



星期一, 19. 七月 2021

問題 1. 令 $n \geq 100$ 為一整數。誼廷將數字 $n, n+1, \dots, 2n$ 各寫在一張不同的牌上。他接著將這 $n+1$ 張牌洗牌並將它們分為兩疊。試證明至少有一疊牌中存在兩張牌的數字總和是完全平方數。

問題 2. 證明不等式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

對於所有實數 x_1, \dots, x_n 皆成立。

問題 3. 令 D 為銳角三角形 ABC 的內點，其中 $AB > AC$ ，使得 $\angle DAB = \angle CAD$ 。點 E 在線段 AC 上，滿足 $\angle ADE = \angle BCD$ 。點 F 在線段 AB 上，滿足 $\angle FDA = \angle DBC$ 。點 X 則在直線 AC 上，滿足 $CX = BX$ 。令 O_1 與 O_2 分別為三角形 ADC 與 EXD 的外心。證明直線 BC 、 EF 與 O_1O_2 共點。



星期二, 20. 七月 2021

問題 4. 令圓 Γ 的圓心為 I , $ABCD$ 為一凸四邊形, 使得線段 AB , BC , CD 和 DA 皆與 Γ 相切。令 Ω 為三角形 AIC 的外接圓。假設 BA 往 A 方向的延長線交 Ω 於 X , 且 BC 往 C 方向的延長線交 Ω 於 Z 。 AD 與 CD 往 D 方向的延長線分別交 Ω 於 Y 和 T 。試證

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

問題 5. 兩隻松鼠, 阿布與阿江, 爲了過冬共蒐集了 2021 顆核桃。阿江將所有核桃編號 1 到 2021, 並繞著牠們最喜歡的樹挖了 2021 個洞圍成一圈。次日一早, 阿江注意到阿布無視編號地在每個洞裡各放了一顆核桃, 心生不悅。阿江因此決定透過 2021 次操作將核桃重排。在第 k 次操作, 阿江將與 k 號核桃相鄰的兩個核桃交換位置。證明存在一個 k 使得, 在第 k 次操作, 阿江交換了編號 a 與 b 的核桃, 其中 $a < k < b$ 。

問題 6. 令 $m \geq 2$ 爲一整數, A 爲一由有限多個整數 (不必然爲正整數) 所形成的集合, 且 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ 爲 A 的子集。假設對於每個 $k = 1, 2, \dots, m$, B_k 內元素的總和爲 m^k 。試證 A 至少包含 $m/2$ 個元素。