ponedeljek, 19. julij 2021

Naloga 1. Naj bo $n \geqslant 100$ celo število. Ivan je napisal vsako od števil $n, n+1, \ldots, 2n$ na svojo karto. Nato je teh $n+1$ kart premešal in jih razdelil na dva kupa. Dokaži, da sta vsaj v enem kupu taki dve karti, da je vsota števil na teh dveh kartah popolni kvadrat.

Naloga 2. Dokaži, da neenakost

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

velja za vsa realna števila $x_1, \ldots, x_n$.

Naloga 3. Naj bo D taka notranja točka ostrokotnega trikotnika ABC, pri katerem je $|AB| > |AC|$, da je $\angle DAB = \angle CAD$. Za točko E na daljici AC velja $\angle ADE = \angle BCD$, za točko F na daljici AB velja $\angle FDA = \angle DBC$, za točko X na premici AC pa velja $|CX| = |BX|$. Naj bo O_1 središče očrtane krožnice trikotnika ADC in O_2 središče očrtane krožnice trikotnika EXD. Dokaži, da se premice BC, EF in O_1O_2 sekajo v eni točki.

Language: Slovenian

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

torek, 20. julij 2021

Naloga 4. Naj bo Γ krožnica s središčem I in naj bo $ABCD$ tak konveksen štirikotnik, da je vsaka od daljic AB, BC, CD in DA tangentna na Γ. Naj bo Ω očrtana krožnica trikotnika AIC. Če podaljšamo daljico BA naprej od A, seka Ω v točki X, in če podaljšamo daljico BC naprej od C, seka Ω v točki Z. Če podaljšamo daljico AD naprej od D, seka Ω v točki Y, in če podaljšamo daljico CD naprej od D, seka Ω v točki T. Dokaži, da velja

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Naloga 5. Veverici Eva in Vera sta nabrali 2021 orehov za zimo. Vera je oštevilčila orehe od 1 do 2021 in nato skopala 2021 majhnih lukenj, ki so oblikovale krožni vzorec okrog njunega najljubšega drevesa. Naslednje jutro je Vera opazila, da je Eva položila po en oreh v vsako luknjo, vendar se pri tem ni ozirala na oštevilčenje orehov. Vera se je zato odločila, da bo prerazporedila orehe v 2021 zaporednih korakih. V k-tem koraku Vera zamenja luknji orehov, ki sta sosednja orehu, oštevilčenim s številom k.

Dokaži, da obstaja število k, tako da Vera v k-tem koraku zamenja luknji orehov s številoma a in b, za kateri velja $a < k < b$.

Naloga 6. Naj bo $m \geqslant 2$ celo število, naj bo A končna množica (ne nujno pozitivnih) celih števil in naj bodo $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ podmnožice množice A. Privzemimo, da je za vsak $k = 1, 2, \ldots, m$ vsota elementov množice B_k enaka m^k. Dokaži, da ima množica A vsaj $m/2$ elementov.

Language: Slovenian

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.