Середа, 15 липня 2009 р.

Задача 1. Дано натуральне число n та попарно різні натуральні числа $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) з множини $\{1, \ldots, n\}$ такі, що для кожного $i = 1, \ldots, k-1$ число $a_i(a_{i+1} - 1)$ ділиться на n. Доведіть, що число $a_k(a_1 - 1)$ не ділиться на n.

Задача 2. Точка O — центр кола, що описане навколо трикутника ABC. Нехай P та Q — внутрішні точки сторін CA та AB відповідно. Точки K, L та M — середини відрізків BP, CQ та PQ відповідно, а Γ — це коло, що проходить через точки K, L та M. Відомо, що пряма PQ дотикається до кола Γ. Доведіть, що $OP = OQ$.

Задача 3. Дано строго зростаючу послідовність натуральних чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots$ таку, що кожна з двох послідовностей

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{та} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

є арифметичною прогресією. Доведіть, що послідовність $s_1, s_2, s_3, \ldots$ теж є арифметичною прогресією.

Час роботи: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів

Четвер, 16 липня 2009 р.

Задача 4. Трикутник ABC такий, що $AB = AC$. Бісектриси кутів CAB та ABC перетинають сторони BC та CA в точках D та E відповідно. Позначимо через K центр кола, що вписане в трикутник ADC. Виявилось, що $\angle BEK = 45°$. Знайдіть усі можливі значення кута CAB.

Задача 5. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (тобто функції, які визначені на множині усіх натуральних чисел та приймають натуральні значення) такі, що для будь-яких натуральних чисел a та b існує невироджений трикутник, довжини сторін якого дорівнюють трьом числам

$$a, \ f(b) \ \text{ и } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Трикутник називається *невиродженим*, якщо його вершини не лежать на одній прямій.)

Задача 6. Дані попарно різні натуральні числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а також множина M, яка складається з $n - 1$ натурального числа, але не містить число $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Коник має зробити n стрибків праворуч вздовж числової прямої, починаючи з точки з координатою 0. При цьому довжини його стрибків мають дорівнювати числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, узятим у деякому порядку. Доведіть, що цей порядок можна вибрати таким чином, щоб коник жодного разу не приземлився у точці, яка має координату з множини M.

Час роботи: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів