

יום שלישי, 16 ביולי 2024

**שאלה 1.** מצאו את כל המספרים ממשיים  $\alpha$  עבורם מקיימים שלכל  $n$  שלם חיובי, המספר השלם

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

הוא כפולה של  $n$ . (כאן  $\lfloor z \rfloor$  מסמן את השלם הגדל ביותר שקטן או שווה ל- $-z$ . לדוגמה,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  וכן  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**שאלה 2.** מצאו את כל הזוגות של שלמים חיוביים  $(a, b)$  עבורם קיימים שלמים חיוביים  $g$  ו- $N$  המקיימים

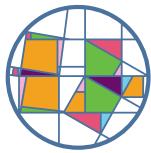
$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

לכל  $N \geq n$  שלם. (כאן  $\gcd(x, y)$  מסמן את המחלק המשותף המרבי של השלמים  $x$  ו- $y$ .)

**שאלה 3.** תהא  $a_1, a_2, a_3, \dots$  סדרה אינסופית של שלמים חיוביים, וכי  $N > n$  שלם חיובי. נתון כי לכל  $N$  שווה למספר המופעים של  $a_{n-1}$  בראשימה  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .

הוכחו כי לפחות אחת מהסדרות  $a_1, a_3, a_5, \dots$  ו-  $a_2, a_4, a_6, \dots$  היא מחזורייה החל ממקום מסוים.

(סדרה אינסופית נקראת **מחזורייה החל ממקום מסוים** אם קיימים שלמים חיוביים  $p$  ו- $M$  עבורם מקיימים  $(m \geq M \text{ לכל } b_{m+p} = b_m)$



יום רביעי, 17 ביולי 2024

**שאלה 4.** יהא  $ABC$  משולש בו מתקיים  $AB < AC < BC$ . נסמן ב- $\omega$  את המנגל החסום ב- $ABC$  וב- $I$  את מרכזו. נסמן ב- $X$  את נקודה על היגר  $BC$  שונה מ- $C$  עבורה היגר המקביל ל- $AC$  דרך  $X$  משיק ל- $\omega$ . בדומה, נסמן ב- $Y$  את נקודה על היגר  $BC$  שונה מ- $B$  עבורה היגר המקביל ל- $AB$  דרך  $Y$  משיק ל- $\omega$ . נסמן את נקודות החיתוך השנייה של  $AI$  עם המנגל החסום של  $ABC$  ב- $P$ . נסמן ב- $K$  וב- $L$  את אמצעי הצלעות  $AC$  ו- $AB$ , בהתאם. הוכיחו כי  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**שאלה 5.** טורבו החילזון משחקים במשחק על לוח משבצות עם 2024 שורות ו-2023 עמודות. ב-2022 משבצות הלוח מתחבאות מפלצות. בהתחלה טורבו לא יודע היכן ממוקמת אף מפלצת, אבל הוא יודע שיש בדיקן מפלצת אחת בכל שורה חוץ מבראשונה ובאחרונה, ושבכל עמודה יש לפחות היותר מפלצת אחת.

טורבו מנסה מספר פעמים להגיע מהשורה הראשונה לאחרונה. בכל ניסיון, הוא בוחר משבצת התחליה כלשהי בשורה הראשונה, וזהול משבצת למשבצת סמוכה לפיה צלע שוב ושוב. (ሞתר לטורבו לחזור למשבצת שכבר ביקר בה.) אם טורבו מגיע למשבצת עם מפלצת, הניסיון מסתיים, ואיליה מחזירה אותו לשורה הראשונה עברו הניסיון הבא. המפלצות לא זותת, וטורבו זוכר אם יש או אין מפלצת בכל משבצת בה ביקר. אם טורבו מגיע למשבצת כלשהי בשורה לאחרונה, הניסיון מסתיים והמשחק נגמר.

מצאו את המספר הקטן ביותר  $n$  עבורו יש אסטרטגיה שבטייה שיצליה להגיע לשורה לאחרונה תוך  $n$  ניסיונות או פחות, ללא תלות במיקומי המפלצות.

**שאלה 6.** נסמן ב- $\mathbb{Q}$  את קבוצת המספרים הרציונליים. פונקציה  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  היא קולחת אם מתקיימת התכונה הבאה: לכל  $x, y \in \mathbb{Q}$ , מתקיים  $f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$  או  $f(f(x) + y) = x + f(y)$ .

הראו כי קיימים  $c$  שלם עבורו לכל פונקציה קולחת  $f$  ישם לכל היותר  $c$  מספרים רציונליים שונים מהצורה  $f(r) + f(-r)$  עבור  $r$  רציונלי כלשהו, ומצביע את הערך הקטן ביותר האפשרי של  $c$ .