Τετάρτη , 7 Ιουλίου 2010

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : R \to R$, όπου R το σύνολο των πραγματικών αριθμών, που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

για κάθε $x, y \in R$. (Εδώ με το σύμβολο $[z]$ σημειώνουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του z.)

Πρόβλημα 2. Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ABC και έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Έστω ότι η ευθεία AI τέμνει ξανά τον κύκλο Γ στο σημείο D. Έστω E ένα σημείο του τόξου BDC και F ένα σημείο πάνω στην πλευρά BC έτσι ώστε

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC .$$

Τέλος, έστω G το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος IF. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DG και EI τέμνονται πάνω στον κύκλο Γ.

Πρόβλημα 3. Έστω N^* το σύνολο των θετικών ακέραιων. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $g : N^* \to N^*$ που είναι τέτοιες ώστε ο αριθμός

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

είναι τέλειο τετράγωνο, για κάθε $m, n \in N^*$.

Language: Greek

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Language: **Greek**

Day: **2**

Πέμπτη, 8 Ιουλίου 2010

Πρόβλημα 4. Έστω P σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου ABC. Οι ευθείες AP, BP και CP τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο Γ του τριγώνου ABC ξανά στα σημεία K, L και M, αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου Γ στο σημείο C τέμνει την ευθεία AB στο σημείο S. Υποθέτουμε ότι $SC = SP$. Να αποδείξετε ότι $MK = ML$.

Πρόβλημα 5. Σε καθένα από έξι κουτιά $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ υπάρχει αρχικά ένα κέρμα. Υπάρχουν δύο δυνατοί τύποι επιτρεπόμενων πράξεων:

Τύπος 1: Επιλέγουμε ένα μη κενό κουτί B_j με $1 \le j \le 5$. Αφαιρούμε ένα κέρμα από το κουτί B_j και προσθέτουμε δύο κέρματα στο κουτί B_{j+1}.

Τύπος 2: Επιλέγουμε ένα μη κενό κουτί B_k με $1 \le k \le 4$. Αφαιρούμε ένα κέρμα από το κουτί B_k και ανταλλάσσουμε τα περιεχόμενα των κουτιών (που δυνατόν να είναι και κενά) B_{k+1} και B_{k+2}.

Να εξετάσετε αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία τέτοιων πράξεων η οποία να έχει ως αποτέλεσμα τα κουτιά B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 να είναι κενά και το κουτί B_6 να περιέχει ακριβώς $2010^{2010^{2010}}$ κέρματα. (Σημειώνουμε ότι $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$.)

Πρόβλημα 6. Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι για κάποιο θετικό ακέραιο s, έχουμε ότι

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \,\middle|\, 1 \le k \le n-1\right\}$$

για κάθε $n > s$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ℓ και N, με $\ell \le s$, τέτοιοι ώστε $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$, για κάθε $n \ge N$.

Language: Greek

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες