

понеделник, 21. септември 2020

Задача 1. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точката P е во внатрешноста на $ABCD$. Важат следните соодноси:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажете дека следните три прави имаат заедничка точка: внатрешните симетрали на аглиите $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и симетралата на отсечката AB .

Задача 2. Реалните броеви a, b, c, d се такви што $a \geq b \geq c \geq d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажете дека

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Задача 3. Имаме $4n$ камчиња со маси $1, 2, 3, \dots, 4n$. Секое камче е обоено со една од n бои и има по четири камчиња од секоја боја. Докажете дека камчињата може да се распределат во две купчиња, така што следните два услови се задоволени:

- Вкупните маси на двете купчиња се еднакви.
- Секое купче содржи по две камчиња од секоја боја.

вторник, 22. септември 2020

Задача 4. Даден е цел број $n > 1$. На падините на една планина има n^2 постојки, сите на различни височини. Секоја од две компании, A и B , работи со k жичници; секоја жичница овозможува пренос од една постојка до повисока постојка (без попатни застанувања). Сите k жичници на A имаат k различни стартни постојки и имаат k различни завршни постојки, при што жичница која стартува повисоко завршува повисоко. Истите услови важат и за B . Велиме дека две постојки се *сврзани* од компанија доколку може да се стигне од пониската до повисоката користејќи една или неколку жичници од таа компанија (никакви други движења помеѓу постојките не се дозволени).

Одредете го најмалиот позитивен цел број k за кој со сигурност може да се тврди дека постојат две постојки кои се сврзани и од двете компании.

Задача 5. Даден е шпил со $n > 1$ карти. На секоја карта е запишан по еден позитивен цел број. Шпилот го има следното својство: аритметичката средина од броевите запишани на било кои две карти е еднаква со геометриската средина од колекцијата броеви запишани на картите од некое подмножество од шпилот.

За кои вредности на n следува дека броевите на сите карти се еднакви?

Задача 6. Докажете дека постои позитивна константа c за која важи следното тврдење:

Нека $n > 1$ е цел број и S е множество од n точки во рамнината такви што растојанието меѓу секои две различни точки од S е барем 1. Тогаш следува дека постои права ℓ која го раздвојува множеството S таква што растојанието од било која точка од S до ℓ е барем $cn^{-1/3}$.

(Велиме дека права ℓ *раздвојува* множество точки S доколку некоја отсечка чии краеве се во S е пресечена од правата ℓ .)

Забелешка. Послаб резултат каде $cn^{-1/3}$ е заменето со $cn^{-\alpha}$ може да се вреднува зависно од вредноста на константата $\alpha > 1/3$.