



Language: Arabic

Day: 1

الثلاثاء، 10 يونيو 2012

المشكلة 1. ليكن ABC مثلثاً والنقطة J هي مركز دائرة الخارجبة المقابلة للرأس A . هذه الدائرة الخارجية تمس الضلع BC في النقطة M ، وتمس المستقيمين AB و AC في النقطتين K و L ، على الترتيب. المستقيمان LM و BJ يتقاطعان في F ، والمستقيمان KM و CJ يتقاطعان في G . لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين AF و BC ، ولتكن T نقطة تقاطع المستقيمين AG و BC .
برهن أنّ M تقع في منتصف القطعة المستقيمة ST .

(الدائرة الخارجية للمثلث ABC والمقابلة للرأس A هي الدائرة التي تمس كلًا من الضلع BC ، وامتداد الضلع AB من جهة B ، وامتداد الضلع AC من جهة C).

. $a_2a_3 \cdots a_n = 1$ حيث a_2, a_3, \dots, a_n أعداداً حقيقةً موجبةٍ، وبرهن أنَّ

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

السؤال 3. لعبة تخمين الكذب هي لعبة بين لاعبين A و B . قواعد هذه اللعبة تعتمد على عددين صحيحين موجفين k و n . هذان العددان معروfan لكلا اللاعبين.

في بداية اللعبة يختار A عددين صحيحين x و N بحيث $1 \leq x \leq N$. اللاعب A يحتفظ سرا بالعدد x وبكل أمانة يكشف عن العدد N لللاعب B . يحاول اللاعب B التعرف على العدد x من خلال أسئلة يوجهها لللاعب A على النحو التالي: في كل سؤال يختار B مجموعة عشوائية S من الأعداد الصحيحة الموجبة، ثم يسأل A إذا كان x ينتمي لـ S . يمكن لللاعب B أن يكرر هذا النوع من الأسئلة عددا من المرات حسب رغبته، سواء بالاحتفاظ بالمجموعة S أو بتغييرها. على اللاعب A أن يجيب لحظيا على أسئلة اللاعب B بنعم أو لا، مع إمكانية الكذب في الإجابة ما شاء من المرات. القيد الوحيد أنه في كل $k+1$ من الإجابات المتالية، تكون على الأقل، واحدة منها صحيحة.

بعد أن يتهي B من طرح العدد الذي يرغب من أسئلته، عليه أن يحدد مجموعة X تحوي ما لا يزيد عن n من الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا اتّمت x إلى X فيكون B فائزاً، وبعكس ذلك فهو خاسر. برهن أنّ:

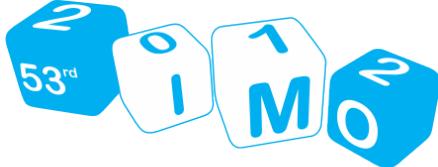
1. إذا كان $n \geq 2^k$ ، فإنه يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.

2. لكل الأعداد k الكبيرة بما فيه الكفاية يوجد عدد صحيح $n \geq 1.99^k$ بحيث لا يمكن للاعب B أن يضمن الفوز.

Language: Arabic

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة

7 در حات لکاً مسألة



الأربعاء، 11 يوليو 2012

المُسَأَّلَةُ 4. جد جميع الدوال $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ التي تحقق المساواة التالية:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

لكل الأعداد الصحيحة a, b, c بحيث $a + b + c = 0$.
(تعني بالرمز \mathbb{Z} مجموعة الأعداد الصحيحة.)

المُسَأَّلَةُ 5. ليكن ABC مثلثاً فيه $\angle BCA = 90^\circ$ ، و D قدم الارتفاع النازل من C . لتكن X نقطة داخل القطعة المستقيمة CD . النقطة K تقع على القطعة المستقيمة AX بحيث $BK = BC$. بصورة مشابهة . النقطة L تقع على القطعة المستقيمة BX بحيث $AL = AC$.
إذا كانت M نقطة تقاطع المستقيمين AL و BK ، فبُهْنَ أَنْ $MK = ML$.

المُسَأَّلَةُ 6. حدد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي لأجلها توجد أعداد صحيحة غير سالبة a_1, a_2, \dots, a_n تتحقق

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$