

*Martedì, 18 luglio 2017*

**Problema 1.** Per ogni intero  $a_0 > 1$ , si definisce la successione  $a_0, a_1, a_2, \dots$  tale che per ogni  $n \geq 0$ :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ è un intero,} \\ a_n + 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare tutti i valori di  $a_0$  per cui esiste un numero  $A$  tale che  $a_n = A$  per infiniti valori di  $n$ .

**Problema 2.** Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali. Determinare tutte le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che, per tutti i numeri reali  $x$  e  $y$ ,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

**Problema 3.** Un cacciatore ed un coniglio invisibile giocano nel piano euclideo. La posizione iniziale  $A_0$  del coniglio e la posizione iniziale  $B_0$  del cacciatore coincidono. Dopo  $n-1$  turni di gioco, il coniglio si trova nel punto  $A_{n-1}$  e il cacciatore si trova nel punto  $B_{n-1}$ . Nell' $n$ -esimo turno del gioco, tre cose accadono nel seguente ordine.

- (i) Il coniglio si muove in modo invisibile fino a un punto  $A_n$  tale che la distanza tra  $A_{n-1}$  e  $A_n$  è esattamente 1.
- (ii) Un sistema di localizzazione indica un punto  $P_n$  al cacciatore. L'unica garanzia fornita al cacciatore dal sistema di localizzazione è che la distanza tra  $P_n$  e  $A_n$  è al massimo 1.
- (iii) Il cacciatore si muove in modo visibile fino a un punto  $B_n$  tale che la distanza tra  $B_{n-1}$  e  $B_n$  è esattamente 1.

È sempre possibile per il cacciatore che, qualunque siano le mosse del coniglio, e qualunque siano i punti riportati dal sistema di localizzazione, egli possa scegliere le sue mosse in modo che dopo  $10^9$  turni di gioco sia sicuro che la distanza tra lui ed il coniglio non superi 100?

Mercoledì, 19 luglio 2017

**Problema 4.** Siano  $R$  ed  $S$  punti distinti su una circonferenza  $\Omega$  tali che  $RS$  non è un diametro di  $\Omega$ . Sia  $\ell$  la retta tangente ad  $\Omega$  in  $R$ . Il punto  $T$  è tale che  $S$  è il punto medio del segmento  $RT$ . Il punto  $J$  è scelto sul più corto arco  $RS$  di  $\Omega$  in modo tale che la circonferenza  $\Gamma$  circoscritta al triangolo  $JST$  intersechi  $\ell$  in due punti distinti. Sia  $A$  il punto comune di  $\Gamma$  ed  $\ell$  più vicino ad  $R$ . La retta  $AJ$  interseca nuovamente  $\Omega$  in  $K$ .

Dimostrare che la retta  $KT$  è tangente a  $\Gamma$ .

**Problema 5.** Sia  $N \geq 2$  un intero. Gli  $N(N+1)$  giocatori di una squadra di calcio, tutti di altezze differenti, sono disposti in fila. L'allenatore vuole escludere  $N(N-1)$  giocatori da questa fila in modo che la fila risultante, formata dai  $2N$  giocatori restanti, soddisfi le  $N$  condizioni seguenti:

- (1) non c'è nessuno tra i due giocatori più alti,
- (2) non c'è nessuno tra il terzo ed il quarto giocatore più alto,

⋮

- ( $N$ ) non c'è nessuno tra i due giocatori più bassi.

Dimostrare che questo è sempre possibile.

**Problema 6.** Una coppia ordinata  $(x, y)$  di interi si dice *punto primitivo* se il massimo comun divisore tra  $x$  e  $y$  è uguale a 1. Dato un insieme finito  $S$  di punti primitivi, dimostrare che esistono un intero positivo  $n$  e interi  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tali che per ogni  $(x, y)$  in  $S$  si abbia

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$