

12 juli 2006

Opgave 1. Zij ABC een driehoek en I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Voor een punt P in het inwendige van de driehoek geldt:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Bewijs dat $AP \geq AI$, en dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als $P = I$.

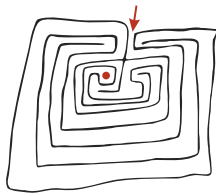
Opgave 2. Zij P een regelmatige 2006-hoek. Een diagonaal van P noemen we *goed* als zijn eindpunten de rand van P verdelen in twee stukken die beide bestaan uit een oneven aantal zijden van P . De zijden van P noemen we ook *goed*.

Stel dat P door 2003 diagonalen in driehoeken wordt verdeeld, zodanig dat geen twee diagonalen elkaar snijden in het inwendige van P . Bepaal het grootste aantal gelijkbenige driehoeken met twee goede zijden die in zo'n verdeling van P kunnen voorkomen.

Opgave 3. Bepaal het kleinste reële getal M zodanig dat voor alle reële getallen a , b en c de volgende ongelijkheid geldt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten



13 juli 2006

Opgave 4. Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Opgave 5. Zij $P(x)$ een polynoom (veelterm) van graad $n > 1$ met gehele coëfficiënten en zij k een positief geheel getal ($k > 0$). Beschouw het polynoom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

waarin P precies k keer voorkomt.

Bewijs dat er ten hoogste n gehele getallen t zijn zodanig dat $Q(t) = t$.

Opgave 6. Zij P een convexe veelhoek. Aan elke zijde b van P wordt de maximale oppervlakte toegekend van een driehoek die b als een zijde heeft en bevat is in P .

Bewijs dat de som van alle oppervlaktes die zijn toegekend aan de zijden van P ten minste tweemaal zo groot is als de oppervlakte van P .

*Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten*