

Pazartesi, 21. Eylül 2020

Soru 1. $ABCD$ dışbükey bir dörtgen olsun. P noktası, $ABCD$ nin iç bölgesindedir. Aşağıdaki oran eşitlikleri sağlanmaktadır:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

$\angle ADP$ açısının iç açıortayının, $\angle PCB$ açısının iç açıortayının ve $[AB]$ doğru parçasının orta dikmeninin aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

Soru 2. a, b, c, d gerçek sayıları için $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ve $a + b + c + d = 1$ sağlanmaktadır.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 3. Ağırlıkları $1, 2, 3, \dots, 4n$ olan $4n$ tane taş bulunmaktadır. Her taş n renkten birine boyanmıştır ve her bir renk için o renge boyalı dört taş bulunmaktadır. Aşağıdaki her iki koşul aynı anda sağlanacak şekilde bu taşları iki öbeğe ayırmayı gösteriniz:

- İki öbeğin toplam ağırlıkları birbirine eşittir.
- Her bir öbekte her bir renkten tam olarak iki taş vardır.

Sali, 22. Eylül 2020

Soru 4. Bir $n > 1$ tam sayısı verilmiştir. Bir dağın yamacında farklı yüksekliklerde n^2 istasyon bulunmaktadır. A ve B teleferik şirketlerinin her biri k teleferik seferi düzenlemektedir. Her teleferik seferi bir istasyondan başlayıp daha yüksekte bulunan başka bir istasyona aradaki hiçbir istasyonda durmadan yapılmaktadır. A şirketinin k seferinin başlangıç istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin k seferinin bitiş istasyonları birbirinden farklıdır. A şirketinin iki teleferik seferinden başlangıç istasyonu daha yüksekte olanın bitiş istasyonu da daha yüksektedir. Aynı koşullar B şirketi için de sağlanmaktadır. İki istasyondan alçakta olandan yüksekte olana, aynı şirketin bir veya birden fazla seferi kullanılarak ulaşılabiliriyorsa, bu iki istasyona *o şirketle bağlı* diyelim.

Hem A şirketiyle bağlı hem de B şirketiyle bağlı olan iki istasyonun bulunmasını garanti eden en küçük k pozitif tam sayısını belirleyiniz.

Soru 5. $n > 1$ karttan oluşan bir deste verilmiştir. Her kartın üzerinde bir pozitif tam sayı yazıldır. Herhangi iki kartın üzerindeki sayıların aritmetik ortalaması, destedeki bir veya birkaç kartın üzerindeki sayıların geometrik ortalamasına eşittir.

Hangi n tam sayıları için kartların üzerindeki sayıların hepsi eşit olmak zorundadır?

Soru 6. Aşağıdaki önermeyi doğru kılan pozitif bir c sabiti bulduğunu gösteriniz:

Düzlemdede herhangi ikisinin arasındaki uzaklık en az 1 olan $n > 1$ noktadan oluşan herhangi bir \mathcal{S} kümesi alındığında, \mathcal{S} kümesindeki her noktadan uzaklığı en az $cn^{-1/3}$ olan ve \mathcal{S} deki noktaları ayıran bir ℓ doğrusu bulunur.

(Bir ℓ doğrusu, uçları \mathcal{S} de olan en az bir doğru parçasını kesiyorsa ℓ doğrusu \mathcal{S} deki noktaları ayıır.)

Not. Bir $\alpha > 1/3$ gerçek sayısı için, $cn^{-1/3}$ yerine $cn^{-\alpha}$ için elde edilen sonuçlara α nin değerine göre puan verilebilir.