понеділок, 21. вересня 2020

Задача 1. Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ знайшлася точка P така, що справджується рівності

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Доведіть, що три такі прямі перетинаються в одній точці: внутрішні бісектриси кутів $\angle ADP$ і $\angle PCB$ та серединний перпендикуляр до відрізку AB.

Задача 2. Задано дійсні числа a, b, c, d такі, що $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ і $a + b + c + d = 1$. Доведіть, що

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задача 3. Маємо $4n$ камінців вагою $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Кожний з камінців пофарбовано в один з n кольорів, причому маємо по 4 камінці кожного кольору. Доведіть, що камінці можна розділити на дві купки рівної сумарної ваги так, щоб в кожній купці було по два камінці кожного кольору.

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

вівторок, 22. вересня 2020

Задача 4. Задано ціле число $n > 1$. На горном схилі на попарно різних висотах розташовано n^2 станцій фунікулеру. Кожна з двох компаній A та B володіє k підйомниками. Кожний підйомник виконує регулярний трансфер (без пересадок) з однієї зі станцій на іншу, що розташована вище. k трансферів компані A починаються на k різних станціях; також вони закінчуються на k різних станціях; при цьому трансфер, який починається вище, закінчується теж вище. Ті саме умови виконано для компанії B. Будем казати, що дві станції *пов'язані* компанією, якщо можна дістатися з нижньої станції до верхньої, використовуючи один чи декілька трансферів цієї компанії (інші пересування між станціями заборонено). Знайдіть найменше k, при якому гарантовано знайдуться дві станції, що пов'язані обома компаніями.

Задача 5. Маємо $n > 1$ карток, на кожній з яких записано натуральне число. Виявилося, що для довільних двох карток середнє арифметичне записаних на них чисел дорівнює середньому геометричному чисел, записаних на картках деякого набору, що складається з однієї або більше карток. При яких n з цього випливає, що всі числа, записані на картках, рівні?

Задача 6. Доведіть, що існує додатна константа c, для якої справджується таке твердження:

Нехай $\mathcal{S}$ – множина з $n > 1$ точок площини, у якій відстані між довільними двома точками не менше за 1. Тоді існує пряма ℓ, що розділяє множину $\mathcal{S}$, така що відстань від довільної точки $\mathcal{S}$ до ℓ не менше ніж $cn^{-1/3}$.

(Пряма ℓ *розділяє* множину точок $\mathcal{S}$, якщо вона перетинає деякий відрізок, кінці якого належать $\mathcal{S}$.)

Зауваження. Більш слабкі результати з заміною $cn^{-1/3}$ на $cn^{-\alpha}$ можуть оцінюватися в залежності від значень константи $\alpha > 1/3$.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.