Language: **Italian**

Day: **1**

Mercoledì 7 luglio 2010

Problema 1. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota il più grande intero minore o uguale a z.)

Problema 2. Sia I l'incentro del triangolo ABC and sia Γ la sua circonferenza circoscritta. La retta AI interseca Γ nuovamente in D. Sia E un punto sull'arco $\widehat{BDC}$ e F un punto sul lato BC tale che

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \tfrac{1}{2}\,\widehat{BAC}.$$

Infine sia G il punto medio del segmento IF. Dimostrare che le rette DG ed EI si intersecano in un punto di Γ.

Problema 3. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

è un quadrato perfetto per tutti gli $m, n \in \mathbb{N}$.

Tempo: 4 ore e 30 minutis
Ogni problema vale 7 punti

Language: **Italian**

Day: **2**

Giovedì 8 luglio 2010

Problema 4. Sia P un punto interno al triangolo ABC e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Le rette AP, BP e CP intersecano Γ nuovamente nei punti K, L ed M rispettivamente. La retta tangente a Γ in C interseca la retta AB in S. Supponiamo che $SC = SP$. Dimostrare che $MK = ML$.

Problema 5. In ciascuna delle sei scatole $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ c'è inizialmente una moneta. Sono permessi due tipi di operazioni:

Tipo 1: Scegliere una scatola non vuota B_j con $1 \leq j \leq 5$. Togliere una moneta da B_j ed aggiungere due monete a B_{j+1}.

Tipo 2: Scegliere una scatola non vuota B_k con $1 \leq k \leq 4$. Togliere una moneta da B_k e scambiare i contenuti delle scatole (eventualmente vuote) B_{k+1} e B_{k+2}.

Determinare se esiste una successione finita di tali operazioni che porta ad avere le scatole B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vuote e la scatola B_6 con esattamente $2010^{2010^{2010}}$ monete. (Notare che $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una successione di numeri reali positivi. Supponiamo che per un certo intero positivo s si abbia

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

per tutti gli $n > s$. Dimostrare che esistono interi positivi ℓ ed N, con $\ell \leq s$, tali che $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ per tutti gli $n \geq N$.