

Penktadienis, 2015 m. liepos 10 d.

**1 uždavinys.** Baigtinę plokštumos taškų aibę  $\mathcal{S}$  vadinsime *subalansuota*, jei bet kuriems dviems aibės  $\mathcal{S}$  taškams  $A$  ir  $B$  visada atsiras toks aibės  $\mathcal{S}$  taškas  $C$ , kad  $AC = BC$ . Sakysime, kad aibė  $\mathcal{S}$  *neturi centro*, jei kokius beimtume tris skirtingus aibės  $\mathcal{S}$  taškus  $A$ ,  $B$  ir  $C$ , su jokių aibės  $\mathcal{S}$  tašku  $P$  negalioja lygybė  $PA = PB = PC$ .

- a) Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju  $n \geq 3$  egzistuoja subalansuota aibė, sudaryta iš lygiai  $n$  taškų.
- b) Raskite visus natūraliuosius  $n \geq 3$ , su kuriais egzistuoja subalansuota ir neturinti centro aibė, sudaryta iš lygiai  $n$  taškų.

**2 uždavinys.** Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus  $(a, b, c)$ , su kuriais kiekvienas iš skaičių

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

yra dvejetainio laipsnis.

(Dvejetainio laipsniais yra vadinami natūralieji skaičiai  $2^n$ , kur  $n$  yra sveikasis neneigiamas skaičius.)

**3 uždavinys.** Duotas smailusis trikampis  $ABC$ , kuriame  $AB > AC$ . Tegul  $\Gamma$  yra trikampio  $ABC$  apibrėžtinis apskritimas,  $H$  – to trikampio ortocentras, o  $F$  – aukštinės, nuleistos iš  $A$  į kraštinę  $BC$ , pagrindas. Tegul  $M$  yra kraštinės  $BC$  vidurio taškas. Tegul  $Q$  yra toks apskritimo  $\Gamma$  taškas, kad  $\angle HQA = 90^\circ$ , o  $K$  toks apskritimo  $\Gamma$  taškas, kad  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Be to, taškai  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  ir  $Q$  yra visi skirtingi ir priklauso apskritimui  $\Gamma$  būtent tokia tvarka.

Įrodykite, kad trikampių  $KQH$  ir  $FKM$  apibrėžtiniai apskritimai liečia vienas kitą.

*Šeštadienis, 2015 m. liepos 11 d.*

**4 uždavinys.** Trikampio  $ABC$  apibrėžtinis apskritimas yra  $\Omega$ , o taškas  $O$  yra to apskritimo centras. Apskritimas  $\Gamma$ , kurio centras  $A$ , kerta atkarpą  $BC$  taškuose  $D$  ir  $E$  taip, kad taškai  $B, D, E$  ir  $C$  yra visi skirtingi ir priklauso tiesei  $BC$  būtent tokia tvarka. Tegul  $F$  ir  $G$  yra apskritimų  $\Gamma$  ir  $\Omega$  sankirtos taškai, ir  $A, F, B, C$  ir  $G$  priklauso apskritimui  $\Omega$  būtent tokia tvarka. Tegul  $K$  yra antrasis atkarpos  $AB$  ir apibrėžto apie trikampį  $BDF$  apskritimo sankirtos taškas. Tegul  $L$  yra antrasis atkarpos  $CA$  ir apibrėžto apie trikampį  $CGE$  apskritimo sankirtos taškas.

Tarkime, kad tiesės  $FK$  ir  $GL$  yra skirtingos ir kertasi taške  $X$ . Įrodykite, kad taškas  $X$  priklauso tiesei  $AO$ .

**5 uždavinys.** Tegul  $\mathbb{R}$  žymi visų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas funkcijas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenkinančias lygybę

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

su visais realiaisiais skaičiais  $x$  ir  $y$ .

**6 uždavinys.** Sveikųjų skaičių seka  $a_1, a_2, \dots$  turi tokias savybes:

- (i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  su visais  $j \geq 1$ ;
- (ii)  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  su visais  $1 \leq k < \ell$ .

Įrodykite, kad egzistuoja tokie du sveikieji teigiami skaičiai  $b$  ir  $N$ , kad

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

su visais sveikaisiais  $m$  ir  $n$ , tenkinančiais nelygybę  $n > m \geq N$ .