Language: **Arabic**

Day: **1**

الجمعة 10 يوليو 2015

المسألة 1. نقول عن مجموعة متهية $\mathcal{S}$ من نقط المستوى إنّها **متوازنة** إذا كان من أجل كلّ نقطتين مختلفتين A و B في $\mathcal{S}$ توجد نقطة C في $\mathcal{S}$ تحقّق $AC = BC$. نقول عن $\mathcal{S}$ إنّها **بدون مركز** إذا كان من أجل كلّ ثلاث نقط مختلفة A و B و C في $\mathcal{S}$ لا توجد نقطة P في $\mathcal{S}$ تحقّق $PA = PB = PC$.

أ. أثبت أنّه لكلّ عدد صحيح $n \geqslant 3$، توجد مجموعة متوازنة مكوّنة من n نقطة.

ب. حدّد كلّ الأعداد الصّحيحة $n \geqslant 3$ الّتي لأجلها توجد مجموعة متوازنة بدون مركز مكوّنة من n نقطة.

المسألة 2. حدّد كلّ الثّلاثيّات المرتّبة (a, b, c) من الأعداد الصّحيحة الموجبة الّتي لأجلها تكون المقادير

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

قوى للعدد 2.

(نسمّي قوّة للعدد 2 كلّ عدد صحيح يكتب على شكل 2^n، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 0.)

المسألة 3. ليكن ABC مثلّثا حادّ الزّوايا فيه $AB > AC$، و Γ دائرته المحيطة، و H ملتقى ارتفاعاته، و F قدم ارتفاعه المنشأ من الرّأس A. النّقطة M هي منتصف الضّلع BC. لتكن Q النّقطة على الدّائرة Γ الّتي تحقّق $\widehat{HQA} = 90°$. لتكن K النّقطة على الدّائرة Γ الّتي تحقّق $\widehat{HKQ} = 90°$. لنفرض أنّ النّقط A، B، C، K، Q مختلفة وهي وفق هذا التّرتيب على الدّائرة Γ.

أثبت أنّ الدّائرتين المحيطتين بالمثلّثين KQH و FKM متماسّتان.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة

السّبت 11 يوليو 2015

المسألة 4. ليكن ABC مثلّثا وΩ دائرته المحيطة وO مركزها. الدّائرة Γ ذات المركز A تقطع الضّلع BC في النّقطتين D وE، بحيث تكون النّقط B، D، E، C كلّها مختلفة وتقع على المستقيم BC بهذا التّرتيب. لتكن F وG نقطتي تقاطع الدّائرتين Γ وΩ، بحيث تقع النّقط A، F، B، C، G على الدّائرة Ω بهذا التّرتيب. لتكن K نقطة التّقاطع الثّانية للدّائرة المحيطة بالمثلّث BDF مع الضّلع AB. لتكن L نقطة التّقاطع الثّانية للدّائرة المحيطة بالمثلّث CGE مع الضّلع CA.

أثبت أنّه إذا كان المستقيمان FK وGL مختلفين ويتقاطعان في النّقطة X، فإنّ النّقطة X تقع على المستقيم AO.

المسألة 5. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة. جد جميع الدّوال $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التّي تحقّق المعادلة

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy) \;=\; x+f(x+y)+yf(x)$$

لكلّ عددين حقيقيّين x و y.

المسألة 6. متتالية الأعداد الصّحيحة a_1، a_2، … تحقّق الشّرطين:

١- $1\leqslant a_j\leqslant 2015$ لكلّ $j\geqslant 1$؛

٢- $k+a_k\neq \ell+a_\ell$ لكلّ $1\leqslant k<\ell$.

أثبت وجود عددين صحيحين موجبين b وN بحيث

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\leqslant 1007^2$$

لكلّ عددين صحيحين m و n يحقّقان $n>m\geqslant N$.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة