

Utorak, 16. jul 2019. god.

Zadatak 1. Neka je \mathbb{Z} skup cijelih brojeva. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a i b važi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Zadatak 2. Tačka A_1 izabrana je na stranici BC , a tačka B_1 na stranici AC trougla ABC . Tačke P i Q izabrane su na dužima AA_1 i BB_1 , redom, tako da je prava PQ paralelna sa pravom AB . Neka je P_1 tačka na pravoj PB_1 takva da je B_1 između tačaka P i P_1 i da važi $\angle PP_1C = \angle BAC$. Slično, neka je Q_1 tačka na pravoj QA_1 takva da je A_1 između tačaka Q i Q_1 i da važi $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dokazati da su tačke P , Q , P_1 i Q_1 konciklične.

Zadatak 3. Jedna društvena mreža ima 2019 korisnika od kojih su neki parovi prijatelji. Pri tome, ako je A prijatelj korisnika B , tada je i B prijatelj korisnika A . Jedna po jedna, promjene sljedećeg tipa se mogu dogoditi:

tri korisnika A , B i C , takva da je A prijatelj i sa B i sa C , ali B i C nijesu prijatelji, mijenjaju statusе njihovih prijateljstava tako da su B i C sada prijatelji, ali A više nije prijatelj ni sa B ni sa C ; statusi svih ostalih prijateljstava se ne mijenjaju.

Na početku, 1010 korisnika ima po 1009 prijatelja, a 1009 korisnika po 1010 prijatelja. Dokazati da postoji niz opisanih promjena nakon kojih svaki korisnik ima najviše jednog prijatelja među preostalima.

Srijeda, 17. jul 2019. god.

Zadatak 4. Naći sve parove (k, n) prirodnih brojeva takve da važi

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Zadatak 5. Banka grada Bata izdaje novčiće koji sa jedne strane imaju oznaku H , a sa druge oznaku T . Hari je poređao n ovakvih novčića u niz slijeva na desno. Sa ovim novčićima on ponavlja sljedeću operaciju: ako je u nizu tačno $k > 0$ novčića koji pokazuju H , tada okreće k -ti novčić slijeva; inače, svi novčići pokazuju T i proces se završava. Na primjer, ako je $n = 3$ i početni raspored je THT , Hari vrši sljedeći niz operacija $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, i proces se završava nakon tri operacije.

- Dokazati da za svaki početni raspored novčića Hari završava opisani proces nakon konačno mnogo operacija.
- Za početni raspored C neka je sa $L(C)$ označen broj operacija koje Hari izvrši prije nego što se proces završi. Na primjer, $L(THT) = 3$ i $L(TTT) = 0$. Odrediti aritmetičku sredinu brojeva $L(C)$ po svih 2^n mogućih početnih rasporeda C .

Zadatak 6. Neka je I centar upisane kružnice oštroglog trougla ABC , gdje je $AB \neq AC$. Upisana kružnica ω trougla ABC dodiruje stranice BC , CA i AB u tačkama D , E i F , redom. Prava koja sadrži D i normalna je na EF siječe kružnicu ω ponovo u tački R . Prava AR siječe kružnicu ω ponovo u tački P . Kružnice opisane oko trouglova PCE i PBF sijeku se ponovo u tački Q .

Dokazati da se prave DI i PQ sijeku na pravoj koja sadrži A i normalna je na AI .