دوشنبه، ۱۹. ژوئیه ۲۰۲۱

مسئله‌ی ۱. عدد صحیح $n \geqslant 100$ مفروض است. امین هر یک از اعداد $n, n+1, \ldots, 2n$ را روی یک کارت مجزا می‌نویسد. سپس او این $n+1$ کارت را بُر می‌زند (به صورت تصادفی جایگشت می‌دهد) و آن‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کند. ثابت کنید حداقل یکی از دسته‌ها شامل دو کارت است که مجموع اعداد آن‌ها، مربع کامل است.

مسئله‌ی ۲. اعداد حقیقی $x_1, \ldots, x_n$ مفروض هستند. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

مسئله‌ی ۳. نقطهٔ D درون مثلث حاده ABC با شرط $AB > AC$ قرار دارد، به طوری که $\angle DAB = \angle CAD$. نقطهٔ E روی پاره‌خط AC قرار دارد به طوری که $\angle ADE = \angle BCD$ و نقطهٔ F روی پاره‌خط AB قرار دارد به طوری که $\angle FDA = \angle DBC$ است. همچنین نقطهٔ X روی خط AC طوری قرار دارد که $CX = BX$. فرض کنید O_1 و O_2 به ترتیب مراکز دایرهٔ محیطی مثلث‌های ADC و EXD هستند. ثابت کنید خطوط BC، EF و O_1O_2 همرس‌اند.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.

سه شنبه، ۲۰. ژوئیه ۲۰۲۱

مسئله‌ی ۴. فرض کنید Γ دایره‌ای به مرکز I است و $ABCD$ چهارضلعی محدبی است که هر یک از پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA بر Γ مماس است. فرض کنید Ω دایرهٔ محیطی مثلث AIC است. امتداد BA از سمت A، Ω را در X و امتداد BC از سمت C، Ω را در Z قطع می‌کند. امتداد AD و CD از سمت D، Ω را به ترتیب در Y و T قطع می‌کند. ثابت کنید

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

مسئله‌ی ۵. دو سنجاب بوشی و جامپی، در فصل زمستان ۲۰۲۱ گردو جمع‌آوری کرده‌اند. جامپی گردوها را از ۱ تا ۲۰۲۱ شماره‌گذاری می‌کند، و ۲۰۲۱ حفره‌ی کوچک دور درخت مورد علاقه‌شان، روی یک دایره حفر می‌کند. صبح روز بعد جامپی متوجه می‌شود بوشی در هر حفره یک گردو گذاشته است، اما به شماره‌گذاری آن‌ها توجهی نکرده است. جامپی که ناراحت شده است، تصمیم می‌گیرد که ترتیب گردوها را با انجام دنباله‌ای از ۲۰۲۱ حرکت تغییر دهد. در حرکت kـام، جامپی دو گردوی مجاور گردوی با شمارهٔ k را با یکدیگر جابجا می‌کند. ثابت کنید مقداری برای k وجود دارد، به طوری که اگر جامپی در حرکت kـام، دو گردوی a و b را با هم جابجا کرده باشد، آنگاه $a < k < b$.

مسئله‌ی ۶. عدد صحیح $m \geqslant 2$ مفروض است و A، مجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح (نه لزوما مثبت) است. فرض کنید $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ زیرمجموعه‌هایی از A هستند، به طوری که برای هر $k = 1, 2, \ldots, m$، مجموع اعضای B_k برابر با m^k است. ثابت کنید A حداقل $m/2$ عضو دارد.

Language: Persian (Farsi)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد.