12. Juli 2006

Aufgabe 1. Es sei ABC ein Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt I. Für einen Punkt P im Innern des Dreiecks gelte:

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$$

Man beweise:

- $\overline{AP} \geq \overline{AI}$
- Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $P = I$ gilt.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein regelmäßiges 2006-Eck P. Eine Diagonale von P heiße *gut*, wenn deren Endpunkte den Rand von P in zwei Teile zerlegen, die jeweils aus einer ungeraden Anzahl von Seiten von P bestehen. Auch die Seiten von P heißen *gut*.
Nun werde P durch 2003 Diagonalen in Dreiecke zerlegt, wobei keine zwei Diagonalen einen Schnittpunkt im Innern von P haben. Man bestimme die maximale Anzahl von gleichschenkligen Dreiecken mit zwei guten Dreiecksseiten, die in einer solchen Zerlegung von P auftreten können.

Aufgabe 3. Man bestimme die kleinste reelle Zahl M, so dass für alle reellen Zahlen a, b und c die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

13. Juli 2006

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Aufgabe 5. Es sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten und $n > 1$. Ferner sei k eine positive ganze Zahl. Wir betrachten das Polynom

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

wobei P genau k-mal auftritt.
Man beweise, dass höchstens n ganze Zahlen t mit $Q(t) = t$ existieren.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein konvexes Polygon P. Jeder Seite b von P wird das Maximum der Flächeninhalte jener Dreiecke zugeordnet, die in P liegen und die Seite b als eine ihrer Seiten haben.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte, die den Seiten von P zugeordnet wurden, mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt von P ist.

Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.