Poniedziałek, 18 lipca 2011r.

Zadanie 1. Dla każdego zbioru $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ zawierającego cztery różne dodatnie liczby całkowite, symbolem s_A oznaczmy sumę $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Niech n_A oznacza liczbę par (i, j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ oraz $a_i + a_j$ jest dzielnikiem liczby s_A. Wyznaczyć wszystkie zbiory A zawierające cztery różne dodatnie liczby całkowite, dla których n_A przyjmuje największą wartość.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie, zawierającym co najmniej dwa elementy. Załóżmy, że żadne trzy punkty zbioru $\mathcal{S}$ nie leżą na jednej prostej. *Wiatrakiem* nazwiemy następujący proces: Na początku dana jest prosta ℓ zawierająca jeden punkt $P \in \mathcal{S}$. Linia ta obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, wokół *środka obrotu* P tak długo, aż osiągnie którykolwiek inny punkt należący do zbioru $\mathcal{S}$. Punkt ten, Q, staje się nowym środkiem obrotu i prosta dalej obraca się wokół niego, w tym samym kierunku, dopóki ponownie nie osiągnie punktu ze zbioru $\mathcal{S}$. Określony w ten sposób proces trwa dalej i nigdy się nie kończy.
Dowieść, że punkt $P \in \mathcal{S}$ oraz prosta ℓ zawierająca punkt P mogą zostać wybrane w taki sposób, że dla wyznaczonego przez nie wiatraka, każdy element zbioru $\mathcal{S}$ będzie środkiem obrotu nieskończenie wiele razy.

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmującą wartości rzeczywiste, spełniającą nierówność

$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f(f(x))$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y. Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \leqslant 0$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Punktacja: 7 punktów za zadanie

Wtorek, 19 lipca 2011r.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n > 0$. Mamy do dyspozycji wagę szalkową i n odważników o masach $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Chcemy kolejno, jeden po drugim, położyć wszystkie odważniki na szalkach wagi w taki sposób, by prawa szalka nigdy nie była cięższa, niż lewa szalka. W pojedynczym kroku wybieramy jeden z odważników, które nie zostały jeszcze użyte i dokładamy go albo na lewą, albo na prawą szalkę. Postępujemy w ten sposób do momentu, w którym wszystkie odważniki znajdą się na wadze. Wyznaczyć liczbę sposobów wykonania opisanych wyżej czynności.

Zadanie 5. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych i przyjmującą wartości całkowite dodatnie. Załóżmy, że dla każdych dwóch liczb całkowitych m oraz n różnica $f(m) - f(n)$ jest podzielna przez $f(m - n)$. Dowieść, że dla każdych dwóch liczb całkowitych m oraz n, jeśli $f(m) \leqslant f(n)$ to liczba $f(n)$ jest podzielna przez $f(m)$.

Zadanie 6. Okrąg Γ jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Niech ℓ będzie prostą styczną do okręgu Γ. Proste ℓ_a, ℓ_b oraz ℓ_c są symetryczne do prostej ℓ względem, odpowiednio, prostych BC, CA oraz AB. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie wyznaczonym przez proste ℓ_a, ℓ_b oraz ℓ_c jest styczny do okręgu Γ.