



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Icelandic (ice), day 1

laugardagur, 8. júlí 2023

Dæmi 1. Ákvarðið allar samsettar heiltölur $n > 1$ sem uppfylla eftirfarandi: ef d_1, d_2, \dots, d_k eru allir jákvæðir deilar n með $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ þá gengur d_i upp í $d_{i+1} + d_{i+2}$ fyrir sérhvert $1 \leq i \leq k - 2$.

Dæmi 2. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $AB < AC$. Látum Ω vera umritaðan hring ABC . Látum S vera miðpunkt bogans CB í Ω sem inniheldur A . Þverill BC í gegnum A sker BS í D og sker Ω aftur í $E \neq A$. Línan í gegnum D samsíða BC sker línuna BE í L . Táknnum umritaðan hring þríhyrningsins BDL með ω . Látum ω skera Ω aftur í $P \neq B$. Sannið að snertill ω í P skeri línuna BS á helmingalínu hornsins $\angle BAC$.

Dæmi 3. Fyrir sérhverja heiltölu $k \geq 2$ ákvarðið allar óendanlegar runur af jákvæðum heiltölum a_1, a_2, \dots þannig að til sé margliða P á forminu $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ þar sem c_0, c_1, \dots, c_{k-1} eru ekki neikvæðar heiltölur þannig að

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

fyrir allar heiltölur $n \geq 1$.



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Icelandic (ice), day 2

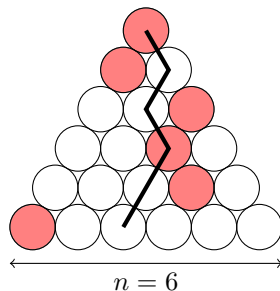
sunnudagur, 9. júlí 2023

Dæmi 4. Látum $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ vera jákvæðar rauntölur, ólíkar tvær og tvær, þannig að

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

sé heiltala fyrir sérhvert $n = 1, 2, \dots, 2023$. Sannið að $a_{2023} \geq 3034$.

Dæmi 5. Látum n vera jákvæða heiltölu. *Japanskur þríhyrningur* samanstendur af $1 + 2 + \dots + n$ hringjum röðuðum í jafnhliða þríhyrning þannig að fyrir sérhvert $i = 1, 2, \dots, n$ inniheldur i -ta línan nákvæmlega i hringi og nákvæmlega einn þeirra er litaður rauður. *Ninjuleið* í japönskum þríhyrningi er runa af n hringjum sem fæst með því að byrja í efstu línu og svo endurtekið farið úr hringnum í annan hringjanna næst fyrir neðan þar til endað er í neðstu línu. Hér er dæmi um japanskan þríhyrning með $n = 6$ ásamt ninjuleið sem inniheldur tvo rauða hringi.



Finnið stærsta k sem fall af n þannig að fyrir sérhvern japanskan þríhyrning sé til ninjuleið sem inniheldur að minnsta kosti k rauða hringi.

Dæmi 6. Látum ABC vera jafnhliða þríhyrning. Látum A_1, B_1, C_1 vera innri punkta ABC þannig að $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ og

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Látum BC_1 skera CB_1 í A_2 , látum CA_1 skera AC_1 í B_2 og látum AB_1 skera BA_1 í C_2 .

Sannið að ef þríhyrningurinn $A_1B_1C_1$ hefur engar tvær hliðar jafn langar þá skerist umrituðu hringir AA_1A_2 , BB_1B_2 og CC_1C_2 allir í tveimur punktum.