Martedì 23 Luglio 2013

Problema 1. Dimostrare che, per ogni coppia di interi positivi k ed n, esistono k interi positivi $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (non necessariamente distinti) tali che

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. Una configurazione di 4027 punti nel piano si dice *colombiana* se è costituita da 2013 punti rossi e 2014 punti blu, ed i punti della configurazione sono a 3 a 3 non allineati. Il piano viene suddiviso in varie regioni tracciando delle rette. Un insieme di rette si dice *buono* per una configurazione colombiana se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

- nessuna delle rette passa per punti della configurazione;
- nessuna regione contiene punti di entrambi i colori.

Determinare il minimo valore di k tale che, per ogni configurazione colombiana di punti, esiste un insieme buono di k rette.

Problema 3. Sia ABC un triangolo. L'excerchio del triangolo ABC opposto al vertice A è tangente al lato BC nel punto A_1. Definiamo il punto B_1 su CA ed il punto C_1 su AB in maniera analoga, usando gli excerchi opposti a B e C, rispettivamente. Supponiamo che il circocentro del triangolo $A_1B_1C_1$ appartenga alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo.

(L'*excerchio* del triangolo ABC opposto al vertice A è la circonferenza tangente al segmento BC, alla semiretta AB dalla parte di B, e alla semiretta AC dalla parte di C. Gli excerchi opposti a B e C sono definiti in maniera analoga.)

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Mercoledì 24 Luglio 2013

Problema 4. Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H, e sia W un punto del segmento BC, strettamente compreso tra B e C. I punti M ed N sono i piedi delle altezze condotte da B e C, rispettivamente. Indichiamo con ω_1 la circonferenza circoscritta a BWN, e con X il punto di ω_1 tale che WX è un diametro di ω_1. Analogamente, indichiamo con ω_2 la circonferenza circoscritta a CWM, e con Y il punto di ω_2 tale che WY è un diametro di ω_2.

Dimostrare che i punti X, Y e H sono allineati.

Problema 5. Sia $\mathbb{Q}_{>0}$ l'insieme dei numeri razionali positivi. Sia $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa le seguenti tre condizioni:

(i) per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ si ha che $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ si ha che $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) esiste un numero razionale $a > 1$ tale che $f(a) = a$.

Dimostrare che $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Sia $n \geq 3$ un numero intero, e consideriamo una circonferenza sulla quale sono stati segnati $n+1$ punti equispaziati. Consideriamo tutte le *etichettature* di questi punti mediante i numeri $0, 1, \ldots, n$ in cui ogni etichetta è usata esattamente una volta; due di queste etichettature sono considerate la stessa se una può essere ottenuta dall'altra mediante una rotazione della circonferenza. Una etichettatura si dice *magnifica* se, comunque si scelgano 4 etichette $a < b < c < d$ con $a + d = b + c$, la corda congiungente i punti etichettati a e d non interseca la corda congiungente i punti etichettati b e c.

Sia M il numero delle etichettature magnifiche, e sia N il numero delle coppie ordinate (x, y) di interi positivi tali che $x + y \leq n$ e $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$. Dimostrare che

$$M = N + 1.$$

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti