



월요일, 19. 7 월 2021

문제 1.  $n$  은 100 이상의정수이다. 민수는숫자  $n, n+1, \dots, 2n$  을서로다른  $(n+1)$  장의카드에각각하나씩적고, 이카드들을섞은후에두개의묶음으로나눴다. 이때적어도한묶음에는카드에적힌숫자의합이완전제곱수가되는두장의카드가존재함을보여라.

문제 2. 모든실수  $x_1, \dots, x_n$  에대하여다음부등식이성립함을보여라.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

문제 3. 삼각형  $ABC$  는  $AB > AC$  인예각삼각형이고, 점  $D$  는삼각형  $ABC$  의내부의점으로  $\angle DAB = \angle CAD$  를만족한다. 점  $E$  는선분  $AC$  위의점으로  $\angle ADE = \angle BCD$  를만족하고, 점  $F$  는선분  $AB$  위의점으로  $\angle FDA = \angle DBC$  를만족하고, 점  $X$  는직선  $AC$  위의점으로  $CX = BX$  를만족한다. 삼각형  $ADC$  와삼각형  $EXD$  의외심을각각  $O_1, O_2$  라하자. 세개의직선  $BC, EF, O_1O_2$  가한점에서만남을보여라.



화요일, 20. 7 월 2021

문제 4. 사각형  $ABCD$  는 볼록사각형이고, 중심이  $I$  인 원  $\Gamma$  는 선분  $AB, BC, CD, DA$  에 접한다. 삼각형  $AIC$  의 외접원을  $\Omega$  라고 하자. 선분  $BA$  의  $A$  쪽 연장선이 원  $\Omega$  와 점  $X$  에서 만나고, 선분  $BC$  의  $C$  쪽 연장선이 원  $\Omega$  와 점  $Z$  에서 만난다. 선분  $AD$  와  $CD$  의  $D$  쪽 연장선들이 원  $\Omega$  와 만나는 점을 각각  $Y$  와  $T$  라 하자. 다음이 성립함을 보여라.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

문제 5. 두 마리의 다람쥐 갑과 을이 2021 개의 도토리를 모았다. 을은 2021 개의 도토리에 1 부터 2021 까지의 숫자를 적었고, 2021 개의 구멍을 원형 배열로 뚫었다. 다음 날 갑이 각각의 구멍에 임의로 도토리를 하나씩 집어넣었다. 을은 2021 번의 시행을 통하여 도토리를 재배열하는데,  $k$ -번째 시행에서는 숫자  $k$  가 적혀있는 도토리에 인접한 두 도토리의 위치를 서로 바꾼다. 이때 다음을 만족하는  $k$  가 존재함을 보여라:  $k$ -번째 시행에서 위치를 바꾸는 두 도토리에 적힌 숫자  $a, b$  가  $a < k < b$  를 만족한다.

문제 6.  $m$  은 2 이상의 정수이다.  $A$  는 (양수일 필요가 없는) 정수들로 구성된 유한 집합이고,  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  은  $A$  의 부분집합들이다. 각각의  $k = 1, 2, \dots, m$  에 대하여  $B_k$  의 모든 원소의 합이  $m^k$  이다. 이때  $A$  가 적어도  $m/2$  개의 원소를 포함함을 보여라.