12 luglio 2006

Problema 1. Sia ABC un triangolo e sia I il centro della sua circonferenza inscritta. Sia P un punto interno al triangolo tale che

$$P\widehat{B}A + P\widehat{C}A = P\widehat{B}C + P\widehat{C}B.$$

Dimostrare che $AP \geq AI$ e che vale l'uguaglianza se e solo se $P = I$.

Problema 2. Sia P un 2006-agono regolare. Una diagonale di P si dice *buona* se i suoi estremi dividono il bordo di P in due parti ognuna delle quali è composta da un numero dispari di lati di P. I lati di P sono considerati anch'essi *buoni*.

Supponiamo che P sia stato suddiviso in triangoli da 2003 diagonali che a due a due non hanno nessun punto in comune all'interno di P. Determinare il massimo numero di triangoli isosceli aventi due lati buoni che possono apparire in una tale suddivisione.

Problema 3. Determinare il più piccolo numero reale M tale che la disuguaglianza

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

sia soddisfatta per tutti i numeri reali a, b, c.

Tempo; 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

13 luglio 2006

Problema 4. Determinare tutte le coppie (x, y) di interi tali che

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n > 1$ con coefficienti interi e sia k un intero positivo. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dove P compare k volte. Dimostrare che ci sono al più n interi t tali che $Q(t) = t$.

Problema 6. Assegniamo ad ogni lato b di un poligono convesso P la massima area di un triangolo che ha b come lato ed è contenuto in P. Dimostrare che la somma delle aree assegnate ai lati di P è maggiore o uguale al doppio dell'area di P.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti