

12 luglio 2006

**Problema 1.** Sia  $ABC$  un triangolo e sia  $I$  il centro della sua circonferenza inscritta. Sia  $P$  un punto interno al triangolo tale che

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Dimostrare che  $AP \geq AI$  e che vale l'uguaglianza se e solo se  $P = I$ .

**Problema 2.** Sia  $P$  un 2006-agono regolare. Una diagonale di  $P$  si dice *buona* se i suoi estremi dividono il bordo di  $P$  in due parti ognuna delle quali è composta da un numero dispari di lati di  $P$ . I lati di  $P$  sono considerati anch'essi *buoni*.

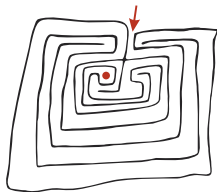
Supponiamo che  $P$  sia stato suddiviso in triangoli da 2003 diagonali che a due a due non hanno nessun punto in comune all'interno di  $P$ . Determinare il massimo numero di triangoli isosceli aventi due lati buoni che possono apparire in una tale suddivisione.

**Problema 3.** Determinare il più piccolo numero reale  $M$  tale che la disuguaglianza

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

sia soddisfatta per tutti i numeri reali  $a, b, c$ .

*Tempo; 4 ore e 30 minuti  
Ogni problema vale 7 punti*



13 luglio 2006

**Problema 4.** Determinare tutte le coppie  $(x, y)$  di interi tali che

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problema 5.** Sia  $P(x)$  un polinomio di grado  $n > 1$  con coefficienti interi e sia  $k$  un intero positivo. Consideriamo il polinomio  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , dove  $P$  compare  $k$  volte. Dimostrare che ci sono al più  $n$  interi  $t$  tali che  $Q(t) = t$ .

**Problema 6.** Assegniamo ad ogni lato  $b$  di un poligono convesso  $P$  la massima area di un triangolo che ha  $b$  come lato ed è contenuto in  $P$ . Dimostrare che la somma delle aree assegnate ai lati di  $P$  è maggiore o uguale al doppio dell'area di  $P$ .

*Tempo: 4 ore e 30 minuti  
Ogni problema vale 7 punti*