



الاثنين 18-7-2011

التمرين 1

لكل مجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ مكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة قطعاً و مختلفة مثنياً، نرمز بـ n_A للمجموع $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ و نرمز بـ s_A لعدد الأزواج (i, j) بحيث $1 \leq i < j \leq 4$

و s_A يقسم $a_i + a_j$.

حدد المجموعات A التي تجعل n_A يأخذ أكبر قيمة ممكنة.

التمرين 2

لتكن S مجموعة منتهية من نقط المستوي وتحتوي على الأقل على نقطتين. نفترض أن كل ثلاثة نقط من S غير مستقيمية . نسمى طاحونة الهواء العملية التالية : تبدأ العملية بمستقيم l يمر ب نقطة وحيدة P من S ، المستقيم l يدور في منحى عقارب الساعة حول النقطة P التي تسمى مركز الدوران حتى يلتقي لأول مرة نقطة أخرى Q من S وتصبح هذه النقطة بدورها مركزاً جديداً للدوران. يستمر المستقيم l بالدوران في منحى عقارب الساعة و لكن ، حول المركز الجديد Q . و تستمر هذه العملية ما لا نهاية من المرات بحيث يكون مركز الدوران دائماً نقطة من S .

بين أنه يمكن اختيار نقطة P من S و مستقيم l بحيث تتمكن الطاحونة الهوائية التي تبدأ بالمستقيم l من أن تستعمل كل نقطة من نقط S كمركز دوران بعدد لا نهائي من المرات (une infinité de fois).

التمرين 3

لتكن f دالة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} بحيث : $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ لكل x و y من \mathbb{R} .
بين أن $f(x) = 0$ لكل عدد حقيقي $x \leq 0$.
 \mathbb{R} يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقة .



الثلاثاء 19-7-2011

التمرين 4

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً قطعاً. لدينا ميزان ذو كفتين و n أوزان ذات الكتل 2^0 و 2^1 و ... و 2^{n-1} . يجب أن نضع جميع الأوزان واحداً تلو الآخر على كفتى الميزان بحيث تكون الكفة اليمنى دائماً أقل وزناً من الكفة اليسرى. من أجل هذا الهدف يجب أن نختار في كل مرحلة من n مراحل وزناً غير موجود على إحدى كفتى الميزان ونضعه على الكفة اليسرى أو اليمنى من الميزان و نستمر هكذا حتى ننتهي من وضع جميع الأوزان.

حدد عدد الطرق الممكنة التي تتمكن من إنجاز هذه المراحل.

التمرين 5

لتكن f دالة من \mathbb{N}^* نحو \mathbb{Z} .
نفترض أنه لكل عددين صحيحين m و n الفرق $f(m) - f(n)$ يقبل القسمة على $f(m-n)$.
بين أنه لكل عددين صحيحين m و n حيث $f(m) \leq f(n)$ العدد $f(n) - f(m)$ يقبل القسمة على $f(m-n)$.
 \mathbb{Z} يرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة و \mathbb{N}^* لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة قطعاً.

التمرين 6

ليكن ABC مثلثاً زواياه حادة و Γ الدائرة المحيطة بهذا المثلث.
ليكن l مستقيماً مماساً للدائرة Γ و لتكن l_a و l_b و l_c هي مماثلات المستقيم l بالنسبة للمستقيمات (AB) و (BC) و (CA) على التوالي.
بين أن الدائرة المحيطة بالمثلث المحدد بالمستقيمات l_a و l_b و l_c مماسة للدائرة Γ .