maandag, 19 juli 2021

Opgave 1. Zij $n \geqslant 100$ een geheel getal. Kira schrijft de getallen $n, n+1, \ldots, 2n$ op kaarten, ieder getal op een andere kaart. Zij schudt deze $n+1$ kaarten en verdeelt ze over twee stapels.

Bewijs dat ten minste één van de stapels twee kaarten bevat zodanig dat de som van hun getallen een (perfect) kwadraat (van een geheel getal) is.

Opgave 2. Bewijs dat de ongelijkheid

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

geldt voor alle reële getallen $x_1, \ldots, x_n$.

Opgave 3. Zij D een inwendig punt van de scherphoekige driehoek ABC met $|AB| > |AC|$ zodanig dat $\angle DAB = \angle CAD$. Het punt E op lijnstuk AC voldoet aan $\angle ADE = \angle BCD$, het punt F op lijnstuk AB voldoet aan $\angle FDA = \angle DBC$, en het punt X op de lijn (rechte) AC voldoet aan $|CX| = |BX|$. Laat O_1 en O_2 de middelpunten van de omgeschreven cirkels van respectievelijk de driehoeken ADC en EXD zijn.

Bewijs dat de drie lijnen (rechten) BC, EF en O_1O_2 door één punt gaan.

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

dinsdag 20 juli 2021

Opgave 4. Zij Γ een cirkel met middelpunt I, en zij $ABCD$ een convexe vierhoek zodanig dat elk van de lijnstukken AB, BC, CD en DA raakt aan Γ. Zij Ω de omgeschreven cirkel van driehoek AIC. Het verlengde van BA voorbij A snijdt Ω in X, en het verlengde van BC voorbij C snijdt Ω in Z. Het verlengde van AD voorbij D en het verlengde van CD voorbij D snijden Ω in respectievelijk Y en T.
Bewijs dat

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Opgave 5. Twee eekhoorntjes, Bushy en Jumpy, hebben 2021 walnoten verzameld voor de winter. Jumpy nummert de walnoten van 1 tot en met 2021, en graaft 2021 holletjes in een cirkelvormig patroon in de grond rondom hun favoriete boom. De volgende morgen ziet Jumpy dat Bushy één walnoot in elk holletje heeft gestopt, maar niet op de nummering heeft gelet. Jumpy is daar niet blij mee en besluit om de walnoten te herschikken door een rij van 2021 zetten te doen. In de k-de zet verwisselt Jumpy de twee walnoten die aan weerszijden van walnoot k liggen.
Bewijs dat er een waarde van k bestaat zodanig dat Jumpy bij de k-de zet twee walnoten a en b verwisselt waarbij $a < k < b$.

Opgave 6. Zij $m \geqslant 2$ een geheel getal, zij A een eindige verzameling van (niet noodzakelijkerwijs positieve) gehele getallen, en laat $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ deelverzamelingen van A zijn. Veronderstel dat voor elke $k = 1, 2, \ldots, m$ de som van de elementen van B_k gelijk is aan m^k.
Bewijs dat A ten minste $\frac{m}{2}$ elementen bevat.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.