



2011 年 7 月 18 日, 星期一

問題 1. 對任意由 4 個不同正整數所成的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 記 $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. 設 n_A 是滿足 $a_i + a_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$) 整除 s_A 的數對 (i, j) 的個數. 求所有由 4 個不同正整數所成的集合 A , 使得 n_A 達到最大值.

問題 2. 設 \mathcal{S} 是平面上包含至少兩個點的一個有限點集, 其中沒有三點在同一條直線上.

所謂一個‘風車’是指這樣一個過程: 從經過 \mathcal{S} 中單獨一點 P 的一條直線 ℓ 開始. 將 ℓ 以 P 為旋轉中心順時針旋轉, 直到首次遇到 \mathcal{S} 中的另一點, 記為點 Q . 接著這條直線以 Q 為新的旋轉中心順時針旋轉, 直到再次遇到 \mathcal{S} 中的某一點, 這樣的過程無限持續下去.

證明: 可以適當選取 \mathcal{S} 中的一點 P , 以及過 P 的一條直線 ℓ , 使得由此產生的‘風車’將 \mathcal{S} 中的每一點都無限多次當作旋轉中心.

問題 3. 設 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一個定義在實數集上的實值函數, 滿足對所有實數 x, y , 都有

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

證明: 對所有實數 $x \leq 0$, 有 $f(x) = 0$.



2011 年 7 月 19 日, 星期二

問題 4. 給定整數 $n > 0$. 有一個天平與 n 個重量分別為 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ 的砝碼.

現通過 n 步操作依次將所有砝碼都放上天平, 使得在操作過程中, 右邊的重量從未超過左邊的重量. 每一步操作是從尚未放上天平的砝碼中選擇一個砝碼, 將其放到天平的左邊或右邊, 直到所有砝碼都被放上天平.

求整個操作過程的不同方法個數.

問題 5. 設 f 是一個定義在整數集上, 取值為正整數的函數. 已知對任意兩個整數 m, n , 差 $f(m) - f(n)$ 能被 $f(m - n)$ 整除. 證明: 對所有整數 m, n , 若 $f(m) \leq f(n)$, 則 $f(n)$ 被 $f(m)$ 整除.

問題 6. 設銳角三角形 ABC 的外接圓為 Γ , 令 ℓ 是圓 Γ 的一條切線. 將 ℓ 分別對直線 BC, CA 與 AB 做鏡射, 得直線 ℓ_a, ℓ_b 與 ℓ_c . 證明: 由直線 ℓ_a, ℓ_b 與 ℓ_c 所構成的三角形, 其外接圓與圓 Γ 相切.