الثلاثاء, 16. يوليو 2024

المسألة رقم 1 حدد جميع الأعداد الحقيقية α بحيث، لكل عدد صحيح موجب n، يكون العدد:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

مضاعفًا لـ n. (لاحظ أن $\lfloor z \rfloor$ يرمز إلى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي z. على سبيل المثال، $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ و $\lfloor 2.9 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2$).

المسألة رقم 2 حدد جميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b) بحيث يوجد عددان صحيحان موجبان g و N يحققان:

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

لكل الأعداد الصحيحة $n \geqslant N$. (لاحظ أن $\gcd(x, y)$ ترمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين x و y).

المسألة رقم 3 لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتابعة لا نهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة، وليكن N عدد صحيح موجب. لنفترض أنه، لكل $n > N$، يكون a_n مساويًا لعدد المرات التي يظهر فيها a_{n-1} في القائمة $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

اثبت أن على الأقل واحدة من المتتابعتين $a_1, a_3, a_5, \ldots$ و $a_2, a_4, a_6, \ldots$ تكون دورية في النهاية.

(المتتابعة اللا نهائية $b_1, b_2, b_3, \ldots$ تكون دورية في النهاية إذا وجد عددان صحيحان موجبان p و M بحيث $b_{m+p} = b_m$ لكل $m \geqslant M$).

الزمن 4.5 ساعة
لكل سؤال 7 درجات

الأربعاء, 17. يوليو 2024

المسألة رقم 4 ليكن ABC مثلثًا بحيث $AB < AC < BC$. لتكن ω هي الدائرة الداخلية للمثلث ABC، ومركزها I. لتكن X نقطة على الضلع BC تختلف عن C بحيث يكون المستقيم المار بالنقطة X والموازي لـ AC مماسًا لـ ω. وبالمثل، لتكن Y نقطة على الضلع BC تختلف عن B بحيث يكون المستقيم المار بالنقطة Y والموازي لـ AB مماسًا لـ ω. ليكن AI يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مرة أخرى عند $P \neq A$. لتكن K و L نقطتي منتصف AC و AB على الترتيب.

اثبت أن $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

المسألة رقم 5 يلعب الحلزون توربو لعبة على رقعة تحتوي على 2024 صفًا و 2023 عمودًا. هناك وحوش مخفية في 2022 من الخلايا. في البداية، لا يعرف توربو مكان أي من الوحوش، ولكنه يعرف أن هناك وحشًا واحدًا بالضبط في كل صف باستثناء الصف الأول والصف الأخير، وأن كل عمود يحتوي على وحش واحد على الأكثر.

يقوم توربو بمحاولات متتالية للانتقال من الصف الأول إلى الصف الأخير. في كل محاولة، يختار البدء في أي خلية في الصف الأول، ثم ينتقل بشكل متكرر إلى خلية مجاورة تشترك في ضلع مشترك. (يُسمح له بالعودة إلى خلية زارها من قبل). إذا وصل إلى خلية بها وحش، تنتهي محاولته ويتم نقله مرة أخرى إلى الصف الأول لبدء محاولة جديدة. الوحوش لا تتحرك، وتوربو يتذكر ما إذا كانت كل خلية زارها تحتوي على وحش أم لا. إذا وصل إلى أي خلية في الصف الأخير، تنتهي محاولته وتنتهي اللعبة.

حدد القيمة الصغرى لـ n التي يمتلك توربو استراتيجية تضمن الوصول إلى الصف الأخير في المحاولة رقم n أو قبلها، بغض النظر عن مواقع الوحوش.

المسألة رقم 6 لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية. تسمى الدالة $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ مائية إذا تحققت الخاصية التالية: لكل $x, y \in \mathbb{Q}$،

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{أو} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

أثبت أنه يوجد عدد صحيح c بحيث لأي دالة مائية f هناك على الأكثر c عدداً نسبياً مختلفاً على الشكل $f(r) + f(-r)$ لعدد نسبي r، وأوجد أصغر قيمة ممكنة لـ c.

الزمن 4.5 ساعة
لكل سؤال 7 درجات