martedì 15 luglio 2025

Problema 1. Una retta nel piano cartesiano è detta *soleggiata* se **non** è parallela né all'asse x, né all'asse y, né alla retta $x + y = 0$.

È dato un intero $n \geqslant 3$. Determinare tutti gli interi non negativi k per i quali esistono n rette distinte nel piano che soddisfano entrambe le condizioni seguenti:

- per ogni scelta di interi positivi a e b con $a + b \leqslant n + 1$ il punto di coordinate (a, b) appartiene ad almeno una delle n rette;
- esattamente k delle n rette sono soleggiate.

Problema 2. Siano Ω e Γ circonferenze di centro M ed N rispettivamente, tali che il raggio di Ω sia strettamente minore del raggio di Γ. Supponiamo che la circonferenza Ω intersechi Γ in due punti distinti A e B. La retta MN interseca Ω in C e Γ in D, e i punti C, M, N e D giacciono sulla retta in questo ordine. Sia P il circocentro del triangolo ACD. Sia $E \neq A$ il secondo punto di intersezione della retta AP con Ω e sia $F \neq A$ il secondo punto di intersezione della retta AP con Γ. Sia H l'ortocentro del triangolo PMN.

Dimostrare che la retta parallela ad AP passante per H è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo BEF.

(L'*ortocentro* di un triangolo è il punto d'incontro delle sue altezze.)

Problema 3. Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme degli interi positivi. Una funzione $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ è detta *ganza* se

$$f(a) \ \text{ divide } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

per tutti gli interi positivi a e b.

Determinare la più piccola costante reale c tale che $f(n) \leqslant cn$ per ogni funzione ganza f e ogni intero positivo n.

Language: Italian

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 7 punti.

mercoledì 16 luglio 2025

Problema 4. Un *divisore proprio* di un intero positivo N è un divisore positivo di N diverso da N stesso.

La sequenza infinita $a_1, a_2, \ldots$ consiste di interi positivi, ciascuno avente almeno tre divisori propri. Per ogni $n \geqslant 1$ l'intero a_{n+1} è la somma dei tre più grandi divisori propri di a_n.

Determinare tutti i possibili valori di a_1.

Problema 5. Alice e Bazza si sfidano a *Skoalificato!*, un gioco per due giocatori le cui regole dipendono da un numero reale positivo λ noto ad entrambi. L'n-esimo turno del gioco (a partire da $n = 1$) si svolge come segue:

- se n è dispari, Alice sceglie un numero reale non negativo x_n tale che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n;$$

- se n è pari, Bazza sceglie un numero reale non negativo x_n tale che

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Se un giocatore non può scegliere alcun numero x_n valido è *skoalificato*: il gioco termina e l'altro giocatore risulta vincitore. Se il gioco continua per sempre, nessuno dei due giocatori risulta vincitore. Tutti i numeri scelti sono noti ad entrambi i giocatori.

Determinare tutti i valori di λ per cui Alice ha una strategia vincente e tutti quelli per cui Bazza ha una strategia vincente.

Problema 6. È data una griglia formata da 2025×2025 caselle quadrate di lato unitario. Ludovica vuole piazzare sulla griglia alcuni tasselli rettangolari, eventualmente diversi fra loro, in modo che ciascun lato di ogni tassello giaccia su una delle linee che formano la griglia e che ogni casella sia coperta da al più un tassello.

Determinare il minimo numero di tasselli che Ludovica deve piazzare per far sì che su ogni riga e su ogni colonna della griglia ci sia esattamente una casella che non è coperta da alcun tassello.