úterý, 16. července 2024

Úloha 1. Určete všechna reálná čísla α taková, že pro každé kladné celé n je číslo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

násobkem n. (Zápisem $\lfloor z \rfloor$ rozumíme největší celé číslo které nepřevyšuje z. Platí například $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ a $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Úloha 2. Určete všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro něž existují kladná celá g a N taková, že rovnost

$$\mathrm{NSD}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

platí pro všechna celá čísla $n \geqslant N$. (Zápisem $\mathrm{NSD}(x, y)$ rozumíme největšího společného dělitele celých čísel x, y.)

Úloha 3. Mějme nekonečnou posloupnost kladných celých čísel $a_1, a_2, a_3 \ldots$ a kladné celé číslo N. Předpokládejme, že pro všechna $n > N$ je a_n rovno počtu výskytů čísla a_{n-1} mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Dokažte, že alespoň jedna z posloupností $a_1, a_3, a_5, \ldots$ nebo $a_2, a_4, a_6, \ldots$ je eventuálně periodická.

(O posloupnosti $b_1, b_2, b_3, \ldots$ řekneme, že je *eventuálně periodická*, pokud existují kladná celá p a M taková, že rovnost $b_{m+p} = b_m$ platí pro všechna $m \geqslant M$.)

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

středa, 17. července 2024

Úloha 4. Je dán trojúhelník ABC, ve kterém platí $|AB| < |AC| < |BC|$. Buď ω kružnice vepsaná ABC se středem I. Nechť X je bod na přímce BC různý od C takový, že rovnoběžka s AC skrz X je tečnou ω. Analogicky, nechť Y je bod na přímce BC různý od B takový, že rovnoběžka s BC skrz Y je tečnou ω. Přímka AI protíná kružnici opsanou ABC podruhé v bodě $P \neq A$. Označme K a L středy úseček AC a AB.

Dokažte, že platí $|\sphericalangle KIL| + |\sphericalangle YPX| = 180°$.

Úloha 5. Šnek Turbo hraje hru v tabulce s 2024 řádky a 2023 sloupci. Ve 2022 políčkách tabulky jsou schované příšerky. Na začátku, Turbo neví jak přesně jsou příšerky rozmístěny, ví ovšem, že každý řádek kromě prvního a posledního obsahuje právě jednu příšerku a každý sloupec obsahuje nejvýše jednu příšerku.

Turbo se snaží v několika pokusech dostat z prvního řádku do posledního. V každém pokusu si Turbo může zvolit libovolné počáteční políčko v prvním řádku, načež se může opakovaně posunout z políčka, kde se nachází, na políčko sousedící s ním stranou. (Každé políčko tak může navštívit i vícekrát). Vstoupí-li Turbo na políčko s příšerkou, jeho pokus tím končí a teleportuje se zpátky do prvního řádku. Příšerky se nehýbou a Turbo si pamatuje, zda se na políčku, které navštívil, nachází příšerka. Pokud dosáhne libovolného políčka z posledního řádku, jeho pokus skončí, stejně jako celá hra.

Určete nejmenší hodnotu n pro níž má Turbo strategii, která zaručí, že se dostane do posledního řádku po nejvýše n pokusech, nehledě na to, jak jsou příšerky rozmístěny.

Úloha 6. Nechť $\mathbb{Q}$ značí množinu racionálních čísel. O funkci $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ řekneme, že je *lázeňská*, pokud splňuje následující podmínku: Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ platí alespoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{nebo} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokažte, že existuje celé číslo c takové, že pro každou lázeňskou funkci f existuje nejvýše c různých racionálních hodnot vyjádřitelných ve tvaru $f(r) + f(-r)$ pro nějaké racionální číslo r a nalezněte nejmenší možnou hodnotu c.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.