

Spanish version

Primer día
25 de julio de 2007

Problema 1. Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales. Para cada i ($1 \leq i \leq n$) se define

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

y sea

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Demostrar que para cualesquiera números reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Demostrar que existen números reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ para los cuales se cumple la igualdad en (*).

Problema 2. Se consideran cinco puntos A, B, C, D y E tales que $ABCD$ es un paralelogramo y $BCED$ es un cuadrilátero cíclico y convexo. Sea ℓ una recta que pasa por A . Supongamos que ℓ corta al segmento DC en un punto interior F y a la recta BC en G . Supongamos también que $EF = EG = EC$.

Demostrar que ℓ es la bisectriz del ángulo DAB .

Problema 3. En una competencia de matemáticas algunos participantes son amigos. La amistad es siempre recíproca. Decimos que un grupo de participantes es una *clique* si dos cualesquiera de ellos son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una clique). Al número de elementos de una clique se le llama *tamaño*. Se sabe que en esta competencia el mayor de los tamaños de las cliques es par.

Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamaños de las cliques contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamaños de las cliques contenidas en la otra.

Problema 4. En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BCA corta a la circunferencia circunscrita en R ($R \neq C$), a la mediatrix de BC en P y a la mediatrix de AC en Q . El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L .

Demostrar que los triángulos RPK y RQL tienen áreas iguales.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos tales que $4ab - 1$ divide a $(4a^2 - 1)^2$.
Demostrar que $a = b$.

Problema 6. Sea n un entero positivo. Se considera

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

como un conjunto de $(n + 1)^3 - 1$ puntos en el espacio tridimensional.
Determinar el menor número posible de planos cuya unión contiene todos los puntos de S pero no incluye a $(0, 0, 0)$.

*Tiempo : 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos*