

วันจันทร์ที่ ๒๑ กันยายน พ.ศ. ๒๕๖๓

โจทย์ข้อ 1. พิจารณารูปสี่เหลี่ยม quadrilateral $ABCD$ จุด P เป็นจุดภายในของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ สัดส่วนต่อไปนี้เป็นจริง

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

งพิสูจน์ว่าเส้นตรงทั้งสามเส้นต่อไปนี้ตัดกันที่จุดเดียว: เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม $\angle ADP$, เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม $\angle PCB$ และ เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของส่วนของเส้นตรง AB

โจทย์ข้อ 2. จำนวนจริง a, b, c, d สอดคล้องกับ $a \geq b \geq c \geq d > 0$ และ $a + b + c + d = 1$ งพิสูจน์ว่า

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

โจทย์ข้อ 3. มีหินอยู่ $4n$ ก้อนซึ่งมีน้ำหนัก $1, 2, 3, \dots, 4n$ หินแต่ละก้อนมีสีเป็นหนึ่งในสี n สี และในแต่ละสีมีหินอยู่สักก้อน งแสดงว่าสามารถแบ่งหินเหล่านี้ออกเป็นสองกองโดยสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้

- น้ำหนักร่วมของแต่ละกองมีค่าเท่ากัน
- แต่ละกองบรรจุหินสองก้อนจากแต่ละสี

วันอังคารที่ ๒๒ กันยายน พ.ศ. ๒๕๖๓

โจทย์ข้อ 4. มีจำนวนเต็ม $n > 1$ มีสถานีอยู่ n^2 สถานีบนทางขึ้นเขา ณ ระดับความสูงที่แตกต่างกัน มีบริษัท กระเช้าไฟฟ้าสองบริษัท A และ B ซึ่งแต่ละบริษัทให้บริการกระเช้า k กระเช้า แต่ละกระเช้าขนสูงจากสถานี หนึ่งไปยังอีกสถานีหนึ่งที่สูงกว่า (โดยไม่มีการหยุดระหว่างทาง) กระเช้า k กระเช้าของบริษัท A เริ่มต้นการให้ บริการที่สถานี k สถานีที่แตกต่างกัน และสิ้นสุดที่สถานี k สถานีที่แตกต่างกัน และกระเช้าที่เริ่มที่สถานีที่สูงกว่า จะสิ้นสุดที่สถานีที่สูงกว่าด้วย เงื่อนไขเดียวกันนี้เป็นจริงสำหรับบริษัท B เช่นกัน กล่าวว่าสถานีสองสถานี เชื่อมต่อกัน โดยบริษัทหนึ่งถ้าสามารถเดินทางจากสถานีที่ต่ำกว่าไปยังสถานีที่สูงกว่าได้โดยใช้กระเช้าหนึ่งกระ เช้าเป็นอย่างน้อยของบริษัทนั้นเพียงบริษัทดียว (โดยไม่มีการเดินทางระหว่างสถานีในรูปแบบอื่น)

จงหาจำนวนเต็มบวก k เล็กสุดที่การันตีว่ามีสถานีสองสถานีที่เชื่อมต่อกันโดยทั้งสองบริษัท

โจทย์ข้อ 5. ไฟสำรับหนึ่งมีไฟอยู่ $n > 1$ ใบ มีจำนวนเต็มบวกหนึ่งจำนวนเขียนอยู่บนไฟแต่ละใบ ไฟสำรับนี้ มีสมบัติว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวเลขบนไฟแต่ละคู่จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวเลขบนไฟของบาง คอลเลกชันที่มีไฟหนึ่งใบขึ้นไปด้วย

สำหรับ n ใดบ้างที่ทำให้สรุปได้ว่าตัวเลขบนไฟมีค่าเท่ากันทั้งหมด

โจทย์ข้อ 6. จงพิสูจน์ว่ามีค่าคงตัวบวก c ซึ่งทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

พิจารณาจำนวนเต็ม $n > 1$ และเซต S ของจุด n จุดบนระนาบซึ่งจุดสองจุดที่แตกต่างกันใด ๆ ใน S มี ระยะห่างอย่างน้อย 1 จะได้ว่ามีเส้นตรง ℓ ที่แยก S โดยที่ระยะห่างจากจุดใด ๆ ใน S ไปยัง ℓ มีค่าอย่างน้อย $cn^{-1/3}$

(เส้นตรง ℓ แยก เซต S ของจุด ถ้าบางส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใน S ตัดกันภายในกับ ℓ)

หมายเหตุ. หากได้ข้อสรุปที่อ่อนกว่าเป็น $cn^{-\alpha}$ แทนที่จะเป็น $cn^{-1/3}$ อาจมีคะแนนโดยขึ้นอยู่กับค่าของค่าคงตัว $\alpha > 1/3$