mandag, d. 11. juli 2022

Opgave 1. Oslo Bank udsteder to typer mønter: aluminium (betegnet A) og bronze (betegnet B). Marianne har n aluminiummønter og n bronzemønter placeret på en række i tilfældig orden. En *blok* er en række af på hinanden følgende mønter af samme type. Givet et fast positivt helt tal $k \leqslant 2n$, Marianne udfører følgende operation igen og igen: Hun identificerer den længste blok som indeholder den k'te mønt fra venstre, og flytter alle mønterne i denne blok helt til venstre i rækken. For eksempel hvis $n = 4$ og $k = 4$, og mønterne starter i rækkenfølgen $AABBBABA$, så vil processen være

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Bestem alle par (n, k) med $1 \leqslant k \leqslant 2n$ så der for alle mulige startrækkefølger vil være et tidspunkt hvor de n mønter længst til venstre vil være af samme type.

Opgave 2. Lad $\mathbb{R}_+$ være mængden af positive reelle tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ så der for hvert $x \in \mathbb{R}_+$ eksisterer præcis et $y \in \mathbb{R}_+$ som opfylder

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Opgave 3. Lad k være et positivt helt tal, og lad S være en endelig mængde af ulige primtal. Vis at der højst er en måde (hvis man ser bort fra rotation og spejling) at placere elementerne i S i en cirkel så produktet af vilkårlige to naboer er på formen $x^2 + x + k$ for et positivt helt tal x.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

tirsdag, d. 12. juli 2022

Opgave 4. Lad $ABCDE$ være en konveks femkant hvor $|BC| = |DE|$. Antag at der er et indre punkt T i $ABCDE$ med $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ og $\angle ABT = \angle TEA$. Lad linjen AB skære linjerne CD og CT i henholdsvis punktet P og punktet Q. Antag at punkterne P, B, A, Q ligger på deres linje i denne rækkefølge. Lad tilsvarende linjen AE skære linjerne CD og DT i henholdsvis punktet R og punktet S. Antag at punkterne R, E, A, S ligger på deres linje i denne rækkefølge. Vis at punkterne P, S, Q, R ligger på en cirkel.

Opgave 5. Bestem alle tripler (a, b, p) af positive heltal hvor p er et primtal og

$$a^p = b! + p.$$

Opgave 6. Lad n være et positivt helt tal. Et *Nordisk kvadrat* er et $n \times n$-bræt som indeholder alle hele tal fra 1 til n^2 så hvert felt indeholder præcis et tal. To forskellige felter er naboer hvis de har en fælles side. Ethvert felt som kun har nabofelter med større tal, kaldes en *dal*. En *opadgående sti* er en følge af et eller flere felter så:

(i) det første felt i følgen er en dal,

(ii) ethvert af de følgende felter i rækken er nabo til det foregående felt, og

(iii) tallene i felterne i følgen er i voksende rækkefølge.

Bestem det mindst mulige antal af opadgående stier i et nordisk kvadrat som funktion af n.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.