



Utorok, 10. júl, 2012

Úloha 1. Daný je trojuholník ABC . Označme J stred kružnice pripísanej k strane BC . Táto kružnica sa dotýka strany BC v bode M a priamok AB , AC postupne v bodoch K , L . Priamky LM a BJ sa pretínajú v bode F , priamky KM a CJ v bode G . Nech S je priesečník priamok AF , BC a T priesečník priamok AG , BC . Dokážte, že M je stredom úsečky ST .

(Kružnica *pripísaná* k strane BC trojuholníka ABC je kružnica, ktorá sa dotýka úsečky BC , polpriamky opačnej k polpriamke BA a polpriamky opačnej k polpriamke CA .)

Úloha 2. Dané je celé číslo $n \geq 3$. Nech a_2, a_3, \dots, a_n sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokážte, že

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Úloha 3. Hru „Myslím si číslo“ s povoleným klamaním hrajú dvaja hráči A a B . Pravidlá hry závisia od dvoch kladných celých čísel k a n , ktoré poznajú obaja hráči.

Na začiatku hry hráč A zvolí dve celé čísla x a N , pričom $1 \leq x \leq N$. Číslo x hráč A uchová v tajnosti a pravdivo prezradí hráčovi B číslo N . Hráč B sa potom pokúša zistiť informácie o čísle x kladením otázok hráčovi A nasledovným spôsobom: každá jeho otázka pozostáva z voľby ľubovoľnej množiny kladných celých čísel S (môže to byť aj rovnaká množina, akú použil v niektorej predošlej otázke) a opýtania sa hráča A , či číslo x patrí do S . Hráč B môže položiť toľko otázok, koľko len chce. Hráč A musí na každú z otázok hráča B okamžite odpovedať *áno* alebo *nie*, môže však klamať, koľko sa mu zachce. Jediným obmedzením je, že medzi každými $k + 1$ po sebe idúcimi odpoveďami hráča A musí byť aspoň jedna odpoveď pravdivá.

Potom, ako hráč B položí toľko otázok, koľko chce, určí množinu X obsahujúcu nanajvýš n kladných celých čísel. Ak x patrí do X , hráč B vyhral; inak prehral. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $n \geq 2^k$, tak hráč B má víťaznú stratégiu.
2. Pre každé dostatočne veľké číslo k existuje celé číslo $n \geq 1,99^k$ také, že B nemá víťaznú stratégiu.



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Slovak**

Day: **2**

Streda, 11. júl, 2012

Úloha 4. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla a, b, c spĺňajúce $a+b+c = 0$ platí

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Symbolom \mathbb{Z} označujeme množinu všetkých celých čísel.)

Úloha 5. V danom pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C označme D päť výšky z vrcholu C . Nech X je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CD . Označme K taký bod na úsečke AX , že $|BK| = |BC|$. Podobne označme L taký bod na úsečke BX , že $|AL| = |AC|$. Priesečník priamok AL a BK označme M . Dokážte, že $|MK| = |ML|$.

Úloha 6. Určte všetky kladné celé čísla n , pre ktoré existujú nezáporné celé čísla a_1, a_2, \dots, a_n také, že

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Slovak

*Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.*