*Tirsdag d. 16. juli 2019*

**Opgave 1.** Lad $\mathbb{Z}$ være mængden af hele tal. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ så der for alle hele tal $a$ og $b$ gælder at

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

**Opgave 2.** I trekant $ABC$ er $A_1$ et punkt på siden $BC$, og $B_1$ er et punkt på siden $AC$. Lad $P$ og $Q$ være punkter på henholdsvis linjestykket $AA_1$ og linjestykket $BB_1$ så $PQ$ er parallel med $AB$. Lad $P_1$ være et punkt på linjen $PB_1$ så $B_1$ ligger mellem $P$ og $P_1$ og $\angle PP_1C = \angle BAC$. Lad tilsvarende $Q_1$ være et punkt på linjen $QA_1$ så $A_1$ ligger mellem $Q$ og $Q_1$ og $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Vis at punkterne $P$, $Q$, $P_1$ og $Q_1$ ligger på en cirkel.

**Opgave 3.** I et socialt netværk med 2019 brugere er nogle par af brugere venner. Hvis bruger $A$ er ven med bruger $B$, så er bruger $B$ også ven med bruger $A$. Følgende venskabsskift kan ske flere gange, men der kan ikke ske flere venskabsskift på samme tid:

> Tre brugere $A$, $B$ og $C$ hvor $A$ er ven med både $B$ og $C$, men hvor $B$ og $C$ ikke er venner, kan lave et venskabsskift sådan at $B$ og $C$ nu er venner, men $A$ ikke længere er venner med nogen af dem. Ingen andre venskaber ændres ved dette venskabsskift.

Til at begynde med har 1010 brugere 1009 venner, mens de resterende 1009 brugere har 1010 venner. Vis at der findes en række af venskabsskift så hver bruger efter denne række venskabsskift højst har en ven i netværket.



*Varighed: 4 timer og 30 minutter.*
*Hver opgave kan give op til 7 point.*

*Onsdag d. 17. juli 2019*

**Opgave 4.** Bestem alle par $(k, n)$ af positive hele tal så

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

**Opgave 5.** Bath Bank udsteder mønter med $H$ på den ene side og $T$ på den anden. Georg har $n$ af disse mønter arrangeret på en række fra venstre mod højre. Han gentager følgende operation: Hvis der er præcis $k > 0$ mønter som viser $H$, så vender han den $k$'te mønt fra venstre i rækken. Ellers viser alle mønter $T$, og han stopper. Hvis for eksempel $n = 3$, og Georg starter med startkonfigurationen $THT$, så stopper han efter tre operationer: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$.

(a) Vis at for hver eneste startkonfiguration, så stopper Georg efter et endeligt antal operationer.

(b) For hver startkonfiguration $C$ lad $L(C)$ være antallet af operationer før Georg stopper. For eksempel er $L(THT) = 3$ og $L(TTT) = 0$. Bestem gennemsnittet af samtlige værdier af $L(C)$ for alle $2^n$ mulige startkonfigurationer $C$.

**Opgave 6.** Lad $I$ være centrum for den indskrevne cirkel til den spidsvinklede trekant $ABC$ hvor $AB \neq AC$. Den indskrevne cirkel $\omega$ til trekant $ABC$ tangerer siderne $BC$, $CA$ og $AB$ i henholdsvis $D$, $E$ og $F$. Linjen gennem $D$ vinkelret på $EF$ skærer $\omega$ igen i $R$. Linjen $AR$ skærer $\omega$ igen i $P$. De omskrevne cirkler til henholdsvis trekant $PCE$ og trekant $PBF$ skærer hinanden igen i $Q$.

Vis at linjerne $DI$ og $PQ$ skærer hinanden i et punkt på linjen gennem $A$ vinkelret på $AI$.

*Language: Danish*

*Varighed: 4 timer og 30 minutter.*
*Hver opgave kan give op til 7 point.*