



יום שני, 18 ביולי 2011

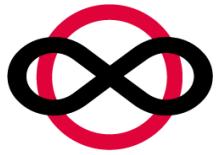
שאלה 1. לכל קבוצה $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ של ארבעה מספרים שלמים חיוביים שונים בזוגות, נסמן את הסכום $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ב- s_A . נסמן ב- n_A את כמות הזוגות האינדקסים (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$, עבורם $a_i + a_j$ מחלק את s_A . מצא את כל הקבוצות A מסווג זה, עבורן n_A מקבל את הערך המקסימלי האפשרי.

שאלה 2. תהא S קבוצה סופית של נקודות במישור, בעל שתי נקודות לפחות. נניח כי אף שלוש נקודות של S לא נמצאות על ישר אחד. **תחנת רוח** היא תחילה שמתחליל עם ישר ℓ שעובר דרך נקודה ייחודית P מהקבוצה S . הישר מסתובב עם ציוויל השעון מסביב לנקודה P , שתקרה המישב, עד לרגע הראשון בו הישר יכול נקודה נוספת Q נקודה זו, שתקרה Q , הופכת להיות המישב החדש, והישר ממשיך להסתובב עם ציוויל השעון מסביב ל- Q , עד לרגע הבא בו הישר יכול שתי נקודות של S . התחלין ממש כך לנצח. הוכח כי ניתן לבחור נקודה P מ- S וישר ℓ דרך P , כך שתחנת הרוח שתתקבל תשתמש בכל נקודה מ- S כמישב אינטוף פעמיים.

שאלה 3. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

לכל y, x ממשיים. הוכח כי $f(0) = 0$ לכל x .



יום שלישי, 19 ביולי 2011

שאלה 4. יהא n שלם חיובי. נתונים מזוני c^0 ו- c^n משקלות שמשקליהם $2^0, 2^1, 2^{n-1}, \dots, 2^n$. עלינו להניח את כל המשקלות על המזוניים בזו אחר זו, כך שהמשקל הימני לעולם איננה כבידה יותר מהמשקל השמאלי. בכל צעד בוחרים משקלות שאינה על המזוניים, מניחים אותה על אחת הכפות, וממשיכים כך עד שכל המשקלות נמצאות על המזוניים. מצא את מספר הדרכים השונות לבצע את המשימה.

שאלה 5. תהא f פונקציה מקובצת שלמים לקבוצת השלמים החוביים. נניח כי לכל m, n שלמים, ההפרש $f(m) - f(n)$ מתחלק ב- $f(m-n)$. הוכיח כי לכל m, n שלמים שמקיימים $f(m) \leq f(n)$, המספר $f(m) - f(n)$ מתחלק ב- $f(m-n)$.

שאלה 6. יהא ABC משולש חד-זווית שיחסום במעגל Γ . יהא ℓ ישר משיק למעגל Γ . נסמן ב- ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתוקבים על ידי שיקוף היישר ℓ ביחס לישרים BC, CA, AB בהתאם. הוכיח כי המשולש החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ .