Շաբաթ, 8. հուլիսի 2023

Խնդիր 1. Դիցուք $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ թվերը $n > 1$ բնական թվի բոլոր բաժանարարներն են: Գտնել բոլոր n բաղադրյալ թվերը, որ ցանկացած $1 \leqslant i \leqslant k-2$ ինդեքսի համար $d_{i+1} + d_{i+2}$ արտահայտության արժեքն առանց մնացորդի բաժանվում է d_i–ի:

Խնդիր 2. Դիցուք Ω–ն ABC սուրանկյուն եռանկյանն ($AB < AC$) արտագծած շրջանագիծն է: Դիցուք S–ը A–ն պարունակող Ω շրջանագծի CB աղեղի միջնակետն է: Դիցուք A կետից BC–ին տարված ուղղահայացը BS–ը հատում է D կետում, իսկ Ω շրջանագիծը՝ $E \neq A$ կետում: Դիցուք D կետից BC–ին տարված զուգահեռ ուղիղը BE ուղիղը հատում է L կետում:. Դիցուք BDL եռանկյանն արտագծած ω շրջանագիծը Ω շրջանագիծը հատում է $P \neq B$ կետում: Ապացուցել, որ P կետով անցնող ω շրջանագծի շոշափողը և BS ուղղի հատման կետը գտնվում է $\angle BAC$-ի ներքին անկյան կիսորդի վրա:

Խնդիր 3. Տրված $k \geqslant 2$ բնական թվի համար գտնել բոլոր $a_1, a_2, \ldots$ անվերջ հաջորդականությունները, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ոչ-բացասական, ամբողջ գործակիցներով $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ բազմանդամ, որ ցանկացած $n \geqslant 1$ բնական թվի համար տեղի ունի

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

հավասարությունը:

Language: Armenian *Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե.*
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր.

Armenian (arm), day 2

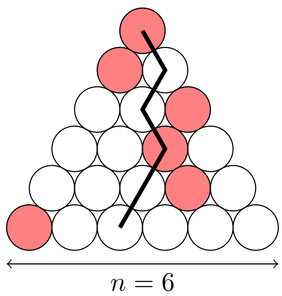
Կիրակի, 9. հուլիսի 2023

Խնդիր 4. Դիցուք $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ իրական թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են և դրական: Հայտնի է, որ ցանկացած $n = 1, 2, \ldots, 2023$ բնական թվերի համար

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

բնական թիվ է: Ապացուցել, որ $a_{2023} \geqslant 3034$.

Խնդիր 5. Դիցուք տրված է n բնական թիվը: *Ճապոնական եռանկյունը* $1+2+\cdots+n$ շրջանագծերից բաղկացած հավասարասրուն եռանկյան նման աշտարակ է, որի i-րդ տողում ($i = 1, 2, \ldots, n$) կա ճիշտ i շրջանագիծ, որոնցից միայն մեկը ներկված է կարմիր: *(Ջիբայի ճանապարհը* ճապոնական եռանկյան n շրջանագծերի ճանապարհ է, որը սկսվում է ամենավերևի տողի շրջանագծից և իջնում ներքև, ամեն անգամ ներքևից շոշափող շրջանագծերից մեկը: Ջիբայի ճանապարհին ավարտվում է ներքևի տողում: Նկարում պատկերված է $n = 6$ դեպքին համապատասխանող ճապոնական աշտարակ և 2 կարմիր շրջանագիծ պարունակող Ջիբայի ճանապարհի:



Տրված n-ի համար գտնել k-ի ամենամեծ հնարավոր արժեքը, որ ցանկացած ճապոնական աշտարակում կգտնվի առնվազն k կարմիր շրջանագիծ պարունակող Ջիբայի ճանապարհ:

Խնդիր 6. Դիցուք ABC հավասարակողմ եռանկյան ներքին տիրույթում նշել են A_1, B_1, C_1 կետերն այնպես, որ $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ և

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ:$$

Դիցուք BC_1 և CB_1 ուղիղները հատվում են A_2 կետում, CA_1 և AC_1 ուղիղները՝ B_2 կետում, իսկ AB_1 և BA_1 ուղիղները՝ C_2 կետում:

Ապացուցել, որ եթե $A_1B_1C_1$ եռանկյունը հավասարասրուն չէ, ապա գոյություն ունեն իրարից տարբեր երկու կետ, որ AA_1A_2, BB_1B_2 և CC_1C_2 եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերն անցնում են այդ երկու կետերով:

Language: Armenian *Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե.*

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր.