Понедјељак, 11. јул 2016.

Задатак 1. У троуглу BCF угао код тјемена B је прав. Нека је A тачка на правој CF таква да је $FA = FB$ и тачка F лежи између A и C. Тачка D је изабрана тако да је $DA = DC$ и права AC полови угао $\sphericalangle DAB$. Тачка E је изабрана тако да је $EA = ED$ и права AD полови угао $\sphericalangle EAC$. Нека је M средиште дужи CF, а тачка X таква да је четвероугао $AMXE$ паралелограм (гдје је $AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Показати да се праве BD, FX и ME сијеку у једној тачки.

Задатак 2. Одредити све природне бројеве n за које је могуће у свако поље табеле димензија $n \times n$ уписати једно од слова I, M и O тако да су задовољена оба сљедећа услова:

- у сваком реду и свакој колони, једна трећина свих уписаних слова су I, једна трећина су M и једна трећина су O;
- у свакој дијагонали у којој је број уписаних слова дјељив са три, једну трећину свих уписаних слова чине слова I, трећину чине слова M и трећину слова O.

Напомена: Редови и колоне $n \times n$ табеле су означени бројевима од 1 до n на уобичајен начин. Према томе, сваком пољу табеле одговара пар природних бројева (i, j), гдје је $1 \leqslant i, j \leqslant n$. За $n > 1$, табела има $4n - 2$ *дијагонале* два типа. Дијагонала првог типа се састоји од свих поља (i, j) за које је $i + j$ константа, а дијагонала другог типа се састоји од свих поља (i, j) за која је $i - j$ константа.

Задатак 3. Нека је $P = A_1A_2 \ldots A_k$ конвексан многоугао у равни. Тјемена $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имају цјелобројне координате и леже на истој кружници. Нека је S површина многоугла P. Нека је n непаран природан број такав да су квадрати дужина страница многоугла P цијели бројеви дјељиви са n. Доказати да је $2S$ цијели број дјељив са n.

Уторак, 12. јул 2016.

Задатак 4. Скуп природних бројева називамо *мирисан* ако садржи бар два елемента и сваки његов елемент има бар један заједнички прост дјелилац са бар једним од преосталих елемената. Нека је $P(n) = n^2 + n + 1$. Која је најмања могућа вриједност природног броја b за коју постоји ненегативан цијели број a такав да је скуп

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

мирисан?

Задатак 5. На табли је написана једначина

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

са по 2016 линеарних фактора на свакој страни. Која је најмања могућа вриједност броја k за коју је могуће избрисати тачно k од ова 4032 линеарна фактора, тако да на свакој страни једнакости остане бар по један фактор и да добијена једначина нема реалних рјешења?

Задатак 6. У равни је дато $n \geqslant 2$ дужи тако да се сваке двије дужи сијеку у унутрашњој тачки, и да се никоје три дужи не сијеку у истој тачки. Џеф треба да одабере по један крај сваке дужи и у њега постави жабу, окренуту према другом крају дужи. Затим ће Џеф да пљесне рукама $n-1$ пута. Сваки пут кад он пљесне рукама, свака жаба ће одмах да скочи напријед у сљедећу пресјечну тачку на својој дужи. Жабе никад не мијењају смјер у коме скачу. Џеф жели да постави жабе тако да се ни у једном тренутку двије жабе не могу наћи у истој пресјечној тачки.

(а) Доказати да Џеф увијек може да испуни своју жељу ако је n непаран број.

(б) Доказати да Џеф никад не може да испуни своју жељу ако је n паран број.

Вријеме за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова