

Tirsdag d. 23. juli 2013

**Opgave 1.** Vis at der for hvert par af positive heltal  $k$  og  $n$  findes  $k$  positive heltal  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (som ikke nødvendigvis er forskellige) så

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

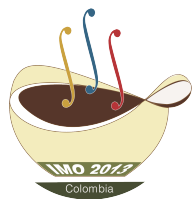
**Opgave 2.** En konfiguration af 4027 punkter i planen kaldes *colombiansk* hvis den består af 2013 røde punkter og 2014 blå punkter, og der ikke er tre punkter i konfigurationen som ligger på linje. Ved at tegne linjer inddeles planen i flere områder. Et arrangement af linjer kaldes *godt* for en colombiansk konfiguration hvis følgende to betingelser er opfyldt:

- ingen linje går gennem noget punkt i konfigurationen,
- intet område dannet af linjerne indeholder punkter af begge farver.

Find den mindste værdi af  $k$  så der for hver colombianske konfiguration med 4027 punkter findes et godt arrangement af  $k$  linjer.

**Opgave 3.** Lad den ydre røringscirkel til trekant  $ABC$  modsat vinkel  $A$  tangere siden  $BC$  i punktet  $A_1$ . Definer punktet  $B_1$  på siden  $CA$  og punktet  $C_1$  på siden  $AB$  tilsvarende ved at benytte de ydre røringscirkler modsat henholdsvis  $B$  og  $C$ . Antag at centrum for den omskrevne cirkel til trekant  $A_1B_1C_1$  ligger på den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ . Vis at trekant  $ABC$  er retvinklet.

*Den ydre røringscirkel til trekant  $ABC$  modsat vinkel  $A$  er cirklen som er tangent til linjestykket  $BC$ , til forlængelsen af linjestykket  $AB$  tættest på  $B$  og til forlængelsen af linjestykket  $AC$  tættest på  $C$ . De ydre røringscirkler modsat  $B$  og  $C$  er defineret tilsvarende.*



Onsdag d. 24. juli 2013

**Opgave 4.** Lad  $ABC$  være en spidsvinklet trekant hvor  $H$  er højdernes skæringspunkt, og lad  $W$  være et punkt på siden  $BC$  forskelligt fra  $B$  og  $C$ . Punkterne  $M$  og  $N$  er fodpunkterne for højderne fra henholdsvis  $B$  og  $C$ . Lad  $\omega_1$  være den omskrevne cirkel til trekant  $BWN$ , og lad  $X$  være punktet på  $\omega_1$  så  $WX$  er diameter i  $\omega_1$ . Lad tilsvarende  $\omega_2$  være den omskrevne cirkel til trekant  $CWM$ , og lad  $Y$  være punktet på  $\omega_2$  så  $WY$  er diameter i  $\omega_2$ . Vis at punkterne  $X$ ,  $Y$  og  $H$  ligger på linje.

**Opgave 5.** Lad  $\mathbb{Q}_{>0}$  være mængden af alle positive rationale tal. Lad  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  være en funktion som opfylder at

- (i)  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  for alle  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ,
- (ii)  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  for alle  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ,
- (iii) der findes et rationalt tal  $a > 1$  så  $f(a) = a$ .

Vis at  $f(x) = x$  for alle  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Opgave 6.** Lad  $n \geq 3$  være et helt tal, og betragt en cirkel hvor der er markeret  $n+1$  punkter jævnt fordelt på cirklen. Betragt nu alle nummereringer af punkterne med numrene  $0, 1, \dots, n$  så hvert nummer benyttes netop en gang. To nummereringer betragtes som ens hvis den ene fremkommer af den anden ved en rotation af cirklen. En nummerering kaldes *smuk* hvis der for vilkårlige fire numre  $a < b < c < d$  med  $a + d = b + c$  gælder at korden som forbinder punkterne nummereret  $a$  og  $d$ , ikke skærer korden som forbinder punkterne nummereret  $b$  og  $c$ .

Lad  $M$  være antallet af smukke nummereringer, og lad  $N$  være antallet af ordnede par  $(x, y)$  af positive heltal så  $x + y \leq n$  og  $\gcd(x, y) = 1$ . Vis at

$$M = N + 1.$$