الثلاثاء 18 تموز 2017

المسألة 1. لأجل كل عدد صحيح $a_0 > 1$ نعرّف المتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$ كما يلي:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{if } \sqrt{a_n} \text{ is an integer,} \\ a_n + 3 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{for each } n \geq 0.$$

أوجد جميع قيم a_0 لأجلها يوجد عدد A لأجله يكون $a_n = A$ من أجل قيم غير منتهية للعدد n.

المسألة 2. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$

و ذلك أياًكانت الأعداد الحقيقية x, y.

المسألة 3. صياد و أرنب غير مرئي يلعبان لعبة في المستوى الأقليدي. يبدأ الأرنب من النقطة A_0، و يبدأ الصياد من النقطة نفسها B_0. بعد $n-1$ جولة من اللعبة يكون الأرنب في النقطة A_{n-1} ويكون الصياد في النقطة B_{n-1}. في الجولة n من اللعبة تتحقق الأمور الثلاثة الأتية:

(i) يتحرك الأرنب بصورة غير مرئية إلى نقطة A_n، بحيث أن المسافة بين A_{n-1} و A_n تساوي 1 بالضبط.

(ii) جهاز المراقبة لدى الصياد لا يضمن له إلا أن يخبره عن نقطة P_n، بحيث المسافة بين النقطتين P_n و A_n تساوي 1 على الأكثر.

(iii) يتحرك الصياد إلى نقطة B_n، بحيث المسافة بين B_{n-1} و B_n تساوي 1 بالضبط.

بغض النظر عن كيفية حركة الأرنب وأياًكانت النقط التي يرصدها جهاز المراقبة، هل يستطيع الصياد اختيار حركاته بحيث بعد 10^9 من الجولات يمكنه التأكد من أن المسافة بينه و بين الأرنب 100 على الأكثر ؟

مدة الاختبار: 4 ساعات و 30 دقيقة

لكل مسألة 7 درجات

الأربعاء 19 تموز 2017

المسألة 4 . لتكن R و S نقطتين مختلفتين على الدائرة Ω بحيث أن RS ليس قطراً. ليكن l المستقيم المماس للدائرة Ω في النقطة R. نأخذ نقطة T بحيث تكون S منتصف القطعة المستقيمة RT. كما نأخذ نقطة J من القوس الصغرى RS من الدائرة Ω بحيث الدائرة Γ المارة برؤس المثلث JST تقطع المستقيم l في نقطتين مختلفتين. لتكن A نقطة تقاطع Γ مع المستقيم l و التي هي الأقرب من R. المستقيم AJ يقطع Ω مرة أخرى في K. أثبت أن المستقيم KT يكون مماساً للدائرة Γ.

المسألة 5 . $N \geq 2$ عدد صحيح معطى. توجد مجموعة تحوي $N(N+1)$ من لاعبي كرة القدم بحيث أن أطوالهم مختلفة و يقفون في صف واحد. يريد مدربهم أن يستبعد $N(N-1)$ لاعباً من هذا الصف بحيث يبقى $2N$ منهم بحيث يتحقق N شرطاً:

(1) لا يوجد لاعب بين أطول لاعبين،

(2) لا يوجد لاعب بين اللاعبين الثالث طولاً و الرابع طولاً ،

$\vdots$

(N) لا يوجد لاعب بين أقصر لاعبين.

أثبت أن مدربهم يمكنه تحقيق ذلك.

المسألة 6 . نقول عن زوج مرتب من الأعداد الصحيحة (x, y) أنه نقطة أولية إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y يساوي 1. لتكن S مجموعة منتهية من النقط الأولية، أثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب تماماً n و أعداد صحيحة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بحيث لكل (x, y) من S يكون:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

مدة الاختبار: 4 ساعات و 30 دقيقة

لكل مسألة 7 درجات