Понеділок, 18 липня 2011 р.

Задача 1. Для множини $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, що складається з чотирьох попарно різних натуральних чисел, позначимо через s_A суму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через n_A позначимо кількість пар індексів (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, для яких s_A ділиться на $a_i + a_j$. Знайдіть усі множини A, що складаються з чотирьох попарно різних цілих додатних чисел, для яких n_A набуває найбільшого можливого значення.

Задача 2. Нехай $\mathcal{S}$ — така скінченна множина точок на площині, яка містить принаймні дві точки. Відомо, що жодні три точки множини $\mathcal{S}$ не лежать на одній прямій. Назвемо *млином* такий процес. Спочатку обирається пряма ℓ, на якій лежить рівно одна точка $P \in \mathcal{S}$. Пряма ℓ обертається за годинниковою стрілкою навколо *центра* P аж доки вона вперше не пройде через іншу точку множини $\mathcal{S}$. У цей момент ця точка, позначимо її через Q, стає новим центром, а пряма продовжує обертатись за годинниковою стрілкою навколо точки Q аж доки вона знову не пройде через точку множини $\mathcal{S}$. Цей процес триває нескінчено.

Доведіть, що можна вибрати точку P множини $\mathcal{S}$ і деяку пряму ℓ, яка проходить через P, так, що для млина, який починатиметься з прямої ℓ, кожна точка множини $\mathcal{S}$ буде центром безліч разів.

Задача 3. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція, яка визначена на множині дійсних чисел та набуває дійсних значень, задовольняє нерівність

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

для всіх дійсних x і y. Доведіть, що $f(x) = 0$ для всіх $x \leq 0$.

Вівторок, 19 липня 2011 р.

Задача 4. Задане ціле число $n > 0$. Є шалькові терези та n гирь з вагами $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Усі n гирь розміщуються послідовно одна за одною на шальки терезів, тобто на кожному з n кроків вибирається гиря, яка ще не поклададена на терези, і розміщується або на ліву, або на праву шальку терезів; при цьому гирі розміщуються так, щоб у жоден момент права шалька не була важчою за ліву. Знайдіть кількість способів виконати таку послідовність кроків.

Задача 5. Нехай f — функція, визначена на множині цілих чисел та набуває цілих додатних значень. Відомо, що для довільних цілих m і n різниця $f(m) - f(n)$ ділиться на $f(m-n)$. Доведіть, що для довільних цілих m і n таких, що $f(m) \leq f(n)$, число $f(n)$ ділиться на $f(m)$.

Задача 6. Нехай ABC — гострокутний трикутник, а Γ — описане навколо нього коло. Нехай пряма ℓ — деяка дотична до кола Γ, і нехай ℓ_a, ℓ_b і ℓ_c — прямі, симетричні прямій ℓ відносно прямих BC, CA і AB відповідно. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника, утвореного прямими ℓ_a, ℓ_b і ℓ_c, дотикаєтсья до кола Γ.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів