2025 m. liepos 15 d., antradienis

1 uždavinys. Tiesę plokštumoje vadinsime *saulakrante*, jei ji **nėra** lygiagreti nei su Ox ašimi, nei su Oy ašimi, nei su tiese $x + y = 0$.

Duotas natūralusis skaičius $n \geqslant 3$. Nustatykite visus sveikuosius neneigiamus skaičius k, kuriems plokštumoje egzistuoja n skirtingų tiesių, tenkinančių šias abi sąlygas:

- kiekvienas taškas (a, b), kur a ir b yra natūralieji skaičiai, tenkinantys $a + b \leqslant n + 1$, yra bent vienoje iš šių tiesių;
- lygiai k iš n tiesių yra saulakrantės.

2 uždavinys. Apskritimų Ω ir Γ centrai yra atitinkamai M ir N, o apskritimo Ω spindulys yra trumpesnis nei apskritimo Γ. Tarkime, kad Ω ir Γ kertasi dviejuose skirtinguose taškuose A ir B. Tiesė MN kerta apskritimą Ω taške C, o apskritimą Γ – taške D, eidama per keturis taškus tokia tvarka: C, M, N, D. Taškas P yra trikampio ACD apibrėžtinio apskritimo centras. Tiesė AP kerta apskritimą Ω taške $E \neq A$. Tiesė AP kerta apskritimą Γ taške $F \neq A$. Taškas H yra trikampio PMN ortocentras.

Įrodykite, kad tiesė, einanti per tašką H ir lygiagreti su tiese AP, liečia trikampio BEF apibrėžtinį apskritimą.

(Trikampio *ortocentras* yra jo aukštinių sankirtos taškas.)

3 uždavinys. Natūraliųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{N}$. Sakysime, kad funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yra *bonza*, jei

$$\text{skaičius} \quad f(a) \quad \text{dalija skaičių} \quad b^a - f(b)^{f(a)}$$

visiems natūraliesiems skaičiams a ir b.

Nustatykite tokią mažiausią realiąją konstantą c, kad $f(n) \leqslant cn$ visoms bonza funkcijoms f ir visiems natūraliesiems skaičiams n.

Language: Lithuanian

Darbo trukmė: 4 val. 30 min.
Kiekvieno uždavinio vertė yra 7 taškai.

2025 m. liepos 16 d., trečiadienis

4 uždavinys. Natūraliojo skaičiaus N *tikriniais dalikliais* vadinami šio skaičiaus teigiami dalikliai, nelygūs N.

Begalinę seką $a_1, a_2, \ldots$ sudaro natūralieji skaičiai. Kiekvienas iš jų turi mažiausiai tris tikrinius daliklius. Kiekvienam natūraliajam n skaičius a_{n+1} yra skaičiaus a_n trijų didžiausių tikrinių daliklių suma.

Nustatykite visas galimas skaičiaus a_1 reikšmes.

5 uždavinys. Alytė ir Bronius žaidžia *nekoalygybių žaidimą*. Šio dviejų žaidėjų žaidimo taisyklės priklauso nuo realiojo teigiamo skaičiaus λ, kuris yra žinomas abiem žaidėjams. Žaidimo n-tojo ėjimo metu (pradedant nuo $n = 1$) atliekamas toks veiksmas:

- jei skaičius n nelyginis, tai Alytė pasirenka realųjį neneigiamą skaičių x_n, kuriam
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n;$$
- jei skaičius n lyginis, tai Bronius pasirenka realųjį neneigiamą skaičių x_n, kuriam
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Jei kuris nors žaidėjas negali pasirinkti tinkamo x_n, tai žaidimas baigiasi, o kitas žaidėjas laimi. Jei žaidimas niekada nesibaigia, tai nelaimi joks žaidėjas. Kiekvieną pasirinktąjį skaičių žino abu žaidėjai.

Nustatykite visas galimas λ reikšmes, kurioms Alytė turi pergalės strategiją, ir visas galimas λ reikšmes, kurioms Bronius turi pergalės strategiją.

6 uždavinys. Iš vienetinių langelių sudaryta 2025×2025 lentelė. Saulenė nori lentelėje padėti kelias stačiakampes korteles, nebūtinai tų pačių matmenų, kad kiekvienos kortelės kiekvieną kraštinę sudarytų lentelės langelių kraštinės, o kiekvieną langelį dengtų daugiausiai viena kortelė.

Nustatykite, kiek mažiausiai kortelių gali prireikti Saulenei, kad lentelės kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje liktų po lygiai vieną neuždengtą langelį.