*Сейсенбі, 10-шілде, 2012 ж.*

**Есеп 1.** $ABC$ үшбұрышы берілген. $J$ нүктесі $A$ төбесіне сәйкес сырттай-іштей сызылған шеңбердің центрі. Осы сырттай-іштей сызылған шеңбер $BC$ кесіндісін $M$ нүктесінде, ал $AB$ және $AC$ түзулерін сәйкесінше $K$ және $L$ нүктелерінде жанайды. $LM$ және $BJ$ түзулері $F$ нүктесінде, ал $KM$ және $CJ$ түзулері $G$ нүктесінде қиылысады. $S$ – $AF$ және $BC$ түзулерінің, ал $T$ – $AG$ және $BC$ түзулерінің қиылысу нүктелері болсын.

$M$ нүктесі $ST$ кесіндісінің ортасы болатынын дәлелдеңдер.

($ABC$ үшбұрышының $A$ төбесіне сәйкес *сырттай-іштей сызылған шеңбер* деп $BC$ қабырғасын және $AB$ және $AC$ қабырғаларының созындыларын жанайтын шеңберді атаймыз.)

**Есеп 2.** $n \geq 3$ бүтін саны және $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ болатын $a_2, a_3, \ldots, a_n$ оң нақты сандары берілген. Теңсіздікті дәлелдеңдер

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**Есеп 3.** $A$ және $B$ ойыншылары *Өтірікті анықта* деген ойын ойнайды. Бұл ойынның ережесі $k$ және $n$ оң бүтін сандарына байланысты және бұл сандар екі ойыншыға да белгілі.

Ойын басында $A$ ойыншы $x$ және $N$ сандарын $1 \leq x \leq N$ болатындай таңдап алады. $A$ ойыншысы $x$ санын құпияда сақтап, ал $N$ санын $B$ ойыншыға шын айтады. Осыдан кейін $B$ ойыншы $A$ ойыншыға сұрақтар қойып $x$ саны туралы мәлімет алуға тырысады. Сұрақтардың түрлері осындай: әрбір сұрақта $B$ ойыншы өз қалауынша натурал сандардан тұратын $S$ жиынын таңдап (бұл жиын алғашқы сұрақтардың бірінде кездесуі мүмкін), $x$ саны осы жиынға тиісті ме екенін $A$ ойыншыдан сұрайды. Ойыншы $B$ қанша сұрақ қойғысы келсе, сонша сұрақ қоя алады. $B$ ойыншының әр сұрағына $A$ ойыншы *иә* немесе *жоқ* деп бірден жауап беруге тиіс, бірақ қанша рет болса да өтірік жауап беруіне болады; тек қана бір шектеу бар: кез келген $k+1$ қатар келетін жауаптардың ішінде кемінде бір шын жауап болуы тиіс.

$B$ өзі қажет деп санаған сұрақтар қойғаннан кейін элементтер саны $n$-нен көп емес натурал сандардан тұратын $X$ жиынын көрсетуі тиіс. Егер $x$ тиісті $X$ болса, онда ойыншы $B$ жеңеді; басқа жағдайда $B$ жеңіледі. Дәлелдеңдер:

1. Егер $n \geq 2^k$ болса, онда $B$ ойыншының жеңіс стратегиясы бар.
2. Кез келген жеткілікті үлкен $k$ саны үшін, $B$-ның жеңіс стратегиясы жоқ болатындай $n \geq 1.99^k$ бүтін саны табылады.

*Сәрсенбі, 11-шілде, 2012 ж.*

**Есеп 4.** $a+b+c=0$ шартын қанағаттандыратын кез келген бүтін $a$, $b$, $c$ сандары үшін

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

теңдігі орындалатын барлық $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ функцияларын анықтаңдар.
(Мұндағы $\mathbb{Z}$ – бүтін сандар жиыны.)

**Есеп 5.** $\angle BCA=90^\circ$ болатын $ABC$ үшбұрышы берілген, $D$ нүктесі $C$ төбесінен түсірілген биіктіктің табаны. $CD$ кесіндісінің ішінен $X$ нүктесі алынған. $BK=BC$ болатындай $AX$ кесіндісінен $K$ нүктесі алынған. Дәл осылай, $AL=AC$ болатындай $BX$ кесіндісінен $L$ нүктесі алынған. $M$ – $AL$ және $BK$ кесінділерінің қиылысу нүктесі.

$MK=ML$ екенін дәлелдеңдер.

**Есеп 6.**

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1$$

орындалатын $a_1,a_2,\ldots,a_n$ теріс емес бүтін сандар табылатындай барлық натурал $n$ сандарын анықтаңдар.



*Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут*
*Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады*