

Den 12 juli 2006

**Problem 1.** Låt  $ABC$  vara en triangel och låt  $I$  vara mittpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln. För en punkt  $P$  inuti triangeln gäller att

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Visa att  $AP \geq AI$ , samt att likheten gäller om och endast om  $P = I$ .

**Problem 2.** Låt  $P$  vara en regelbunden 2006-hörning. En diagonal i  $P$  kallas för *trevlig* om dess ändpunkter delar  $P$ :s omkrets i två delar, var och en med ett udda antal sidor från  $P$ . Månghörningens sidor anses också vara *trevliga*.

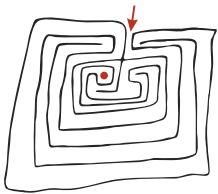
Antag att 2003 diagonaler, som parvist inte skär varandra inuti  $P$ , delar  $P$  i trianglar. Bestäm det största antalet likbenta trianglar med två trevliga sidor som en sådan konfiguration kan ha.

**Problem 3.** Bestäm det minsta reella talet  $M$  för vilket olikheten

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gäller för alla reella tal  $a$ ,  $b$  och  $c$ .

Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter  
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng



Den 13 juli 2006

**Problem 4.** Bestäm alla heltalspar  $(x, y)$  sådana att

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problem 5.** Låt  $P(x)$  vara ett polynom av grad  $n$ ,  $n > 1$ , med heltalskoefficienter och låt  $k$  vara ett positivt heltal. Betrakta polynomet  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ , där  $P$  förekommer  $k$  gånger. Visa att det finns som mest  $n$  heltal  $t$  sådana att  $Q(t) = t$ .

**Problem 6.** Låt  $P$  vara en konvex polygon. Till varje sida  $b$  av  $P$  tilldelas den maximala arean av en triangel som har  $b$  som en av sina sidor och som ligger inuti  $P$ . Visa att summan av areor som tilldelades polygonens alla sidor är minst två gånger arean av  $P$ .

*Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter  
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng*