

Dushanba, 2022 yil 11 Iyul

Masala 1. Oslo banki ikki xil turdagi tangalarni chiqaradi: alyuminiy (ustiga A deb yozilgan) va bronza (ustiga B deb yozilgan). Soliha n ta alyuminiy va n ta bronza tangalarni ixtiyoriy tartibda bir qatorga joylashtirdi. Bir xil turdagi yonma-yon turgan tangalarning ixtiyoriy ketma-ketligi *zanjir* deyiladi. Berilgan butun musbat $k \leq 2n$ son uchun Soliha quyidagi jarayonni ketma-ket takrorlayveradi: u chap tomondan k -chi o'rinda turgan tangani o'z ichiga olgan eng uzun zanjirni tanlaydi va ushbu zanjirdagi barcha tangalarni qatorning chap tomon boshiga olib borib qo'yadi. Misol uchun, agar $n = 4$, $k = 4$ bo'lsa va $AABBBABA$ ko'rinishdagi boshlang'ich holat uchun jarayon quyidagicha kechadi:

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

Barcha (n, k) juftliklarni toping bunda $1 \leq k \leq 2n$ va ixtiyoriy boshlang'ich holat uchun jarayonni barajarish davomida qachondir qatorning chap tomonidagi birinchi n ta tanga bir xil turda bo'ladi.

Masala 2. Aytaylik \mathbb{R}^+ musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Barcha $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funksiyalarni toping, bunda ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^+$ haqiqiy son uchun

$$xf(y) + yf(x) \leq 2$$

shartni qanoatlantiradigan yagona $y \in \mathbb{R}^+$ mavjud.

Masala 3. Toq tub sonlardan tashkil topgan chekli S to'plam va k musbat butun son berilgan. Isbotlang, S to'plamning barcha elementlarini ko'pi bilan bir xil usulda (burish va teskari tartibda yozishni hisobga olmasdan) aylanaga shunday joylashtirish mumkinki, bunda ixtiyoriy ikkita qo'shni sonlar ko'paytmasini $x^2 + x + k$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda x - musbat butun son.

Seshanba, 2022 yil 12 Iyul

Masala 4. $ABCDE$ qavariq beshburchak berilgan, bunda $BC = DE$. $ABCDE$ beshburchak ichida shunday T nuqta mavjudki, bunda $TB = TD$, $TC = TE$ va $\angle ABT = \angle TEA$. AB to'g'ri chiziq CD va CT to'g'ri chiziqlarni mos ravishda P va Q nuqtalarda kesadi. P , B , A , Q nuqtalar to'g'ri chiziqda ko'rsatilgan tartibda joylashgan. AE to'g'ri chiziq CD va DT to'g'ri chiziqlarni mos ravishda R va S nuqtalarda kesadi. R, E, A, S nuqtalar to'g'ri chiziqda ko'rsatilgan tartibda joylashgan. P , Q , R , S nuqtalar bir aylanada yotishini isbotlang.

Masala 5. Barcha (a, b, p) musbat butun sonlar uchliklarini toping, bunda p tub son va

$$a^p = b! + p.$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Masala 6. n - musbat butun son. Agar $n \times n$ jadvalning kataklari 1 dan n^2 gacha sonlar bilan, har bir son faqat bir martadan ishlatilgan va har bir katakka bitta son yozilgan holda to'ldirilgan bo'lsa, bunday jadvalni *Shimoliy kvadrat* deb ataymiz. Umumiy tomonga ega bo'lgan ikkita katakni qo'shni deb ataymiz. Agar biror bir katakda yozilgan son unga qo'shni kataklardagi sonlarning barchasidan kichik bo'lsa, bunday katakni *vodiy* deb ataymiz. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi bitta yoki bir nechta kataklar ketma-ketligini *tepalikka yo'l* deb ataymiz:

- (i) ketma-ketlikdagi birinchi katak vodiy,
- (ii) ketma-ketligdagi har bir keyingi katak undan oldingi katakka qo'shni, va
- (iii) ketma-ketlik kataklaridagi sonlar o'sish tartibida.

Berilgan n uchun Shimoliy kvadratdagi tepalikka yo'llar sonining qabul qilishi mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping.