petek, 10. julij 2015

Naloga 1. Končna množica $\mathcal{S}$ točk v ravnini je *uravnotežena*, če za vsaki različni točki A in B iz $\mathcal{S}$ obstaja taka točka C iz $\mathcal{S}$, da velja $|AC| = |BC|$. Množica $\mathcal{S}$ je *brez središča*, če za nobene tri paroma različne točke A, B in C iz $\mathcal{S}$ ne obstaja taka točka P iz $\mathcal{S}$, da bi veljalo $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokaži, da za vsako naravno število $n \geqslant 3$ obstaja uravnotežena množica, v kateri je natanko n točk.

(b) Določi vsa naravna števila $n \geqslant 3$, za katera obstaja uravnotežena množica brez središča, v kateri je natanko n točk.

Naloga 2. Določi vse trojke (a, b, c) naravnih števil, za katere je vsako izmed števil

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

potenca števila 2.

(*Potenca števila* 2 *je naravno število oblike* 2^n, *pri čemer je* n *nenegativno celo število.*)

Naloga 3. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, v katerem je $|AB| > |AC|$. Naj bo Γ temu trikotniku očrtana krožnica, H njegova višinska točka in F nožišče višine iz točke A. Naj bo M razpolovišče stranice BC. Naj bo Q taka točka na Γ, da je $\angle HQA = 90°$, in K taka točka na Γ, da je $\angle HKQ = 90°$. Privzemimo, da so točke A, B, C, K in Q paroma različne in da ležijo na krožnici Γ v navedenem vrstnem redu.

Dokaži, da sta očrtani krožnici trikotnikov KQH in FKM tangentni druga na drugo.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

sobota, 11. julij 2015

Naloga 4. Naj bo Ω trikotniku ABC očrtana krožnica s središčem O. Krožnica Γ s središčem A seka daljico BC v točkah D in E, pri čemer so vse točke B, D, E in C paroma različne in ležijo na premici BC v navedenem vrstnem redu. Naj bosta F in G presečišči krožnic Γ in Ω, tako da A, F, B, C in G ležijo na Ω v navedenem vrstnem redu. Naj bo K presečišče trikotniku BDF očrtane krožnice in daljice AB, različno od B. Naj bo L presečišče trikotniku CGE očrtane krožnice in daljice CA, različno od C.

Denimo, da sta premici FK in GL različni in da se sekata v točki X. Dokaži, da X leži na premici AO.

Naloga 5. Naj bo $\mathbb{R}$ množica realnih števil. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enakosti

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

za vsa realna števila x in y.

Naloga 6. Zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ celih števil zadošča naslednjima pogojema:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ za vse $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ za vse $1 \leqslant k < \ell$.

Dokaži, da obstajata taki naravni števili b in N, da velja

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

za vsa cela števila m in n, za katera je $n > m \geqslant N$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.