Среда, 7-ми Јули, 2010

Задача 1. Одреди ги сите функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви да важи

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

за сите $x, y \in \mathbb{R}$. (Со $[z]$ е означен најголемиот цел број кој е помал или еднаков на z.)

Задача 2. Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека Γ е опишаната кружница околу триаголникот ABC. Нека правата AI ја сече кружницата Γ во точките A и D. Нека E е точка на лакот $\widehat{BDC}$ и F е точка на страната BC такви да

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Нека G е средината на отсечката IF. Докажи дека правите DG и EI се сечат во точка која припаѓа на кружницата Γ.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството од сите природни броеви. Одреди ги сите функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви да

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

е квадрат на природен број за сите $m, n \in \mathbb{N}$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

Четврток, 8-ми Јули, 2010

Задача 4. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека Γ е кружницата опишана околу триаголникот ABC. Нека правите AP, BP и CP повторно ја сечат кружницата Γ во точките K, L и M, соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во точката S. Да претпоставиме дека $\overline{SC} = \overline{SP}$. Докажи дека $\overline{MK} = \overline{ML}$.

Задача 5. Во секоја од шест кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетокот се наоѓа точно по една монета. Постојат два типа на дозволени операции:

Тип 1: Избери непразна кутија B_j, каде $1 \leqslant j \leqslant 5$. Извади една монета од B_j и додади две монети во B_{j+1}.

Тип 2: Избери непразна кутија B_k, каде $1 \leqslant k \leqslant 4$. Извади една монета од B_k и замени ги содржините (може да бидат и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2}.

Одреди дали постои конечна низа од вакви операции така да на крајот кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 се празни и кутијата B_6 содржи точно $2010^{2010^{2010}}$ монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Задача 6. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е низа од позитивни реални броеви. Нека за некој природен број s важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

за сите $n > s$. Докажи дека постојат природни броеви ℓ и N такви да $\ell \leqslant s$ и важи $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за сите $n \geqslant N$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода