*subota, 8. srpnja 2023*

**Zadatak 1.** Odredi sve složene cijele brojeve $n > 1$ koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: ako su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ svi pozitivni djelitelji od $n$, pri čemu je $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, tada $d_i$ dijeli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za svaki $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

**Zadatak 2.** Neka je $ABC$ šiljastokutan trokut s $|AB| < |AC|$. Neka je $\Omega$ kružnica opisana trokutu $ABC$. Neka je $S$ polovište luka $CB$ od $\Omega$ koji sadrži $A$. Okomica iz $A$ na $BC$ siječe pravac $BS$ u $D$ i siječe $\Omega$ još u $E \neq A$. Pravac kroz $D$ paralelan s $BC$ siječe pravac $BE$ u $L$. Označimo kružnicu opisanu trokutu $BDL$ s $\omega$. Neka se $\omega$ i $\Omega$ sijeku još u $P \neq B$.
Dokaži da se tangenta na $\omega$ u $P$ siječe s pravcem $BS$ na unutarnjoj simetrali kuta $\angle BAC$.

**Zadatak 3.** Za svaki cijeli broj $k \geqslant 2$, odredi sve beskonačne nizove pozitivnih cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ za koje postoji polinom $P$ oblika $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, gdje su $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nenegativni cijeli brojevi, takav da je

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

za svaki cijeli broj $n \geqslant 1$.

*Language: Croatian*

*Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.*

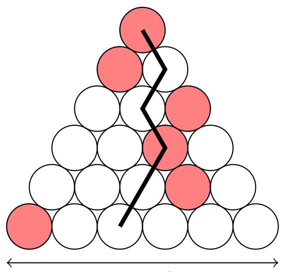
*nedjelja, 9. srpnja 2023*

**Zadatak 4.** Neka su $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ u parovima različiti pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

cijeli broj za svaki $n = 1, 2, \dots, 2023$. Dokaži da je $a_{2023} \geqslant 3034$.

**Zadatak 5.** Neka je $n$ pozitivan cijeli broj. *Japanski trokut* sastoji se od $1 + 2 + \cdots + n$ krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta tako da za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ vrijedi da $i$-ti redak sadrži točno $i$ krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninja put* u japanskom trokutu je niz od $n$ krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog kruga na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak. Ovo je primjer jednog japanskog trokuta za $n = 6$, zajedno s jednim ninja putem u tom trokutu koji sadrži dva crvena kruga.




U ovisnosti o $n$, nađi najveći $k$ takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem $k$ crvenih krugova.

**Zadatak 6.** Neka je $ABC$ jednakostraničan trokut. Neka su $A_1, B_1, C_1$ točke u unutrašnjosti trokuta $ABC$ tako da je $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ i

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°.$$

Neka se pravci $BC_1$ i $CB_1$ sijeku u $A_2$, neka se pravci $CA_1$ i $AC_1$ sijeku u $B_2$ i neka se pravci $AB_1$ i $BA_1$ sijeku u $C_2$.
Dokaži da ako je trokut $A_1B_1C_1$ raznostraničan, tada tri kružnice opsiane trokutima $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ i $CC_1C_2$ sve prolaze kroz dvije točke koje su zajedničke tim trima kružnicama.



*Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.*