53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Georgian**

Day: **1**

*სამშაბათი, 10 ივლისი, 2012 წელი*

**ამოცანა 1.** მოცემულია სამკუთხედი $ABC$. $J$ არის $A$ წვეროს შესაბამისი გარეჩახაზული წრეწირის ცენტრი. ეს წრეწირი ეხება $BC$ გვერდს $M$ წრტილში, ხოლო $AB$ და $AC$ წრფეებს შესაბამისად $K$ და $L$ წერტილებში. $LM$ და $BJ$ წრფეები იკვეთება $F$ წერტილში, ხოლო $KM$ და $CJ$ წრფეები იკვეთება $G$ წერტილში. ვთქვათ $S$ არის $AF$ და $BC$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო $T$ არის $AG$ და $BC$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი.

დაამტკიცეთ, რომ $M$ არის $ST$ მონაკვეთის შუაწერტილი.

($ABC$ სამკუთხედში, $A$ წვეროს შესაბამისი გარეჩახაზული წრეწირი ეწოდება ისეთ წრეწირს, რომელიც ეხება $BC$ გვერდს და ასევე ეხება $AB$ და $AC$ გვერდების გაგრძელებებს.)

**ამოცანა 2.** მოცემულია მთელი რიცხვი $n \geq 3$ და ნამდვილი დადებითი რიცხვები $a_2, ..., a_n$, ისეთი, რომ $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**ამოცანა 3.** ორი მოთამაშე $A$ და $B$ თამაშობს თამაშს *გამოიცანი მატყუარას მიერ ჩაფიქრებული რიცხვი*. ამ თამაშის წესები დამოკიდებულია ორ დადებით მთელ $k$ და $n$ რიცხვზე. ეს რიცხვები თამაშის დაწყებამდე ორივე მოთამაშისთვის ცნობილია.

თამაშის დასაწყისში $A$ ირჩევს მთელ $x$ და $N$ რიცხვებს ისე, რომ $1 \leq x \leq N$, ამასთან იგი $x$ რიცხვს ინახავს საიდუმლოდ, ხოლო რიცხვი $N$ ვალდებულია უთხრას $B$-ს. ამის შემდეგ $B$ ცდილობს მიიღოს ინფორმაცია $x$ რიცხვის შესახებ. იგი უსვამს $A$-ს შემდეგი ტიპის კითხვებს: თითო კითხვაში $B$ უთითებს თავის შეხედულებისამებრ $S$ სიმრავლეს, რომელიც შედგება მთელი დადებითი რიცხვებისაგან (შესაძლოა ეს სიმრავლე უკვე მითითებული იყო რომელიმე ადრე დასმულ კითხვაში) და ეკითხება $A$-ს, ეკუთვნის $x$ რიცხვი $S$ სიმრავლეს? $B$ მოთამაშეს შეუძლია დასვას იმდენი კითხვა რამდენიც მას სურს. $B$-ს ყოველ კითხვაზე $A$ მოთამაშემ მაშინვე უნდა უპასუხოს *კი* ან *არა*, ამასთან $A$-ს შეუძლია მოიტყუოს იმდენჯერ რამდენჯერაც მას სურს. ერთადერთი შეზღუდვა რაც
$A$-ს გააჩნია არის ის, რომ ნებისმიერ $k+1$ ცალ ზედიზედ გაცემულ პასუხში, აუცილებლად ერთი პასუხი მაინც უნდა იყოს ჭეშმარიტი.

იმის შემდეგ, რაც $B$ დაუსვამს $A$-ს იმდენ კითხვას, რამდენსაც ჩათვლის საჭიროდ, $B$-მ უნდა დაასახელოს სიმრავლე $X$, რომელიც შედგება არაუმეტეს $n$ ცალი მთელი დადებითი რიცხვისაგან. თუ $x$ ეკუთვნის $X$ სიმრავლეს, მაშინ მოთამაშე $B$ მოგებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში წაგებული. დაამტკიცეთ, რომ

1. თუ $n \geq 2^k$, მაშინ $B$ მოთამაშეს შეუძლია მოგების გარანტირება.

2. ყოველი საკმარისად დიდი $k$-თვის, არსებობს მთელი რიცხვი $n \geq 1,99^k$ ისეთი, რომ $B$ ვერ შეძლებს მოგების გარანტირებას.

*language: Georgian* *სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*

Language: **Georgian**

Day: **2**

*ოთხშაბათი, 11 ივლისი, 2012 წელი*

**ამოცანა 4.** იპოვეთ ყველა ისეთი ფუნქცია $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, რომ ნებისმიერი მთელი $a$, $b$ და $c$ რიცხვებისათვის, რომელთათვისაც $a + b + c = 0$, სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

( $\mathbb{Z}$-ით აღნიშნულია მთელ რიცხვთა სიმრავლე.)

**ამოცანა 5.** მოცემულია $ABC$ მართკუთხა სამკუთხედი, რომელშიც $\angle BCA = 90°$. $D$ არის $C$ წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის ფუძე. $X$ არის $CD$ მონაკვეთის შიგა წერტილი. $K$ არის $AX$ მონაკვეთის ისეთი წერტილი, რომ $BK = BC$. ანალოგიურად, $L$ არის $BX$ მონაკვეთის ისეთი წერტილი, რომ $AL = AC$. ვთქვათ $M$ არის $AL$ და $BK$ მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი.

დაამტკიცეთ, რომ $MK = ML$.

**ამოცანა 6.** იპოვეთ ყველა მთელი დადებითი რიცხვი $n$, რომლისთვისაც არსებობს მთელი არაუარყოფითი რიცხვები $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ისეთი რომ

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

.

*language: Georgian* *სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ*
*თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით*