mánudagur, 21. september 2020

Dæmi 1. Lítum á kúptann ferhyrning $ABCD$. Punktur P liggur innan í $ABCD$. Eftirfarandi jöfnur gilda um hlutföllin:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Sannið að eftirfarandi þrjár línur skerist allar í sama punkti: innri helmingalínur hornanna $\angle ADP$ og $\angle PCB$ og miðþverill striksins AB.

Dæmi 2. Rauntölurnar a, b, c, d eru þannig að $a \geq b \geq c \geq d > 0$ og $a + b + c + d = 1$. Sannið að

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Dæmi 3. Við höfum $4n$ steinvölur með þyngdir $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Sérhver steinvala er lituð í einum af n litum og það er fjórar steinvölur af sérhverjum lit. Sýnið að hægt sé að skipta steinvölunum í tvær hrúgur þannig að eftirfarandi skilyrðum sé báðum fullnægt:

- Samanlögð þyngdin í báðum hrúgunum er sú sama.
- Sérhver hrúga inniheldur tvær steinvölur af hverjum lit.

þriðjudagur, 22. september 2020

Dæmi 4. Látum $n > 1$ vera heiltölu. Það eru n^2 stöðvar í fjallsbrekku, allar í ólíkri hæð. Sporvagnafélögin A og B starfrækja hvort um sig k sporvagna; sérhver sporvagn býður upp á ferð frá einni stöð til stöðvar sem er hærra á fjallinu (með engum stoppum á milli). Þessir k sporvagnar hjá A hafa k mismunandi upphafsstöðvar og k mismunandi endastöðvar, og það gildir að vagn sem byrjar hærra en annar vagn endar líka hærra. Sömu skilyrði gilda fyrir B. Við segjum að tvær stöðvar séu *tengdar* með félagi ef hægt er að ferðast frá lægri stöðinni að þeirri hærri með því að nota einn eða fleiri vagna frá því félagi (engar aðrar hreyfingar eru leyfilegar).

Ákvarðið minnstu tölu k þannig að hægt sé að fullyrða að til séu stöðvar sem eru tengdar með báðum félögum.

Dæmi 5. Stokkur með $n > 1$ spilum er gefinn. Jákvæð heiltala er skrifuð á sérhvert spil. Spilastokkurinn hefur þann eiginleika að fyrir sérhver tvö spil er venjulegt meðaltal talnanna á spilunum jafnt rúmfræðilegu meðaltali eins eða fleiri spila í bunkanum.

Fyrir hvaða n þarf að gilda að tölurnar á spilunum séu allar jafnar.

Dæmi 6. Sannið að til sé jákvæð heiltala c þannig að eftirfarnadi staðhæfing sé sönn:

Lítum á heiltölu $n > 1$, og mengi $\mathcal{S}$ af n punktum í planinu þannig að fjarlægðin milli sérhverja tveggja ólíkra punkta í $\mathcal{S}$ sé að minnsta kosti 1. Þá er til lína ℓ sem aðskilur $\mathcal{S}$ þannig að fjarlægðin milli sérhvers punkts í $\mathcal{S}$ að línu ℓ sé að minnsta kosti $cn^{-1/3}$.

(Lína ℓ *aðskilur* mengi af punktum $\mathcal{S}$ ef strikið milli einhverra tveggja punkta í $\mathcal{S}$ sker ℓ.)

Athugasemd. Veikari niðurstöðum þar sem $cn^{-1/3}$ er skipt út fyrir $cn^{-\alpha}$ gætu fengið stig eftir gildinu á $\alpha > 1/3$.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.
Hvert dæmi er 7 stiga virði.