Trečiadienis, 2010-07-07

1 uždavinys. Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su kuriomis lygybė

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

galioja su visais $x, y \in \mathbb{R}$. (Čia $[z]$ žymi skaičiaus z sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, kuris neviršija z.)

2 uždavinys. Tegul I yra trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas, o Γ – apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Tiesė AI kerta Γ taške D, kur $D \neq A$. Taškas E priklauso apskritimo Γ lankui $\widehat{BDC}$, o taškas F – atkarpai BC. Be to,

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Taškas G yra atkarpos IF vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesių DG ir EI susikirtimo taškas priklauso apskritimui Γ.

3 uždavinys. Tegul $\mathbb{N}$ yra visų natūraliųjų skaičių aibė. Raskite visas tokias funkcijas $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, su kuriomis skaičiai

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

yra natūraliųjų skaičių kvadratai su visais $m, n \in \mathbb{N}$.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais

Ketvirtadienis, 2010-07-08

4 uždavinys. Taškas P yra trikampio ABC viduje. Tiesės AP, BP ir CP (dar kartą) kerta apibrėžtą apie ABC apskritimą Γ atitinkamai taškuose K, L ir M. Apskritimo Γ liestinė taške C ir tiesė AB kertasi taške S, be to, $SC = SP$. Įrodykite, kad $MK = ML$.

5 uždavinys. Pradžioje kiekvienoje iš šešių dėžių $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ yra po vieną monetą. Leidžiama atlikti dviejų tipų operacijas:

1 tipo: Pasirenkame kurią nors netuščią dėžę B_j, kur $1 \leq j \leq 5$. Išimame vieną monetą iš B_j ir įdedame dvi monetas į B_{j+1}.

2 tipo: Pasirenkame kurią nors netuščią dėžę B_k, kur $1 \leq k \leq 4$. Išimame vieną monetą iš B_k ir sukeičiame vietomis dėžių B_{k+1} ir B_{k+2} turinius (abi šios dėžės arba viena iš jų gali būti ir tuščios).

Nustatykite, ar galima atlikus baigtinį skaičių tokių operacijų pasiekti situaciją, kai pirmos penkios dėžės B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 bus tuščios, o šeštoje dėžėje B_6 bus lygiai $2010^{2010^{2010}}$ monetų. (Čia $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6 uždavinys. Duota teigiamų realiųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Tarkime, kad yra toks natūralusis skaičius s, kad

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

su visais natūraliaisiais $n > s$. Įrodykite, kad egzistuoja tokie natūralieji skaičiai ℓ ir N, kad $\ell \leq s$ ir $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ su visais natūraliaisiais $n \geq N$.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais