



יום שלישי, 16 ביולי, 2019

**שאלה 1.** נסמן ב- $\mathbb{Z}$  את קבוצת השלמים. מצאו את כל הפונקציות  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ : עבורן לכל  $a$  ו- $b$  שלמים,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

**שאלה 2.** במשולש  $ABC$ , הנקודה  $A_1$  נמצאת על הצלע  $BC$  והנקודה  $B_1$  נמצאת על הצלע  $AC$ . תהיינה  $P$  ו- $Q$  נקודות על הקטעים  $AA_1$  ו- $BB_1$ , בהתאם, עבורן  $PQ$  מקביל ל- $AB$ . תהא  $P_1$  נקודה על הישר  $,Q A_1$ ,  $Q A_1$  נמצאת בין  $P$  ל- $P_1$  וכן  $PP_1C = \angle BAC$ . באופן דומה, תהא  $Q_1$  נקודה על הישר  $Q A_1$ ,  $Q_1 A_1$  נמצאת בין  $Q$  ל- $Q_1$  וכן  $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ .

הוכחו כי הנקודות  $P, Q, P_1, Q_1$  נמצאות על מעגל אחד.

**שאלה 3.** בראשית חברתית יש 2019 משתמשים, וחלק מזוגות המשתמשים הם חברים זה של זה. החברות היא תמיד הדדית. מאורעות מהסוג הבא יכולים לקרות מספר פעמים, בזה אחר זה:

שלושה משתמשים  $A$  ו- $C$  ו- $B$  עבורם  $A$  חבר גם של  $B$  וגם של  $C$ , אך  $B$  ו- $C$  אינם חברים זה של זה, מחליפים את יחס החברות שלהם כך שכעת  $B$  ו- $C$  הם חברים זה של זה, אך  $A$  אינו חבר של  $B$  ואינו חבר של  $C$ . כל שאר יחס החברות נשארים ללא שינוי.

בהתחלת, ל-1010 משתמשים יש 1009 חברים כל אחד, ול-1009 משתמשים יש 1010 חברים כל אחד. הוכחו כי קיימת סדרת מאורעות מהסוג המתואר כך שבסיופה לכל משתמש יש חבר אחד לכל היותר.



יום רביעי, 17 ביולי, 2019

**שאלה 4.** מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים חיוביים  $(n, k)$  עבורם מתקיים  $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}) = k!$

**שאלה 5.** בנק באת' מנפיק מטבעות עליהם מוטבע  $H$  בצד אחד ו- $T$  בצד השני. להאריך יש  $n$  מטבעות כאלה המסדרים בשורה ממשמאלי לيمין. הוא מבצע את הפעולה הבאה שוב ושוב: אם יש בדיק  $k > 0$  מטבעות עם  $H$  כלפי מעלה, הוא הופך את המטבע ה- $k$ -משמאלי; אחרת, בכל המטבעות יש  $T$  כלפי מעלה והוא עצר. לדוגמה, אם  $n = 3$ , התהליך שמתwil בקונפיגורציה  $THT \leftarrow HHT \leftarrow THT$  יהיה  $TTT \leftarrow HTT \leftarrow HHT \leftarrow THT$  אשר נוצר לאחר שלוש פעולות.

- (א) הוכחו כי לכל קונפיגורציה ההתחלתית, האריך יעצור אחרי מספר סופי של פעולות.  
(ב) לכל קונפיגורציה ההתחלתית  $C$ , נסמן ב- $L(C)$  את מספר הפעולות המבוצעות לפני שהאריך עצר.  
לדוגמה,  $L(TTT) = 0$ ,  $L(THT) = 3$ . מצאו את הערך הממוצע של  $L(C)$  על פני כל  $2^n$  הקונפיגורציות ההתחלתיות האפשריות  $C$ .

**שאלה 6.** יהא  $I$  מרכזו המעגל החסום במשולש חד-זווית  $ABC$  בו  $AB \neq AC$ . המעגל  $\omega$  החסום במשולש  $ABC$  משיק לצלעות  $AB$ ,  $CA$ ,  $BC$  ו- $E$ ,  $F$ ,  $D$  בנקודות  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $D$ -הנתאמות. האנך מ- $D$ -ל- $E$  פוגש את  $\omega$  שנית בנקודה  $P$ . המעגלים החוסמים של המשולשים  $PBF$  ו- $PCE$  ו- $PCE$  נפגשים שנית ב- $Q$ .

הוכחו כי הישרים  $DI$  ו- $PQ$  נפגשים על הישר דרך  $A$  המאונך ל- $AI$ .