

15 iyul 2009 Çərşəmbə

Məsələ 1. n - natural ədədi və $\{1, \dots, n\}$ çoxluğundan götürülmüş biri-birindən fərqli a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) tam ədədləri verilmişdir. Belə ki, hər bir $i = 1, \dots, k-1$ üçün $a_i(a_{i+1} - 1)$ ədədi n ədədinə tam bölünür. İsbat edin ki, $a_k(a_1 - 1)$ ədədi n ədədinə bölünür.

Məsələ 2. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi O olsun. P və Q nöqtələri uyğun olaraq CA və AB tərəflərinin daxilində götürülmüş nöqtələr; K, L və M nöqtələri isə uyğun olaraq BP, CQ və PQ parçalarının orta nöqtələridir. Γ – çevrəsi K, L və M nöqtələrindən keçən çevrədir. Məlumdur ki, PQ düz xətti Γ çevrəsinə toxunur. İsbat edin ki, $|OP| = |OQ|$.

Məsələ 3. s_1, s_2, s_3, \dots qəti artan natural ədədlər ardıcılığı verilmişdir. Belə ki, bu ardıcılığın

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{və} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

alt ardıcılıqlarının hər ikisi ədədi silsilədir. İsbat edin ki, s_1, s_2, s_3, \dots ardıcılığının özündə ədədi silsilədir.

16 iyul 2009 Cümə axşamı

Məsələ 4. ABC üçbucağında $|AB|=|AC|$. $\angle CAB$ və $\angle ABC$ bucaqlarının tənbölgənləri BC və CA tərəflərinin uyğun olaraq D və E nöqtələrində kəsirlər. K nöqtəsi ADC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Məlumdur ki, $\angle BEK = 45^\circ$. $\angle CAB$ bucağının bütün mümkün qiymətlərini tapın.

Məsələ 5. Elə $f: N \rightarrow N$ (yəni təyin oblastı və qiymətlər oblastı natural ədədlər çoxluğundan olan) funksiyalarını təyin edin ki, bütün natural a və b ədədləri üçün tərəfləri

$$a, \quad f(b) \quad \text{və} \quad f(b+f(a)-1)$$

ədədlərinə bərabər olan üçbucaq mövcud olsun.

(Bu üçbucağın təpə nöqtələri eyni düz xətt üzərində ola bilməzlər- yəni bu üçbucağın təpə nöqtələri kollinear deyil).

Məsələ 6. Biri-birindən fərqli a_1, a_2, \dots, a_n natural ədədləri və $n-1$ sayda natural ədədlərdən ibarət olan M çoxluğu verilmişdir. Məlumdur ki, $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ədədi M çoxluğuna daxil deyil. Çəyirtkə həqiqi ədədlər oxu üzərində 0 nöqtəsindən başlayaraq sağ tərəfə n sayda sıçrayış edəcəkdir. Belə ki, onun sıçramalarının uzunluqları müəyyən sıra ilə götürülmüş a_1, a_2, \dots, a_n ədədlərinə bərabər olmalıdır. İsbat edin ki, çəyirtkənin sıçrayışlarının uzunluqlarının sırasını heç bir sıçrayışta M çoxluğundan olan heç bir nöqtə üzərinə düşməyəcək şəkildə seçmək olar.