martedì, 16. luglio 2024

Problema 1. Determinare tutti i numeri reali α tali che, per ogni intero positivo n, il numero intero

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

è un multiplo di n. (Si noti che $\lfloor z \rfloor$ indica il più grande intero minore o uguale a z. Per esempio, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Problema 2. Determinare tutte le coppie (a, b) di interi positivi per cui esistono interi positivi g ed N tali che

$$\mathrm{MCD}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

è soddisfatta per tutti i numeri interi $n \geqslant N$. (Si noti che $\mathrm{MCD}(x, y)$ indica il massimo comun divisore degli interi x e y.)

Problema 3. Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una successione infinita di interi positivi, e sia N un intero positivo. Supponiamo che, per ogni $n > N$, a_n sia uguale al numero di volte che a_{n-1} compare nella lista $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dimostrare che almeno una delle successioni $a_1, a_3, a_5, \ldots$ e $a_2, a_4, a_6, \ldots$ è definitivamente periodica. (Una successione infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ si dice *definitivamente periodica* se esistono interi positivi p ed M tali che $b_{m+p} = b_m$ per ogni $m \geqslant M$.)

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 7 punti.

mercoledì, 17. luglio 2024

Problema 4. Sia ABC un triangolo con $AB < AC < BC$. L'incentro e la circonferenza inscritta al triangolo ABC siano I e ω, rispettivamente. Sia X il punto della retta BC, diverso da C, tale che la retta per X parallela a AC è tangente a ω. Analogamente, sia Y il punto della retta BC, diverso da B, tale che la retta per Y parallela ad AB è tangente a ω. La retta AI interseca nuovamente la circonferenza circoscritta al triangolo ABC in $P \neq A$. Siano K ed L i punti medi di AC e AB, rispettivamente.

Dimostrare che $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Problema 5. Turbo la lumaca gioca su una tabella con 2024 righe e 2023 colonne. Ci sono dei mostri nascosti in 2022 delle caselle. Inizialmente, Turbo non sa dove sono i mostri, ma sa che c'è esattamente un mostro in ogni riga, tranne la prima e l'ultima, e che ogni colonna contiene al massimo un mostro.

Turbo effettua una serie di tentativi per andare dalla prima riga all'ultima riga. In ogni tentativo, sceglie di partire da una qualunque casella della prima riga, poi si sposta di casella in casella, andando ogni volta da una casella ad una casella che abbia un lato in comune con quella su cui si trova. (Le è permesso ritornare in una casella già visitata precedentemente.) Se viene a trovarsi in una casella con un mostro, il suo tentativo finisce e viene riportata alla prima riga per iniziare un nuovo tentativo. I mostri non si muovono, e Turbo ricorda se le caselle visitate contengono o meno un mostro. Se raggiunge una qualunque casella dell'ultima riga, il suo tentativo termina e il gioco finisce.

Determinare il minimo valore di n per cui Turbo ha una strategia che le garantisce di raggiungere l'ultima riga all'n-esimo tentativo, o prima, indipendentemente dalla disposizione dei mostri.

Problema 6. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Una funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ si dice *aquaesuliana* se per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, almeno una delle seguenti due proprietà è verificata:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{oppure} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dimostrare che esiste un numero intero c tale che, per ogni funzione aquaesuliana f, la quantità $f(r) + f(-r)$ assume al massimo c valori distinti quando r varia in $\mathbb{Q}$, e determinare il più piccolo valore possibile di c.