субота, 8. јул 2023

Задатак 1. Одредити све сложене природне бројеве $n > 1$ који имају следећу особину: ако су $d_1, d_2, \dots, d_k$ сви позитивни делиоци броја n, при чему је $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, тада важи d_i дели $d_{i+1} + d_{i+2}$, за свако $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Задатак 2. Нека је ABC оштроугли троугао код којег је $AB < AC$. Означимо са Ω кружницу описану око троугла ABC. Нека је S средиште лука CB кружнице Ω који садржи тачку A. Нормала из тачке A на праву BC сече праву BS у тачки D, а кружницу Ω, поново, у тачки $E \neq A$. Права која садржи тачку D и паралелна је са правом BC сече праву BE у тачки L. Означимо са ω кружницу описану око троугла BDL. Нека кружница ω сече кружницу Ω, поново, у тачки $P \neq B$. Доказати да тангента конструисана у тачки P на кружницу ω сече праву BS у тачки која припада симетрали унутрашњег угла $\angle BAC$ троугла ABC.

Задатак 3. За сваки природан број $k \geqslant 2$ одредити све бесконачне низове природних бројева $a_1, a_2, \dots$ за које постоји полином P облика $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$, при чему су $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ ненегативни цели бројеви, такав да је

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

за сваки природан број n.

Време за израду задатака: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова.

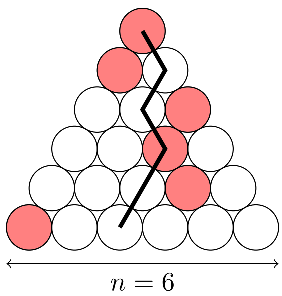
недеља, 9. јул 2023

Задатак 4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ по паровима различити позитивни реални бројеви такви да је број

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

цео, за свако $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Доказати да је $a_{2023} \geqslant 3034$.

Задатак 5. Нека је n природан број. *Јапански троугао* се састоји од $1 + 2 + \cdots + n$ кружића распоређених у облику једнакостраничног троугла тако да, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, $i-$та врста садржи тачно i кружића, од којих је тачно један обојен у црвено. *Нинџа стаза* у јапанском троуглу је низ од n кружића који се добија тако што крећемо од кружића из прве врсте, а затим, у сваком следећем кораку, прелазимо са тренутног кружића на један од два кружића који су непосредно испод њега и завршавамо када стигнемо до неког од кружића из последње, $n-$те, врсте. На слици испод се налази пример јапанског троугла за $n = 6$, заједно са нинџа стазом у том троуглу која садржи два црвена кружића.



У зависности од броја n, наћи највећи природан број k тако да у сваком јапанском троуглу постоји нинџа стаза која садржи најмање k црвених кружића.

Задатак 6. Дат је једнакостранични троугао ABC. Нека су A_1, B_1, C_1 унутрашње тачке троугла ABC такве да важи $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Претпоставимо да се праве BC_1 и CB_1 секу у тачки A_2, да се праве CA_1 и AC_1 секу у тачки B_2 и да се праве AB_1 и BA_1 секу у тачки C_2. Ако је троугао $A_1B_1C_1$ разнострани, доказати да описане кружнице око троуглова AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 све три имају две заједничке тачке.

(Напомена: разнострани троугао је онај код којег не постоје две странице једнаке дужине.)

Време за израду задатака: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова.