12 juli 2006

Opgave 1. Zij ABC een driehoek en I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Voor een punt P in het inwendige van de driehoek geldt:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Bewijs dat $AP \geq AI$, en dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als $P = I$.

Opgave 2. Zij P een regelmatige 2006-hoek. Een diagonaal van P noemen we *goed* als zijn eindpunten de rand van P verdelen in twee stukken die beide bestaan uit een oneven aantal zijden van P. De zijden van P noemen we ook *goed*.

Stel dat P door 2003 diagonalen in driehoeken wordt verdeeld, zodanig dat geen twee diagonalen elkaar snijden in het inwendige van P. Bepaal het grootste aantal gelijkbenige driehoeken met twee goede zijden die in zo'n verdeling van P kunnen voorkomen.

Opgave 3. Bepaal het kleinste reële getal M zodanig dat voor alle reële getallen a, b en c de volgende ongelijkheid geldt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ *uur*
Voor iedere opgave maximaal 7 punten

13 juli 2006

Opgave 4. Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Opgave 5. Zij $P(x)$ een polynoom (veelterm) van graad $n > 1$ met gehele coëfficiënten en zij k een positief geheel getal $(k > 0)$. Beschouw het polynoom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

waarin P precies k keer voorkomt.
Bewijs dat er ten hoogste n gehele getallen t zijn zodanig dat $Q(t) = t$.

Opgave 6. Zij P een convexe veelhoek. Aan elke zijde b van P wordt de maximale oppervlakte toegekend van een driehoek die b als een zijde heeft en bevat is in P.
Bewijs dat de som van alle oppervlaktes die zijn toegekend aan de zijden van P ten minste tweemaal zo groot is als de oppervlakte van P.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten