Çərşənbə axşamı, 16 iyul 2024

Məsələ 1. Bütün elə α həqiqi ədədlərini tapın ki, hər bir n müsbət tam ədədi üçün

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

tam ədədi n ədədinin müəyyən bir qatına bərabər olsun, yəni n-ə tam bölünsün. (Qeyd: $\lfloor z\rfloor$ ifadəsi, z ədədindən kiçik və ya ona bərabər olan ən böyük tam ədədi gostərir. Məsələn, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ və $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Məsələ 2. Bütün elə (a, b) müsbət tam ədəd cütlüklərini tapın ki, (a, b) cütlüyü üçün elə g və N müsbət tam ədədləri mövcud olsun ki,

$$\text{ƏBOB}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

bərabərliyi bütün $n \geq N$ tam ədədləri üçün doğru olsun. (Qeyd: ƏBOB(x, y) ifadəsi, x və y tam ədədlərinin ən böyük ortaq bölənini göstərir.)

Məsələ 3. Müsbət tam ədədlərdən təşkil olunmuş $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sonsuz ardıcıllığı və N müsbət tam ədədi verilmişdir. Bu ardıcıllıqda hər bir $n > N$ üçün, a_n həddi, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ hədlərindən a_{n-1} həddinə bərabər olanların sayına bərabərdir.

İsbat edin ki, $a_1, a_3, a_5, \ldots$ və $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ardıcıllıqlarından ən azı bir dənəsi bir yerdən sonra dövri olacaqdır.

(Əgər $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sonsuz ardıcıllığında bütün $m \geqslant M$ ədədləri üçün $b_{m+p} = b_m$ olacaq şəkildə p və M müsbət tam ədədləri mövcud olarsa, o zaman bu ardıcıllıq *bir yerdən sonra dövri* adlanır.)

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.

Çərşənbə, 17 iyul 2024

Məsələ 4. ABC üçbucağında $AB < AC < BC$ olsun. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi və daxilinə çəkilmiş çevrə uyğun olaraq I və ω olsun. BC xətti üzərində C-dən fərqli elə X nöqtəsi götürülmüşdür ki, X nöqtəsindən AC düz xəttinə çəkilmiş paralel xətt ω çevrəsinə toxunur. Oxşar şəkildə BC xətti üzərində B-dən fərqli elə Y nöqtəsi götürülmüşdür ki, Y nöqtəsindən AB düz xəttinə çəkilmiş paralel xətt ω çevrəsinə toxunur. AI xətti ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə ilə ikinci dəfə $P \neq A$ nöqtəsində kəsişir. K və L nöqtələri uyğun olaraq AC və AB tərəflərinin orta nöqtələri olsun.

İsbat edin ki, $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Məsələ 5. İlbiz Turbo, 2024 sətr və 2023 sütundan ibarət olan bir lövhədə bir oyun oynayır. Lövhənin 2022 ədəd xanasında gizli canavarlar vardır. Başlanğıcda Turbo bu canavarların hansı xanalarda olduğunu bilmir, lakin o, ilk və son sətrdən başqa hər bir sətrdə dəqiq bir ədəd canavar olduğunu və hər bir sütunda isə ən çoxu bir ədəd canavar olduğunu bilir.

Turbo ilk sətrdən son sətrə çatmaq üçün müəyyən cəhdlər edir. Hər bir cəhddə, o, ilk sətrdə istədiyi bir xanadan başlayır, və olduğu xana ilə tərəf qonşuluğu olan xanalardan birinə keçmə addımlarını təkrarlayır (Turbo-nun öncədən ziyarət etdiyi xanaya geri qayıtmasına icazə verilir). Əgər Turbo içərsində canavar olan bir xanaya çatarsa, o zaman onun həmin cəhdi sonlanır və yeni bir cəhdə başlamaq üçün ilk sətrə göndərilir. Canavarlar hərəkət etmir və Turbo öncədən ziyarət etdiyi xanalarda canavar olub olmadığını yadında saxlayır. Turbo son sətrdəki istənilən bir xanaya çatarsa, cəhd sonlanır və oyun bitir.

n ədədinin elə ən kiçik qiymətini tapın ki, Turbo, canavarların lövhədəki yerlərindən asılı olmayaraq ən çoxu n cəhd edərək son sətrə çata, yəni oyunu bitirə bilər?

Məsələ 6. $\mathbb{Q}$ ilə rasional ədədlər çoxluğu işarə edilsin. Aşağıdakı şərti ödəyən $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funksiyalarına *maraqlı* deyək: istənilən $x, y \in \mathbb{Q}$ üçün,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{və} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

bərabərliklərindən ən azı biri doğru olsun. Elə bir c tam ədədinin mövcud olduğunu göstərin ki, hər bir f *maraqlı* funksiyası üçün r rasional ədəd olmaq şərti ilə $f(r) + f(-r)$ şəklində göstərilə bilən bir-birindən fərqli rasional ədədlərin sayı ən çoxu c-dir. c ədədinin mümkün ən kiçik qiymətini tapın.

Vaxt: 4 saat, 30 dəqiqə.
Hər bir sual 7 bal ilə qiymətləndirilir.