lørdag, 8. juli 2023

Oppgave 1. Bestem alle sammensatte heltall $n > 1$ med følgende egenskap: dersom $d_1, d_2, \ldots, d_k$ er alle de positive divisorene til n med $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, deler d_i summen $d_{i+1} + d_{i+2}$ for alle $1 \leqslant i \leqslant k - 2$.

Oppgave 2. La ABC være en spissvinklet trekant med $AB < AC$. La Ω være omsirkelen til ABC. La S være midtpunktet på buen CB i Ω som inneholder A. Normalen fra A til BC skjærer BS i D, og skjærer Ω igjen i $E \neq A$. Linjen gjennom D som er parallell med BC skjærer linjen BE i L. La ω betegne omsirkelen til trekanten BDL. La ω skjære Ω igjen i $P \neq B$.
Vis at tangentlinjen til ω i P skjærer BS på den indre vinkelhalveringslinjen til $\angle BAC$.

Oppgave 3. For ethvert heltall $k \geqslant 2$, bestem alle uendelige følger av positive heltall $a_1, a_2, \ldots$ for hvilke det finnes et polynom P av formen $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ der $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ er ikke-negative heltall og slik at

$$P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

for alle heltall $n \geqslant 1$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.

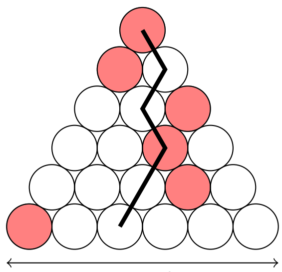
søndag, 9. juli 2023

Oppgave 4. La $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ være parvis forskjellige positive reelle tall slik at

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

er et heltall for alle $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Vis at $a_{2023} \geqslant 3034$.

Oppgave 5. La n være et positivt heltall. En *japansk trekant* består av $1+2+\cdots+n$ sirkler stablet i form av en likesidet trekant slik at for enhver $i = 1, 2, \ldots, n$ inneholder den i-te raden nøyaktig i sirkler, hvorav nøyaktig én er farget rød. En *ninjasti* i en japansk trekant er en følge av n sirkler som starter i øverste rad, der hver sirkel følges av én av de to sirklene rett under den, og som ender i nederste rad. Her er et eksempel på en japansk trekant for $n = 6$, samt en ninjasti i trekanten som inneholder to røde sirkler.



$n = 6$

Bestem, uttrykt ved n, den største verdien k for hvilken det i enhver japansk trekant finnes en ninjasti med minst k røde sirkler.

Oppgave 6. La ABC være en likesidet trekant. La A_1, B_1, C_1 være indre punkter i ABC slik at $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, og

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

La videre A_2 være skjæringspunktet mellom BC_1 og CB_1, B_2 skjæringspunktet mellom CA_1 og AC_1, og C_2 skjæringspunktet mellom AB_1 og BA_1.

Vis at dersom trekanten $A_1B_1C_1$ ikke er likebent, går de tre omsirklene til trekantene AA_1A_2, BB_1B_2 og CC_1C_2 alle gjennom to felles punkter.