

12. juuli 2006

**Ülesanne 1.** Olgu  $ABC$  kolmnurk ja  $I$  tema siseringjoone keskpunkt. Punkt  $P$  selle kolmnurga sees rahuldab tingimust

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Näita, et  $|AP| \geq |AI|$ , kus võrdus kehtib parajasti siis, kui  $P = I$ .

**Ülesanne 2.** Olgu  $P$  korrapärane 2006-nurk.  $P$  diagonaali nimetame "heaks", kui tema otspunktid jaotavad  $P$  rajajoone kaheks osaks, mis kumbki koosneb paaritust arvust  $P$  külgedest.  $P$  külgi nimetame samuti "headeks".

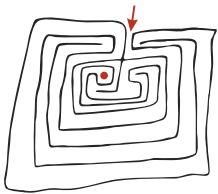
Vaatleme  $P$  jaotusi kolmnurkadeks 2003 sellise diagonaaliga, millest ühelgi kahel ei ole  $P$  sees ühist punkti. Leia suurim kahe "hea" küljega võrdhaarsete kolmnurkade arv, mis saab sellises jaotuses esineda.

**Ülesanne 3.** Leia vähim selline reaalarv  $M$ , et võrratus

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

kehtib kõigi reaalarvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  korral.

*Aega on 4 tundi 30 minutit.  
Iga ülesanne maksab 7 punkti.*



13. juuli 2006

**Ülesanne 4.** Leia kõik sellised täisarvupaarid  $(x, y)$ , et

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Ülesanne 5.** Olgu  $P(x)$  täisarvuliste kordajatega polünoom astmega  $n > 1$  ja olgu  $k$  positiivne täisarv. Vaatleme polünoomi  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ , kus  $P$  esineb  $k$  korda. Tõesta, et leidub ülimalt  $n$  sellist täisarvu  $t$ , et  $Q(t) = t$ .

**Ülesanne 6.** Kumera hulknurga  $P$  igale küljele  $b$  seame vastavusse suurima pindala, mida omab mõni hulknurgas  $P$  sisalduv kolmnurk, mille üks külg on  $b$ . Näita, et  $P$  külgedele vastavusse seatud pindalade summa on vähemalt kaks korda suurem  $P$  pindalast.

*Aega on 4 tundi 30 minutit.  
Iga ülesanne maksab 7 punkti.*