دوشنبه، ۱۱ . ژوئیه ۲۰۲۲

مسئله‌ی ۱. بانک اسلو، دو نوع سکه آلومینیومی و برنزی تولید می‌کند که به ترتیب با A و B نمایش داده می‌شوند. مریم n سکه آلومینیومی و n سکه برنزی دارد و آن‌ها در یک ردیف به ترتیبی دل‌خواه قرار داده است. به یک زیردنباله از سکه‌های متوالی هم‌نوع، **زنجیر** گفته می‌شود. فرض کنید عدد ثابت $k \leqslant 2n$، عددی صحیح و مثبت است. مریم به صورت مکرر این عملیات را انجام می‌دهد: او طولانی‌ترین زنجیری که شامل k–امین سکه از سمت چپ است را شناسایی می‌کند، و همه سکه‌های آن زنجیر را به انتهای ردیف از سمت چپ منتقل می‌کند. برای مثال، اگر $n = 4$ و $k = 4$، و ترتیب اولیه سکه‌ها به صورت $AABBBABA$ باشد، فرآیند جابجایی سکه‌ها به این صورت است:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

تمام زوج‌های (n, k) با شرط $1 \leqslant k \leqslant 2n$ را بیابید به طوری که برای هر چینش اولیه از سکه‌ها، لحظه‌ای برسد که تمام n سکهٔ سمت چپ از یک نوع باشند.

مسئله‌ی ۲. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. تمام توابع $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}^+$، دقیقا یک $y \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد که

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

مسئله‌ی ۳. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت و S مجموعه‌ای متناهی از اعداد اول فرد است. ثابت کنید اعضای S را حداکثر به یک صورت می‌توان دور یک دایره قرار داد (با در نظر گرفتن چرخش و قرینه کردن)، به طوری که برای هر دو عدد مجاور، عددی صحیح و مثبت مانند x وجود داشته باشد که حاصل ضرب آن دو عدد برابر با $x^2 + x + k$ شود.

سه شنبه، ۱۲. ژوئیه ۲۰۲۲

مسئله‌ی ۴. فرض کنید $ABCDE$ پنج‌ضلعی محدبی است که $BC = DE$. نقطه T درون $ABCDE$ وجود دارد به طوری که $TB = TD$، $TC = TE$ و $\angle ABT = \angle TEA$. خط AB خطوط CD و CT را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کند به طوری که نقاط P، B، A و Q با همین ترتیب روی خط قرار می‌گیرند. خط AE خطوط CD و DT را به ترتیب در نقاط R و S قطع می‌کند به طوری که نقاط R، E، A و S با همین ترتیب روی خط قرار می‌گیرند.

ثابت کنید نقاط P، S، Q و R روی یک دایره قرار دارند.

مسئله‌ی ۵. تمام سه‌تایی‌های (a, b, p) از اعداد صحیح مثبت را بیابید که p اول باشد و

$$a^p = b! + p.$$

مسئله‌ی ۶. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت است. **مربع نوردیک** یک جدول $n \times n$ شامل همه اعداد صحیح از 1 تا n^2 است به طوری که هر خانه شامل دقیقا یک عدد است. به دو خانهٔ متفاوت، مجاور گفته می‌شود اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به خانه‌ای که عدد همهٔ خانه‌های مجاورش از آن بزرگتر باشند، **دره** گفته می‌شود. **مسیر سربالایی**، دنباله‌ای از یک یا تعداد بیشتری خانه است به طوری که:

(i) اولین خانه دنباله دره باشد،

(ii) هر خانه بعدی در دنباله، مجاور خانه قبلی‌اش باشد و

(iii) اعداد نوشته شده در خانه‌های دنباله به ترتیب صعودی باشند.

کمترین تعداد ممکن برای کل مسیرهای سربالایی در مربع نوردیک را به صورت تابعی از n بیابید.

Language: Persian (Farsi)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.