



Language: Spanish

Day: 1

Martes 23 de julio de 2013

**Problema 1.** Demostrar que para cualquier par de enteros positivos  $k$  y  $n$ , existen  $k$  enteros positivos  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (no necesariamente distintos) tales que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**Problema 2.** Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama *colombiana*. Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es *buenas* para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de  $k$  tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de  $k$  rectas.

**Problema 3.** Supongamos que el excírculo del triángulo  $ABC$  opuesto al vértice  $A$  es tangente al lado  $BC$  en el punto  $A_1$ . Análogamente, se definen los puntos  $B_1$  en  $CA$  y  $C_1$  en  $AB$ , utilizando los excírculos opuestos a  $B$  y  $C$  respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo  $A_1B_1C_1$  pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Demostrar que el triángulo  $ABC$  es rectángulo.

*El excírculo del triángulo  $ABC$  opuesto al vértice  $A$  es la circunferencia que es tangente al segmento  $BC$ , a la prolongación del lado  $AB$  más allá de  $B$ , y a la prolongación del lado  $AC$  más allá de  $C$ . Análogamente se definen los excírculos opuestos a los vértices  $B$  y  $C$ .*

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos  
Cada problema vale 7 puntos



Language: Spanish

Day: 2

Miércoles 24 de julio de 2013

**Problema 4.** Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo con ortocentro  $H$ , y sea  $W$  un punto sobre el lado  $BC$ , estrictamente entre  $B$  y  $C$ . Los puntos  $M$  y  $N$  son los pies de las alturas trazadas desde  $B$  y  $C$  respectivamente. Se denota por  $\omega_1$  la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo  $BWN$ , y por  $X$  el punto de  $\omega_1$  tal que  $WX$  es un diámetro de  $\omega_1$ . Análogamente, se denota por  $\omega_2$  la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo  $CWM$ , y por  $Y$  el punto de  $\omega_2$  tal que  $WY$  es un diámetro de  $\omega_2$ . Demostrar que los puntos  $X, Y$  y  $H$  son colineales.

**Problema 5.** Sea  $\mathbb{Q}_{>0}$  el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface las tres siguientes condiciones:

- (i)  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  para todos los  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ;
- (ii)  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  para todos los  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ;
- (iii) existe un número racional  $a > 1$  tal que  $f(a) = a$ .

Demostrar que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Problema 6.** Sea  $n \geq 3$  un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado  $n+1$  puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números  $0, 1, \dots, n$  de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama *bonita* si, para cualesquiera cuatro etiquetas  $a < b < c < d$ , con  $a+d = b+c$ , la cuerda que une los puntos etiquetados  $a$  y  $d$  no corta la cuerda que une los puntos etiquetados  $b$  y  $c$ .

Sea  $M$  el número de distribuciones bonitas y  $N$  el número de pares ordenados  $(x, y)$  de enteros positivos tales que  $x + y \leq n$  y  $\text{mcd}(x, y) = 1$ . Demostrar que

$$M = N + 1.$$

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos  
Cada problema vale 7 puntos