Pazartesi, 11 Temmuz 2016

Soru 1. Bir BCF üçgeninin B açısı diktir. CF doğrusu üzerinde bir A noktası, $|FA| = |FB|$ olacak ve F noktası A ile C arasında kalacak şekilde seçiliyor. D noktası, $|DA| = |DC|$ olacak ve $\angle DAB$ nin açıortayı AC olacak şekilde seçiliyor. E noktası, $|EA| = |ED|$ olacak ve $\angle EAC$ nin açıortayı AD olacak şekilde seçiliyor. $[CF]$ nin orta noktası M olsun. X noktası, $AMXE$ bir paralelkenar ($AM \parallel EX$ ve $AE \parallel MX$) olacak şekilde seçiliyor. BD, FX, ve ME doğrularının noktadaş olduklarını gösteriniz.

Soru 2. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $n \times n$ lik bir satranç tahtasının her birim karesine I, M ve O harflerinden biri

- her satırda ve her sütunda, harflerin üçte biri I, üçte biri M ve üçte biri O dur;
- üzerindeki birim kare sayısı 3 ün katı olan her köşegende, harflerin üçte biri I, üçte biri M ve üçte biri O dur.

şartlarına uygun olarak yazılabiliyorsa, n nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Not: $n \times n$ lik satranç tahtasının satırları ve sütunları doğal şekilde 1 den n ye numaralandırılırsa, her birim kareye $1 \leqslant i, j \leqslant n$ olacak şekilde bir (i, j) ikilisi karşılık gelir. $n > 1$ için, satranç tahtasının şöyle iki türde toplam $4n - 2$ *köşegeni* vardır: birinci tür her bir köşegen, $i + j$ belli bir sabite eşit olacak şekildeki tüm (i, j) birim karelerinden, ikinci tür her bir köşegen ise $i - j$ belli bir sabite eşit olacak şekildeki tüm (i, j) birim karelerinden oluşur.

Soru 3. $P = A_1A_2 \ldots A_k$ koordinat düzleminde bir dışbükey çokgen olsun. A_1, A_2, $\ldots$, A_k köşeleri tam sayı koordinatlıdır ve hepsi bir çember üzerindedir. P nin alanı S olsun. P nin kenar uzunluklarının her birinin karesini tam bölen bir n tek pozitif tam sayısı veriliyor. $2S$ nin n ile tam bölünen bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir.

Salı, 12 Temmuz 2016

Soru 4. Pozitif tam sayılardan oluşan en az iki elemanlı bir kümede her eleman en az bir diğer elemanla ortak asal bölene sahipse, bu kümeye *mis gibi* diyelim. $P(n) = n^2 + n + 1$ olsun. b bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

kümesi mis gibi olacak şekilde bir a negatif olmayan tam sayısı bulunuyorsa, b nin alabileceği en küçük değer nedir?

Soru 5. Tahtaya

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

denklemi yazılmıştır (denklemin her iki tarafında 2016 şar lineer çarpan bulunuyor). Bu 4032 lineer çarpandan tam olarak k tanesi, her iki tarafta en az birer çarpan kalacak ve geriye kalan denklemin hiç reel çözümü olmayacak şekilde, silinebiliyorsa k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Soru 6. Düzlemde verilen $n \geqslant 2$ adet doğru parçasının herhangi ikisi iç noktalarda kesişiyor ve herhangi üçü noktadaş değildir. Aslı her doğru parçasının bir ucunu seçip oraya bir kurbağayı, yüzü diğer uca dönük olarak, yerleştirecektir. Daha sonra $n-1$ defa el çırpacaktır. Elini her çırptığında, kurbağaların her biri hemen ileri atlayıp kendi doğru parçası üzerindeki bir sonraki kesişim noktasına konacaktır. Bu kurbağalar atlama yönlerini hiç bir zaman değiştirmezler. Aslı bu kurbağaları, herhangi iki kurbağa asla aynı anda aynı kesişim noktasında buluşmayacak şekilde yerleştirmek istiyor.

Doğru parçaları, şartlara uygun olarak nasıl verilmiş olursa olsun,

(a) n tekse, Aslı'nın amacına ulaşabileceğini gösteriniz.

(b) n çiftse, Aslı'nın amacına ulaşamayacağını gösteriniz.