

E Mërkurë, 15 Korrik, 2009

Problem 1. Le të jetë n numër i plotë pozitiv dhe a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) numra të plotë pozitivë të ndryshëm, që i përkasin bashkësisë $\{1, \dots, n\}$, të tillë që n plotpjesëton $a_i(a_{i+1}-1)$ për $i = 1, \dots, k-1$. Provoni që n nuk plotpjesëton $a_k(a_1-1)$.

Problem 2. Le të jetë ABC një trekëndësh dhe O qendra e rrethit jashtëshkruar tij. P dhe Q janë, përkatësisht, pika të brendshme të segmenteve CA dhe AB . Le të jenë K , L dhe M , përkatësisht, meset e segmenteve BP , CQ dhe PQ , ndërsa Γ rrethi që kalon nga pikat K , L dhe M . Supozojmë që drejtëza PQ është tangjent me rrethin Γ . Provoni që $OP = OQ$.

Problem 3. Supozojmë që s_1, s_2, s_3, \dots është varg rrigorozisht rritës numrash të plotë pozitivë i tillë që nënvargjet

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{dhe} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

janë dy progresione aritmetike. Provoni që vargu s_1, s_2, s_3, \dots është gjithashtu progresion aritmetik.

E Enjte, 16 Korrik, 2009

Problem 4. Le të jetë ABC një trekëndësh me $AB = AC$. Përgjysmoret e këndeve $\angle CAB$ dhe $\angle ABC$ takojnë brinjët BC dhe CA , përkatësisht, në pikat D dhe E . Le të jetë K qendra e rrethit brendashkruar trekëndëshit ADC . Supozojmë që këndi $\angle BEK = 45^\circ$. Gjeni të gjitha vlerat e mundshme të këndit $\angle CAB$.

Problem 5. Gjeni të gjitha funksionet f të përcaktuara në bashkësinë e numrave të plotë pozitivë me vlera po në bashkësinë e numrave të plotë pozitivë, të tilla që, për çdo dy numra të plotë pozitivë a dhe b , ekziston një trekëndësh i padegjeneruar që i ka brinjët me gjatësi

$$a, f(b) \text{ dhe } f(b + f(a) - 1).$$

(Një trekëndësh është *i padegjeneruar* kur kulmet e tij nuk ndodhen në një drejtëz.)

Problem 6. Le të jenë a_1, a_2, \dots, a_n numra të plotë pozitivë të ndryshëm dhe M një bashkësi me $n - 1$ numra të plotë pozitivë që nuk përmban numrin $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Një karkalec duhet të kërcejë përgjatë boshtit real. Duke filluar nga pika me koordinatë 0 ai kryen n kërcime në të djathtë, me gjatësi a_1, a_2, \dots, a_n në një farë renditje. Proveni që renditja e kërcimeve mund të zgjidhet në mënyrë të tillë që karkaleci të mos kalojë nga asnjë pikë me koordinatë nga bashkësia M .