الاثنين 11 يوليو 2016

المسألة 1. المثلّث BCF قائم في B. لتكن A النّقطة على المستقيم CF الّتي تحقّق $FA = FB$ وتجعل F بين A و C. نختار النّقطة D بحيث $DA = DC$ و AC هو منصّف الزّاوية $\angle DAB$. نختار النّقطة E بحيث $EA = ED$ و AD هو منصّف الزّاوية $\angle EAC$.

لتكن M منتصف CF، و X النّقطة الّتي تجعل $AMXE$ متوازي الأضلاع (أي $AM \parallel EX$ و $AE \parallel MX$).

أثبت أنّ المستقيمات BD و FX و ME تتقاطع في نقطة واحدة.

المسألة 2. أوجد جميع الأعداد الصّحيحة الموجبة n بحيث نستطيع أن نملأ كلّ خليّة في جدول من النّوع $n \times n$ بأحد الحروف I ، M ، O على النّحو التّالي:

- في كلّ صفّ و في كلّ عمود ثلث المدخلات هي I ، وثلثها M ، وثلثها O ؛
- بالنّسبة للأقطار، إذا كان عدد الخلايا يقبل القسمة على ثلاثة فإنّ ثلث المدخلات هي I ، وثلثها M ، وثلثها O .

تنبيه : يتمّ ترقيم الصّفوف والأعمدة في الجدول من النّوع $n \times n$ من 1 إلى n بالطّريقة المعتادة من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل. لذا فإنّه يمكن التّرميز لكلّ خليّة بزوج مرتّب من الأعداد الصّحيحة الموجبة (i, j) بحيث $1 \leqslant i, j \leqslant n$. لكلّ $n > 1$ ، يحتوي الجدول على $4n - 2$ من الأقطار الّتي هي من نوعين. النّوع الأوّل مكوّن من جميع الخلايا (i, j) بحيث $i + j$ كميّة ثابتة، أمّا النّوع الثّاني مكوّن من جميع الخلايا (i, j) بحيث $i - j$ كميّة ثابتة.

المسألة 3.

ليكن $P = A_1A_2 \ldots A_k$ مضلّعا محدّبا في المستوي. تقع الرّؤوس A_1 ، A_2 ، ... ، A_k كلّها على دائرة وإحداثيّا كلّ منها أعداد صحيحة. لتكن S مساحة الشّكل P. لدينا عدد فرديّ n بحيث مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع P هو عدد صحيح ومن مضاعفات العدد n. أثبت أنّ $2S$ عدد صحيح يقبل القسمة على n.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة

الثّلاثاء 12 يوليو 2016

المسألة 4. نقول عن مجموعة أعداد صحيحة موجبة إنّها عطرة إذا كانت تحتوي على عنصرين أو أكثر وكان كلّ عنصر فيها يشترك مع عنصر آخر على الأقل في عامل أوّليّ. لتكن $P(n) = n^2 + n + 1$. أوجد أصغر عدد صحيح موجب b بحيث يوجد عدد صحيح غير سالب a والّذي يجعل المجموعة التّالية

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

عطرة.

المسألة 5. تمّ كتابة المعادلة

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

على السّبورة، والّتي تحوي في كلّ طرف من طرفيها على 2016 عامل خطّيّ. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد k الّتي لأجلها يمكننا محو k من هذه العوامل الخطيّة الّتي عددها 4032 بحيث يبقى على الأقل عامل في كلّ طرف وتكون المعادلة الجديدة بدون جذور حقيقيّة؟

المسألة 6. لدينا $n \geqslant 2$ قطعة مستقيمة في المستوي بحيث تتقاطع كلّ قطعتين في غير طرفيهما ولا تلتقي ثلاثة منها في نقطة واحدة. تريد نجاح أن تختار من كلّ قطعة طرفا تضع فيه أرنبا وجهه للطّرف الآخر. ثمّ تصفّق $n-1$ مرّة متتالية. عند كلّ تصفيقة يقفز كلّ أرنب إلى نقطة التّقاطع التّالية على قطعته، مع العلم أنّ الأرنب لا يغيّر أبدا إتّجاه حركته. ترغب نجاح في أن تضع الأرانب بحيث لا يلتقي أيّ أرنبين أبدا في أيّ نقطة تقاطع في نفس الوقت.

ا. أثبت أنّه يمكن دائما لنجاح أن تحقّق رغبتها إذا كانت قيمة n فرديّة.

ب. أثبت أنّه لا يمكن أبدا لنجاح أن تحقّق رغبتها إذا كانت قيمة n زوجيّة.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة