Juma, 10 iyul, 2015 yil

1-masala. Tekislikdagi nuqtalardan tashkil topgan chekli $\mathcal{S}$ to'plam *balanslangan* deyiladi, agar $\mathcal{S}$ to'plamdagi ixtiyoriy turli A va B nuqtalar uchun $AC = BC$ tenglikni qanoatlantiradigan $\mathcal{S}$ to'plamga tegishli C nuqta mavjud bo'lsa. $\mathcal{S}$ to'plam *markazlardan ozod* deyiladi, agar $\mathcal{S}$ to'plamdagi ixtiyoriy turli uchta A, B va C nuqtalar uchun $PA = PB = PC$ tengliklarni qanoatlantiradigan $\mathcal{S}$ to'plamga tegishli P nuqta mavjud bo'lmasa.

(a) Har qanday butun $n \geq 3$ uchun n ta nuqtadan tashkil topgan balanslangan to'plam mavjudligini isbotlang.

(b) Shunday barcha $n \geq 3$ butun sonlar topilsinki, bunda n ta nuqtadan tashkil topgan balanslangan markazlardan ozod to'plam mavjud bo'lsin.

2-masala. Natural sonlarning (a, b, c) uchliklari barchasi topilsinki, bunda

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

sonlarning har biri 2 ning darajasi bo'lsin.

(2^n *ko'rinishdagi son 2 ning darajasi deyiladi, bu yerda* n *nomanfiy butun son.*)

3-masala. O'tkir burchakli ABC uchburchakda $AB > AC$ bo'lsin. Γ – unga tashqi chizilgan aylana, H nuqta uning ortomarkazi, F nuqta esa uchburchakning A uchidan tushurilgan balandlik asosi bo'lsin. M nuqta BC tomonning o'rtasi bo'lsin. $\angle HQA = 90°$ bo'ladigan Γ aylanaga tegishli Q nuqta, hamda $\angle HKQ = 90°$ bo'ladigan Γ aylanaga tegishli K nuqta olingan. A, B, C, K va Q nuqtalar turli bo'lib, ko'rsatilgan shu tartibda Γ aylanada yotsin.

KQH va FKM uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar bir-biriga urinishini isbotlang.

Ajratilgan vaqt:4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi

Shanba, 11 iyul, 2015 yil

4-masala. Ω aylana ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana, O nuqta esa uning markazi bo'lsin. Markazi A nuqtada bo'lgan Γ aylana BC kesmani D va E nuqtalarda shunday kesadiki, bunda B, D, E va C nuqtalar hammasi turli bo'lib, ular BC to'g'ri chiziqda shu ko'rsatilgan tartibda jotsin. Γ va Ω aylanalar F va G nuqtalarda kesishsin, bunda $A,\ F,\ B, C$ va G nuqtalar Ω da shu ko'rsatilgan tartibda jotibdi. BDF uchburchakka tashqi chizilgan aylana AB kesmani ikkinchi marta K nuqtada kessin. CGE uchburchakka tashqi chizilgan aylana CA kesmani ikkinchi marta L nuqtada kessin.

FK va GL to'g'ri chiziqlar turli bo'lib, ular X nuqtada kesishsin. X nuqta AO to'g'ri chiziqda jotishini isbotlang.

5-masala. $\mathbb{R}$ - haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Barcha haqiqiy x va y sonlar uchun

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

tenglamani qanoatlantiradigan barcha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarni toping.

6-masala. $a_1, a_2, \ldots$ butun sonlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

(i) barcha $j \geq 1$ uchun $1 \leq a_j \leq 2015$;

(ii) barcha $1 \leq k < l$ uchun $k + a_k \neq l + a_l$.

$n > m \geq N$ shartni qanoatlantiradigan barcha butun m va n larda

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

munosabatni qanoatlaniradigan ikkita natural b va N sonlar mavjudligini isbotlang.

Vaqt: 4 soat 30 minut
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi