2023 年 7 月 8 日，星期六

第 1 题. 求所有满足下述条件的合数 $n > 1$：如果 n 的所有正因子为 $d_1, d_2, \ldots, d_k$，这里 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$，那么对每个 $1 \leqslant i \leqslant k-2$，均有 d_i 整除 $d_{i+1} + d_{i+2}$.

第 2 题. 在锐角三角形 ABC 中，$AB < AC$. 设 Ω 为三角形 ABC 的外接圆. 点 S 是 Ω 上包含点 A 的弧 CB 的中点. 过点 A 作垂直于 BC 的直线与 BS 交于点 D，与圆 Ω 交于另一点 $E \neq A$. 过点 D 且平行于 BC 的直线与直线 BE 交于点 L. 记 ω 为三角形 BDL 的外接圆. 设 ω 与 Ω 交于另一点 $P \neq B$.

证明：ω 在点 P 处的切线与直线 BS 的交点在 $\angle BAC$ 的内角平分线上.

第 3 题. 对每个整数 $k \geqslant 2$，求所有满足下述条件的无穷正整数序列 $a_1, a_2, \ldots$：存在一个多项式 $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$，这里 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ 是非负整数，使得

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

对所有整数 $n \geqslant 1$ 成立.

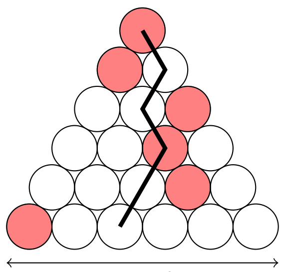
2023 年 7 月 9 日, 星期日

第 4 题. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ 为两两不等的正实数, 使得对每个 $n = 1, 2, \ldots, 2023$,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

都是一个整数. 证明: $a_{2023} \geqslant 3034$.

第 5 题. 设 n 是一个正整数. 日式三角是将 $1 + 2 + \cdots + n$ 个圆排成正三角形的形状, 使得对 $i = 1, 2, \ldots, n$, 从上到下的第 i 行恰有 i 个圆且其中恰有一个被染为红色. 在日式三角内, *忍者路径*是指一串由 n 个圆组成的序列, 从最上面一行的圆开始, 每次从当前圆连接到它下方相邻的两个圆之一, 直至到达最下面一行的某个圆为止. 下图为一个 $n = 6$ 的日式三角，其中画有一条包含两个红色圆的忍者路径.



求最大的整数 k (用 n 表示), 使得在每个日式三角中都存在一条忍者路径, 它包含至少 k 个红色圆.

第 6 题. 设 ABC 是一个正三角形. 点 A_1, B_1, C_1 在三角形 ABC 的内部, 且满足 $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, 及

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

设直线 BC_1 与 CB_1 交于点 A_2, 直线 CA_1 与 AC_1 交于点 B_2, 直线 AB_1 与 BA_1 交于点 C_2.

证明: 若三角形 $A_1B_1C_1$ 的三边长度两两不等, 则三角形 AA_1A_2, BB_1B_2 和 CC_1C_2 的外接圆都经过两个公共点.