

Вторник, 18 юли, 2017

Задача 1. За всяко цяло число $a_0 > 1$, дефинираме редицата a_0, a_1, a_2, \dots по следното правило:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число,} \\ a_n + 3 & \text{в противен случай,} \end{cases} \quad \text{за всяко } n \geq 0.$$

Да се намерят всички стойности на a_0 , за които съществува число A такова, че $a_n = A$ за безбройно много стойности на n .

Задача 2. Нека \mathbb{R} е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива, че за всеки две реални числа x и y е изпълнено равенството

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Задача 3. Ловец и невидим заек играят в равнината следната игра. Началната точка A_0 на заека и началната точка B_0 на ловеца съвпадат. Нека след $n - 1$ рунда на играта заекът се намира в точка A_{n-1} , а ловецът се намира в точка B_{n-1} . Тогава в n -я рунд на играта последователно се изпълняват следните три действия:

- (i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка A_n , за която разстоянието между A_{n-1} и A_n е точно 1.
- (ii) Проследяващо устройство докладва някаква точка P_n на ловеца, като гарантира единствено това, че разстоянието между точките P_n и A_n е най-много 1.
- (iii) Ловецът, оставайки видим, се придвижва до точка B_n , за която разстоянието между B_{n-1} и B_n е точно 1.

Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен, че след 10^9 рунда разстоянието между него и заека е най-много 100?

Сряда, 19 юли, 2017

Задача 4. Нека R и S са различни точки от окръжността Ω , като RS не е диаметър. Правата ℓ се допира до Ω в точка R . Точка T е такава, че S е средата на отсечката RT . Точка J е избрана върху малката дъга RS на Ω така, че описаната около триъгълник JST окръжност Γ пресича ℓ в две различни точки. Нека A е пресечната точка на Γ и ℓ , която е по-близка до R . Правата AJ пресича Ω за втори път в точка K . Да се докаже, че правата KT се допира до окръжността Γ .

Задача 5. Дадено е естествено число $N \geq 2$. Група от $N(N+1)$ футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, е подредена в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата $N(N-1)$ играчи така, че за оставащата редица от $2N$ играчи да са изпълнени следните N условия:

- (1) няма играч между двамата най-високи,
 - (2) няма играч между третия и четвъртия по височина,
- ⋮
- (N) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това винаги е възможно.

Задача 6. Наредената двойка (x, y) от цели числа е *примитивна*, ако най-големият общ делител на x и y е равен на 1. Дадено е крайно множество S от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число n и цели числа a_0, a_1, \dots, a_n , такива, че за всяка двойка (x, y) от S е изпълнено равенството

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$