E Marte, 8 Korrik, 2014

Problemi 1. Le të jetë $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ një varg i pafundëm numrash të plotë pozitivë. Provoni se ekziston vetëm një numër i plotë $n \geq 1$ i tillë që

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problemi 2. Le të jetë $n \geq 2$ një numër i plotë. Një kuti shahu $n \times n$ përbëhet prej n^2 katrorë njësi. Një konfigurim prej n kalash në këtë kuti quhet *i qetë* në qoftë se çdo rresht dhe çdo kolonë përmban ekzaktësisht një kala. Gjeni numrin e plotë më të madh pozitiv k të tillë që, për çdo konfigurim të qetë prej n kalash, gjendet një katror $k \times k$ i cili nuk përmban kala në asnjë prej k^2 katrorëve njësi të tij.

Problemi 3. Katërkëndëshi i mysët $ABCD$ ka $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Pika H është kemba e pingules së hequr nga A mbi BD. Pikat S dhe T ndodhen në brinjët AB dhe AD, respektivisht, në menyrë të tillë që H të ndodhet në brendësi të trekëndëshit SCT dhe

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90° .$$

Vërtetoni se vija BD është tangente me rrethin e jashtëshkruar trekëndëshit TSH.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlerësohet me 7 pikë

E Merkure, 9 Korrik, 2014

Problemi 4. Pikat P dhe Q ndodhen në brinjën BC të trekëndëshit kënd-ngushtë ABC në mënyrë të tillë që $\angle PAB = \angle BCA$ dhe $\angle CAQ = \angle ABC$. Pikat M dhe N ndodhen në vijat AP dhe AQ, respektivisht, në mënyrë të tillë që P të jetë mesi i AM, dhe Q të jetë mesi i AN. Vërtetoni se vijat BM dhe CN priten në rrethin e jashtëshkruar trekëndëshit ABC.

Problemi 5. Për çdo numër te plotë pozitiv n, Banka e Cape Town emeton monedha me vlerë $\frac{1}{n}$. Në qoftë se kemi një koleksion monedhash të tilla (jo domosdoshmërisht me vlerë të ndryshme) me vlerë totale të shumtën $99 + \frac{1}{2}$, tregoni se është e mundur të ndahet ky koleksion në 100 ose më pak grupe, që çdo grup të ketë vlerë totale të shumtën 1.

Problemi 6. Një bashkësi vijash në plan është në *gjendje të zakonshme* në qoftë se çdo dy prej tyre nuk janë paralele dhe çdo tre prej tyre nuk kalojnë në të njëjtën pikë. Një bashkësi vijash në gjendje të zakonshme pret planin në zona, disa prej të cilave kanë siperfaqe të fundme; i quajme keto te fundit *zona të fundme* të tij. Vërtetoni se për çdo n mjaft të madhe, në çdo bashkesi prej n vijash në gjendje të zakonshme është e mundur të ngjyrosen me ngjyrë blu të paktën $\sqrt{n}$ prej vijave në mënyrë të tillë që asnjë prej zonave të fundme të tij të ketë kufirin e saj të ngjyrosur plotësisht me ngjyrë blu.

Shenim: Rezultatet e marra në qoftë se $\sqrt{n}$ zëvendesohet me $c\sqrt{n}$ do të vlerësohen me pike në varësi të vlerës së kostantes c.

Koha: 4 ore dhe 30 minuta
Secili problem vlerësohet me 7 pikë