Mánudagur, 9. júlí, 2018

Dæmi 1. Látum Γ vera umritaðan hring hvasshyrnda þríhyrningsins ABC. Punktar D og E liggja á strikunum AB og AC, þannig að $|AD| = |AE|$. Miðþverlar BD og CE skera minni bogana AB og AC í Γ í punktunum F og G. Sannið að línurnar DE og FG séu samsíða (eða sama línan).

Dæmi 2. Finnið allar heiltölur $n \geq 3$ þannig að til séu rauntölur $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ þannig að $a_{n+1} = a_1$ og $a_{n+2} = a_2$ og

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

fyrir $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dæmi 3. *Anti-Pascal þríhyrningur* er listi af tölum röðuðum í jafnhliða þríhyrning þannig að, alls staðar fyrir utan neðstu línunna, sérhver tala sé tölugildið af mismuni talnanna tveggja næst fyrir neðan hana. Til dæmis er eftirfarandi listi anti-Pascal þríhyrningu með fjórar raðir sem inniheldur allar heiltölur frá 1 to 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Er til anti-Pascal þríhyrningur með 2018 raðir sem inniheldur allar heiltölurnar frá 1 upp í $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er 7 stiga virði

Þriðjudagur, 10. júlí, 2018

Dæmi 4. *Staðsetning* er einhver punktur (x, y) í sléttunni þannig að x og y séu bæði jákvæðar heiltölur minni en eða jafnar 20.

Í upphafi eru allar 400 staðsetningarnar tómar. Anna og Birna skiptast á að leggja niður steina og Anna byrjar. Þegar Anna á leik leggur hún rauðan stein á tóma staðsetningu þannig að fjarlægðin milli engra tveggja staðsetninga sem innihalda rauðan steina sé jöfn $\sqrt{5}$. Þegar Birna á leik leggur hún bláan stein á einhvern tóman reit. (Staðsetning sem inniheldur bláan stein má vera í hvaða fjarlægð sem er frá staðsetningu sem inniheldur stein.) Þær hætta um leið og önnur þeirra getur ekki lagt niður stein.

Finnið stærsta K þannig að Anna geti tryggt að hún geti komið fyrir að minnista kosti K rauðum steinum óháð því hverning Birna leggur niður bláu steinana sína.

Dæmi 5. Látum $a_1, a_2, \ldots$ vera óendanlega runu af jákvæðum heiltölum. Gerum ráð fyrir að til sé heiltala $N > 1$ þannig að fyrir sérhvert $n \geq N$ sé talan

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

heiltala. Sannið að til sé jákvæð heiltala M þannig að $a_m = a_{m+1}$ fyrir öll $m \geq M$.

Dæmi 6. Úthyrndur ferhyrningur $ABCD$ uppfyllir $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Punktur X liggur innan $ABCD$ þannig að

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{og} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Sannið að $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.