



Language: Russian

Day: 1

Пятница, 10 июля 2015 г.

Задача 1. Конечное множество \mathcal{S} точек на плоскости будем называть *сбалансированным*, если для любых различных точек A и B из множества \mathcal{S} найдется точка C из множества \mathcal{S} такая, что $AC = BC$. Множество \mathcal{S} будем называть *эксцентричным*, если для любых трех различных точек A , B и C из множества \mathcal{S} не существует точки P из множества \mathcal{S} такой, что $PA = PB = PC$.

- (а) Докажите, что для любого целого $n \geq 3$ существует сбалансированное множество, состоящее из n точек.
- (б) Найдите все целые $n \geq 3$, для которых существует сбалансированное эксцентричное множество, состоящее из n точек.

Задача 2. Найдите все тройки (a, b, c) целых положительных чисел такие, что каждое из чисел

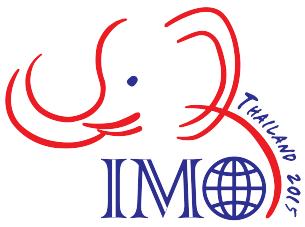
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

является степенью двойки.

(Степенью двойки называется число вида 2^n , где n — целое неотрицательное число.)

Задача 3. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AB > AC$. Пусть Γ — окружность, описанная около него, H — его ортоцентр, а F — основание высоты, опущенной из вершины A . Пусть M — середина стороны BC . Пусть Q — точка на окружности Γ такая, что $\angle HQA = 90^\circ$, а K — точка на окружности Γ такая, что $\angle HKQ = 90^\circ$. Пусть точки A, B, C, K и Q различны и лежат на окружности Γ в указанном порядке.

Докажите, что окружности, описанные около треугольников KQH и FKM , касаются друг друга.



Language: Russian

Day: 2

Суббота, 11 июля 2015 г.

Задача 4. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC , а точка O — ее центр. Окружность Γ с центром A пересекает отрезок BC в точках D и E так, что точки B, D, E и C все различны и лежат на прямой BC в указанном порядке. Пусть F и G — точки пересечения окружностей Γ и Ω , при этом точки A, F, B, C и G лежат на Ω в указанном порядке. Пусть K — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника BDF , и отрезка AB . Пусть L — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника CGE , и отрезка CA .

Пусть прямые FK и GL различны и пересекаются в точке X . Докажите, что точка X лежит на прямой AO .

Задача 5. Пусть \mathbb{R} — множество всех действительных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

для всех действительных чисел x и y .

Задача 6. Последовательность a_1, a_2, \dots целых чисел удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ для всех $j \geq 1$;
- (ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ для всех $1 \leq k < \ell$.

Докажите, что существуют два положительных целых числа b и N таких, что

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

для всех целых чисел m и n , удовлетворяющих условию $n > m \geq N$.