ponedjeljak, 11. juli 2022

Zadatak 1 Banka u Oslu koristi dvije vrste kovanica: aluminijske (označene sa A) i bakrene (označene sa B). Šef ima n aluminijskih i n bakrenih kovanica, poredanih u niz u proizvoljnom poretku. *Lanac* je bilo koji podniz uzastopnih kovanica iste vrste. Za dati fiksni prirodan broj $k \leqslant 2n$, Šef ponavlja iduću operaciju: on pronađe najduži lanac koji sadrži k-tu kovanicu s lijeve strane, i pomjera sve kovanice u tom lancu na lijevi kraj niza. Na primjer, za $n = 4$ i $k = 4$, polazeći od niza $AABBBABA$ proces bi izgledao ovako

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Odrediti sve parove (n, k), gdje je $1 \leqslant k \leqslant 2n$, takve da za svaki početni niz, Šef u nekom trenutku tokom izvođenja operacija, dolazi do situacije u kojoj je prvih n kovanica sa lijeve strane iste vrste.

Zadatak 2 Označimo sa $\mathbb{R}^+$ skup pozitivnih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za svako $x \in \mathbb{R}^+$, postoji tačno jedno $y \in \mathbb{R}^+$ za koje vrijedi

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Zadatak 3 Neka je k prirodan broj i neka je S konačan skup koji se sastoji od neparnih prostih brojeva. Dokazati da postoji najviše jedan način (do na rotaciju i osnu simetriju) da rasporedimo elemente skupa S na kružnicu tako da proizvod bilo koja dva susjedna broja ima oblik $x^2 + x + k$ za neki prirodan broj x.

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

utorak, 12. juli 2022

Zadatak 4 Neka je $ABCDE$ konveksan petougao u kojem je $BC = DE$. Unutar petougla $ABCDE$ nalazi se tačka T takva da vrijedi $TB = TD$, $TC = TE$ i $\angle ABT = \angle TEA$. Neka prava AB siječe prave CD i CT u tačkama P i Q, redom. Pretpostavimo da se tačke P, B, A i Q pojavljuju u tom redoslijedu na pravoj na kojoj leže. Neka prava AE siječe prave CD i DT u tačkama R i S, redom. Pretpostavimo da se tačke R, E, A i S pojavljuju u tom redoslijedu na pravoj na kojoj leže. Dokazati da tačke P, S, Q i R leže na istoj kružnici.

Zadatak 5 Odrediti sve trojke (a, b, p) prirodnih brojeva, takve da je p prost broj i vrijedi

$$a^p = b! + p.$$

Zadatak 6 Neka je n prirodan broj. *Nordijski kvadrat* je tabela dimenzija $n \times n$ u koju su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da je u svako polje tabele upisan tačno jedan broj. Dva polja tabele su susjedna ako imaju zajedničku stranicu. Svako polje koje je susjedno samo sa poljima koja sadrže veće brojeve naziva se *dolina*. *Uzbrdica* je niz od jednog ili više polja tabele takav da vrijede sljedeća tri uslova:

(i) prvo polje u nizu je dolina,

(ii) svaka dva uzastopna polja u nizu su susjedna polja u tabeli, i

(iii) brojevi upisani u poljima niza su u rastućem poretku.

Odrediti, u funkciji od broja n, najmanju moguću vrijednost ukupnog broja uzbrdica u nordijskom kvadratu.

Language: Bosnian

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.