Понедельник, 11 июля 2016 года

Задача 1. Дан треугольник BCF с прямым углом при вершине B. Точка A на прямой CF такова, что $FA = FB$ и F лежит между A и C. Точка D выбрана так, что $DA = DC$ и AC — биссектриса угла DAB. Точка E выбрана так, что $EA = ED$ и AD — биссектриса угла EAC. Точка M — середина отрезка CF. Пусть точка X такова, что $AMXE$ — параллелограмм (в котором $AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Докажите, что прямые BD, FX и ME пересекаются в одной точке.

Задача 2. Найдите все положительные целые n, для которых в каждую клетку таблицы $n \times n$ можно записать ровно одну из букв I, M или O так, что:

- в каждой строке и в каждом столбце ровно треть составляют буквы I, ровно треть составляют буквы M, и ровно треть составляют буквы O;   а также
- на каждой из диагоналей, количество клеток которой кратно трём, ровно треть составляют буквы I, ровно треть составляют буквы M, и ровно треть составляют буквы O.

Примечание: Если строки и столбцы таблицы $n \times n$ занумерованы числами от 1 до n в обычном порядке, то каждой клетке соответствует пара положительных целых чисел (i, j), где $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Для $n > 1$ в таблице суммарно есть $4n - 2$ *диагоналей* двух типов. Любая диагональ первого типа состоит из клеток (i, j), для которых сумма $i + j$ постоянна, а любая диагональ второго типа состоит из клеток (i, j), для которых разность $i - j$ постоянна.

Задача 3. Пусть $P = A_1A_2 \ldots A_k$ — выпуклый многоугольник на плоскости. Вершины A_1, A_2, $\ldots$, A_k имеют целые координаты и лежат на одной окружности. Обозначим через S площадь многоугольника P. Нечётное положительное целое n таково, что квадраты длин всех сторон многоугольника P являются целыми числами, делящимися на n. Докажите, что $2S$ — целое число, делящееся на n.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Вторник, 12 июля 2016 года

Задача 4. Назовём множество, состоящее из положительных целых чисел, *хрупким*, если оно состоит не менее, чем из двух элементов, и каждый его элемент имеет общий простой делитель хотя бы с одним из остальных элементов этого множества. Пусть $P(n) = n^2 + n + 1$. Найдите наименьшее положительное целое b, для которого найдётся неотрицательное целое a такое, что множество

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

является хрупким.

Задача 5. На доске записано уравнение

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-2016) = (x-1)(x-2)\ldots(x-2016).$$

Таким образом, в каждой его части записано по 2016 линейных сомножителей. Найдите наименьшее возможное значение k, при котором можно стереть ровно k из этих 4032 линейных сомножителей так, чтобы в каждой части осталось хотя бы по одному из сомножителей и получившееся уравнение не имело вещественных корней.

Задача 6. На плоскости расположено $n \geqslant 2$ отрезков так, что любые два из них пересекаются по внутренней точке, а никакие три из них не имеют общей точки. Иван выбирает один из концов каждого отрезка и сажает в него лягушку лицом к другому концу этого отрезка. Затем он $n-1$ раз хлопает в ладоши. При каждом хлопке каждая из лягушек немедленно прыгает вперёд в следующую точку пересечения на её отрезке. Лягушки никогда не меняют направления своих прыжков. Иван хочет изначально рассадить лягушек так, чтобы никакие две из них никогда не оказались в одной точке пересечения одновременно.

(a) Докажите, что Иван всегда может добиться желаемого, если n нечётно.

(b) Докажите, что Иван никогда не сможет достичь желаемого, если n чётно.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов