måndag, 11. juli 2022

Problem 1. Oslobanken utfärdar två sorters mynt: aluminium (betecknas A) och brons (betecknas B). Marianne har n aluminiummynt och n bronsmynt, placerade i en rad i godtycklig ordning. Ett *block* är en delföljd av på varandra följande mynt av samma slag. Givet ett fixt positivt heltal $k \leqslant 2n$, Marianne upprepar om och om igen följande operation: hon hittar det längsta blocket som innehåller mynt nummer k räknat från vänster, och flyttar alla mynt i det blocket till början av raden. Till exempel, för $n = 4$ och $k = 4$ blir processen som startar från $AABBBABA$

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Bestäm alla par (n, k) med $1 \leqslant k \leqslant 2n$ sådana att det för varje startordning finns en tidpunkt under processen då de n mynten längst till vänster i raden är av samma slag.

Problem 2. Låt $\mathbb{R}^+$ vara mängden av alla reella positiva tal. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sådana att det för varje $x \in \mathbb{R}^+$ finns exakt ett $y \in \mathbb{R}^+$ för vilket

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problem 3. Låt k vara ett positivt heltal och låt S vara en ändlig mängd av udda primtal. Visa att det finns högst ett sätt (bortsett från rotationer och speglingar) att placera alla element i S på en cirkel på ett sådant sätt att produkten av godtyckligt valda två grannar kan skrivas som $x^2 + x + k$ för något positivt heltal x.

Language: Swedish

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.

tisdag, 12. juli 2022

Problem 4. Låt $ABCDE$ vara en konvex femhörning sådan att $BC = DE$. Antag att det finns en punkt T inuti $ABCDE$ sådan att $TB = TD$, $TC = TE$ och $\angle ABT = \angle TEA$. Låt linjen AB skära linjerna CD och CT i punkterna P respektive Q. Antag att punkterna P, B, A, Q ligger på den gemensamma linjen i precis den ordningen. Låt linjen AE skära linjerna CD och DT i punkterna R respektive S. Antag att punkterna R, E, A, S ligger på den gemensamma linjen i precis den ordningen. Visa att punkterna P, S, Q och R ligger på en cirkel.

Problem 5. Finn alla tripplar (a, b, p) av positiva heltal där p är ett primtal och sådana att

$$a^p = b! + p.$$

Problem 6. Låt n vara ett positivt heltal. En *nordisk kvadrat* är ett $n \times n$ bräde som innehåller alla heltal från 1 till n^2 så att varje ruta innehåller exakt ett tal. Två olika rutor anses gränsa till varandra om de har en gemensam sida. En ruta kallas *dal* om den gränsar enbart till rutor som innehåller större tal. En *väg upp* är en följd av en eller flera rutor sådana att:

(i) den första rutan i följden är en dal,

(ii) varje ruta i följden efter den första gränsar till föregående ruta, och

(iii) talen i rutorna i följden är i växande ordning.

Bestäm, som en funktion av n, det minsta möjliga antalet vägar upp i en nordisk kvadrat.

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
För varje problem kan man få upp till 7 poäng.