Pirmadienis, 2018 m. liepos 9 d.

1 uždavinys. Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas Γ. Taškai D ir E priklauso atkarpoms atitinkamai AB ir AC, be to, $AD = AE$. Atkarpų BD ir CE vidurio statmenys kerta mažesniuosius apskritimo Γ lankus AB ir AC taškuose atitinkamai F ir G. Įrodykite, kad tiesės DE ir FG yra lygiagrečios (arba sutampa).

2 uždavinys. Raskite visus natūraliuosius skaičius $n \geq 3$, su kuriais egzistuoja tokie realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, kad $a_{n+1} = a_1$ ir $a_{n+2} = a_2$, bei

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

su kiekvienu $i = 1, 2, \ldots, n$.

3 uždavinys. *Anti-Paskalio trikampiu* vadinsime lygiakraščio trikampio formos lentelę, sudarytą iš skaičių taip, kad kiekvienas skaičius (išskyrus skaičius, esančius apatinėje eilutėje) yra dviejų iš karto po juo esančių skaičių skirtumo modulis. Pavyzdžiui, tokia trikampė lentelė yra anti-Paskalio trikampis, sudarytas is keturių eilučių, kuriame įrašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Ar egzistuoja anti-Paskalio trikampis, sudarytas iš 2018 eilučių, kuriame būtų įrašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Lithuanian

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Antradienis, 2018 m. liepos 10 d.

4 uždavinys. *Vieta* vadinsime bet kurį plokštumos tašką (x, y), kurio koordinatės x ir y yra natūralieji skaičiai ne didesni už 20.

Pradžioje nei viena iš 400 vietų nėra užimta. Aistė ir Benas paeiliui deda akmenis ant neužimtų vietų. Pirmoji pradeda Aistė. Kiekvienu savo ėjimu Aistė padeda vis naują raudoną akmenį ant bet kurios dar neužimtos vietos, tačiau gali jį dėti tik taip, kad joks atstumas tarp bet kurių dviejų vietų, kurias užima raudonieji akmenys, netaptų lygus $\sqrt{5}$. Kiekvienu savo ėjimu Benas deda vis naują mėlyną akmenį ant bet kurios dar neužimtos vietos. (Atstumas nuo vietos, kurią užima mėlynas akmuo, iki bet kurios kitos raudonu arba mėlynu akmeniu jau užimtos vietos gali būti bet koks.) Žaidimas baigiasi, kai kuris nors žaidėjas nebegali padėti savo akmens.

Raskite didžiausią natūralųjį skaičių K, tokį kad Aistė visada galės padėti bent K raudonų akmenų, kad ir kaip Benas bedėliotų savo mėlynuosius akmenis.

5 uždavinys. Duota begalinė natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$. Tarkime, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius $N > 1$, kad su kiekvienu $n \geq N$ skaičius

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

yra sveikasis. Įrodykite, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius M, kad $a_m = a_{m+1}$ su visais $m \geq M$.

6 uždavinys. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$, kuriame $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Taškas X yra keturkampio $ABCD$ viduje,

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ir} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Įrodykite, kad $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.