maandag 11 juli 2022

Opgave 1. De Bank van Oslo geeft twee soorten munten uit: van aluminium (genoteerd met een A) en van brons (genoteerd met een B). Máxima heeft n aluminium munten en n bronzen munten in een willekeurige beginvolgorde op een rij gelegd. Een *keten* is een willekeurige deelrij van opeenvolgende munten van dezelfde soort. Gegeven een vast geheel getal k met $1 \leqslant k \leqslant 2n$, voert Máxima herhaaldelijk de volgende handeling uit: ze bepaalt de langste keten die de k-de munt vanaf links bevat, en verplaatst alle munten in die keten naar het begin van de rij. Bijvoorbeeld, als $n = 4$ en $k = 4$, dan zouden de opeenvolgende handelingen bij beginvolgorde $AABBBABA$ als volgt zijn:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Bepaal alle paren (n, k) met $1 \leqslant k \leqslant 2n$ zodanig dat voor elke beginvolgorde op een gegeven moment in het proces de eerste n munten vanaf links allemaal van dezelfde soort zijn.

Opgave 2. Zij $\mathbb{R}_{>0}$ de verzameling van (strikt) positieve reële getallen. Bepaal alle functies $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ zodanig dat er voor alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ precies één $y \in \mathbb{R}_{>0}$ is met

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Opgave 3. Zij k een (strikt) positief geheel getal en zij S een eindige verzameling van oneven priemgetallen. Bewijs dat er ten hoogste één manier is (op rotatie en spiegeling na) om de elementen van S rondom een cirkel te plaatsen zodanig dat het product van elk tweetal buren te schrijven is als $x^2 + x + k$ voor een zeker (strikt) positief geheel getal x.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

dinsdag 12 juli 2022

Opgave 4. Zij $ABCDE$ een convexe vijfhoek met $|BC| = |DE|$. Veronderstel dat er een punt T in het inwendige van $ABCDE$ is met $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ en $\angle ABT = \angle TEA$. De (rechte) lijn AB snijdt de (rechte) lijnen CD en CT respectievelijk in de punten P en Q. Neem aan dat de punten P, B, A, Q in die volgorde op de lijn liggen. De (rechte) lijn AE snijdt de (rechte) lijnen CD en DT respectievelijk in de punten R en S. Neem aan dat de punten R, E, A, S in die volgorde op de lijn liggen.
Bewijs dat de punten P, S, Q, R op één cirkel liggen.

Opgave 5. Bepaal alle drietallen (a, b, p) van (strikt) positieve gehele getallen met p priem en

$$a^p = b! + p.$$

Opgave 6. Zij $n > 0$ een geheel getal. Een *Scandinavisch vierkant* is een $n \times n$-rooster dat alle gehele getallen 1 tot en met n^2 bevat zodanig dat elk vakje precies één getal bevat. Twee verschillende vakjes *grenzen* aan elkaar als ze een gemeenschappelijke zijde hebben. Elk vakje dat alleen grenst aan vakjes die een groter getal bevatten, heet een *vallei*. Een *bergpad* is een rij van een of meer vakjes zodanig dat het volgende geldt:

(i) het eerste vakje in de rij is een vallei,

(ii) elk volgend vakje in de rij grenst aan het vorige vakje, en

(iii) de getallen in de opeenvolgende vakjes van de rij staan in oplopende volgorde.

Bepaal, als functie van n, het kleinst mogelijke totale aantal bergpaden in een Scandinavisch vierkant.