



*Duşenbe, 19. ýul 2021*

**Mesele 1.** Goý,  $n \geq 100$  bitin san bolsun. Iwan  $n, n+1, \dots, 2n$  sanlaryň her birini dürli kartlaryň ýüzüne ýazdy. Ol soňra bu  $n+1$  sany kartlary garyýar, we olary islendik görnüşde iki topara bölýär. Ýüzlerine ýazylan sanlaryň jemi takyk kwadrat bolar ýaly bir topara degişli iki sany kartyň tapyljakdygyny subut ediň.

**Mesele 2.** Islendik  $x_1, \dots, x_n$  hakyky sanlar üçin

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

deňsizligi subut ediň.

**Mesele 3.**  $AB > AC$  bolan ýiti burçly  $ABC$  üçburçlugyň içinde  $\angle DAB = \angle CAD$  bolar ýaly  $D$  nokat alynýar.  $AC$  kesimde  $\angle ADE = \angle BCD$  bolar ýaly  $E$  nokat,  $AB$  kesimde  $\angle FDA = \angle DBC$  bolar ýaly  $F$  nokat, we  $AC$  göni çyzykda bolsa  $CX = BX$  bolar ýaly  $X$  nokat alynýar. Goý,  $O_1$  we  $O_2$  nokatlar, degişlilikde,  $ADC$  we  $EXD$  üçburçluklaryň daşyndan çyzylan töwerekleriniň merkezleri bolsun.  $BC$ ,  $EF$ , we  $O_1O_2$  göni çyzyklaryň bir nokatdan geçýändigini subut ediň.



*Şişenbe, 20. lýul 2021*

**Mesele 4.** Goý,  $\Gamma$  töweregiň merkezi  $I$  nokat bolsun. Güberçek  $ABCD$  dörtburçlugyň  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  we  $DA$  taraplary  $\Gamma$  töwerege galtaşýar. Goý,  $\Omega$  töwerek  $AIC$  üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek bolsun.  $BA$  göni çyzygyň  $A$  nokatdan dowamy  $\Omega$  töweregi  $X$  nokatda we  $BC$  göni çyzygyň  $C$  nokatdan dowamy bolsa  $\Omega$  töweregi  $Z$  nokatda kesýär.  $AD$  we  $CD$  göni çyzyklaryň  $D$  nokatdan dowamy  $\Omega$  töweregi, degişlilikde,  $Y$  we  $T$  nokatlarda kesýärler.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

bolýandygyny subut ediň.

**Mesele 5.** Çip we Deýl bilelikde gys üçin 2021 sany hoz ýygnadylar. Çip hozlary 1-den 2021-e çenli sanlar bilen belgiläp çykýar we özleriniň iň söýgüli agajynyň daşyndan töwerek görnüşde 2021 sany çukur gazýar. Ertesi irden Çip, Deýliň hozlaryň belgisine garamazdan her çukura bir sany hoz goýandygyny görýär. Muňa gynanyp, Çip hozlary täzeden tertipleşdirmek üçin 2021 sany göçüm etmegi karar berýär:  $k$ -njy göçümde, Çip  $k$  belgili hozuň iki gapdal goňşy hozlarynyň ýerini çalyşýar.  $k$ -njy göçümde Çip  $a$  we  $b$  belgili hozlaryň ýerini çalyşanda  $a < k < b$  deňsizlik ýerine ýeter ýaly  $k$  sanyň tapyljakdygyny subut ediň.

**Mesele 6.** Goý,  $m \geq 2$  bitin san bolsun,  $A$  tükenikli agzadan ybarat bolan (položitel bolmaklygy zerur däl) bitin sanlaryň köplügi bolsun we  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  köplükler bolsa  $A$  köplügiň bölek köplükleri bolsun. Her bir  $k = 1, 2, \dots, m$  üçin  $B_k$  köplügiň agzalarynyň jemi  $m^k$  sana deň bolsun.  $A$  köplügiň iň bolmanda  $m/2$  sany agzasynyň bardygyny subut ediň.