Çərşənbə, 7 iyul 2010

<u>Məsələ 1.</u> Bütün $x, y \in R$ həqiqi ədədləri üçün

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

şərtini ödəyən bütün $f : R \to R$ funksiyalarını təyin edin. (Burada $[z]$ ilə z ədədini aşmayan ən böyük tam ədəd işarə edilmişdir).

<u>Məsələ 2.</u> I nöqtəsi ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi, Γ isə, həmin üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə olsun. AI düz xətti Γ çevrəsini növbəti dəfə D nöqtəsində kəsir. E nöqtəsi BDC qövsünün, F nöqtəsi isə BC tərəfinin üzərində elə götürülmüşdür ki,

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC .$$

IF parçasının orta nöqtəsi G olsun. Isbat edin ki, DG və EI düz xətləri Γ çevrəsi üzərində kəsişirlər.

<u>Məsələ 3.</u> N ilə bütün müsbət tam ədədlər çoxluğunu işarə edək. Elə bütün $g : N \to N$ funksiyalarını təyin edin ki, bütün $m, n \in N$ ədədləri üçün

$$\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$$

ədədi tam kvadrat olsun.

İmatahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal dəyərindədir.

Language: *Azerbaijan*

Cümə axşamı, 8 iyul 2010

Məsələ 4. ABC üçbucağının daxilində P nöqtəsi verilmişdir. AP, BP və CP düz xətləri ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş Γ çevrəsini növbəti dəfə uyğun olaraq K, L və M nöqtələrində kəsirlər. Γ çevrəsinə C nöqtəsində çəkilən toxunan AB düz xəttini S nöqtəsində kəsir. Məlumdur ki, $SC=SP$. Isbat edin ki, $MK=ML$.

Məsələ 5. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ilə işarə edilmiş altı qutunun hər birində əvvəlcədən sadəcə bir ədəd dəmir pul vardır. Aşağıdakı iki tip əməliyyatları aparmağa imkan verilir:

1-ci tip: $1 \le j \le 5$ olmaqla istənilən boş olmayan B_j qutusunu seçərək ondan bir dəmir pulu çıxarmaq və B_{j+1} qutusuna iki dəmir pul əlavə etmək.

2-ci tip: $1 \le k \le 4$ olmaqla istənilən boş olmayan B_k qutusunu seçərək ondan bir dəmir pulu çıxarmaq və B_{k+1} (boş olada bilər) qutularının içindəkiləri ilə B_{k+2} (boş olada bilər) qutularının içindəkilərinin yerini dəyişmək.

Bu cür əməliyyatların sonlu ardıcıllığı varmıdır ki, elə bir hal alınsın ki, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 qutuları boş qalsın və B_6 qutusunda tam $2010^{2010^{2010}}$ sayda dəmir pul olsun?

(Tərifə görə: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$).

Məsələ 6. Müsbət həqiqi ədədlərdən ibarət $a_1, a_2, a_3, \dots$ ədədi ardıcıllığı verilmişdir. Məlumdur ki, hər hansı bir müəyyən edilmiş müsbət tam s ədədi üçün $n > s$ olmaqla

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

bərabərliyi ödənilir. Isbat edin ki, elə müsbət tam ℓ və N ədədləri var ki, $\ell \le s$ və bütün $n \ge N$ ədədləri üçün $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ olsun.

İmatahana ayrılan vaxt: 4 saat 30 dəqiqə.

Hər bir sual 7 bal dəyərindədir.