*Вівторок, 18 липня 2017 року*

**Задача 1.** Для довільного цілого $a_0 > 1$ визначимо послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots$ таким чином:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{якщо } \sqrt{a_n} \text{ – ціле число,} \\ a_n + 3 & \text{в протилежному випадку,} \end{cases} \qquad \text{для усіх } n \geqslant 0.$$

Знайдіть всі значення $a_0$, при яких існує число $A$ таке, що $a_n = A$ для нескінченної кількості значень $n$.

**Задача 2.** Нехай $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для всіх дійсних $x$ і $y$ справджується рівність

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

**Задача 3.** Мисливець і невидимий кролик грають у таку гру на площині. Початкова точка $A_0$ кролика і початкова точка $B_0$ мисливця співпадають. Нехай після $n-1$ раунду гри кролик знаходиться у точці $A_{n-1}$, а мисливець – у точці $B_{n-1}$. Тоді в $n$-му раунді гри послідовно виконуються такі три дії:

(i) Кролик, залишаючись невидимим, переміщується в точку $A_n$ таку, що відстань між точками $A_{n-1}$ і $A_n$ дорівнює 1.

(ii) Слідкуючий пристрій повідомляє мисливцю деяку точку $P_n$. При цьому, слідкуючий пристрій гарантує лише те, що відстань між точками $P_n$ і $A_n$ не більша за 1.

(iii) Мисливець, залишаючись видимим, переміщується в точку $B_n$ таку, що відстанні між точками $B_{n-1}$ і $B_n$ дорівнює 1.

Чи завжди можливо мисливцю, при довільних переміщеннях кролика і довільних повідомлених слідкуючим пристроєм точках, вибрати свої переміщення таким чином, щоб після $10^9$ раундів він міг гарантувати, що відстань між ним і кроликом не більша за 100?

*Language: Ukrainian*

*Час виконання: 4 години 30 хвилин*
*Кожна задача оцінюється в 7 балів*

*Середа, 19 липня 2017 року*

**Задача 4.** Нехай $R$ і $S$ – дві різні точки на колі $\Omega$ такі, що відрізок $RS$ не є діаметром. Нехай $\ell$ – дотична до $\Omega$ в точці $R$. Точка $T$ обрана так, що точка $S$ є серединою відрізка $RT$. Точка $J$ вибрана на меншій дузі $RS$ кола $\Omega$ так, що коло $\Gamma$, яке описане навколо трикутника $JST$, перетинає $\ell$ в двох різних точках. Нехай $A$ – та із спільних точок $\Gamma$ і $\ell$, що знаходиться ближче до точки $R$. Пряма $AJ$ вдруге перетинає $\Omega$ в точці $K$. Доведіть, що пряма $KT$ дотикається до кола $\Gamma$.

**Задача 5.** Задане ціле число $N \geqslant 2$. Команда, що складається з $N(N+1)$ футболістів, кожні двоє з яких мають різний зріст, вишикувана в ряд. Андрій Шевченко бажає прибрати з ряду $N(N-1)$ гравців так, щоб для решти ряду з $2N$ гравців справджувались такі $N$ умов:

(1) ніхто не стоїть між двома найвищими гравцями,

(2) ніхто не стоїть між третім і четвертим за зрістом гравцями,

⋮

($N$) ніхто не стоїть між двома найнижчими гравцями.

Доведіть, що це завжди можна зробити.

**Задача 6.** Впорядкована пара $(x, y)$ цілих чисел називається *примітивною точкою*, якщо найбільший спільний дільник чисел $x$ і $y$ дорівнює 1. Задано скінчену множину $S$ примітивних точок. Доведіть, що існують натуральне $n$ і цілі $a_0$, $a_1$, …, $a_n$ такі, що для кожної примітивної точки $(x, y)$ з $S$ справджується рівність

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$