

Mandag d. 9. juli 2018

**Opgave 1.** Lad  $\Gamma$  være den omskrevne cirkel til en spidsvinklet trekant  $ABC$ . Punkterne  $D$  og  $E$  ligger på henholdsvis linjestykket  $AB$  og linjestykket  $AC$  så  $|AD| = |AE|$ . Midtnormalerne til  $BD$  og  $CE$  skærer de korteste af cirkelbuerne  $AB$  og  $AC$  i  $\Gamma$  i henholdsvis punktet  $F$  og punktet  $G$ . Vis at linjerne  $DE$  og  $FG$  er parallelle eller sammenfaldende.

**Opgave 2.** Bestem alle hele tal  $n \geq 3$  for hvilke der findes reelle tal  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  så  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  og

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

for  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Opgave 3.** En *anti-Pascal trekant* er en opstilling af tal formet som en ligebenet trekant så hvert tal er den numeriske værdi af forskellen på de to tal umiddelbart under tallet, med undtagelse af tallene i den nederste række. For eksempel er følgende en anti-Pascal trekant med fire rækker som indeholder hvert heltal fra 1 til 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Findes der en anti-Pascal trekant med 2018 rækker som indeholder hvert heltal fra 1 til  $1 + 2 + \dots + 2018$ ?

*Tirsdag d. 10. juli 2018*

**Opgave 4.** En *plads* er et punkt  $(x, y)$  i planen så  $x$  og  $y$  begge er positive hele tal mindre end eller lig med 20.

Til at starte med er hver af de 400 pladser tomme. Alma og Bertha skiftes til at placere en sten, og Alma starter. Når det er Almas tur, placerer hun en ny rød sten på en tom plads så afstanden mellem to vilkårlige pladser med røde sten ikke er lig med  $\sqrt{5}$ . Når det er Berthas tur, placerer hun en ny blå sten på en tom plads. (En plads med en blå sten kan være i en vilkårlig afstand til alle andre optagede pladser.) De stopper så snart en af dem ikke kan placere en sten.

Bestem det største tal  $K$  så Alma med sikkerhed kan placere  $K$  røde sten ligegyldigt hvordan Bertha lægger sine blå sten.

**Opgave 5.** Lad  $a_1, a_2, \dots$  være en uendelig følge af positive hele tal. Antag at der findes et helt tal  $N > 1$  så der for hvert  $n \geq N$  gælder at tallet

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

er et helt tal. Vis at der findes et positivt helt tal  $M$  så  $a_m = a_{m+1}$  for alle  $m \geq M$ .

**Opgave 6.** En konveks firkant  $ABCD$  opfylder at  $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ . Et punkt  $X$  ligger i det indre af firkant  $ABCD$  så

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{og} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Vis at  $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ .