utorok, 15. júla 2025

Úloha 1. Priamku v rovine nazveme *slnečná*, keď nie je rovnobežná ani s x-ovou osou, ani s y-ovou osou, ani s priamkou s rovnicou $x + y = 0$.

Nech n je celé číslo také, že $n \geqslant 3$. Určte všetky nezáporné celé čísla k také, že existuje n rôznych priamok v rovine takých, že platí:

- Pre všetky kladné celé čísla a a b také, že $a + b \leqslant n + 1$, bod (a, b) leží aspoň na jednej z nich.
- Práve k z nich je slnečných.

Úloha 2. Nech Ω a Γ sú kružnice so stredmi M, resp. N také, že polomer Ω je menší než polomer Γ. Predpokladajme, že kružnice Ω a Γ sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B. Priamka MN pretína Ω v bode C a Γ v bode D, pričom body C, M, N, D ležia na priamke v takomto poradí. Nech P je stred kružnice opísanej trojuholníku ACD. Priamka AP pretína kružnicu Ω ešte v bode E rôznom od A a kružnicu Γ ešte v bode F rôznom od A. Nech H je ortocentrum trojuholníka PMN.

Dokážte, že priamka prechádzajúca cez bod H a rovnobežná s AP je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BEF.

(*Ortocentrom* trojuholníka nazývame priesečník jeho výšok.)

Úloha 3. Funkcia f, kde $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, sa nazýva *senza*, ak pre všetky kladné celé čísla a a b platí, že

$$f(a) \quad \text{je deliteľom} \quad b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určte najmenšiu reálnu konštantu c takú, že pre každú senza funkciu f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leqslant cn$.

($\mathbb{N}^+$ je množina kladných celých čísel.)

streda, 16. júla 2025

Úloha 4. Pod *vlastným deliteľom* kladného celého čísla m rozumieme kladný deliteľ čísla m rôzny od m.

Nekonečná postupnosť $(a_1, a_2, \ldots)$ je zložená z kladných celých čísel, z ktorých každé má aspoň tri vlastné delitele. Pre každé kladné celé číslo n je číslo a_{n+1} súčtom troch najväčších vlastných deliteľov čísla a_n.

Určte všetky možné hodnoty a_1.

Úloha 5. Alica a Baltazár hrajú *nekoaličnú hru* pre dvoch hráčov, ktorej pravidlá závisia od kladného reálneho čísla λ, ktoré je obom hráčom známe. V n. ťahu hry (počnúc 1.) sa stane toto:

- Ak n je nepárne, Alica zvolí nezáporné reálne číslo x_n také, že
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ak n je párne, Baltazár zvolí nezáporné reálne číslo x_n také, že
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ak hráč nemôže zvoliť vhodné číslo x_n, hra sa končí a protihráč vyhráva. Ak hra pokračuje donekonečna, nevyhrá nikto. Všetky zvolené čísla sú známe obom hráčom.

Určte všetky hodnoty λ také, že Alica má vyhrávajúcu stratégiu, a aj všetky také, že Baltazár má vyhrávajúcu stratégiu.

Úloha 6. Matilda chce do mriežky z 2025×2025 jednotkových štvorcov umiestniť niekoľko pravouholníkových dlaždíc (prípadne aj rôznej veľkosti) tak, že každá strana každej dlaždice leží na niektorej úsečke mriežky a každý jednotkový štvorec je pokrytý najviac jednou dlaždicou.

Určte najmenší počet dlaždíc, ktoré Matilda potrebuje umiestniť tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci bol práve jeden nepokrytý štvorec.

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.