

IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Serbian (BIH) (srb), day 1

уторак, 16. јули 2024

**Задатак 1.** Одредити све реалне бројеве  $\alpha$  такве да за сваки природан број  $n$  вриједи да је цијели број

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

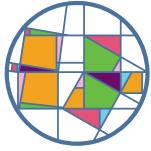
дјељив са  $n$ . (При томе  $\lfloor z \rfloor$  означава највећи цијели број мањи или једнак  $z$ . На примјер,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  и  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**Задатак 2.** Одредити све парове  $(a, b)$  природних бројева за које постоје природни бројеви  $g$  и  $N$  такви да вриједи

$$NZD(a^n + b, b^n + a) = g$$

за све цијеле бројеве  $n \geq N$ . (При томе  $NZD(x, y)$  означава највећи заједнички дјелиоц бројева  $x$  и  $y$ .)

**Задатак 3.** Нека је  $a_1, a_2, a_3, \dots$  бесконачан низ природних бројева и нека је  $N$  природан број. Претпоставимо да за свако  $n > N$  вриједи да је  $a_n$  једнак броју појављивања броја  $a_{n-1}$  у низу  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Доказати да је бар један од низова  $a_1, a_3, a_5, \dots$  и  $a_2, a_4, a_6, \dots$  евентуално периодичан. (Бесконачан низ  $b_1, b_2, b_3, \dots$  је *евентуално периодичан* ако постоје природни бројеви  $p$  и  $M$  такви да вриједи  $b_{m+p} = b_m$  за све  $m \geq M$ .)



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Serbian (BIH) (srб), day 2

сриједа, 17. јули 2024

**Задатак 4.** Нека је  $ABC$  троугао у којем вриједи  $AB < AC < BC$ . Означимо центар уписане кружнице и уписану кружницу троугла  $ABC$  са  $I$  и  $\omega$ , редом. Нека је  $X$  тачка на правој  $BC$  различита од  $C$  таква да је права кроз  $X$  паралелна са  $AC$  тангента на кружницу  $\omega$ . Слично, нека је  $Y$  тачка на правој  $BC$  различита од  $B$  таква да је права кроз  $Y$  паралелна са  $AB$  тангента на кружницу  $\omega$ . Права  $AI$  сијече описану кружницу троугла  $ABC$  поново у  $P \neq A$ . Нека су  $K$  и  $L$  средине страница  $AC$  и  $AB$ , редом. Доказати да вриједи  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**Задатак 5.** Пуж Турбо игра игру на плочи са 2024 редова и 2023 колона. У 2022 поља плоче налазе се скривена чудовишта. На почетку, Турбо не зна где се чудовишта налазе, али зна да постоји тачно једно чудовиште у сваком реду плоче осим у првом и задњем реду те да свака колона садржи највише једно чудовиште.

Турбо прави низ покушаја да дође из првог у задњи ред. У сваком покушају, бира у којем пољу у првом реду ће почети, а онда се редом помјера у било које сусједно поље које има заједничку страницу с тренутним пољем на којем се налази. (Дозвољено му је да се врати у поље које је некада прије посјетио.) Ако дође у поље у којем се налази чудовиште, његов покушај се завршава и он се враћа у први ред плоче да започне нови покушај. Чудовишта се не помјерају и Турбо памти за свако поље које је посјетио садржи ли чудовиште или не. Ако Турбо дође у било које поље у задњем реду, његов покушај се завршава и то означава крај игре.

Одредити најмању вриједност броја  $n$  за коју Турбо има стратегију која му гарантује да у  $n$  или мање покушаја дође до задњег реда плоче, неовисно од позиција чудовишта.

**Задатак 6.** Нека је  $\mathbb{Q}$  скуп рационалних бројева. Функцију  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  називамо *лијепом* ако вриједи следеће: за све  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{или} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Доказати да постоји цијели број  $c$  такав да за било коју лијепу функцију  $f$  постоји највише  $c$  различитих рационалних бројева који се могу записати као  $f(r) + f(-r)$  за неки рационалан број  $r$ , и одредити најмању могућу вриједност броја  $c$ .