

الثلاثاء، 16 يوليو 2019

السؤال 1. تمثل \mathbb{Z} مجموعة الأعداد الصحيحة. أوجد كافة الدوال $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ التي تحقق المعادلة التالية لأي عددين صحيحين a و b :

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

السؤال 2. في المثلث ABC تقع النقطة A_1 على الضلع BC وتقع النقطة B_1 على الضلع AC . حدد نقطتين P و Q على القطعتين المستقيمتين AA_1 و BB_1 على التوالي بحيث يكون PQ و AB متوازيين، ثم حدد نقطة P_1 على المستقيم PB_1 بحيث تقع B_1 بين النقطتين P و P_1 وتكون $\angle PP_1C = \angle BAC$ وبشكل مماثل حدد نقطة Q_1 على المستقيم QA_1 بحيث تقع A_1 بين النقطتين Q و Q_1 وتكون $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

أثبت أن النقاط P و Q و P_1 و Q_1 تقع على دائرة واحدة.

السؤال 3. تضم شبكة تواصل اجتماعي 2019 مستخدماً، ويمكن أن يكون مستخدمان لهذه الشبكة صديقين. وإذا كان المستخدم A صديقاً لمستخدم آخر B ، يكون المستخدم B أيضاً صديقاً للمستخدم A . افرض أن أحداثاً كالحدث أدناه يمكن أن تقع بشكل متكرر واحداً تلو الآخر:

تتغير صداقات ثلاثة مستخدمين A و B و C ، حيث إذا كان في البداية A صديقاً لكل من B و C ولم يكن B و C صديقين يصبح B و C صديقين ولا يعود A صديقاً لأي من B و C ، بينما تبقى الصداقات الأخرى على حالها.

إذا كانت الشبكة تضم بداية 1010 مستخدمين لكل منهم 1009 أصدقاء، و 1009 مستخدمين لكل منهم 1010 أصدقاء، أثبت أنه يمكن إيجاد متتالية من الأحداث المذكورة أعلاه بحيث يصبح بعدها كل مستخدم صديقاً لمستخدم واحد آخر على الأكثر.

الأربعاء، 17 يوليو 2019

السؤال 4. أوجد كافة أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (k, n) التي تحقق المعادلة

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

السؤال 5. يصدر بنك مدينة باث قطع نقد معدنية مطبوع على كل منها H على أحد الوجهين و T على الوجه الآخر. لدى هاري عدد n من قطع النقد هذه وقام بصفها على شكل خط من اليسار إلى اليمين. يكرر هاري العملية التالية: إذا كانت هناك بالتحديد k قطع، حيث $k \geq 1$ ، تظهر العلامة H يقوم بقلب القطعة الواقعة في المرتبة k من جهة اليسار، ويتوقف حين تظهر جميع القطع العلامة T . مثلاً، إذا كانت $n = 3$ وكانت القطع بالترتيب THT تكون العمليات المطلوبة $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ ، أي أن هاري يحتاج عندها 3 خطوات قبل أن يتوقف.

(a) أثبت أنه وبغض النظر عن الترتيب الأولي للقطع المعدنية فإن هاري سيتوقف بعد عدد محدود من العمليات.

(b) نرمز للترتيب الأولي للقطع بالرمز C وعدد العمليات التي يحتاجها هاري قبل التوقف بالرمز $L(C)$. مثلاً، $L(THT) = 3$ و $L(TTT) = 0$. أوجد القيمة المتوسطة لعدد العمليات $L(C)$ انطلاقاً من كافة التوزيعات الأولية C الممكنة وعددها 2^n .

السؤال 6. النقطة I هي نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث حاد الزوايا ABC حيث $AB \neq AC$. الدائرة الداخلية ω للمثلث ABC تماس الأضلاع BC و CA و AB عند النقاط D و E و F على التوالي. الخط المار عبر النقطة D والعمودي على EF يقطع الدائرة ω ثانية في النقطة R ، ويقطع الخط AR الدائرة ω ثانية في النقطة P ، كما تتقاطع الدائرتان المحيطتان بالمثلثين PCE و PBF ثانية في النقطة Q .

أثبت أن المستقيمين DI و PQ يتقاطعان في نقطة واقعة على الخط المار بالنقطة A والعمودي على AI .