Torek, 23. julij 2013

Naloga 1. Dokaži, da za vsak par naravnih števil k in n obstaja k naravnih števil $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nujno različnih), tako da velja

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Naloga 2. Postavitev 4027 točk v ravnini je *kolumbijska*, če je 2013 točk postavitve rdečih in 2014 točk postavitve modrih in če nobene tri točke postavitve niso kolinearne. Če narišemo nekaj premic v ravnini, razdelimo ravnino na več območij. Razporeditev narisanih premic za kolumbijsko postavitev točk je *dobra*, če sta izpolnjena naslednja dva pogoja:

- na nobeni premici ni nobene izmed točk postavitve;
- v nobenem območju niso točke obeh barv.

Poišči najmanjše število k, tako da za vsako kolumbijsko postavitev 4027 točk obstaja dobra razporeditev k premic.

Naloga 3. Pričrtana krožnica trikotnika ABC nasproti oglišča A se dotika stranice BC v točki A_1. Na enak način definiramo točko B_1 na stranici CA s pomočjo pričrtane krožnice nasproti oglišča B in točko C_1 na stranici AB s pomočjo pričrtane krožnice nasproti oglišča C. Denimo, da središče trikotniku $A_1B_1C_1$ očrtane krožnice leži na očrtani krožnici trikotnika ABC. Dokaži, da je trikotnik ABC pravokoten.

Pričrtana krožnica *trikotnika ABC nasproti oglišča A je krožnica, ki se dotika daljice BC, poltraka AB izven daljice AB in poltraka AC izven daljice AC. Podobno definiramo pričrtani krožnici trikotnika ABC nasproti oglišč B in C.*

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

Sreda, 24. julij 2013

Naloga 4. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC in naj bo W točka na stranici BC, različna od točk B in C. Naj bo M nožišče višine iz oglišča B in naj bo N nožišče višine iz oglišča C. Označimo z ω_1 trikotniku BWN očrtano krožnico in naj bo X taka točka na krožnici ω_1, da je WX premer krožnice ω_1. Podobno označimo z ω_2 trikotniku CWM očrtano krožnico in naj bo Y taka točka na krožnici ω_2, da je WY premer krožnice ω_2. Dokaži, da so točke X, Y in H kolinearne.

Naloga 5. Naj bo $\mathbb{Q}_{>0}$ množica pozitivnih racionalnih števil. Naj bo $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki zadošča naslednjim trem pogojem:

(i) za vse $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ velja $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) za vse $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ velja $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) obstaja tako racionalno število $a > 1$, da je $f(a) = a$.

Dokaži, da je $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Naloga 6. Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Na krožnici je danih $n+1$ točk, ki razdelijo krožnico na loke enakih dolžin. Obravnavamo vsa možna oštevilčenja teh točk s števili $0, 1, \ldots, n$, tako da je vsako število uporabljeno natanko enkrat; dve oštevilčenji sta enaki, če lahko dobimo eno iz drugega z rotacijo krožnice. Oštevilčenje točk je *lepo*, če za vsaka štiri števila tega oštevilčenja $a < b < c < d$, za katera je $a + d = b + c$, tetiva med točkama, oštevilčenima z a in d, ne seka tetive med točkama, oštevilčenima z b in c.

Naj bo M število lepih oštevilčenj in naj bo N število urejenih parov (x, y) naravnih števil, tako da velja $x + y \leq n$ in največji skupni delitelj x in y je 1. Dokaži, da je

$$M = N + 1.$$

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.