

Sabtu, 8. Juli 2023

Soal 1. Tentukan semua bilangan bulat komposit $n > 1$ yang memenuhi sifat berikut: jika d_1, d_2, \dots, d_k adalah semua pembagi positif dari n dengan $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, maka d_i membagi $d_{i+1} + d_{i+2}$ untuk setiap $1 \leq i \leq k - 2$.

Soal 2. Misalkan ABC sebuah segitiga lancip dengan $AB < AC$. Misalkan Ω adalah lingkaran luar dari ABC . Misalkan S titik tengah dari busur CB pada Ω yang mengandung A . Garis tegak lurus terhadap BC yang melalui A memotong BS di D dan memotong Ω lagi di $E \neq A$. Garis yang melalui D dan sejajar terhadap BC memotong garis BE di L . Nyatakan lingkaran luar segitiga BDL dengan ω . Misalkan ω memotong Ω lagi di $P \neq B$.

Buktikan bahwa garis singgung dari ω di P berpotongan dengan garis BS di suatu titik yang terletak pada garis bagi dalam $\angle BAC$.

Soal 3. Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 2$, tentukan semua barisan bilangan bulat positif a_1, a_2, \dots sedemikian sehingga terdapat polinom P berbentuk $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, dengan c_0, c_1, \dots, c_{k-1} bilangan bulat tak-negatif, sehingga

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$.

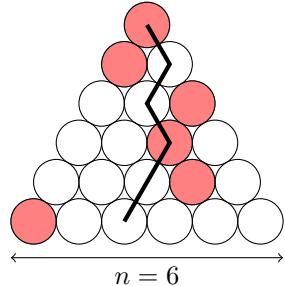
Minggu, 9. Juli 2023

Soal 4. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ bilangan real positif yang semuanya berbeda yang membuat

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

bilangan bulat untuk setiap $n = 1, 2, \dots, 2023$. Buktikan bahwa $a_{2023} \geq 3034$.

Soal 5. Misalkan n suatu bilangan bulat positif. Suatu *segitiga Jepang* terdiri dari $1 + 2 + \dots + n$ buah lingkaran yang disusun ke dalam bentuk segitiga sama sisi sehingga untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, baris ke- i tepat mengandung i lingkaran, dengan tepat satu diantaranya berwarna merah. Suatu *lintasan ninja* pada segitiga Jepang adalah barisan yang terdiri dari n lingkaran yang diperoleh mulai dari baris paling atas, kemudian bergerak dari satu lingkaran ke salah satu dari dua lingkaran yang berada tepat di bawahnya, berulang-ulang, sampai berakhir di baris paling bawah. Berikut adalah contoh segitiga Jepang dengan $n = 6$, beserta sebuah lintasan ninja yang mengandung dua lingkaran merah.



Tentukan bilangan k terbesar, dinyatakan dalam n , sehingga pada setiap segitiga Jepang terdapat suatu lintasan ninja yang sedikitnya mengandung k lingkaran merah.

Soal 6. Misalkan ABC suatu segitiga sama sisi. Misalkan A_1, B_1, C_1 titik-titik interior segitiga ABC sehingga $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, dan

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Misalkan BC_1 dan CB_1 berpotongan di A_2 , misalkan CA_1 dan AC_1 berpotongan di B_2 , and misalkan AB_1 dan BA_1 berpotongan di C_2 .

Buktikan bahwa jika $A_1B_1C_1$ segitiga beda sisi, maka ketiga lingkaran luar segitiga AA_1A_2 , BB_1B_2 dan CC_1C_2 semuanya melalui dua titik persekutuan.

(Catatan: segitiga beda sisi adalah segitiga yang semua panjang sisinya berbeda.)