



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Albanian**

Day: **1**

E martë, 10 korrik, 2012

Problemi 1. Për trekëndëshin ABC pika J është qendra e rrethit të brendashkruar nga jashtë përballë kulmit A . Ky rreth e takon brinjën BC në pikën M , kurse zgjatjet e brinjëve AB dhe AC në pikat K dhe L , respektivisht. Drejtëzat LM dhe BJ priten në pikën F , kurse drejtëzat KM dhe CJ priten në pikën G . Le të jetë S pikëprerja e drejtëzave AF dhe BC , kurse T pikëprerja e drejtëzave AG dhe BC .

Vërtetoni se M është mesi i segmentit ST .

(Rrethi i brendashkruar nga jashtë i trekëndëshit ABC përballë kulmit A është rrethi i cili takon brinjën BC , gjysmëdrejtëzën AB përtet pikës B dhe gjysmëdrejtëzën AC përtet pikës C .)

Problemi 2. Le të jetë $n \geq 3$ një numër i plotë, kurse a_2, a_3, \dots, a_n numra realë pozitivë të tillë që $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Vërtetoni se

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Problemi 3. Loja e gënjeshtarit të hamendur është një lojë që luhet ndërmjet dy lojtarëve A dhe B . Rregullat e lojës varen nga dy numra të plotë pozitivë k dhe n , të cilët janë të njohur për të dy lojtarët.

Në fillim të lojës, lojtari A zgjedh numrat e plotë x dhe N të tillë që $1 \leq x \leq N$. Lojtari A e mban numrin x sekret, kurse numrin N ia tregon lojtarit B . Tani, lojtari B provon të marrë informata rreth numrit x , duke i parashtruar pyetje lojtarit A si vijon: së pari lojtari B specifikon një bashkësi arbitrar të numrave të plotë pozitivë S (lejohet edhe përsëritja e bashkësisë S që ndoshta ka qenë në pyetjet paraprake), dhe pastaj e pyet lojtarin A nëse numri x i takon S . Lojtari B mund të parashtrojë një numër arbitrar të pyetjeve të tilla. Lojtari A duhet që menjeherë t'i përgjigjet pyetjeve të lojtarit B me përgjigjet *po* ose *jo*, por i lejohet të gënjejë sa herë që ai (ajo) dëshiron. I vetmi kufizim që duhet të rrespektohet është që, prej $k + 1$ përgjigjeve të njëpasnjëshme, të paktën një përgjigje duhet të jetë e saktë.

Pasi B të ketë parashtruar aq shumë pyetje sa ai dëshiron, ai duhet të përcaktojë një bashkësi X me më së shumti n numra të plotë pozitivë. Nëse x i takon bashkësisë X , atëherë B fiton; në të kundërtën, ai humb. Vërtetoni se:

1. Nëse $n \geq 2^k$, atëherë B mund të sigurojë fitoren.
2. Për të gjithë numrat mjaf të mëdhenj k , ekziston ndonjë numër i plotë $n \geq 1.99^k$ ashtu që B nuk mund të sigurojë ndonjë fitore.

Language: Albanian

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem ka 7 pikë



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Albanian**

Day: **2**

E mërkurë, 11 korrik, 2012

Problemi 4. Gjeni të gjitha funksionet $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ të tilla që, për të gjithë numrat e plotë a, b, c që plotësojnë kushtin $a + b + c = 0$, vlen barazimi:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Këtu \mathbb{Z} paraqet bashkësinë e numrave të plotë.)

Problemi 5. Le të jetë ABC trekëndësh me $\angle BCA = 90^\circ$, kurse D le të jetë këmbëza e lartësisë e tërhequr nga kulmi C . Le te jetë X pikë në brendinë e segmentit CD . Le të jetë K pikë në segmentin AX ashtu që $BK = BC$. Ngjashëm, le të jetë L pikë në segmentin BX ashtu që $AL = AC$. Le të jetë M pikëprerja e AL dhe BK .

Tregoni se $MK = ML$.

Problemi 6. Gjeni të gjithë numrat e plotë pozitivë n për të cilët ekzistojnë numrat e plotë jonegativë a_1, a_2, \dots, a_n ashu që

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Albanian

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem ka 7 pikë