

12 . јули 2006.

Задатак 1. Нека је I средиште уписане кружнице троугла ABC . У унутрашњости троугла изабрана је тачка P таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему једнакост важи ако и само ако се тачка P подудара са тачком I .

Задатак 2. За дијагоналу правилног 2006-тоугла P кажемо да је *добра*, ако њени крајеви дијеле руб од P на два дијела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од P . За странице полигона P такође кажемо да су *дobre*.

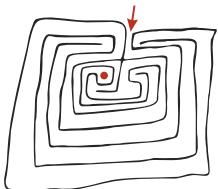
Посматрајмо разбијања полигона P на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје двије међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона P . Одредите максималан број једнакокраких троуглова са двије добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

Задатак 3. Одредите најмањи реалан број M такав да неједнакост

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c .

*Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова*



13. јули 2006.

Задатак 4. Одредите све парове (x, y) цијелих бројева такве да је

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задатак 5. Нека је $P(x)$ полином степена n ($n > 1$) са цијелим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрајмо полином

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

гдје се P појављује k пута. Докажите да постоји највише n цијелих бројева t таквих да је $Q(t) = t$.

Задатак 6. Свакој страници b конвексног полигона P придружимо највећу површину троугла који је садржан у P и чија је једна странница b . Докажите да је збир свих површина придужених страницама полигона P већи или једнак од двоструке површине полигона P .

*Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова*