



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Uzbek (uzb), day 1

Shanba, 2023-yil 8-iyul

Masala 1. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $n > 1$ murakkab sonlarni toping: n ning barcha musbat bo'luvchilari d_1, d_2, \dots, d_k lar uchun $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ o'rinli hamda har bir $1 \leq i \leq k - 2$ uchun $d_{i+1} + d_{i+2}$ ifoda d_i ga bo'linadi.

Masala 2. ABC o'tkir burchakli uchburchakda $AB < AC$. Ω ushbu ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana. S nuqta Ω aylananing A nuqtani o'z ichiga olgan CB yoyining o'rtasi. A dan BC ga tushirilgan balandlik BS ni D nuqtada Ω aylanani esa ikkinchi bor $E \neq A$ nuqtada kesadi. D nuqtadan BC ga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq BE to'g'ri chiziqni L nuqtada kesadi. BDL uchburchakka tashqi chizilgan aylanani ω orqali belgilaylik. ω aylana Ω aylana bilan ikkinchi bor $P \neq B$ nuqtada kesishadi. P nuqtadan ω aylanaga o'tkazilgan urinma BS to'g'ri chiziqni $\angle BAC$ burchakning ichki bissektrisasida kesishini isbotlang.

Masala 3. Har bir $k \geq 2$ butun son uchun barcha a_1, a_2, \dots musbat sonlar cheksiz ketma-ketligini toping, bunda u uchun quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ ko'phad mavjud bo'lsin (bunda c_0, c_1, \dots, c_{k-1} - nomanfiy butun sonlar): har bir $n \geq 1$ butun son uchun

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

o'rinli bo'lsin.

Language: Uzbek

*Vaqt: 4 soat va 30 daqiqa
Har bir masala 7 balldan baholanadi*



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Uzbek (uzb), day 2

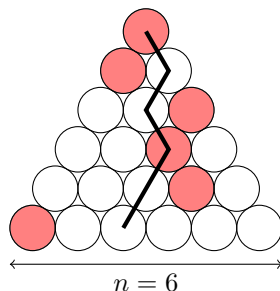
Yakshanba, 2023-yil 9-iyul

Masala 4. $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ turli musbat haqiqiy sonlar shundayki, har bir butun $n = 1, 2, \dots, 2023$ uchun

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

butun son. $a_{2023} \geq 3034$ ekanini isbotlang.

Masala 5. n musbat butun son bo'lsin. Yapon uchburchagi $1 + 2 + \dots + n$ ta aylanalardan tashkil topgan muntazam uchburchak shaklida bo'lib, har bir $i = 1, 2, \dots, n$ uchun i - qatorda aynan i ta aylana joylashtirilgan hamda har bir qatordagi aylanalardan aynan bittasi qizil ranga bo'yalgan. Yapon uchburchagida *ninja yo'l* deb eng yuqori qatordagi aylanadan boshlanib ketma-ketma ravishda biron aylanadan uning ostidagi qatordagi ikkita aylanadan bittasi o'tadigan va oxirgi qatorda tugaydigan jami n ta aylanadan tashkil topgan yo'lakka aytiladi. Quyida $n = 6$ holatidagi Yapon uchburchagi va ikkita qizil rangli aylanani o'z ichiga oluvchi *ninja yo'l* namunasi ko'rsatilgan.



k ning shunday eng katta qiymatini toping (n orqali ifodalang) bunda har bir Yapon uchburchagida kamida k ta qizil aylanani o'z ichiga olgan *ninja yo'l* mavjud.

Masala 6. ABC muntazam uchburchak berilgan. A_1, B_1, C_1 nuqtalar ABC uchburchak ichida shunday tanlanganki, bunda $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, va

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

BC_1 va CB_1 to'g'ri chiziqlar A_2 nuqtada, CA_1 va AC_1 to'g'ri chiziqlar B_2 nuqtada, hamda AB_1 va BA_1 to'g'ri chiziqlar C_2 nuqtada kesishadi.

Agar $A_1B_1C_1$ teng yonli bo'lmagan uchburchak bo'lsa, AA_1A_2 , BB_1B_2 va CC_1C_2 uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar ikkita umumiy nuqtadan o'tishini isbotlang.

(Izoh: teng yonli bo'lmagan uchburchak deganda hech qaysi ikkita tomoni uzunligi o'zaro teng bo'lmagan uchburchak tushuniladi.)

Language: Uzbek

Vaqt: 4 soat va 30 daqiqa
Har bir masala 7 balldan baholanadi