tirsdag, 16. juli 2024

Oppgave 1. Bestem alle reelle tall α slik at heltallet

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

er en multippel av n for ethvert positivt heltall n. (Merk at $\lfloor z \rfloor$ betegner det største heltallet mindre enn eller lik z. For eksempel har vi $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ og $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Oppgave 2. Bestem alle par (a, b) av positive heltall for hvilke det finnes positive heltall g og N slik at

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

holder for alle heltall $n \geqslant N$. (Merk at $\gcd(x, y)$ betegner den største felles faktoren til x og y.)

Oppgave 3. La $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en uendelig følge av positive heltall, og la N være et positivt heltall. Anta at for enhver $n > N$ er a_n lik antallet ganger verdien a_{n-1} dukker opp i listen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Vis at minst én av følgene $a_1, a_3, a_5, \ldots$ og $a_2, a_4, a_6, \ldots$ blir etter hvert periodisk.

(En uendelig følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ er *etter hvert periodisk* dersom det finnes positive heltall p og M slik at $b_{m+p} = b_m$ for alle $m \geqslant M$.)

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.

onsdag, 17. juli 2024

Oppgave 4. La ABC være en trekant med $AB < AC < BC$. La I betegne innsenteret, og ω innsirkelen til trekanten ABC. La X være punktet på linjen BC forskjellig fra C slik at parallellen til AC gjennom X tangerer ω. På samme måte, la Y være punktet på linjen BC forskjellig fra B slik at parallellen til AB gjennom Y tangerer ω. La AI skjære omsirkelen til trekanten ABC igjen i $P \neq A$. La K og L være midtpunktene på henholdsvis AC og AB.

Vis at $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Oppgave 5. Sneglen Turbo spiller et spill på et brett bestående av 2024 rader og 2023 kolonner. Det finnes skjulte monstre i 2022 av brettets celler. Til å begynne med vet ikke Turbo hvor nøyaktig monstrene befinner seg, men han vet at det befinner seg nøyaktig én i hver rad med unntak av den første og den siste raden, og høyst én i hver kolonne.

Turbo gjør gjentatte forsøk på å komme seg fra den første raden til den siste raden. For hvert forsøk velger han en startcelle i den første raden, og beveger seg deretter gjentatte ganger fra en celle til en nabocelle som den deler en felles side med. (Han har lov til å bevege seg til en celle han har vært i før.) Dersom han beveger seg til en nabocelle der det gjemmer seg et monster, ender Turbos forsøk, og han sendes direkte tilbake til første rad for å starte et nytt forsøk. Monstrene beveger seg ikke, og Turbo husker hvorvidt en tidligere besøkt celle inneholder et monster. Hvis han når en hvilken som helst celle i den siste raden, ender forsøket hans, og spillet er over.

Bestem den minste mulige verdien av n for hvilken Turbo har en strategi som garanterer at han kan nå den siste raden senest på det n-te forsøket, uansett monstrenes plassering.

Oppgave 6. La $\mathbb{Q}$ betegne mengden av rasjonale tall. En funksjon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ kalles *aquaesuliansk* dersom følgende egenskap holder: for alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gjelder minst én av de to likhetene

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{og} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Vis at det finnes et heltall c slik at det for enhver aquaesuliansk funskjon f finnes høyst c forskjellige rasjonale tall på formen $f(r) + f(-r)$ med r rasjonal, og finn den minste mulige verdien av c.

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.