järjendiks* nimetame müntide alamjada, mis koosneb sama tüüpi järjestikustest müntidest. Antud on fikseeritud positiivne täisarv $k \leqslant 2n$. Marianne teostab korduvalt järgnevat operatsiooni: ta teeb kindlaks pikima järjendi, mis sisaldab vasakult k-ndat münti, ning liigutab selle järjendi kõik mündid rea vasakpoolsesse otsa. Näiteks kui $n = 4$ ja $k = 4$, siis protsess, mis algab järjestusega $AABBBABA$, oleks

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Leia kõik sellised paarid (n, k), kus $1 \leqslant k \leqslant 2n$, et iga algse järjestuse korral tekib protsessi käigus hetk, kus n vasakpoolset münti on kõik sama tüüpi.

Ülesanne 2. Olgu $\mathbb{R}^+$ positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, nii et iga $x \in \mathbb{R}^+$ jaoks leidub täpselt üks selline $y \in \mathbb{R}^+$, et

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Ülesanne 3. Olgu k positiivne täisarv ja olgu S lõplik hulk paarituid algarve. Tõesta, et leidub maksimaalselt üks viis (pöördeid ja peegeldusi arvestamata) paigutada kõik S elemendid ringjoonele selliselt, et mistahes kahe naaberarvu korrutis on kujul $x^2 + x + k$, kus x on mingi positiivne täisarv.

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.

Teisipäev, 12. juuli 2022

Ülesanne 4. Olgu $ABCDE$ kumer viisnurk, milles $|BC| = |DE|$. Viisnurga $ABCDE$ sees leidub selline punkt T, et $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ ning $\angle ABT = \angle TEA$. Sirge AB lõikab sirgeid CD ja CT vastavalt punktides P ja Q, kusjuures punktid P, B, A, Q asuvad sirgel selles järjekorras. Sirge AE lõikab sirgeid CD ja DT vastavalt punktides R ja S, kusjuures punktid R, E, A, S asuvad sirgel selles järjekorras. Tõesta, et punktid P, S, Q, R asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 5. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, p), kus p on algarv ning

$$a^p = b! + p.$$

Ülesanne 6. Olgu n positiivne täisarv. *Põhjaruuduks* nimetame $n \times n$ ruudustikku, mis sisaldab kõiki täisarve 1 kuni n^2, kusjuures igas ruudus paikneb täpselt üks arv. Kaks erinevat ruutu on *naabrid*, kui neil on ühine serv. Ruutu, mille kõigis naabrites paikneb temast suurem arv, nimetame *oruks*. *Mägirada* on ühest või enamast ruudust koosnev jada, mille korral:

(i) jada esimene liige on org,

(ii) jada iga järgnev liige on eelmise liikme naaber ning

(iii) jada ruutudesse kirjutatud arvud on kasvavas järjestuses.

Iga n jaoks leia vähim võimalik mägiradade arv põhjaruudus.

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.