Δευτέρα, 21. Σεπτεμβρίου 2020

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο $ABCD$. Το σημείο P είναι στο εσωτερικό του $ABCD$, έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες αναλογίες:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες τρεις ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο: οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $\angle ADP$ και $\angle PCB$ και η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a, b, c, d είναι τέτοιοι ώστε $a \geq b \geq c \geq d > 0$ και $a+b+c+d = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Πρόβλημα 3. Υπάρχουν $4n$ βότσαλα με βάρη $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Κάθε βότσαλο χρωματίζεται με ένα από n χρώματα και υπάρχουν τέσσερα βότσαλα από κάθε χρώμα. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε τα βότσαλα σε δύο στοίβες έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

- Το συνολικό βάρος καθεμιάς από τις δύο στοίβες είναι το ίδιο.
- Κάθε στοίβα περιέχει δύο βότσαλα από κάθε χρώμα.

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τρίτη, 22. Σεπτεμβρίου 2020

Πρόβλημα 4. Έστω ακέραιος $n > 1$. Υπάρχουν n^2 σταθμοί στην πλαγιά ενός βουνού, όλοι σε διαφορετικά ύψη. Καθεμία από δύο εταιρείες τελεφερίκ, A και B, λειτουργεί k τελεφερίκ. Κάθε τελεφερίκ εκτελεί μεταφορά από έναν σταθμό σε έναν άλλον που βρίσκεται υψηλότερα (χωρίς ενδιάμεσες στάσεις). Τα k τελεφερίκ της εταιρείας A έχουν k διαφορετικά σημεία εκκίνησης και k διαφορετικά σημεία τερματισμού και ένα τελεφερίκ το οποίο ξεκινά υψηλότερα από κάποιο άλλο, επίσης τερματίζει σε σταθμό που βρίσκεται υψηλότερα. Οι ίδιες συνθήκες ισχύουν και για την εταιρεία B. Λέμε ότι δύο σταθμοί *συνδέονται* από μία εταιρεία, αν κάποιος μπορεί να ξεκινήσει από τον σταθμό που βρίσκεται χαμηλότερα και να φτάσει στο σταθμό που βρίσκεται υψηλότερα χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα τελεφερίκ της εταιρείας αυτής (δεν επιτρέπονται άλλες μετακινήσεις μεταξύ σταθμών).

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο k για τον οποίο μπορεί κάποιος να εγγυηθεί ότι υπάρχουν δύο σταθμοί οι οποίοι συνδέονται και από τις δύο εταιρείες.

Πρόβλημα 5. Δίνεται μία δεσμίδα με $n > 1$ κάρτες. Ένας θετικός ακέραιος αναγράφεται πάνω σε κάθε κάρτα. Η δεσμίδα έχει την ιδιότητα ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών σε κάθε ζεύγος καρτών είναι επίσης ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών κάποιας συλλογής μίας ή περισσοτέρων καρτών.

Για ποιες τιμές του n προκύπτει ότι οι αριθμοί πάνω στις κάρτες είναι όλοι ίσοι;

Πρόβλημα 6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετική σταθερά c, τέτοια ώστε να αληθεύει η ακόλουθη πρόταση:

Θεωρούμε έναν ακέραιο $n > 1$ και ένα σύνολο $\mathcal{S}$ που αποτελείται από n σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε η απόσταση μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων του $\mathcal{S}$ είναι τουλάχιστον 1. Τότε υπάρχει μία ευθεία ℓ που διαχωρίζει το $\mathcal{S}$, έτσι ώστε η απόσταση οποιουδήποτε σημείου του $\mathcal{S}$ από την ευθεία ℓ είναι τουλάχιστον $cn^{-1/3}$.

(Μία ευθεία ℓ *διαχωρίζει* ένα σύνολο σημείων $\mathcal{S}$, αν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του $\mathcal{S}$ τέμνει την ευθεία ℓ.)

Σημείωση. Σε ασθενέστερα αποτελέσματα με αντικατάσταση του $cn^{-1/3}$ από $cn^{-\alpha}$ μπορεί να δοθούν μονάδες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς $\alpha > 1/3$.

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες