

*Salı, 23 Temmuz, 2013*

**Soru 1.** Her  $k$  ve  $n$  pozitif tam sayı ikilisi için,

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

eşitliğini sağlayan  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (farklı olmaları gerekmeyen) pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

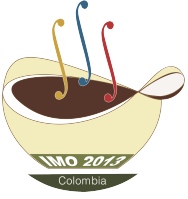
**Soru 2.** Düzlem üzerindeki 4027 noktanın herhangi üçü doğrusal olmayıp, 2013 tanesi kırmızı ve 2014 tanesi mavi ise, bu 4027 noktaya bir *Kolombiya* konfigürasyonu diyelim. Düzlemde çizilen birkaç doğru düzlemi bölgelere ayırır. Bir doğrular kümesi, bir Kolombiya konfigürasyonu için aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, bu küme bu konfigürasyon için *iyi* kabul ediliyor.

- doğrulardan her biri, konfigürasyonun hiçbir noktasından geçmemektedir;
- her iki rengi birden içeren bölge bulunmamaktadır.

4027 noktalı herhangi bir Kolombiya konfigürasyonu verildiğinde, bu konfigürasyon için iyi olan ve  $k$  doğrudan oluşan bir küme bulunuyorsa,  $k$  nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

**Soru 3.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  köşesinin karşısındaki dışteğet çember  $BC$  kenarına  $A_1$  noktasında teğet olsun. Benzer şekilde,  $B$  ve  $C$  köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberleri kullanarak  $CA$  kenarı üzerinde  $B_1$  ve  $AB$  kenarı üzerinde  $C_1$  noktalarını tanımlayalım.  $A_1B_1C_1$  üçgeninin çevrel merkezi  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi üzerinde ise,  $ABC$  üçgeninin bir dik üçgen olduğunu gösteriniz.

*$ABC$  üçgeninin  $A$  köşesinin karşısındaki dışteğet çember;  $BC$  kenarına,  $B$ 'nin ötesinde  $AB$  ışınına ve  $C$ 'nin ötesinde  $AC$  ışınına teğet olan çemberdir.  $B$  ve  $C$  köşelerinin karşısındaki dışteğet çemberler de benzer biçimde tanımlanıyor.*



*Çarşamba, 24 Temmuz, 2013*

**Soru 4.** Diklik merkezi  $H$  olan bir dar açılı  $ABC$  üçgeninde  $W$ ,  $BC$  kenarı üzerinde  $B$  ve  $C$  den farklı bir nokta olsun.  $M$  ve  $N$  noktaları, sırasıyla  $B$  ve  $C$  ye ait yükseklik ayağı olsun.  $BWN$  nin çevrel çemberi  $w_1$  olmak üzere;  $w_1$  üzerinde bir  $X$  noktası,  $[WX]$  doğru parçası  $w_1$  in bir çapı olacak şekilde seçiliyor. Benzer biçimde  $CWM$  nin çevrel çemberi  $w_2$  olmak üzere;  $w_2$  üzerinde bir  $Y$  noktası,  $[WY]$  doğru parçası  $w_2$  nin bir çapı olacak şekilde seçiliyor.  $X, Y$  ve  $H$  noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

**Soru 5.** Pozitif rasyonel sayılar kümesini  $\mathbb{Q}_{>0}$  ile gösterelim. Bir  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlamaktadır:

- (i) her  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  için,  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) her  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  için,  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii)  $f(a) = a$  olacak şekilde bir  $a > 1$  rasyonel sayısı vardır.

Her  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$  için  $f(x) = x$  olduğunu gösteriniz.

**Soru 6.**  $n \geq 3$  bir tam sayı olmak üzere, bir çember üzerinde çemberi eşit yaylara bölen  $n + 1$  nokta işaretlenmiştir.  $0, 1, \dots, n$  sayılarının her biri tam olarak bir kez kullanılarak işaretli noktalara yazılmasına numaralandırma diyelim. Biri diğerinden çemberin döndürülmesi ile elde edilen iki numaralandırma aynı sayılmaktadır. Bir numaralandırmada,  $a + d = b + c$  koşulunu sağlayan her  $a < b < c < d$  için uçlarında  $a$  ve  $d$  yazan kiriş ile uçlarında  $b$  ve  $c$  yazan kiriş kesişmiyorsa, bu numaralandırmaya *güzel* diyelim.

Güzel numaralandırmaların sayısı  $M$ ,  $x + y \leq n$  ve  $\text{obeb}(x, y) = 1$  koşullarını sağlayan  $(x, y)$  pozitif tam sayı sıralı ikiliinin sayısı  $N$  olsun.

$$M = N + 1$$

olduğunu gösteriniz.