Tirsdag d. 23. juli 2013

Opgave 1. Vis at der for hvert par af positive heltal k og n findes k positive heltal $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (som ikke nødvendigvis er forskellige) så

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Opgave 2. En konfiguration af 4027 punkter i planen kaldes *colombiansk* hvis den består af 2013 røde punkter og 2014 blå punkter, og der ikke er tre punkter i konfigurationen som ligger på linje. Ved at tegne linjer inddeles planen i flere områder. Et arrangement af linjer kaldes *godt* for en colombiansk konfiguration hvis følgende to betingelser er opfyldt:

- ingen linje går gennem noget punkt i konfigurationen,
- intet område dannet af linjerne indeholder punkter af begge farver.

Find den mindste værdi af k så der for hver colombianske konfiguration med 4027 punkter findes et godt arrangement af k linjer.

Opgave 3. Lad den ydre røringscirkel til trekant ABC modsat vinkel A tangere siden BC i punktet A_1. Definer punktet B_1 på siden CA og punktet C_1 på siden AB tilsvarende ved at benytte de ydre røringscirkler modsat henholdsvis B og C. Antag at centrum for den omskrevne cirkel til trekant $A_1B_1C_1$ ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC. Vis at trekant ABC er retvinklet.

Den ydre røringscirkel *til trekant ABC modsat vinkel A er cirklen som er tangent til linjestykket BC, til forlængelsen af linjestykket AB tættest på B og til forlængelsen af linjestykket AC tættest på C. De ydre røringscirkler modsat B og C er defineret tilsvarende.*

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 points.

Onsdag d. 24. juli 2013

Opgave 4. Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor H er højdernes skæringspunkt, og lad W være et punkt på siden BC forskelligt fra B og C. Punkterne M og N er fodpunkterne for højderne fra henholdsvis B og C. Lad ω_1 være den omskrevne cirkel til trekant BWN, og lad X være punktet på ω_1 så WX er diameter i ω_1. Lad tilsvarende ω_2 være den omskrevne cirkel til trekant CWM, og lad Y være punktet på ω_2 så WY er diameter i ω_2. Vis at punkterne X, Y og H ligger på linje.

Opgave 5. Lad $\mathbb{Q}_{>0}$ være mængden af alle positive rationale tal. Lad $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ være en funktion som opfylder at

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ for alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$,

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$,

(iii) der findes et rationalt tal $a > 1$ så $f(a) = a$.

Vis at $f(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Opgave 6. Lad $n \geq 3$ være et helt tal, og betragt en cirkel hvor der er markeret $n+1$ punkter jævnt fordelt på cirklen. Betragt nu alle nummereringer af punkterne med numrene $0, 1, \ldots, n$ så hvert nummer benyttes netop en gang. To nummereringer betragtes som ens hvis den ene fremkommer af den anden ved en rotation af cirklen. En nummerering kaldes *smuk* hvis der for vilkårlige fire numre $a < b < c < d$ med $a + d = b + c$ gælder at korden som forbinder punkterne nummereret a og d, ikke skærer korden som forbinder punkterne nummereret b og c.

Lad M være antallet af smukke nummereringer, og lad N være antallet af ordnede par (x, y) af positive heltal så $x + y \leq n$ og $\gcd(x, y) = 1$. Vis at

$$M = N + 1.$$

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 points.