Sreda, 7. julij 2010

Naloga 1. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja enakost

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ je največje celo število manjše ali enako z.)

Naloga 2. Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice in naj bo Γ trikotniku ABC očrtana krožnica. Premica AI seka krožnico Γ v točkah A in D. Naj bo E točka na loku $\widehat{BDC}$ in F točka na stranici BC, tako da velja

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Naj bo G razpolovišče daljice IF. Dokaži, da se premici DG in EI sekata na krožnici Γ.

Naloga 3. Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil. Določi vse funkcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere velja, da je

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

popolni kvadrat za vse $m, n \in \mathbb{N}$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

Četrtek, 8. julij 2010

Naloga 4. Naj bo P točka, ki leži v notranjosti trikotnika ABC. Premice AP, BP oziroma CP sekajo trikotniku ABC očrtano krožnico Γ po vrsti še v točkah K, L oziroma M. Tangenta na krožnico Γ v točki C seka premico AB v točki S. Denimo, da je $|SC| = |SP|$. Dokaži, da je $|MK| = |ML|$.

Naloga 5. V vsaki izmed 6 škatel $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ je na začetku natanko en kovanec. Dovoljeni sta dve vrsti potez:

1) Izbereš neprazno škatlo B_j, pri čemer je $1 \leq j \leq 5$. Odstraniš en kovanec iz B_j in dodaš dva kovanca v B_{j+1}.
2) Izbereš neprazno škatlo B_k, pri čemer je $1 \leq k \leq 4$. Odstraniš en kovanec iz škatle B_k in zamenjaš vsebini škatel B_{k+1} in B_{k+2} (pri čemer je katera izmed škatel lahko prazna).

Ugotovi, ali obstaja končno zaporedje takšnih potez, tako da so škatle B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prazne, v škatli B_6 pa je natanko $2010^{2010^{2010}}$ kovancev. (Vemo $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Naloga 6. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zaporedje pozitivnih realnih števil. Denimo, da za neko naravno število s velja

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

za vse $n > s$. Dokaži, da obstajata naravni števili ℓ in N, tako da je $\ell \leq s$ in velja $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ za vse $n \geq N$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.