Den 12 juli 2006

Problem 1. Låt ABC vara en triangel och låt I vara mittpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln. För en punkt P inuti triangeln gäller att

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Visa att $AP \geq AI$, samt att likheten gäller om och endast om $P = I$.

Problem 2. Låt P vara en regelbunden 2006-hörning. En diagonal i P kallas för *trevlig* om dess ändpunkter delar P:s omkrets i två delar, var och en med ett udda antal sidor från P. Månghörningens sidor anses också vara *trevliga*.

Antag att 2003 diagonaler, som parvist inte skär varandra inuti P, delar P i trianglar. Bestäm det största antalet likbenta trianglar med två trevliga sidor som en sådan konfiguration kan ha.

Problem 3. Bestäm det minsta reela talet M för vilket olikheten

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gäller för alla reella tal a, b och c.

Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng

Den 13 juli 2006

Problem 4. Bestäm alla heltalspar (x, y) sådana att

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Låt $P(x)$ vara ett polynom av grad n, $n > 1$, med heltalskoefficienter och låt k vara ett positivt heltal. Betrakta polynomet $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, där P förekommer k gånger. Visa att det finns som mest n heltal t sådana att $Q(t) = t$.

Problem 6. Låt P vara en konvex polygon. Till varje sida b av P tilldelas den maximala arean av en triangel som har b som en av sina sidor och som ligger inuti P. Visa att summan av areor som tilldelades polygonens alla sidor är minst två gånger arean av P.

Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng