الثلاثاء، 16 تموز 2024

مسألة 1. عيّن جميع الأعداد الحقيقية α التي تحقّق أنّه في حالة أي عدد صحيح موجب تماماً n، يكون العدد الصحيح

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

من مضاعفات العدد n. ($\lfloor z \rfloor$ يرمز إلى أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي z. مثلاً $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ و $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

مسألة 2. عيّن جميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً (a, b) التي يوجد في حالتها عددان صحيحان موجبان تماماً g و N يحققان

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

أياً كان العدد الصحيح $N \geqslant n$. ($\gcd(x, y)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين x و y.)

مسألة 3. لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً، وليكن N عدداً صحيحاً موجباً تماماً. نفترض أنّه أياً كان $n > N$ ، كان a_n مساوياً لعدد مرات ظهور العدد a_{n-1} في القائمة $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

أثبت أنّ متتالية على الأقل من المتتاليتين $a_1, a_3, a_5, \ldots$ و $a_2, a_4, a_6, \ldots$ دوريّة بدءاً من حدٍّ معيّن.

(نقول إنّ متتالية $b_1, b_2, b_3, \ldots$ دورية بدءاً من حدّ معيّن إذا وُجِد عددان صحيحان موجبان تماماً p و M بحيث يكون $b_{m+p} = b_m$ أياً كان $M \geqslant m$.)

الأربعاء، 17 تموز 2024

مسألة 4. ليكن ABC مثلثاً فيه $AB < AC < BC$. نرمز بالرمز I إلى مركز الدائرة ω الماسة لأضلاعه داخلاً. لتكن X النقطة من المستقيم BC المختلفة عن C بحيث يكون المستقيم الموازي للمستقيم AC والمار بالنقطة X مماساً للدائرة ω. بالمثل، لتكن Y النقطة من المستقيم BC المختلفة عن B بحيث يكون المستقيم الموازي للمستقيم AB والمار بالنقطة Y مماساً للدائرة ω. يقطع AI الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC مجدداً في $P \neq A$. ليكن K و L منتصفي AC و AB، بالترتيب.

أثبت أنّ $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

مسألة 5. يلعب الحلزون سريع لعبة على رقعة مؤلفة من 2024 سطراً و2023 عموداً. هناك وحوشٌ مختبئة في 2022 خلية من خلايا الرقعة. في البدء، لا يعرف سريع أماكن وجود الوحوش، ولكنه يعرف أنّه يوجد بالتحديد وحشٌ واحدٌ فقط في كل سطر باستثناء السطرين الأوّل والأخير، وأن كلّ عمود يحوي وحشاً واحداً على الأكثر. يقوم سريع بعدّة محاولات لينتقل من السطر الأوّل إلى السطر الأخير. في كلّ محاولة يبدأ من خليّة يختارها من السطر الأوّل، ثمّ ينتقل تكراراً من خليّة إلى خلية تجاورها تشترك معها بضلع. (يسمح لسريع أثناء حركته بالعودة إلى خلية زارها سابقاً.) إذا وصل سريع إلى خلية تحوي وحشاً، تنتهي محاولته، ويرجع إلى السطر الأوّل ليبدأ محاولة جديدة. الوحوش لا تتحرّك، وسريع يتذكّر ما إذا كانت خلية قد زارها سابقاً تحوي وحشاً أو لا. إذا وصل سريع إلى خلية في السطر الأخير، تنتهي محاولته، وتتوقف اللعبة. عيّن العدد الأصغري n الذي يكون في حالته لسريع إستراتيجية تضمن له الوصول إلى السطر الأخير في المحاولة رقم n أو قبل ذلك، وذلك بقطع النظر عن مواقع الوحوش على الرقعة.

مسألة 6. لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية (النسبية). نقول عن تابع $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ إنه **جيد** إذا حقّق الخاصة الآتية: أياً كان x, y من $\mathbb{Q}$، كان

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{أو} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

أثبت وجود عدد صحيح c بحيث، في حالة أي تابع جيد f، توجد أعداد عادية مختلفة عددها c على الأكثر من الصيغة $f(r) + f(-r)$، حيث r عدد عادي ما، وجِدْ أصغر قيمة ممكنة للعدد c.