

Thứ Ba, 08 tháng Bảy 2014

**Bài 1.** Cho  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  là dãy vô hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số nguyên  $n \geq 1$  sao cho

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

**Bài 2.** Cho số nguyên  $n \geq 2$ . Cho bảng ô vuông  $n \times n$  gồm  $n^2$  ô vuông đơn vị. Một cách sắp xếp của  $n$  quân xe trong bảng đó được gọi là *binh yên* nếu mỗi hàng và mỗi cột chứa đúng một quân xe. Hãy tìm số nguyên dương  $k$  lớn nhất sao cho với mỗi cách sắp xếp binh yên của  $n$  quân xe đều tồn tại một hình vuông  $k \times k$  mà mỗi ô vuông đơn vị trong số  $k^2$  ô vuông đơn vị của nó đều không chứa quân xe.

**Bài 3.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ . Điểm  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  xuống  $BD$ . Các điểm  $S$  và  $T$  tương ứng nằm trên các cạnh  $AB$  và  $AD$  sao cho  $H$  nằm trong tam giác  $SCT$  và

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Chứng minh rằng đường thẳng  $BD$  tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác  $TSH$ .

Language: Vietnamese

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút  
Mỗi bài toán được cho tối đa 7 điểm

Thứ Tư, 09 tháng Bảy 2014

**Bài 4.** Các điểm  $P$  và  $Q$  được lấy trên cạnh  $BC$  của tam giác nhọn  $ABC$  sao cho  $\angle PAB = \angle BCA$  và  $\angle CAQ = \angle ABC$ . Các điểm  $M$  và  $N$  được lấy trên các đường thẳng  $AP$  và  $AQ$ , tương ứng, sao cho  $P$  là trung điểm của  $AM$  và  $Q$  là trung điểm của  $AN$ . Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng  $BM$  và  $CN$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , Ngân hàng Cape Town đều phát hành các đồng xu có mệnh giá  $\frac{1}{n}$ . Cho một bộ sưu tập gồm hữu hạn các đồng xu như vậy (các đồng xu không nhất thiết có mệnh giá khác nhau) mà tổng mệnh giá của chúng không vượt quá  $99 + \frac{1}{2}$ . Chứng minh rằng có thể phân chia bộ sưu tập đó thành không quá 100 nhóm sao cho tổng mệnh giá của tất cả các đồng xu trong mỗi nhóm không vượt quá 1.

**Bài 6.** Một tập hợp các đường thẳng trên mặt phẳng được coi là ở thể tổng quát nếu không có hai đường thẳng nào thuộc tập hợp đó song song và không có ba đường thẳng nào thuộc tập hợp đó đồng quy. Một tập hợp các đường thẳng ở thể tổng quát phân chia mặt phẳng thành các miền, trong đó có một số miền có diện tích hữu hạn; ta gọi những miền như vậy là các miền hữu hạn. Chứng minh rằng với mọi số  $n$  đủ lớn, trong mỗi tập hợp gồm  $n$  đường thẳng ở thể tổng quát, ta đều có thể tô không ít hơn  $\sqrt{n}$  đường thẳng bởi màu xanh sao cho không có miền nào trong số các miền hữu hạn có toàn bộ đường biên có màu xanh.

*Lưu ý:* Lời giải cho bài toán nhận được từ bài đã ra bằng cách thay thế  $\sqrt{n}$  bởi  $c\sqrt{n}$  sẽ được cho điểm; điểm số được cho phụ thuộc vào giá trị của hằng số  $c$ .