Τρίτη, 10 Ιουλίου 2012

Πρόβλημα 1. Σε δεδομένο τρίγωνο ABC το σημείο J είναι το κέντρο του παρεγεγραμμένου κύκλου απέναντι από την κορυφή A. Αυτός ο παρεγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται της πλευράς BC στο σημείο M και στις ευθείες AB και AC στα σημεία K και L, αντίστοιχα. Οι ευθείες LM και BJ τέμνονται στο σημείο F, και οι ευθείες KM και CJ τέμνονται στο G. Έστω S το σημείο τομής των ευθειών AF και BC, και έστω T το σημείο τομής των ευθειών AG και BC. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ST.

(Ο *παρεγεγραμμένος κύκλος* του τριγώνου ABC απέναντι από την κορυφή A, είναι ο κύκλος που εφάπτεται στην πλευρά BC, στη προέκταση της πλευράς AB προς το μέρος του B, και στην προέκταση της πλευράς AC προς το μέρος του C.)

Πρόβλημα 2. Έστω $n \geq 3$ ένας ακέραιος, και έστω $a_2, a_3, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n .$$

Πρόβλημα 3. Το *παιγνίδι μαντέματος ψευτών* (*liar's guessing game*) είναι ένα παιγνίδι που παίζεται μεταξύ δύο παικτών A και B. Οι κανόνες του παιγνιδιού εξαρτώνται από δύο θετικούς ακέραιους k και n που είναι γνωστοί και στους δύο παίκτες.

Κατά την έναρξη του παιγνιδιού ο παίκτης A επιλέγει ακέραιους x και N με $1 \leq x \leq N$. Ο παίκτης A κρατάει τον ακέραιο x μυστικό και λέει με ειλικρίνεια τον ακέραιο N στον παίκτη B. Ο παίκτης B τώρα προσπαθεί να πάρει πληροφορίες για τον ακέραιο x με ερωτήσεις προς τον παίκτη A ως εξής: κάθε ερώτηση συνίσταται στον καθορισμό από τον παίκτη B ενός τυχαίου συνόλου S (ενδεχομένως να είναι ένα που έχει ήδη καθοριστεί σε κάποια προηγούμενη ερώτηση) θετικών ακέραιων και στο να ζητήσει από τον A να του πει, αν ο x ανήκει στο σύνολο S. Ο παίκτης B μπορεί να κάνει τέτοιες ερωτήσεις όσες επιθυμεί. Μετά από κάθε ερώτηση ο παίκτης A πρέπει αμέσως να την απαντήσει με ένα *ναι* ή με ένα *όχι*, αλλά του επιτρέπεται να πει ψέματα όσες φορές θέλει. Ο μόνος περιορισμός του είναι ότι: μεταξύ οποιωνδήποτε $k+1$ διαδοχικών απαντήσεων, σε μία τουλάχιστον απάντηση πρέπει να πει την αλήθεια.

Αφού ο B έχει κάνει όσες ερωτήσεις επιθυμεί, πρέπει να καθορίσει ένα σύνολο X το οποίο πρέπει να περιέχει το πολύ n θετικούς ακέραιους. Αν ο x ανήκει στο σύνολο X, τότε ο B κερδίζει, διαφορετικά, χάνει. Να αποδείξετε ότι:

1. Αν $n \geq 2^k$, τότε ο B έχει στρατηγική νίκης.

2. Για κάθε αρκετά μεγάλο k, υπάρχει ακέραιος $n \geq 1{,}99^k$ τέτοιος ώστε ο B δεν μπορεί να έχει στρατηγική νίκης.

Language: Greek

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τετάρτη, 11 Ιουλίου 2012

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, οι οποίες, για όλους τους ακέραιους a,b,c με $a+b+c=0$, ικανοποιούν την ισότητα:

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

(Με το σύμβολο $\mathbb{Z}$ σημειώνουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών)

Πρόβλημα 5. Έστω ABC ένα τρίγωνο με $\angle BCA = 90°$ και έστω D το ίχνος του ύψους από την κορυφή C. Έστω X ένα σημείο στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος CD. Έστω K το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AX που είναι τέτοιο ώστε $BK = BC$. Ομοίως, έστω L το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος BX που είναι τέτοιο ώστε $AL = AC$. Έστω M το σημείο τομής των AL και BK.

Να αποδείξετε ότι $MK = ML$.

Πρόβλημα 6. Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n, για τους οποίους υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$, έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες