ponedjeljak, 19. juli 2021

Zadatak 1 Neka je $n \geqslant 100$ prirodan broj. Ivan zapisuje svaki od brojeva $n, n+1, \ldots, 2n$ na različitu kartu. Nakon toga, on izmiješa tih $n+1$ karata i podijeli ih u dvije grupe. Dokazati da se bar u jednoj od tih grupa nalaze dvije karte takve da je zbir brojeva napisanih na njima potpun kvadrat.

Zadatak 2 Dokazati da nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

vrijedi za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$.

Zadatak 3 Data je tačka D u unutrašnjosti oštrouglog trougla ABC u kojem je $AB > AC$ takva da vrijedi $\angle DAB = \angle CAD$. Tačka E je na duži AC takva da je $\angle ADE = \angle BCD$, tačka F je na duži AB takva da je $\angle FDA = \angle DBC$, a tačka X na pravoj AC takva da vrijedi $CX = BX$. Neka su O_1 i O_2 centri opisanih kružnica trouglova ADC i EXD, redom. Dokazati da se prave BC, EF i O_1O_2 sijeku u jednoj tački.

Language: Bosnian

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

utorak, 20. juli 2021

Zadatak 4 Neka je Γ kružnica sa centrom u tački I i neka je $ABCD$ konveksni četvorougao takav da svaka od duži AB, BC, CD i DA dodiruje kružnicu Γ. Neka je Ω kružnica opisana oko trougla AIC. Produžetak stranice BA preko A siječe kružnicu Ω u tački X, a produžetak stranice BC preko C siječe kružnicu Ω u tački Z. Produžeci stranica AD i CD preko tačke D sijeku kružnicu Ω u tačkama Y i T, redom. Dokazati da vrijedi

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Zadatak 5 Dvije vjeverice, Grmko i Skočko, skupile su 2021 orah za zimu. Skočko je numerisao orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 rupu poredanu u krug oko njihovog omiljenog drveta. Sljedećeg jutra Skočko je primjetio da je Grmko smjestio po jedan orah u svaku od rupa, ali da nije obraćao pažnju na numerisanje. Nesrećan zbog toga, Skočko je odlučio da prerasporedi orahe izvodeći niz od 2021 poteza. U k-tom potezu, Skočko mijenja pozicije dva oraha koji su susjedni orahu numerisanom brojem k. Dokazati da postoji k takvo da u k-tom potezu Skočko mijenja orahe numerisane brojevima a i b za koje vrijedi da je $a < k < b$.

Zadatak 6 Neka je $m \geqslant 2$ prirodan broj, A konačan skup cijelih brojava (ne obavezno pozitivnih) i neka su $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ neki podskupovi skupa A. Pretpostavimo da je, za svako $k = 1, 2, \ldots, m$, suma elemenata skupa B_k jednaka m^k. Dokazati da skup A sadrži barem $m/2$ elemenata.

Language: Bosnian

Vrijeme za izradu: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.