

12. srpnja 2006.

**Zadatak 1.** Neka je  $I$  središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ . U unutrašnjosti trokuta  $ABC$  dana je točka  $P$  takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokažite da je  $|AP| \geq |AI|$ , te da jednakost vrijedi ako i samo ako se točka  $P$  podudara sa točkom  $I$ .

**Zadatak 2.** Neka je  $P$  pravilni poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona  $P$  kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub od  $P$  na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona  $P$ . Za stranice poligona  $P$  također kažemo da su *dobre*.

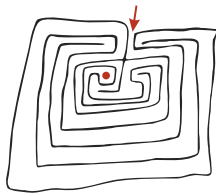
Promatrajmo podjele poligona  $P$  na trokute pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona  $P$ . Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

**Zadatak 3.** Odredite najmanji realni broj  $M$  takav da nejednakost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta  
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova



13. srpnja 2006.

**Zadatak 4.** Nadite sve parove  $(x, y)$  cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Zadatak 5.** Neka je  $P(x)$  polinom stupnja  $n$ ,  $n > 1$ , sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je  $k$  prirodan broj. Promatrajmo polinom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

pri čemu se  $P$  pojavljuje  $k$  puta. Dokažite da postoji najviše  $n$  cijelih brojeva  $t$  takvih da je  $Q(t) = t$ .

**Zadatak 6.** Svakoj stranici  $b$  konveksnog poligona  $P$  pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je  $b$  jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu  $P$ . Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama poligona  $P$  veći ili jednak od dvostruke površine poligona  $P$ .

*Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta  
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*