Selasa, 16 Juli 2019

Soal 1. Misalkan $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap bilangan bulat a dan b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Soal 2. Pada segitiga ABC, titik A_1 terletak pada sisi BC dan titik B_1 terletak pada sisi AC. Misalkan P dan Q berturut-turut merupakan titik pada segmen AA_1 dan BB_1, sehingga PQ sejajar dengan AB. Misalkan P_1 merupakan suatu titik pada garis PB_1 sehingga B_1 terletak benar-benar di antara P dan P_1, dan $\angle PP_1C = \angle BAC$. Demikian pula, misalkan Q_1 merupakan suatu titik pada garis QA_1 sehingga A_1 terletak benar-benar di antara Q dan Q_1, dan $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Buktikan bahwa titik-titik P, Q, P_1, dan Q_1 terletak pada satu lingkaran.

Soal 3. Suatu jejaring sosial mempunyai 2019 pengguna, di mana beberapa pasang pengguna saling berteman. Ketika pengguna A berteman dengan pengguna B, pengguna B juga berteman dengan pengguna A. Peristiwa berikut dapat terjadi secara berulang-ulang, satu demi satu:

> Tiga pengguna A, B, dan C sehingga A berteman dengan B dan C, tetapi B dan C tidak berteman, mengganti status pertemanan mereka sehingga B dan C menjadi berteman, sedangkan A tidak lagi berteman dengan B, dan tidak lagi berteman dengan C. Status pertemanan yang lain tidak berubah.

Pada awalnya terdapat 1010 pengguna yang masing-masing mempunyai 1009 teman dan 1009 pengguna yang masing-masing mempunyai 1010 teman. Buktikan bahwa terdapat rangkaian peristiwa di atas sehingga pada akhirnya setiap pengguna mempunyai paling banyak satu teman.

Rabu, 17 Juli 2019

Soal 4. Cari semua pasangan bilangan bulat positif (k, n) sehingga

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Soal 5. Bank Bath mengedarkan koin dengan H pada satu sisi dan T pada sisi sebaliknya. Harry mempunyai n koin tersebut yang disusun dari kiri ke kanan. Dia melakukan operasi berikut secara berulang-ulang: jika terdapat tepat $k > 0$ koin yang menampakkan H, maka dia akan membalik koin ke-k dari kiri; jika tidak, semua koin menampakkan T dan dia berhenti. Sebagai contoh, jika $n = 3$ proses yang bermula dengan konfigurasi THT adalah $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, yang berakhir setelah tiga operasi.

(a) Tunjukkan bahwa untuk setiap konfigurasi awal, Harry berhenti setelah berhingga operasi.

(b) Untuk setiap konfigurasi awal C, misalkan $L(C)$ menyatakan banyak operasi sebelum Harry berhenti. Sebagai contoh $L(THT) = 3$ dan $L(TTT) = 0$. Tentukan nilai rata-rata dari $L(C)$ atas semua 2^n kemungkinan konfigurasi awal C.

Soal 6. Misalkan I adalah pusat lingkaran dalam segitiga lancip ABC dengan $AB \neq AC$. Lingkaran dalam ω dari ABC menyinggung sisi-sisi BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, and F. Garis yang melalui D dan tegak lurus EF memotong ω lagi di R. Garis AR memotong ω lagi di P. Lingkaran luar segitiga PCE dan PBF berpotongan lagi di Q.

Buktikan bahwa garis-garis DI dan PQ berpotongan pada garis yang sekaligus melalui A dan tegak lurus AI.

Language: Indonesian

Waktu: 4 jam 30 menit
Setiap soal bernilai 7 angka