poniedziałek, 21. września 2020

Zadanie 1. Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt P znajduje się wewnątrz $ABCD$. Spełnione są następujące dwie równości proporcji:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Wykazać, że następujące trzy proste przecinają się w jednym punkcie: dwusieczne kątów wypukłych $\angle ADP$ oraz $\angle PCB$ oraz symetralna odcinka AB.

Zadanie 2. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, takie że $a \geq b \geq c \geq d > 0$ oraz $a + b + c + d = 1$. Wykazać, że

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Zadanie 3. Do dyspozycji jest $4n$ kamyczków o wagach $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Każdy kamyczek jest pokolorowany dokładnie jednym z n kolorów, przy czym w każdym z tych kolorów są dokładnie cztery kamyczki. Wykazać, że można w taki sposób umieścić wszystkie kamyczki na dwóch stosach, że spełnione są obie następujące własności:

- Łączne wagi obu stosów są jednakowe.
- Na każdym stosie znajdują się dwa kamyczki każdego koloru.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

wtorek, 22 września 2020 r.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Na zboczu góry znajduje się n^2 stacji kolejki linowej, każda na innej wysokości. Każda z dwóch firm obsługujących kolejkę, A i B, posiada dokładnie k wyciągów; każdy z nich umożliwia bezpośredni przejazd z jednej ze stacji na pewną stację położoną wyżej (bez zatrzymywania się po drodze). Wszystkie k wyciągów firmy A mają k różnych stacji początkowych oraz k różnych stacji końcowych, a ponadto jeśli jeden wyciąg rozpoczyna trasę wyżej od pewnego innego, to również kończy trasę wyżej od niego. Te same warunki są spełnione przez połączenia obsługiwane przez firmę B. Powiemy, że dwie stacje są *połączone* przez firmę, jeśli rozpoczynając ze stacji położonej niżej można dojechać do stacji położonej wyżej używając wyłącznie połączeń (jednego lub więcej) obsługiwanych przez tę firmę (żadne inne sposoby przemieszczania się pomiędzy stacjami kolejki nie są dozwolone).

Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k, dla której z całą pewnością (niezależnie od układu połączeń) istnieje para stacji połączonych przez obydwie firmy.

Zadanie 5. Dana jest talia $n > 1$ kart. Na każdej karcie napisana jest dodatnia liczba całkowita. Talia ma tę własność, że dla każdej pary kart średnia arytmetyczna napisanych na nich liczb jest równa średniej geometrycznej liczb napisanych na kartach pewnego podzbioru kart talii (zawierającego jedną lub więcej kart).

Rozstrzygnąć, dla jakich wartości n wynika z tego, że wszystkie liczby napisane na kartach są równe.

Zadanie 6. Wykazać, że istnieje taka dodatnia stała c, że następujące stwierdzenie jest prawdziwe:

Rozważmy liczbę całkowitą $n > 1$ i taki zbiór $\mathcal{S}$ składający się z n punktów na płaszczyźnie, że odległość pomiędzy każdymi dwoma punktami z $\mathcal{S}$ wynosi co najmniej 1. Wtedy istnieje taka prosta ℓ rozdzielająca $\mathcal{S}$, że odległość każdego punktu z $\mathcal{S}$ od ℓ wynosi co najmniej $cn^{-1/3}$.

(Prosta ℓ *rozdziela* zbiór punktów $\mathcal{S}$ jeżeli istnieje odcinek łączący dwa punkty z $\mathcal{S}$ przecinający ℓ.)

Uwaga. Słabsze wyniki z oszacowaniem $cn^{-\alpha}$ zamiast $cn^{-1/3}$ mogą być nagradzane częściowymi punktami w zależności od stałej $\alpha > 1/3$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.