53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Serbian (BIH)**

Day: **1**

Уторак, 10.07.2012.

1. задатак У троуглу ABC тачка J је центар спољa приписане кружнице наспрам тјемена A. Ова кружница додирује страницу BC у тачки M, а продужетке страница AB и AC у тачкама K и L, редом. Праве LM и BJ се сијеку у тачки F, а праве KM и CJ у тачки G. Нека је S пресјечна тачка правих AF и BC, а нека је T пресјечна тачка правих AG и BC.

Доказати да је M средиште дужи ST.

(*Спољa приписана кружница* троугла ABC наспрам тјемена A је кружница која додирује страницу BC и продужетке страница AB и AC.)

2. задатак Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $a_2, a_3, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви такви да је $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Доказати да вриједи

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n \ > \ n^n.$$

3. задатак *Погађалица* је игра коју играју два играча, A и B. Правила игре зависе од природних бројева k и n који су познати и једном и другом играчу.

На почетку игре играч A бира природне бројеве x и N, такве да је $1 \leqslant x \leqslant N$. Играч A не саопштава информацију о броју x, а саопштава тачну вриједност броја N играчу B. Након тога играч B покушава да добије информације о броју x постављајући играчу A питања следећег облика: у сваком питању играч B бира произвољан подскуп S скупа природних бројева (може бирати исти подскуп више пута) и пита играча A да ли број x припада скупу S. Играч B може поставити питања колико жели. Након сваког питања играч A мора одмах одговорити са *да* или *не*, али смије лагати колико год пута жели; једино ограничење је да међу произвољних $k+1$ узастопних одговора барем један мора бити истинит.

Након што B постави онолико питања колико сматра потребним, он мора одабрати скуп X који се састоји од највише n природних бројева. Ако број x припада скупу X онда B побеђује; иначе B губи.
Доказати да:

1. Ако је $n \geqslant 2^k$, онда играч B може гарантовати побједу.
2. За свако довољно велико k, постоји природан број $n \geqslant 1,99^k$ такав да играч B не може гарантовати побједу.

Сриједа, 11.07.2012.

4. задатак Одредити све функције $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да, за све цијеле бројеве a, b, c који задовољавају $a+b+c=0$, вриједи следећа једнакост:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \ = \ 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Скуп $\mathbb{Z}$ је скуп цијелих бројева.)

5. задатак Нека је ABC троугао у коме је $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ и нека је D подножје висине из тјемена C. Нека је X тачка на дужи CD различита од крајева те дужи. Нека је K тачка на дужи AX таква да је $BK = BC$. Аналогно, нека је L тачка на дужи BX таква да је $AL = AC$. Нека је M пресјечна тачка правих AL и BK.

Доказати да је $MK = ML$.

6. задатак Одредити све природне бројеве n за које постоје ненегативни цијели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви да вриједи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} \ = \ \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} \ = \ 1.$$

Вријеме рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 поена