Language: **Icelandic**

Day: **1**

Miðvikudagur, 7. júlí 2010

Dæmi 1. Ákvarðið öll föll $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að jafnan

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

haldi fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$. (Hér táknar $\lfloor z\rfloor$ stærstu heiltölu minni eða jöfn z.)

Dæmi 2. Látum I vera miðju innritaðs hrings þríhyrnings ABC og látum Γ vera umritaðan hring hans. Látum línuna AI skera Γ aftur í D. Látum E vera punkt á boganum $\widehat{BDC}$ og F vera punkt á hliðinni BC þannig að

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Loks, látum við G vera miðpunkt bilsins IF. Sýnið að línurnar DG og EI skerist í Γ.

Dæmi 3. Látum $\mathbb{N}^+$ vera mengi strangt jákvæðra heiltalna. Ákvarðið öll föll $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ þannig að

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

er ferningstala fyrir öll $m, n \in \mathbb{N}^+$.

Tími: 4 klst. og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig

Fimmtudagur, 8. júlí 2010

Dæmi 4. Látum P vera punkt innan í þríhyrning ABC. Látum Γ vera umritaðan hring þríhyrningsins ABC. Línurnar AP, BP og CP skera Γ aftur í punktunum K, L og M í þeirri röð. Snertill Γ í C sker línuna AB í S. Gefum okkur að $|SC| = |SP|$. Sýnið að $|MK| = |ML|$.

Dæmi 5. Í hverjum sex kassa $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ er upphaflega einn peningur. Það eru tvenns konar aðgerðir leyfðar:

Tegund 1: Veljið kassa B_j, sem er ekki tómur, þar sem $1 \leq j \leq 5$. Fjarlægið einn pening úr B_j og bætið tveimur peningum við B_{j+1}.

Tegund 2: Veljið kassa B_k, sem ekki er tómur, þar sem $1 \leq k \leq 4$. Fjarlægið einn pening úr B_k og víxlið innihaldi (mögulega tómt) kassa B_{k+1} og B_{k+2}.

Ákvarðið hvort til er endanleg röð slíkra aðgerða sem leiðir til þess að B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 eru tómir og B_6 inniheldur nákvæmlega $2010^{2010^{2010}}$ peninga. (Athugið að $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Dæmi 6. Látum $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vera röð strangt jákvæðra rauntalna. Gefum okkur að til er strangt jákvæð heiltala s, þannig að

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

fyrir öll $n > s$. Sýnið að til eru jákvæðar heilar tölur ℓ og N, með $\ell \leq s$ þar sem gildir að $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ fyrir öll $n \geq N$.

Tími: 4 klst. og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig