вторник, 15. јули 2025

Задача 1. Права во рамнината се нарекува *сончева* ако **не** е паралелна на x-оската, y-оската, ниту на правата $x + y = 0$.

Даден е природен број $n \geqslant 3$. Определи ги сите ненегативни цели броеви k такви што постојат n различни прави во рамнината кои ги задоволуваат следните тврдења:

- за секои позитивни цели броеви a и b за кои $a + b \leqslant n + 1$, точката (a, b) лежи на барем една од правите; и
- точно k од n-те прави се сончеви.

Задача 2. Нека Ω и Γ се кружници со центри M и N, соодветно, така што радиусот на Ω е помал од радиусот на Γ. Кружниците Ω и Γ се сечат во две различни точки A и B. Правата MN ја сече Ω во C, а Γ во D, така што точките C, M, N и D се во овој редослед на правата. Нека P е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ACD. Правата AP ја сече Ω по втор пат во $E \neq A$. Правата AP ја сече Γ по втор пат во $F \neq A$. Нека H е ортоцентарот на триаголникот PMN.

Докажи дека правата низ H која е паралелна на AP е тангента на опишаната кружница околу триаголникот BEF.

(*Ортоцентар* на триаголник е пресечната точка на неговите висини.)

Задача 3. Со $\mathbb{N}$ го означуваме множеството од позитивни цели броеви. Функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ се нарекува *бонза* ако

$$f(a) \text{ е делител на } b^a - f(b)^{f(a)}$$

за секои позитивни цели броеви a и b.

Определи ја најмалата реална константа c таква што $f(n) \leqslant cn$ за сите бонза функции f и сите позитивни цели броеви n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

среда, 16. јули 2025

Задача 4. *Вистински делител* на позитивен цел број N е секој позитивен делител на N различен од N.

Бесконечната низа $a_1, a_2, \ldots$ се состои од позитивни цели броеви, кои имаат најмалку три вистински делители. За секој $n \geqslant 1$, целиот број a_{n+1} е еднаков на збирот од трите најголеми вистински делители на a_n.

Определи ги сите можни вредности на a_1.

Задача 5. Ана и Блаже ја играат *играта на коалата* - игра со два играчи чии правила зависат од позитивен реален број λ, што го знаат двата играчи. Во n-тиот круг од играта (почнувајќи со $n = 1$) се игра:

- Ако n е непарен, Ана одбира ненегативен реален број x_n таков што
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Ако n е парен, Блаже одбира ненегативен реален број x_n таков што
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ако некој играч не може да одбере број x_n кој го задоволува соодветното неравенство, играта завршува и другиот играч победува. Ако играта се игра до бесконечност, никој не победува. Сите одбрани броеви се познати на двата играчи.

Определи ги сите вредности на λ за кои Ана има победничка стратегија и сите вредности на λ за кои Блаже има победничка стратегија.

Задача 6. Разгледуваме мрежа од 2025×2025 единечни квадратчиња. Матилда сака да постави правоаголни плочки на мрежата, може со различни димензии, така што секоја страна од секоја плочка лежи на линија од мрежата и секое единечно квадратче е покриено со најмногу една плочка.

Определи го минималниот број на плочки кои Матилда треба да ги постави така што во секој ред и секоја колона од мрежата останува по точно едно единечно квадратче кое не е покриено од ниту една плочка.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.