Language: **Arabic (Moroccan)**

Day: **1**

الجمعة 10 يوليوز 2015

المسألة 1. نقول عن مجموعة منتهية $\mathcal{S}$ من نقط المستوى إنّها **متوازنة** إذا كان لكلّ نقطتين مختلفتين A و B من $\mathcal{S}$ توجد نقطة C من $\mathcal{S}$ بحيث $AC = BC$. نقول عن $\mathcal{S}$ إنّها **بدون مركز** إذا كان لكلّ ثلاث نقط مختلفة A و B و C من $\mathcal{S}$ لا توجد نقطة P من $\mathcal{S}$ بحيث $PA = PB = PC$.

(a) بين أنّ لكلّ عدد صحيح $n \geq 3$ توجد مجموعة متوازنة مكونة من n نقطة.

(b) حدد كلَّ الأعداد الصحيحة $n \geq 3$ بحيث توجد مجموعة متوازنة بدون مركز مكونة من n نقطة.

المسألة 2. حدد كلَّ الثلوثات (a, b, c) من الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة بحيث يكون كلّ واحد من الأعداد $ab - c$ و $bc - a$ و $ca - b$ قوة للعدد 2 .

(قوة للعدد 2 هي كلُّ عدد يُكتب على شكل 2^n حيث n عدد صحيح طبيعي.)

المسألة 3. ليكن ABC مثلثا حاد الزّوايا بحيث $AB > AC$. لتكن Γ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و H مركز تعامده، و F موقع ارتفاعه المنشأ من الرّأس A. نرمز بـ M لمنتصف القطعة $[BC]$. لتكن Q نقطة Γ بحيث $\widehat{HQA} = 90^\circ$، ولتكن K نقطة Γ بحيث $\widehat{HKQ} = 90^\circ$. نفترض أنّ النقط A ، B ، C ، K و Q كلُّهَا مختلفة وهي وفق هذا الترتيب على Γ.

بيّن أنّ الدائرة المحيطة بالمثلث KQH مماسّة للدائرة المحيطة بالمثلث FKM.

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة

السبت 11 يوليوز 2015

المسألة 4. ليكن ABC مثلثا دائرته المحيطة Ω وليكن O مركز Ω . دائرة Γ مركزها A تقطع القطعة $[BC]$ في النقطتين D و E بحيث تكون النقط B ، D ، E و C كلها مختلفة وهي وفق هذا الترتيب على المستقيم (BC) . نرمز بـ F و G لنقطتي تقاطع Γ و Ω ، بحيث تكون A ، F ، B ، C و G وفق هذا الترتيب على Ω . لتكن K نقطة التقاطع الأخرى للدائرة المحيطة بالمثلث BDF مع القطعة $[AB]$. لتكن L نقطة التقاطع الأخرى للدائرة المحيطة بالمثلث CGE مع القطعة $[CA]$.

نفترض أنّ المستقيمين (FK) و (GL) ليسا منطبقين وأنهما يتقاطعان في النقطة X. بيّن أنّ X تنتمي للمستقيم (AO) .

المسألة 5. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية. حدد كل الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تحقق المعادلة

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

لكل عددين حقيقين x و y.

المسألة 6. المتتالية $a_1, a_2, \ldots$ من أعداد صحيحة تحقّق الشرطين التاليين:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ لكل $1 \leq j$ ؛

(ii) $k+a_k \neq \ell+a_\ell$ لكل $1 \leq k < \ell$.

بيّن أنّه يوجد عددان صحيحان موجبان قطعا b و N بحيث

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \leq 1007^2$$

لكل عددين صحيحين m و n يحققان $n > m \geq N$.

مدّة الإنجاز: أربع ساعات ونصف

تمنح سبع نقاط لكلّ مسألة