



Мнзмар, 2012.07.10

Бодлого 1. $\triangle ABC$ нэгэв. А оройг харгалзах гадаад багтсан тойргийн төвийг J байг. Энэ тойрог нь BC хэрэгслийг M үзэгт, харин AB ба AC шугуунуудыг K ба L үзгүүдэд шүргэж. LM ба BJ шугуунууд F үзэгт, KM ба CJ шугуунууд G үзэгт огтлолцдог, AF ба BC шугуунуудын огтлолцлын үзэг S , AG ба BC шугуунуудын огтлолцлын үзэг T байг. M үзэг ST хэрэгслийн дундаг цэгийг батал.

(BC талыг, мөн AB ба AC талуудын үргэлжлэлийг шүргэсэн тойргийг А оройг харгалзах $\triangle ABC$ -ийн гадаад багтсан тойрог үзэгт).

Бодлого 2. Бүхэл тоо $3 \leq n$ ба $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ байх эерэг бодит тоо a_2, a_3, \dots, a_n өгтгээ.

$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \dots (1+a_n)^n > n^n$

гэж батал.

Бодлого 3. A ба B хоёр тоглогч "Таавар" тоглоом тоглох байгаа. Тэр хоёрт мэдэгдэж байгаа k ба n натурал тоонуудаас тоглоомын дүрэм хамаарна. Тоглоом эхлэхэд A нь $1 \leq x \leq N$ байх бүхэл тоо x ба N -ийг сонгоно. A x тоог нундлах ба N тоог B -г үнэхээр нь хэлнэ. Үүний дараа x тоог талаар мэдээлэл олохын тулд B дараах маягийн асуултуудыг A -г тавина: B кээ асуултдаа натурал тоогын ямар кээ S олонлогийг зааж, энэ S олонлогт x орох уу гэж A -аас асууна. B хичнээн хэ асуулт тавьж болохыг гадна кээж адил асуултыг кээгээс олон удаа тавьж болно. B -ийн асуулт бүрд A тийм эсвэл үгүй гэж шүүх харуулах ёстой ба хичнээн х удаа худал хэлэхийг зөвшөөрөх боловч ямарч дараалсан $k+1$ харуултыг эдэж кээ нь үнэн байх ёстой гэсэн зан хязгаарлалт бий. B өөрт хэрэгтэй гэж тавьсан тоог асуултыг тавьсны дараа n -ээс олонгүй натурал тооноос тогтох X олонлогийг зааж өгнө. Хэрэв x тоо X -г орвол B хожно, эсрэг тахиолд B хожигдоно.

1. $n \geq 2^k$ бол B хожож гадна
2. Ямарч хүрмээгүйнх нь k -ийн хувьд B хожож гаднагүй байх $n \geq 1, 99^k$ тоо олохыг батал.

Language: Mongolian

Бодх хугацаа 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноотой



Language: Mongolian

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Day: 2

Лхана, 2012.07.11

Бодлого 4. $a+b+c=0$ байх змарт бүхэл тоо a, b, c -ийн хувьд
 $f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$
бүтээх бүх $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функцийг ол, эхлээд \mathbb{Z} бүх бүхэл
тоога олохлог.

Бодлого 5. $\triangle ABC$ -г $\angle BCA = 90^\circ$ ба C оройгоос татсан
окдрийн цугр D байл. CD хэрглүүн дотор X үзг
алав. K үзг AX хэрглүүн гээр оршиж ба $BK = BC$ байл.
Мон адмлар L үзг BX хэрглүүн гээр оршиж ба $AL = AC$
байл. AL ба BK хэрглүүнгийн оглолцлын цэгийг M
үзвэл $MK = ML$ гэж батал.

Бодлого 6. $\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$
байх сөрөг бүх бүхэл a_1, \dots, a_n тоокууд оршиж
байгааг бүх катарал тоо n -ийг ол.

Language: Mongolian

Бодог хураагаа 4үзг
30 мин
Бодлого бүр 7 оноотой