53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Latvian (Lettish)**

Day: **1**

Otrdiena, 2012. gada 10. jūlijs

1. uzdevums. Trijstūrim ABC pievilkta riņķa līnija ar centru punktā J pieskaras trijstūra ABC malai BC punktā M, malas AB pagarinājumam — punktā K, bet malas AC pagarinājumam — punktā L. Taisnes LM un BJ krustojas punktā F, taisnes KM un CJ — punktā G. Taisne BC krusto taisni AF punktā S, bet taisni AG — punktā T.

Pierādiet, ka punkts M ir nogriežņa ST viduspunkts.

(Par trijstūrim *pievilktu riņķa līniju* sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras vienai trijstūra malai no ārpuses un abu pārējo malu pagarinājumiem.)

2. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un tādi reāli pozitīvi skaitļi $a_2, a_3, \ldots, a_n$, ka $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Pierādiet, ka

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \;>\; n^n.$$

3. uzdevums. A un B spēlē šādu spēli ar melošanu. Tās noteikumi ir atkarīgi no naturāliem skaitļiem n un k, kas spēlētājiem ir zināmi.

Sākumā A izvēlas tādus naturālus skaitļus x un N, ka $1 \leq x \leq N$. Skaitli x spēlētājs A patur slepenībā, bet skaitli N nemelojot pasaka spēlētājam B. Spēlētājs B cenšas iegūt informāciju par x, pēc patikas daudz reižu taujājot spēlētājam A šādā veidā: B izvēlas jebkuru naturālu skaitļu kopu S (iespējams, tādu, kas jau izmantota agrākā jautājumā) un jautā, vai x pieder S. Pēc katra jautājuma A tūlīt atbild "jā" vai "nē". A drīkst samelot, tomēr no katrām $k + 1$ pēc kārtas esošām atbildēm vismaz vienai jābūt patiesai.

Galu galā spēlētājam B jānosauc kopa X ar ne vairāk kā n naturāliem skaitļiem. Ja x pieder kopai X, B uzvar; citādi B zaudē. Pierādiet, ka:

1) ja $n \geq 2^k$, tad spēlētājam B ir uzvaroša stratēģija;

2) visiem pietiekami lieliem k pastāv tāds $n \geq 1{,}99^k$, ka B nevar droši panākt uzvaru.

Trešdiena, 2012. gada 11. jūlijs

4. uzdevums. Atrodiet visas tādas funkcijas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ka jebkuriem veseliem skaitļiem a, b, c, kam $a+b+c=0$, izpildās vienādība

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ apzīmē veselo skaitļu kopu.)

5. uzdevums. ABC ir taisnleņķa trijstūris ar taisno leņķi $\angle BCA$. CD ir tā augstums, un X ir nogriežņa CD iekšējs punkts. K un L ir tādi attiecīgi nogriežņu AX un BX punkti, ka $BK = BC$ un $AL = AC$. M ir nogriežņu AL un BK krustpunkts.

Pierādiet, ka $MK = ML$.

6. uzdevums. Atrodiet visus naturālos skaitļus n, kuriem pastāv tādi nenegatīvi veseli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ka

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus