sobota, 8 lipca 2023

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone $n > 1$ o następującej własności: jeśli $d_1, d_2, \ldots, d_k$ są wszystkimi dzielnikami liczby n, przy czym $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, to d_i dzieli $d_{i+1} + d_{i+2}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na ABC. Niech S będzie środkiem tego łuku CB okręgu Ω, który zawiera punkt A. Prosta prostopadła do BC przechodząca przez A przecina prostą BS w punkcie D oraz przecina okrąg Ω ponownie w punkcie $E \neq A$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez D przecina prostą BE w punkcie L. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie BDL przez ω. Niech ω przecina Ω ponownie w punkcie $P \neq B$.
Dowieść, że styczna w punkcie P do okręgu ω przecina prostą BS w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta wewnętrznego BAC.

Zadanie 3. Dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie nieskończone ciągi dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$, dla których istnieje taki wielomian P postaci

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, że

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}$$

dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

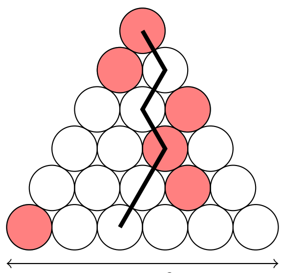
niedziela, 9 lipca 2023

Zadanie 4. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ będą takimi parami różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

jest liczbą całkowitą dla każdego $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Udowodnić, że $a_{2023} \geqslant 3034$.

Zadanie 5. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. *Trójkąt japoński* składa się z $1 + 2 + \ldots + n$ kół ustawionych w kształt trójkąta równobocznego w taki sposób, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ i-ty rząd zawiera dokładnie i kół, wśród których dokładnie jedno jest pomalowane na czerwono. *Ścieżka ninja* w japońskim trójkącie to ciąg n kół otrzymany w następujący sposób: pierwsze koło znajduje się w górnym rzędzie, każde następne koło jest jednym z dwóch kół znajdujących się bezpośrednio pod poprzednim kołem, a ostatnie koło znajduje się w dolnym rzędzie. Na rysunku przedstawiono przykładowy trójkąt japoński dla $n = 6$ oraz przykładową ścieżkę ninja w tym trójkącie, która zawiera dwa czerwone koła.



$n = 6$

Wyznaczyć, w zależności od n, największą taką liczbę całkowitą k, że w dowolnym trójkącie japońskim istnieje ścieżka ninja zawierająca co najmniej k czerwonych kół.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech A_1, B_1, C_1 będą takimi punktami wewnątrz trójkąta ABC, że $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ oraz

$$\sphericalangle BA_1C + \sphericalangle CB_1A + \sphericalangle AC_1B = 480^\circ.$$

Niech proste BC_1 i CB_1 przecinają się w punkcie A_2, proste CA_1 i AC_1 przecinają się w punkcie B_2, a proste AB_1 i BA_1 przecinają się w punkcie C_2.
Dowieść, że jeśli trójkąt $A_1B_1C_1$ jest różnoboczny, to okręgi opisane na trójkątach AA_1A_2, BB_1B_2 i CC_1C_2 przecinają się w dwóch wspólnych punktach.

(Uwaga: trójkąt różnoboczny, to trójkąt, w którym żadne dwa boki nie są równe.)

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.