

*Senin, 21. September 2020*

**Soal 1.** Perhatikan segiempat konveks  $ABCD$ . Titik  $P$  terletak di dalam  $ABCD$ . Perbandingan berikut berlaku:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Buktikan bahwa tiga garis berikut bertemu di satu titik: garis bagi sudut  $\angle ADP$ , garis bagi sudut  $\angle PCB$ , dan garis sumbu segmen  $AB$ .

**Soal 2.** Bilangan real  $a, b, c, d$  memenuhi  $a \geq b \geq c \geq d > 0$  dan  $a + b + c + d = 1$ . Buktikan bahwa

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

**Soal 3.** Terdapat  $4n$  batu dengan berat  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Masing-masing batu diberi warna salah satu dari  $n$  warna dan terdapat empat batu untuk setiap warna. Tunjukkan bahwa kita dapat mengatur batu-batu tersebut ke dalam dua tumpukan sehingga dua kondisi berikut terpenuhi:

- Berat total kedua tumpukan sama.
- Setiap tumpukan memuat dua batu untuk masing-masing warna.

Selasa, 22. September 2020

**Soal 4.** Terdapat sebuah bilangan  $n > 1$ . Terdapat  $n^2$  stasiun pada sebuah lereng gunung, semuanya pada ketinggian yang berbeda. Masing-masing dari dua perusahaan kereta gantung,  $A$  dan  $B$ , mengoperasikan  $k$  kereta gantung; setiap kereta gantung melakukan transfer dari satu stasiun ke stasiun yang lebih tinggi (tanpa berhenti di tengah-tengahnya). Semua  $k$  kereta gantung dari  $A$  mempunyai  $k$  titik awal yang berbeda dan  $k$  titik akhir yang berbeda, dan sebuah kereta gantung yang titik awalnya lebih tinggi juga memiliki titik akhir lebih tinggi. Kondisi yang sama juga berlaku untuk  $B$ . Kita katakan bahwa dua stasiun *terhubung* oleh suatu perusahaan, jika seseorang dapat mulai dari stasiun yang lebih rendah dan mencapai stasiun yang lebih tinggi dengan menggunakan satu atau lebih kereta gantung yang dimiliki perusahaan tersebut (pergerakan antar stasiun lain tidak diperkenankan).

Tentukan bilangan bulat positif  $k$  terkecil agar kita dapat menjamin ada dua stasiun yang terhubung oleh kedua perusahaan.

**Soal 5.** Diberikan satu pak kartu yang terdiri dari  $n > 1$  kartu. Sebuah bilangan bulat positif tertulis pada masing-masing kartu. Pak kartu ini mempunyai sifat bahwa rata-rata aritmatika dari setiap sepasang kartu juga merupakan rata-rata geometrik dari bilangan-bilangan pada sekumpulan kartu yang terdiri dari satu atau lebih kartu.

Untuk  $n$  yang manakah yang mengakibatkan bilangan pada kartu-kartu semuanya sama?

**Soal 6.** Buktikan bahwa terdapat sebuah konstanta positif  $c$  sehingga pernyataan berikut benar:

Pandang sebuah bilangan bulat  $n > 1$ , dan sebuah himpunan  $\mathcal{S}$  yang terdiri dari  $n$  titik di bidang sedemikian sehingga jarak antara dua titik berbeda di  $\mathcal{S}$  paling sedikit 1. Hal ini mengakibatkan bahwa terdapat sebuah garis  $\ell$  yang memisahkan  $\mathcal{S}$  sehingga jarak setiap titik di  $\mathcal{S}$  ke  $\ell$  paling sedikit  $cn^{-1/3}$ .

(Garis  $\ell$  *memisahkan* sekumpulan titik-titik  $\mathcal{S}$  jika terdapat segmen yang menghubungkan dua titik di  $\mathcal{S}$  yang memotong  $\ell$ .)

*Catatan.* Hasil yang lebih lemah, dengan  $cn^{-1/3}$  digantikan oleh  $cn^{-\alpha}$ , bisa mendapatkan poin bergantung kepada nilai konstanta  $\alpha > 1/3$ .