

Version : Simplified Chinese

2007 年 7 月 25 日

**问题 1.** 给定实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 对每个  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 定义:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\},$$

且令

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) 证明: 对任意实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , 有

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) 证明: 存在实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  使得 (\*) 中的等号成立.

**问题 2.** 设  $A, B, C, D, E$  五点中,  $ABCD$  是一个平行四边形,  $BCED$  是一个圆内接四边形. 设  $\ell$  是通过  $A$  的一条直线,  $\ell$  与线段  $DC$  交于点  $F$  ( $F$  是线段  $DC$  的内点), 且  $\ell$  与直线  $BC$  交于点  $G$ . 若  $EF = EG = EC$ , 求证:  $\ell$  是  $\angle DAB$  的角平分线.

**问题 3.** 在一次数学竞赛活动中, 有一些参赛选手是朋友. 朋友关系是相互的. 如果一群参赛选手中的任何两人都不是朋友, 我们就称这一群选手为一个“团”(特别地, 人数少于 2 的一群也是一个团).

已知在这次竞赛中, 最大的团(人数最多的团)的人数是一个偶数, 证明: 我们总能把参赛选手分配到两个教室, 使得一个教室中的最大团的人数等于另一个教室中的最大团的人数.

考试时间: 4 小时 30 分

每题 7 分

Version : Simplified Chinese

2007 年 7 月 26 日

**问题 4.** 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BCA$  的角平分线与  $\triangle ABC$  的外接圆交于点  $R$ , 与边  $BC$  的垂直平分线交于点  $P$ , 与边  $AC$  的垂直平分线交于点  $Q$ . 设  $K$  与  $L$  分别是边  $BC$  和  $AC$  的中点. 证明:  $\triangle RPK$  和  $\triangle RQL$  的面积相等.

**问题 5.** 设  $a$  与  $b$  为正整数. 已知  $4ab - 1$  整除  $(4a^2 - 1)^2$ , 证明:  $a = b$ .

**问题 6.** 设  $n$  是一个正整数. 考虑

$$S = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0 \}$$

这样一个三维空间中具有  $(n + 1)^3 - 1$  个点的集合. 问: 最少要多少个平面, 它们的并集才能包含  $S$ , 但不含  $(0, 0, 0)$ .

考试时间: 4 小时 30 分

每题 7 分