E martë, 16 Korrik, 2019

Problemi 1. Le të jetë $\mathbb{Z}$ bashkësia e numrave të plotë. Gjeni të gjithë funksionet $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ të tillë që, për çdo dy numra të plotë a dhe b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problemi 2. Në trekëndëshin ABC, pika A_1 ndodhet në brinjën BC dhe pika B_1 ndodhet në brinjën AC. Pikat P dhe Q ndodhen përkatësisht në segmentet AA_1 dhe BB_1, dhe janë të tilla që PQ është paralele me AB. Le të jetë P_1 një pikë në drejtëzën PB_1, e tillë që B_1 ndodhet rigorozisht ndërmjet pikave P dhe P_1, dhe $\angle PP_1C = \angle BAC$. Ngjashmërisht, le të jetë Q_1 një pikë në drejtëzën QA_1, e tillë që A_1 ndodhet rigorozisht ndërmjet pikave Q dhe Q_1, dhe $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Vërtetoni se pikat P, Q, P_1, dhe Q_1 ndodhen në të njëjtin rreth.

Problemi 3. Në një rrjet social ka 2019 përdorues, ku disa nga çiftet e përdoruesve janë miq me njëri-tjetrin. Sa herë që një përdorues A është mik me një përdorues B, gjithashtu edhe përdoruesi B është mik me përdoruesin A. Në mënyrë të përsëritur në rrjet mund të ndodhin ngjarje të natyrës siç përshkruhet më poshtë, një ngjarje çdo herë:

> Tre përdorues A, B, dhe C të tillë që A është mik me të dy, B dhe C, por B dhe C nuk janë miq me njëri-tjetrin, ndryshojnë marrëdhënien e tyre të miqësisë në mënyrë të tillë që B dhe C janë bërë tashmë miq, ndërsa A nuk është më mik me B, dhe nuk është më mik me C. Të gjitha marrëdhëniet e tjera të miqësisë nuk ndryshojnë.

Fillimisht, 1010 përdorues kanë secili nga 1009 miq, dhe 1009 përdorues kanë secili nga 1010 miq. Vërtetoni se njendet një varg ngjarjesh të tilla që pasi ato ndodhin secili përdorues është mik me të shumtën një përdorues tjetër.

E mërkurë, 17 Korrik, 2019

Problemi 4. Gjeni të gjithë çiftet e numrave të plotë (k, n) të tillë që

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problemi 5. Banka e Bath-it emeton monedha të cilat në njërën anë kanë simbolin H dhe në anën tjetër kanë simbolin T. Harry ka vendosur n monedha të tilla në një rresht duke i renditur nga e majta në të djathtë. Në mënyrë të përsëritur ai kryen operacionin e mëposhtëm: në qoftë se në rresht ka saktësisht $k > 0$ monedha që shfaqin simbolin H, atëherë ai kthen në të kundërt monedhën që ndodhet në pozicionin e k -të duke numëruar nga e majta në të djathtë; në të kundërt, të gjitha monedhat shfaqin simbolin T dhe në këtë mënyrë ai ndalon. Për shembull, në qoftë se $n = 3$ procesi që fillon me vendosjen THT do të vijojë me $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, ku ai ndalon pasi ka kryer tre operacione.

(a) Tregoni se, për çdo vendosje fillestare, Harry ndalon pasi kryen një numër të fundëm operacionesh.

(b) Për çdo vendosje fillestare C, shënohet me $L(C)$ numri i operacioneve që kryen ai derisa ndalon. Për shembull, $L(THT) = 3$ dhe $L(TTT) = 0$. Gjeni vlerën mesatare të $L(C)$ për të gjitha 2^n vendosjet fillestare të mundshme C.

Problemi 6. Le të jetë I qendra e rrethit të brendashkruar trekëndëshit këndngushtë ABC ku $AB \neq AC$. Rrethi ω që i brendashkruhet trekëndëshit ABC është tangjent me brinjët BC, CA, dhe AB në pikat D, E, dhe F, respektivisht. Drejtëza që kalon në pikën D dhe është pingule me EF pret përsëri rrethin ω në pikën R. Drejtëza AR pret përsëri rrethin ω në pikën P. Rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave PCE dhe PBF priten përsëri në pikën Q.

Vërtetoni që drejtëzat DI dhe PQ takohen në drejtëzën që kalon në pikën A dhe është pingule me AI.