Παρασκευή,10 *Ιουλίου* 2015

Πρόβλημα 1. Λέμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{S}$, που αποτελείται από σημεία του επιπέδου, είναι *ισορροπημένο*, αν για κάθε δυο διαφορετικά σημεία A και B του $\mathcal{S}$, υπάρχει σημείο C του $\mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $AC = BC$. Λέμε ακόμα ότι το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι *ελεύθερο κέντρου*, αν για οποιαδήποτε τρία διαφορετικά σημεία A, B και C του $\mathcal{S}$, δεν υπάρχει σημείο P του $\mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $PA = PB = PC$.

(a) Να αποδείξετε ότι για όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, υπάρχει ένα *ισορροπημένο* σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

(b) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, για τους οποίους υπάρχει ένα *ισορροπημένο* και *ελεύθερο κέντρου* σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (a, b, c) θετικών ακεραίων, που είναι τέτοιες ώστε κάθε ένας από τους αριθμούς

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

είναι δύναμη του 2.

(*Δύναμη του* 2 *είναι ένας ακέραιος της μορφής* 2^n, όπου n *είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος*.)

Πρόβλημα 3. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB > AC$. Έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του, H το ορθόκεντρό του και F το ίχνος του ύψους του από την κορυφή A. Έστω M το μέσον της πλευράς BC. Έστω Q το σημείο πάνω στον κύκλο Γ, τέτοιο ώστε $\angle HQA = 90°$ και έστω K το σημείο πάνω στον κύκλο Γ, τέτοιο ώστε $\angle HKQ = 90°$. Υποθέτουμε ότι τα σημεία A, B, C, K και Q είναι όλα διαφορετικά και βρίσκονται πάνω στον κύκλο Γ με τη σειρά που δίνονται.

Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων KQH και FKM εφάπτονται μεταξύ τους.

Χρόνος διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Σάββατο, 11 *Ιουλίου* 2015

Πρόβλημα 4. Τρίγωνο ABC έχει περιγεγραμμένο κύκλο Ω και περίκεντρο O. Ένας κύκλος Γ με κέντρο A τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BC στα σημεία D και E έτσι ώστε τα σημεία B, D, E και C να είναι όλα διαφορετικά και να βρίσκονται πάνω στην ευθεία BC με αυτή τη σειρά. Έστω F και G τα σημεία τομής των κύκλων Γ και Ω έτσι ώστε A, F, B, C και G να βρίσκονται πάνω στον κύκλο Ω με αυτή τη σειρά. Έστω K το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BDF και του ευθύγραμμου τμήματος AB. Έστω L το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου CGE και του ευθύγραμμου τμήματος CA.
Υποθέτουμε ότι οι ευθείες FK και GL είναι διαφορετικές και τέμνονται στο σημείο X.
Να αποδείξετε ότι το σημείο X βρίσκεται πάνω στην ευθεία AO.

Πρόβλημα 5. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

Πρόβλημα 6. Η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$ ακεραίων αριθμών ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $1 \le a_j \le 2015$, για κάθε $j \ge 1$,

(ii) $k + a_k \ne l + a_l$, για κάθε $1 \le k < l$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο θετικοί ακέραιοι b και N τέτοιοι ώστε

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2$$

για όλους τους ακέραιους m και n, για τους οποίους ισχύει $n > m \ge N$.

Χρόνος διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες