Sabtu, 8. Julai 2023

Masalah 1. Tentukan kesemua integer gubahan $n > 1$ yang memenuhi sifat berikut: jika kesemua $d_1, d_2, \ldots, d_k$ adalah pembahagi positif bagi n dengan $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, maka d_i membahagi $d_{i+1} + d_{i+2}$ untuk setiap $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Masalah 2. Andaikan ABC suatu segi tiga bersudut tirus dengan $AB < AC$. Andaikan Ω ialah bulatan lilit bagi ABC. Andaikan S ialah titik tengah bagi lengkuk CB bagi Ω yang mengandungi A. Garis serenjang dari A ke BC bertemu BS pada D dan bertemu Ω lagi pada $E \neq A$. Garis melalui D yang selari dengan BC bertemu dengan garis BE pada L. Tandakan bulatan lilit bagi segi tiga BDL dengan ω. Andaikan ω bertemu Ω semula pada $P \neq B$.
Buktikan garis tangen kepada ω pada P bertemu garis BS pada pembahagi sudut dalam $\angle BAC$.

Masalah 3. Bagi setiap integer $k \geqslant 2$, tentukan semua jujukan tak terhingga integer positif $a_1, a_2, \ldots$ supaya wujud suatu polinomial P dalam bentuk $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, yang $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ialah integer bukan negatif, sehinggakan

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

untuk setiap integer $n \geqslant 1$.

Language: Malay

Masa untuk bekerja: 4 jam 30 minit.
Setiap tugas bernilai 7 mata.

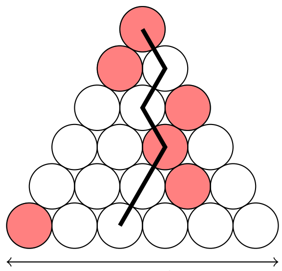
Ahad, 9. Julai 2023

Masalah 4. Andaikan $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ ialah nombor nyata positif yang berbeza secara pasangannya sehinggakan

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

merupakan integer untuk setiap $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Buktikan $a_{2023} \geqslant 3034$.

Masalah 5. Andaikan n ialah integer positif. Suatu segi tiga Jepun terdiri daripada $1+2+\cdots+n$ bulatan yang disusun dalam bentuk segi tiga sama sisi sehinggakan untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, baris ke-i mengandungi tepat i bulatan, tepat satu daripada bulatan tersebut berwarna merah. Suatu laluan ninja dalam segi tiga Jepun ialah suatu jujukan n bulatan yang diperolehi dengan bermula daripada baris teratas, kemudiannya bergerak dari suatu bulatan ke salah satu daripada dua bulatan betul-betul di bawahnya secara berulang kali, dan berakhir di barisan paling bawah. Rajah di bawah menunjukkan contoh satu segi tiga Jepun dengan $n = 6$, berserta dengan satu laluan ninja dalam segi tiga tersebut yang mengandungi dua bulatan merah.



$n = 6$

Dalam sebutan n, cari nilai terbesar bagi k sehinggakan bagi setiap segi tiga Jepun wujud laluan ninja yang mengandungi sekurang-kurangnya k bulatan merah.

Masalah 6. Andaikan ABC suatu segi tiga sama sisi. Andaikan A_1, B_1, C_1 ialah titik-titik dalam ABC sehinggakan $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, dan

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Andaikan BC_1 dan CB_1 bertemu di A_2, andaikan CA_1 dan AC_1 bertemu di B_2 dan andaikan AB_1 dan BA_1 bertemu di C_2.
Buktikan jika segi tiga $A_1B_1C_1$ ialah segi tiga tak sama kaki, maka tiga bulatan-bulatan lilitan bagi segi-segi tiga AA_1A_2, BB_1B_2 dan CC_1C_2 semuanya melalui dua titik sepunya.

(Nota: Satu segi tiga tak sama kaki ialah segi tiga yang tidak mempunyai dua sisi yang sama panjang.)

Language: Malay

Masa untuk bekerja: 4 jam 30 minit.
Setiap tugas bernilai 7 mata.