Понеђељак, 9. јули 2018.

1. задатак. Нека је Γ описана кружница оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E налазе се на дужима AB и AC, редом, тако да важи $AD = AE$. Симетрале дужи BD и CE сијеку краће лукове AB и AC кружнице Γ у тачкама F и G, редом. Доказати да су праве DE и FG паралелне (или једнаке).

2. задатак. Наћи све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоје реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, такви да је $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за све $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. задатак. *Антипаскалов троугао* је таблица у облику једнакостраничног троугла која се састоји од бројева тако да, осим за бројеве у посљедњем реду, важи да је сваки број једнак апсолутној вриједности разлике два броја која су непосредно испод њега. На примјер, сљедећа таблица је антипаскалов троугао са четири реда, који се састоји од природних бројева од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Да ли постоји антипаскалов троугао са 2018 редова који се састоји од свих природних бројева од 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

Уторак, 10. јули 2018.

4. задатак. *Позиција* је свака тачка (x, y) у равни таква да су x и y природни бројеви не већи од 20.

На почетку, свака од 400 позиција је слободна. Ана и Берин играју игру у којој наизмјенично повлаче потезе, при чему Ана игра прва. У сваком свом потезу Ана поставља нови црвени каменчић на слободну позицију тако да је растојање између сваке двије позиције на којима се налази црвени каменчић различито од $\sqrt{5}$. У сваком свом потезу Берин поставља нови плави каменчић на неку слободну позицију. (Позиција на којој се налази плави каменчић може бити на било ком растојању од других позиција на којима се налази неки каменчић.) Игра се завршава када неко од њих не може повући потез.

Одредити највеће K тако да Ана сигурно може поставити барем K црвених каменчића, без обзира на то како Берин поставља плаве каменчиће.

5. задатак. Нека је $a_1, a_2, \ldots$ бесконачан низ природних бројева. Претпоставимо да постоји природан број $N > 1$ такав да је за све $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

цио број.

Доказати да постоји природан број M такав да је $a_m = a_{m+1}$ за све $m \geqslant M$.

6. задатак. Нека је $ABCD$ конвексан четвероугао такав да је $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Тачка X лежи у унутрашњости четвероугла $ABCD$ тако да важи

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{и} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Доказати да је $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180°$.

Language: Serbian (BIH)

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.