



Даваа, 19. 7 дугаар сарын 2021

Бодлого 1. $n \geq 100$ өгөгдсөн натурал тоо байг. Иван $n, n+1, \dots, 2n$ тоонуудыг өөр, өөр карт дээр бичнэ. Үүний дараа эдгээр $n+1$ ширхэг картыг холиод хоёр хэсэгт хуваана. Ядаж нэг хэсэг нь бичигдсэн тоонуудынх нь нийлбэр бүтэн квадрат байх хоёр карт агуулна гэж батал.

Бодлого 2. Аливаа x_1, \dots, x_n бодит тоонуудын хувьд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого 3. D цэг $AB > AC$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны дотоод цэг ба $\angle DAB = \angle CAD$ байг. E цэг AC хэрчим дээр орших ба $\angle ADE = \angle BCD$ нөхцөлийг, F цэг AB хэрчим дээр орших ба $\angle FDA = \angle DBC$ нөхцөлийг, X цэг AC шулуун дээр орших ба $CX = BX$ нөхцөлийг тус тус хангана. O_1 ба O_2 цэгүүд харгалзан ADC ба EXD гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд байг. BC, EF, O_1O_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.



Мягмар, 20. 7 дугаар сарын 2021

Бодлого 4. Г тойргийн төв I , $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB, BC, CD, DA талууд Г тойргийг шүргэдэг гэе. AIC гурвалжныг багтаасан тойрог Ω байг. BA -ийн A цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой X цэгт, BC -ийн C цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой Z цэгт огтлолцоно. AD ба CD -ийн D цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой харгалзан Y ба T цэгүүдэд огтлолцоно.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

болохыг батал.

Бодлого 5. Буши, Жампи хоёр хэрэм өвөлд зориулж 2021 самар түүжээ. Жампи самруудаа 1-ээс 2021 хүртэл дугаарлаад, өөрсдийн хайртай модоо тойруулан газарт 2021 ширхэг жижиг нүх ухаж бэлджээ. Маргааш өглөө нь Жампи Буши нүх бүрд нэг нэг самар хийсэн боловч дугаарт анхаарал хандуулаагүй болохыг анзаарчээ. Жампи үүнд сэтгэл хангалуун биш байсан тул самруудыг дахин байрлуулахаар болж дараалсан 2021 үйлдэл хийв. k дахь удаагийн үйлдлээр Жампи k дугаартай самрын хоёр хөршийн байрыг солино. Дараах чанартай k дугаар олдоно гэж батал. Үүнд Жампи k дахь үйлдлээр $a < k < b$ байх a ба b дугаартай самруудын байрыг солино.

Бодлого 6. $m \geq 2$ бүхэл тоо, A бүхэл (эерэг байх албагүй) тоонуудын төгсгөлөг олонлог; $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ нь A -ийн дэд олонлогууд байг. Аливаа $k = 1, 2, \dots, m$ дугаарын хувьд B_k олонлогийн элементүүдийн нийлбэр m^k байг. A олонлог дор хаяж $m/2$ элементтэй гэж батал.