*Samstag, 8. Juli 2023*

**Aufgabe 1.** Man bestimme alle zusammengesetzten ganzen Zahlen $n > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $d_1, d_2, \ldots, d_k$ mit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ alle positiven Teiler von $n$, dann ist $d_i$ ein Teiler von $d_{i+1} + d_{i+2}$ für alle $1 \leq i \leq k-2$ .

**Aufgabe 2.** Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei $\Omega$ der Umkreis von $ABC$. Ferner sei $S$ der Mittelpunkt des Bogens $CB$ von $\Omega$, der $A$ enthält. Die Senkrechte von $A$ auf $BC$ schneide $BS$ in $D$ und $\Omega$ nochmals in $E \neq A$. Die Parallele zu $BC$ durch $D$ schneide die Gerade $BE$ in $L$. Der Umkreis des Dreiecks $BDL$ sei mit $\omega$ bezeichnet. Der zweite Schnittpunkt von $\omega$ mit $\Omega$ sei $P \neq B$.
Man beweise, dass die Tangente an $\omega$ in $P$ die Gerade $BS$ auf der inneren Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ schneidet.

**Aufgabe 3.** Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geqslant 2$ alle unendlichen Folgen positiver ganzer Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, für die ein Polynom $P$ der Gestalt $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ mit nichtnegativen ganzzahligen $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ existiert, sodass

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ gilt.



*Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.*
*Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.*

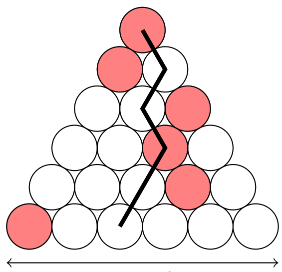
*Sonntag, 9. Juli 2023*

**Aufgabe 4.** Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, sodass

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots, 2023$ ganzzahlig ist. Man beweise, dass $a_{2023} \geqslant 3034$ gilt.

**Aufgabe 5.** Sei $n$ eine positive ganze Zahl. Ein *Japanisches Dreieck* besteht aus $1 + 2 + \cdots + n$ Kreisen, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sodass für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die $i$-te Zeile genau $i$ Kreise enthält, von denen genau einer rot gefärbt ist. Ein *Ninja-Pfad* in einem Japanischen Dreieck ist eine Folge von $n$ Kreisen, bei der man, beginnend in der obersten Reihe, wiederholt von einem Kreis zu einem der beiden unmittelbar darunterliegenden Kreise geht, bis die unterste Reihe erreicht ist. Das Bild zeigt ein Japanisches Dreieck mit $n = 6$ und einen Ninja-Pfad mit zwei roten Kreisen in diesem Dreieck.



$n = 6$

Man bestimme, in Abhängigkeit von $n$, das größte $k$, sodass es in jedem Japanischen Dreieck einen Ninja-Pfad mit mindestens $k$ roten Kreisen gibt.

**Aufgabe 6.** Es sei $ABC$ ein gleichseitiges Dreieck. Die Punkte $A_1, B_1, C_1$ liegen im Inneren von $ABC$, sodass $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ und

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$$

gilt. Die Geraden $BC_1$ und $CB_1$ schneiden sich in $A_2$, die Geraden $CA_1$ und $AC_1$ in $B_2$, die Geraden $AB_1$ und $BA_1$ in $C_2$.
Man beweise: Wenn das Dreieck $A_1B_1C_1$ nicht gleichschenklig ist, dann enthalten die drei Umkreise der Dreiecke $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ und $CC_1C_2$ zwei gemeinsame Punkte.



*Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.*
*Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.*