Language: **Bosnian**

Day: **1**

*Srijeda, 7. jul , 2010*

**Zadatak 1.** Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

( $\lfloor z\rfloor$ je najveći cijeli broj ne veći od $z$.)

**Zadatak 2.** Neka je $I$ centar upisanog kruga trokuta $\triangle ABC$ i neka je $\Gamma$ opisana kružnica tom trokutu. Neka prava $AI$ siječe $\Gamma$ u tačkama $A$ i $D$. Neka je $E$ tačka na luku $\widehat{BDC}$ i $F$ tačka na duži $BC$ tako da je

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC.$$

Neka je $G$ središte duži $IF$. Dokazati da presjek pravih $DG$ i $EI$ pripada $\Gamma$.

**Zadatak 3.** Neka je $\mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva. Odrediti sve funkcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

kvadrat prirodnog broja za sve $m, n \in \mathbb{N}$.



*Vrijeme: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki problem vrijedi 7 bodova*

*Četvrtak, 8.jul, 2010*

**Zadatak 4.** Neka je $P$ tačka u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$. Neka prave $AP$, $BP$ i $CP$ sijeku opisanu kružnicu $\Gamma$ trokuta $\triangle ABC$ po drugi put u tačkama $K$, $L$ i $M$ respektivno. Tangenta kružnice $\Gamma$ u tački $C$ siječe pravu $AB$ u $S$. Pretpostavimo da je $SC = SP$. Dokazati da je tada $MK = ML$.

**Zadatak 5.** U svakoj od šest kutija $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ na početku se nalazi tačno jedan novčić. Dozvoljene su dvije vrste poteza:

*Type* 1: Izaberemo nepraznu kutiju $B_j$ za $1 \le j \le 5$. Uklonimo jedan novčić iz $B_j$ i dodamo dva novčića u $B_{j+1}$.

*Type* 2: Izaberemo nepraznu kutiju $B_k$ za $1 \le k \le 4$. Uklonimo jedan novčić iz $B_k$ i zamjenimo sadržaje (moguće praznih) kutija $B_{k+1}$ i $B_{k+2}$.

Ispitati postoji li konačan niz dozvoljenih poteza takav da su na kraju kutije $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ prazne i kutija $B_6$ sadrži tačno $2010^{2010^{2010}}$ novčića. (Važi $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

**Zadatak 6.** Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavimo da za neki prirodan broj $s$, važi

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

za sve $n > s$. Dokazati da postoje prirodni brojevi $\ell$ i $N$, takvi da je $\ell \le s$ i za koje važi $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ za sve $n \ge N$.



*Vrijeme: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki problem vrijedi 7 bodova.*