Середа, 7 липня 2010 р.

Задача 1. Знайти всі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. (Через $[z]$ позначається найбільше ціле число, що не перевищує z.)

Задача 2. Точка I – центр кола, вписаного в трикутник ABC, а Γ – коло, що описане навколо цього трикутника. Пряма AI перетинає коло Γ в точках A і D. Точка E вибрана на дузі BDC, а точка F – на стороні BC так, що

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Точка G – середина відрізка IF. Довести, що прямі DG і EI перетинаються в точці, що належить колу Γ.

Задача 3. Позначимо через $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел. Знайти всі функції $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такі, що число

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

є квадратом натурального числа для довільних $m, n \in \mathbb{N}$.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Четвер, 8 липня 2010 р.

Задача 4. Нехай P – точка всередині трикутника ABC. Прямі AP, BP і CP вдруге перетинають коло Γ, що описане навколо трикутника ABC, в точках K, L і M відповідно. Дотична до Γ, що проведена через точку C, перетинає пряму AB в точці S. Відомо, що $SC = SP$. Доведіть, що $MK = ML$.

Задача 5. В початковий момент у кожній з шести коробок $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ знаходиться рівно по одній монеті. Дозволяється виконувати операції наступних двох типів:

Тип 1: Вибрати непорожню коробку B_j, де $1 \leq j \leq 5$, видалити з неї одну монету і додати дві монети в коробку B_{j+1}.

Тип 2: Вибрати непорожню коробку B_k, де $1 \leq k \leq 4$, видалити з неї одну монету і поміняти місцями вміст коробки B_{k+1}(можливо порожній) з вмістом коробки B_{k+2}(можливо порожнім).

Чи існує скінченна послідовність таких операцій, що призводить до ситуації, у якій коробки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 стануть порожніми, а в коробці B_6 буде знаходитись рівно $2010^{2010^{2010}}$ монет? (За означенням $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Задача 6. Задано послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots$, яка складається з додатних дійсних чисел. Відомо, що для деякого фіксованого натурального s при всіх $n > s$ має місце рівність

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Доведіть, що існують натуральні числа ℓ і N такі, що $\ell \leq s$ і $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ при всіх $n \geq N$.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів