e hënë, 11. korrik 2022

Problem 1. Banka e Oslos emeton dy tipe monedhash: alumini (që shënohet A) dhe bronxi (që shënohet B). Mariana ka n monedha alumini dhe n monedha bronxi, të cilat janë vendosur fillimisht në një rresht në një renditje të çfarëdoshme. *Zinxhir* quhet çdo nënvarg monedhash të njëpasnjëshme të të njëjtit tip. Për numrin e plotë pozitiv të fiksuar $k \leqslant 2n$, Mariana kryen në mënyrë të përsëritur operacionin e mëposhtëm: ajo identifikon zinxhirin më të gjatë i cili përmban monedhën e $k^{\text{të}}$ duke numëruar nga e majta në të djathtë, dhe në vijim zhvendos të gjitha monedhat e këtij zinxhiri në skajin e majtë të rreshtit. Për shembull, në qoftë se $n = 4$ dhe $k = 4$, procesi nis me renditjen $AABBBABA$ dhe vijon me

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Gjeni të gjitha çiftet (n, k) ku $1 \leqslant k \leqslant 2n$ të tilla që për çdo renditje fillestare, në një moment gjatë procesit, n monedhat më në të majtë të jenë të të njëjtit tip.

Problem 2. Le të jetë $\mathbb{R}^+$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjithë funksionet $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ të tilla që për çdo element $x \in \mathbb{R}^+$, gjendet saktësisht vetëm një element $y \in \mathbb{R}^+$ që kënaq kushtin

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problem 3. Jepet numri i plotë pozitiv k dhe S një bashkësi e fundme numrash të thjeshtë tek. Vërtetoni që ka të shumtën një mënyrë (duke mos marrë parasysh rrotullimin dhe simetrinë) për të vendosur elementët e S përgjatë rrethit në mënyrë të tillë që prodhimi i çdo dy numrave fqinjë të jetë i trajtës $x^2 + x + k$ për ndonjë numër të plotë pozitiv x .

e martë, 12. korrik 2022

Problem 4. Jepet pesëkëndëshi i mysët $ABCDE$ i tillë që $BC = DE$. Supozohet se gjendet një pikë T në brendësi të pesëkëndëshit $ABCDE$ ku $TB = TD$, $TC = TE$ dhe $\angle ABT = \angle TEA$. Drejtëza AB pret drejtëzat CD dhe CT në pikat P dhe Q, respektivisht. Supozohet se pikat P, B, A, Q janë në drejtëzën e tyre në renditjen e dhënë. Drejtëza AE pret drejtëzat CD dhe DT në pikat R dhe S, respektivisht. Supozohet se pikat R, E, A, S janë në drejtëzën e tyre në renditjen e dhënë. Vërtetoni që pikat P, S, Q, R ndodhen në të njëjtin rreth.

Problem 5. Gjeni të gjitha treshet e numrave të plotë pozitivë (a, b, p) ku p është numër i thjeshtë dhe

$$a^p = b! + p.$$

Problem 6. Jepet numri i plotë pozitiv n. Një *katror Nordik* është një tabelë katrore me përmasa $n \times n$ që përmban të gjithë numrat e plotë nga 1 tek n^2 e tillë që secili katror njësi përmban saktësisht vetëm një numër. Dy katrorë njësi të ndryshëm quhen fqinj në qoftë se ata kanë një brinjë të përbashkët. Secili katror njësi që është fqinj vetëm me katrorë njësi që kanë numër më të madh quhet *luginë*. Një *shteg i përpjetë* është një varg i përbërë nga një ose më shumë katrorë njësi i tillë që:

(i) katrori i parë në varg është luginë,

(ii) secili katror njësi pasardhës në varg është fqinj me katrorin njësi paraardhës, dhe

(iii) numrat e shkruar në katrorët njësi në varg janë në rendin rritës.

Gjeni, në varësi të n, numrin e përgjithshëm më të vogël të mundur të shtigjeve të përpjetë në një katror Nordik.