

Þriðjudagur, 23. júlí, 2013

Dæmi 1. Sannið að fyrir sérhvert par af jákvæðum heiltölum k og n eru til k jákvæðar heiltölur m_1, m_2, \dots, m_k (ekki nauðsynlega ólíkar) þannig að

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

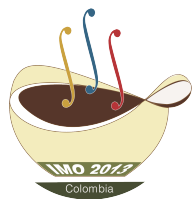
Dæmi 2. 4027 punktar í sléttu eru kallaðir *kólembísk uppsetning* ef 2013 þeirra eru rauðir og 2014 þeirra eru bláir og engir þrír punktar liggja á sömu línu. Sléttunni er skipt í nokkur svæði með því að teikna nokkrar línur. Staðsetning línanna er sögð góð með tilliti til kólembísku uppsetningarinnar ef eftirfarandi tveimur skilyrðum er fullnægt:

- engin lína liggur í gegnum einhvern punktanna,
- ekkert svæði inniheldur punkta í báðum litum.

Finnið minnsta gildi k þannig að fyrir sérhverja kólembísku uppsetningu 4027 punkta er til góð staðsetning k línanna.

Dæmi 3. Látum utanverðan snertihring ABC á móti punktinum A snerta hliðina BC í punktinum A_1 . Skilgreinum punktana B_1 á CA og C_1 á AB sama hátt með utanverðum snertihringjum á móti B og C . Gerum ráð fyrir að miðpunktur umritaðs hrings þríhyrningsins $A_1B_1C_1$ liggi á umritaða hring þríhyrningsins ABC . Sannið að þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur.

Utanverði snertihringur *þríhyrningsins* ABC á móti horninu A er hringurinn sem snertir hliðina BC , hálfínuna AB handan B og hálfínuna AC handan C . Utanverður snertihringur á móti B og C eru skilgreindir á sambærilegan hátt.



Miðvikudagur, 24. júlí, 2013

Dæmi 4. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með hæðamiðju H og látum W vera punkt á hliðinni BC þó ekki B eða C . Punktarnir M og N eru fótþunktur hæðanna í B og C . Táknum umritaða hring BWN með ω_1 og látum X vera punkt á ω_1 þannig að WX sé miðstrengur ω_1 . Á sama hátt skilgreinum við ω_2 sem umritaða hring CWM og látum Y vera punkt á ω_2 þannig að WY sé miðstrengur ω_2 . Sýnið að X , Y og H liggja á sömu línu.

Dæmi 5. Látum $\mathbb{Q}_{>0}$ vera mengi jákvæðra ræðra talna. Látum $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall sem uppfyllir eftirfarandi þrjú skilyrði:

- (i) fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gildir $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, gildir $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) til er ræð tala $a > 1$ þannig að $f(a) = a$.

Sannið að $f(x) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Dæmi 6. Látum $n \geq 3$ vera heiltölu og athugum hring með $n+1$ númeruðum punktum með jöfnu millibili. Athugum allar mögulegar númeringar punktanna með tölunum $0, 1, \dots, n$ þannig að hver tala sé notuð nákvæmlega einu sinni. Tvær slíkar númeringar teljast eins ef önnur fæst út frá hinni með því að snúa hringnum. Númering er sögð *falleg* ef fyrir sérhver fjögur númer $a < b < c < d$ með $a+d = b+c$ þá sker strengurinn á milli a og d ekki strenginn á milli b og c .

Látum M vera fjölda fallegra númeringa og látum N vera fjölda raðaðra para (x, y) af jákvæðum heiltölum þannig að $x+y \leq n$ og $\gcd(x, y) = 1$. Sannið að

$$M = N + 1.$$