pondelok, 19. júla 2021

Úloha 1. Je dané celé číslo $n \geqslant 100$. Ivan napísal každé z čísel $n, n+1, \ldots, 2n$ na jednu kartičku. Potom týchto $n+1$ kariet zamiešal a rozdelil na dve kôpky. Dokážte, že aspoň jedna z týchto kôpok obsahuje dve kartičky, ktorých súčet čísel je druhá mocnina celého čísla.

Úloha 2. Dokážte, že nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

platí pre všetky reálne čísla $x_1, \ldots, x_n$.

Úloha 3. Nech D je vnútorný bod ostrouhlého trojuholníka ABC spĺňajúceho $|AB| > |AC|$ taký, že $|\angle DAB| = |\angle CAD|$. Bod E leží na úsečke AC a spĺňa $|\angle ADE| = |\angle BCD|$. Bod F leží na úsečke AB a spĺňa $|\angle FDA| = |\angle DBC|$. Bod X leží na priamke AC a spĺňa $|CX| = |BX|$. Nech O_1 a O_2 sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ADC a EXD. Dokážte, že priamky BC, EF, O_1O_2 sa pretínajú v jednom bode.

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

utorok, 20. júla 2021

Úloha 4. Nech Γ je kružnica so stredom I a nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že každá z úsečiek AB, BC, CD a DA sa dotýka Γ. Nech Ω je kružnica opísaná trojuholníku AIC. Časť polpriamky BA za bodom A pretína Ω v X a časť polpriamky BC za bodom C pretína Ω v Z. Časti polpriamok AD a CD za bodom D pretínajú Ω postupne v bodoch Y a T. Dokážte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

Úloha 5. Dve veveričky, Chip a Dale, nazbierali 2021 orieškov na zimu. Dale očísloval oriešky číslami od 1 do 2021 a vykopal 2021 dierok do kruhu v zemi okolo ich obľúbeného stromu. Ďalšie ráno si Dale všimol, že Chip umiestnil do každej dierky jeden orech nedbajúc na číslovanie. Nešťastný Dale sa rozhodol oriešky preusporiadať postupnosťou 2021 krokov. V k-tom kroku Dale vymení pozície orechov susedných s orechom k. Dokážte, že existuje taká hodnota k, že v k-tom kroku Dale vymení orechy a a b také, že $a < k < b$.

Úloha 6. Nech $m \geqslant 2$ je dané celé číslo, A je daná konečná množina (nie nutne kladných) celých čísel a $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ sú podmnožiny A. Predpokladajme, že pre každé $k = 1, 2, \ldots, m$ je súčet prvkov množiny B_k rovný m^k. Dokážte, že A obsahuje aspoň $m/2$ prvkov.

Čas: 4 hodiny a 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.