Italian version

PRIMO GIORNO
25 luglio 2007

Problema 1. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali. Per ogni i $(1 \leq i \leq n)$ definiamo

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

e poniamo

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dimostrare che, per qualsiasi numeri reali $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, si ha

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Dimostrare che esistono dei numeri reali $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tali che in $(*)$ vale l'uguaglianza..

Problema 2. Consideriamo cinque punti A, B, C, D ed E tali che $ABCD$ è un parallelogramma e $BCED$ è un quadrilatero convesso e ciclico. Sia ℓ una retta passante per A. Supponiamo che ℓ intersechi il segmento DC in suo punto interno F e che intersechi la retta BC in G. Supponiamo inoltre che $EF = EG = EC$. Dimostrare che ℓ è la bisettrice dell'angolo $\widehat{DAB}$.

Problema 3. In una gara matematica alcuni concorrenti sono amici. L'amicizia è sempre reciproca. Diciamo che un gruppo di concorrenti è una *clique* se due qualsiasi concorrenti del gruppo sono amici. (In particolare, ogni gruppo con meno di due concorrenti è una clique.) Il numero di membri di una clique viene chiamato la sua *grandezza*. Si sa che in questa gara il massimo delle grandezze delle cliques è pari.
Dimostrare che i concorrenti possono essere disposti in due aule in modo tale che il massimo delle grandezze delle cliques contenute in un'aula sia uguale al massimo delle grandezze delle cliques contenute nell'altra.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Italian version

SECONDO GIORNO
26 luglio 2007

Problema 4. In un triangolo ABC la bisettrice dell'angolo $\widehat{BCA}$ interseca la circonferenza circoscritta in R ($R \neq C$), l'asse di BC in P, e l'asse di AC in Q. Il punto medio di BC è K e il punto medio di AC è L. Dimostrare che i triangoli RPK e RQL hanno la stessa area.

Problema 5. Siano a e b interi positivi tali che $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$. Dimostrare che $a = b$.

Problema 6. Sia n un intero positivo. Si consideri

$$S = \Big\{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\Big\}$$

come un insieme di $(n + 1)^3 - 1$ punti nello spazio tridimensionale.

Determinare il minor numero possibile di piani la cui unione contiene tutti i punti di S ma non contiene $(0, 0, 0)$.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti