

12. julij 2006

Naloga 1. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC . Za točko P v notranjosti trikotnika velja

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokaži, da je $|AP| \geq |AI|$ in da enakost velja natanko takrat, ko je $P = I$.

Naloga 2. Za diagonalo pravilnega 2006-kotnika P rečemo, da je *dobra*, če njeni krajišči razdelita rob P na dva dela tako, da je v vsakem izmed njiju liho mnogo stranic večkotnika P . Za vse stranice večkotnika P rečemo, da so *dobre*.

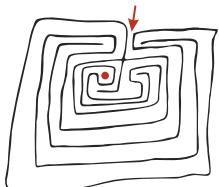
Denimo, da P razdelimo z 2003 diagonalami na trikotnike tako, da se nobeni dve diagonali ne sekata v notranjosti P . Določi največje možno število enakokrakih trikotnikov z dvema dobrima stranicama, ki jih lahko dobimo pri takih razdelitvah večkotnika P .

Naloga 3. Določi najmanjše realno število M , za katerega velja neenakost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

za vsa realna števila a , b in c .

*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.*



13. julij 2006

Naloga 4. Določi vse pare celih števil (x, y) , za katere velja

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Naloga 5. Naj bo $P(x)$ polinom stopnje n , $n > 1$, s celoštevilskimi koeficienti in naj bo k pozitivno celo število. Oglejmo si polinom $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, kjer se P pojavi k -krat. Dokaži, da obstaja največ n takšnih celih števil t , za katere velja $Q(t) = t$.

Naloga 6. Vsaki stranici b konveksnega večkotnika P priredimo največjo izmed ploščin trikotnikov, ki so vsebovani v P in katerih ena od stranic se ujema z b . Dokaži, da je vsota ploščin, ki so prirejene stranicam večkotnika P , vsaj dvakratnik ploščine večkotnika P .

*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.*