



Երեքշաբթի, 16. հուլիսի 2024

Խնդիր 1. Գտե՛ք α իրական թվի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում ցանկացած n բնական թվի համար

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

բնական թիվը n -ի բազմապատիկ է:

Դիտարկում: $\lfloor z \rfloor$ -ը z -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվն է: Օրինակ $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ և $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$:

Խնդիր 2. Գտե՛ք բոլոր (a, b) բնական թվերի թվագույգերը, որոնց համար գոյություն ունեն g և N բնական թվեր, որ ցանկացած $n \geq N$ բնական թվի համար տեղի ունի

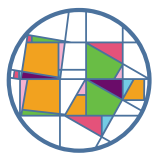
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

հավասարությունը:

Դիտարկում: $\gcd(x, y)$ -ը x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:

Խնդիր 3. Դիցուք a_1, a_2, a_3, \dots բնական թվերի անվերջ հաջորդականություն է և N -ը բնական թիվ է: Դիցուք ցանկացած $n > N$ բնական թվի համար a_n -ը հավասար է a_1, a_2, \dots, a_{n-1} հաջորդականությունում a_{n-1} -ին հավասար անդամների քանակին: Ապացուցե՛ք, որ a_1, a_3, a_5, \dots և a_2, a_4, a_6, \dots հաջորդականություններից գոնե մեկն ի վերջո պարբերական է:

Դիտարկում: b_1, b_2, b_3, \dots հաջորդականությունն ի վերջո պարբերական է, եթե գոյություն ունեն p և M բնական թվեր, որ ցանկացած $m \geq M$ բնական թվի համար տեղի ունի $b_{m+p} = b_m$ հավասարությունը:



Չորեքշաբթի, 17. հուլիսի 2024

Խնդիր 4. Դիցուք ABC եռանկյունում $AB < AC < BC$: Դիցուք ω -ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծն է, իսկ I -ն ω -ի կենտրոնն է: Դիցուք X -ը BC ուղղի վրա C -ից տարբեր այնպիսի կետ է, որ X կետից AC -ին տարված զուգահեռ ուղիղը շոշափում է ω -ն: Նույն կերպ Y -ը BC ուղղի վրա B -ից տարբեր այնպիսի կետ է, որ Y կետից AB -ին տարված զուգահեռ ուղիղը շոշափում է ω -ն: Դիցուք AI -ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը կրկին հատում է $P \neq A$ կետում: Դիցուք K և L կետերը համապատասխանաբար AC և AB հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցե՛ք, որ $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$:

Խնդիր 5. 2024 տող և 2023 սյունակ ունեցող տախտակի վրա Արսենը խաղում է հետևյալ խաղը: Տախտակի 2022 վանդակներում թաքնված են հրեշներ: Ի սկզբանե Արսենը չգիտի հրեշները դիրքերը, բայց գիտի, որ բացի առաջին և վերջին տողերից մնացած բոլոր տողերում կա մեկական հրեշ և յուրաքանչյուր սյունակում կա ոչ ավելի քան մեկ հրեշ:

Արսենը ցանկանում է առաջին տողից հասնել վերջին տող՝ կատարելով փորձեր: Յուրաքանչյուր փորձում նա առաջին տողից ընտրում է մեկ վանդակ, որից հետո կատարում է հաջորդական քայլեր, մի վանդակից գնալով ընդհանուր կողմ ունեցող հարևան վանդակ (թույլատրվում է վերադառնալ արդեն այցելած վանդակներ): Եթե Արսենը հայտնվում է հրեշով վանդակում, ապա փորձն ավարտվում է անհաջող և նա վերադառնում է առաջին տող՝ նոր փորձ անելու: Հրեշները տեղաշարժվել չեն կարող, իսկ Արսենը հիշում է, թե իր այցելած վանդակներից որոնցում հրեշ կար: Երբ Արսենը հասնում է վերջին տողից ինչ որ վանդակ, ապա փորձը համարվում է հաջողված և խաղն ավարտվում է :

Գտե՛ք n -ի ամենափոքր հնարավոր արժեքը, որի դեպքում Արսենը կարող է մշակել այնպիսի մարտավարություն, որ անկախ հրեշների դասավորությունից կարողանա առավելագույնը n փորձով հասնել վերջին տող ու խաղն ավարտել:

Խնդիր 6. Դիցուք \mathbb{Q} -ն ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ֆունկցիան կոչվում է *մաթեմյան*, եթե ցանկացած $x, y \in \mathbb{Q}$ թվերի համար

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{կամ} \quad f(f(x) + y) = x + f(y):$$

Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի c բնական թիվ, որ ցանկացած f մաթեմյան ֆունկցիայի համար $f(r) + f(-r)$ տիպի արտահայտություններն ընդունում են ոչ ավելի քան c տարբեր ռացիոնալ արժեքներ և գտե՛ք այդ պայմանին բավարարող c -ի փոքրագույն հնարավոր արժեքը:

Language: Armenian

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե.

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր.