Вторник, 18 јули 2017.

1. За секој цел број $a_0 > 1$, определена е низа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ на следниот начин:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цел број,} \\ a_n + 3, & \text{во спротивен случај,} \end{cases} \qquad \text{за секој } n \geqslant 0.$$

Определи ги сите вредности за a_0, за кои постои број A таков што $a_n = A$ за бесконечно многу вредности на n.

2. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реални броеви. Определи ги сите функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такви што за секои реални броеви x и y е исполнето

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

3. Ловец и невидлив зајак играат игра во Евклидова рамнина. Почетните точки на зајакот, A_0, и на ловецот, B_0, се исти. После $n-1$ кругови од играта, зајакот е во точката A_{n-1}, а ловецот во точката B_{n-1}. Во n-тиот круг на играта се случува следното, во дадениот редослед:

(i) Зајакот неприметно се преместува во точката A_n, која е на растојание точно 1 од точката A_{n-1}.

(ii) Ловецот на радарот ја очитува точката P_n. Единствено што радарот гарантира е дека растојанието меѓу точките P_n и A_n е најмногу 1.

(iii) Ловецот се поместува во точката B_n која е на растојание точно 1 од точката B_{n-1}, што зајакот го гледа.

Дали ловецот, при било какво движење на зајакот и извештаите од радарот, може да се движи на тој начин да после 10^9 кругови од играта растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

Среда, 19 јули 2017.

4. Нека R и S се различни точки од кружницата Ω така што RS не е нејзин дијаметар. Нека ℓ е тангента кон кружницата Ω во точката R. Точката T е таква што S е средна точка на отсечката RT. Точката J е избрана на помалиот лак RS од кружницата Ω, така што опишаната кружница Γ околу триаголникот JST ја сече правата ℓ во две различни точки. Нека A е заедничка точка од кружницата Γ и правата ℓ, која е поблиску до точката R. Правата AJ ја сече повторно кружницата Ω во точката K. Докажи дека правата KT е тангента на кружницата Γ.

5. Даден е природен број $N \geqslant 2$. Во редица се наоѓаат $N(N+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Шефот Дарко сака да одстрани $N(N-1)$ играчи од редицата, оставајќи редица со $2N$ играчи, за кои се исполнети следните N услови:

(1) помеѓу двата највисоки играчи не стои никој;

(2) помеѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој;

$\vdots$

(N) помеѓу двата најниски играчи не стои никој.

Докажи дека ова секогаш може да се изведе.

6. Подредениот пар од цели броеви (x, y) е *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите x и y е еднаков на 1. Дадено е конечно множество S од примитивни точки. Докажи дека постои позитивен цел број n и цели броеви a_0, a_1, ..., a_n такви што за секој подреден пар (x, y) од множеството S е исполнето

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$