Сейсенбі, 18 шілде, 2017 ж.

Есеп 1. Әрбір $a_0 > 1$ бүтін саны үшін, a_0, a_1, a_2, ... тізбегін осылай анықтайық:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{егер } \sqrt{a_n} \text{ бүтін саны болса,} \\ a_n + 3 & \text{қалған жағдайда,} \end{cases} \qquad \text{барлық } n \geqslant 0 \text{ үшін.}$$

Келесі шарт орындалатындай a_0 барлық мәндерін табыңыз: шексіз көп n сандары үшін $a_n = A$ болатын A саны бар.

Есеп 2. $\mathbb{R}$ нақты сандар жиыны. Барлық нақты x пен y үшін

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

теңдеуін қанағаттандыратын барлық $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцияларын табыңыз.

Есеп 3. Аңшы және көзге көрінбейтін қоян жазықтықта келесі ойын ойнайды. Қоянның бастапқы нүктесі A_0, және аңшының бастапқы нүктесі B_0, екеуі бірдей екен. Ойынның $n-1$ раундтан кейін, қоян A_{n-1} деген нүктеде тұр, ал аңшы B_{n-1} деген нүктеде тұр. Ойынның n-інші раунд кезінде, келесі үш нәрсе ретінде орындалады.

(i) Қоян, көзге көрінбей, A_{n-1} мен A_n нүктелер арасында қашықтығы дәл 1 болатындай A_n деген нүктеге өтеді.

(ii) Бақылау аппараты аңшыға P_n деген нүктені көрсетеді. Мұнда бақылау аппараты P_n мен A_n нүктелер арасында қашықтығы 1-ден аспайтынын ғана кепіл береді.

(iii) Аңшы, B_{n-1} мен B_n нүктелер арасында қашықтығы дәл 1 болатындай, көрінетін бір B_n деген нүктеге өтеді.

Қоян қалай жүрсе де және бақылау аппараты қандай нүктелер көрсетсе де, 10^9 раундтан кейін аңшы мен қоян арасында қашықтығы 100-ден аспайтына кепіл ету үшін, аңшы қалай жүру керек өзіне әрқашан таңдай ала ма?

Language: Kazakh

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады

Сәрсенбі, 19 шілде, 2017 ж.

Есеп 4. Ω деген шеңберінің бойында RS диаметрі емес болатын R және S нүктелер белгіленген. R нүктесінде Ω-ны жанайтын ℓ түзуі сызылған. S нүктесі RT кесіндісінің ортасы болатын T нүктесі алынған. Ω-ның RS кіші доғасында келесі шарт орындалатындай J нүктесі алынған: JST үшбұрышының сырттай сызылған Γ шеңбері ℓ түзуімен екі әртүрлі нүктеде қиылысады. Осы Γ шеңберінің мен ℓ түзуінің қиылысу нүктелерінен R нүктесіне жақын нүктесін A деп белгілейік. AJ түзуі Ω-ны екінші рет K нүктесінде қияды. KT түзуі Γ шеңберін жанайтынын дәлелдеңіз.

Есеп 5. $N \geqslant 2$ бүтін саны берілген. $N(N+1)$ ойыншы бар командасы қатарда тұр, және оларда кез келген екеуінің бойлары бірдей емес. Жаттықтырушы $N(N-1)$ ойыншыны алып тастап, қалған $2N$ ойыншыларының жаңа қатарында келесі N шарт көруге келеді:

(1) бойлары ең ұзын екі ойыншының арасында ешкім жоқ,

(2) бойлары үшінші мен төртінші ең ұзын ойыншының арасында ешкім жоқ,

$\vdots$

(N) бойлары ең кіші екі ойыншының арасында ешкім жоқ.

Осыны әрқашан істеуге мүмкіндігі бар екенін дәлелдеңіз.

Есеп 6. x және y бүтін сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші 1 болатын (x, y) жұптығы *примитивті нүкте* болсын. Примитивті нүктелерден құралған S шекті жиыны берілген. S-тің ішінен әрбір (x, y) үшін

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

болатын натурал саны n және бүтін сандар a_0, a_1, …, a_n табылатынын дәлелдеңіз.