

12 липня 2006 року

Задача 1. Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC . Усередині трикутника вибрано точку P таку, що

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з I .

Задача 2. Діагональ правильного 2006-кутника P називається доброю, якщо її кінці поділяють межі P на дві частини, кожна з яких містить непарне число сторін. Сторони P також називаються добрими.

Число P розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині P .

Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожен з яких має дві добрі сторони, може містити таке розбиття?

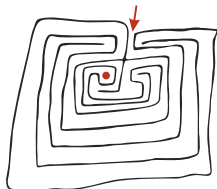
Задача 3. Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел a, b, c .

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.



13 липня 2006 року
Задача 4. Знайдіть усі пари (x, y) цілих чисел такі, що

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Увесь $P(x)$ – многочлен степеня $n > 1$ з цілими коефіцієнтами, k – довільне натуральне число. Розглянемо многочлен

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$$

(тут P застосовується k разів).

Доведіть, що існує не більше, ніж n цілих чисел t таких, що $Q(t) = t$.

Задача 6. Жорській стороні в опуклого многокутника P поставлено у відповідність найбільшу з площ трикутників, які містяться в P і одна із сторін яких співпадає з v . Доведіть, що сума площ, які відповідають усім сторонам P , не менша за подвоєну площу многокутника P .

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Жодна задача оцінюється в 7 балів.