utorak, 16. srpnja 2024

Zadatak 1. Odredi sve realne brojeve α takve da za svaki prirodan broj n vrijedi da je cijeli broj

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

višekratnik broja n. (Sa $\lfloor z \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od z. Na primjer, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ i $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Zadatak 2. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje postoje prirodni brojevi g i N takvi da vrijedi

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

za sve cijele brojeve $n \geqslant N$. (Sa $\gcd(x, y)$ označavamo najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva x i y.)

Zadatak 3. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva, i neka je N prirodan broj. Pretpostavimo da za svaki $n > N$ vrijedi da se broj a_{n-1} pojavljuje točno a_n puta na listi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dokaži da barem jedan od nizova $a_1, a_3, a_5, \ldots$ i $a_2, a_4, a_6, \ldots$ postaje periodičan.

(Za beskonačan niz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kažemo da *postaje periodičan* ako postoje prirodni brojevi p i M takvi da je $b_{m+p} = b_m$ za sve $m \geqslant M$.)

Language: Croatian

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

srijeda, 17. srpnja 2024

Zadatak 4. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $AB < AC < BC$. Označimo središte upisane kružnice i upisanu kružnicu od ABC redom sa I i ω. Neka je X točka na pravcu BC različita od C takva da je pravac kroz X paralelan s AC tangenta na ω. Slično, neka je Y točka na pravcu BC različita od B takva da je pravac kroz Y paralelan s AB tangenta na ω. Pravac AI siječe opisanu kružnicu od ABC u točki $P \neq A$. Neka su K i L redom polovišta dužina AC i AB.

Dokaži da vrijedi $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Zadatak 5. Puž Turbo igra igru na ploči s 2024 redaka i 2023 stupca. U 2022 polja ploče nalazi se čudovište. Na početku, Turbo ne zna gdje su čudovišta, ali zna da postoji točno jedno čudovište u svakom retku osim prvog i zadnjeg te da svaki stupac sadrži najviše jedno čudovište.

Turbo zatim čini niz pokušaja da dođe iz prvog retka u posljednji redak. U svakom pokušaju, bira u kojem polju u prvom retku će početi, a zatim se redom pomiče u bilo koje susjedno polje koje ima zajedničku stranicu s poljem na kojem se trenutno nalazi. (Dozvoljeno je da se vrati u polje koje je već ranije posjetio.) Ako dođe u polje u kojem se nalazi čudovište, njegov pokušaj završava i vraća se u prvi redak da započne novi pokušaj. Čudovišta se ne miču i Turbo za svako polje koje je posjetio pamti sadrži li čudovište ili ne. Ako Turbo dođe u bilo koje polje u zadnjem retku, igra je gotova.

Odredi najmanju vrijednost broja n za koju Turbo ima strategiju koja garantira da će u n ili manje pokušaja doći do zadnjeg retka, bez obzira kako su čudovišta raspoređena.

Zadatak 6. Neka je $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva. Funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ je *dobra* ako vrijedi sljedeće: za sve $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ili} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokaži da postoji cijeli broj c takav da za svaku dobru funkciju f postoji najviše c različitih racionalnih brojeva koji se mogu zapisati kao $f(r) + f(-r)$ za neki racionalan broj r, i odredi najmanju moguću vrijednost od c.