Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום שלישי, 23 ביולי, 2013

שאלה 1. הוכח כי לכל זוג מספרים שלמים חיוביים k ו-n, קיימים k מספרים שלמים חיוביים $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (לא בהכרח שונים) כך שמתקיים

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

שאלה 2. קונפיגורציה של 4027 נקודות במישור נקראת **קולומביאנית** אם היא מורכבת מ-2013 נקודות אדומות ו-2014 נקודות כחולות, ואף שלוש נקודות בקונפיגורציה אינן על ישר אחד. מעבירים מספר ישרים, אשר מחלקים את המישור למספר אזורים. אוסף של ישרים נקרא **טוב** עבור קונפיגורציה קולומביאנית מסוימת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- אף ישר אינו עובר דרך אף נקודה בקונפיגורציה;
- אף אזור לא מכיל נקודות משני הצבעים.

מצא את הערך הקטן ביותר של k עבורו לכל קונפיגורציה קולומביאנית של 4027 נקודות, קיים אוסף טוב של k ישרים.

שאלה 3. המעגל החסום מבחוץ של משולש ABC המנוגד לקדקוד A משיק לצלע BC בנקודה A_1. הנקודות B_1 על CA ו-C_1 על AB מוגדרות בצורה דומה, באמצעות המעגלים המשיקים מבחוץ המנוגדים ל-B ול-C בהתאמה. נניח כי מרכז המעגל החוסם של משולש $A_1B_1C_1$ נמצא על המעגל החוסם של משולש ABC. הוכח כי ABC הינו משולש ישר-זווית.

*המעגל **החסום מבחוץ** המנוגד לקדקוד A הינו המעגל המשיק לצלע BC ולהמשכי הצלעות AC ו-AB. המעגלים החסומים מבחוץ המנוגדים ל-B ול-C מוגדרים באופן דומה.*

יום רביעי, 24 ביולי, 2013

שאלה 4. תהא H נקודת חיתוך הגבהים של משולש חד-זוויות ABC, ותהא W נקודה פנימית בקטע BC. הנקודות M ו-N הן עקבי הגבהים מ-B ומ-C, בהתאמה. נסמן ב-ω_1 את המעגל החוסם של BWN, ונסמן ב-X את הנקודה על ω_1 כך ש-WX הינו קוטר של ω_1. באופן דומה, נסמן ב-ω_2 את המעגל החוסם של CWM, ונסמן ב-Y את הנקודה על ω_2 כך ש-WY הינו קוטר של ω_2. הוכח כי הנקודות X, Y ו-H הינן על ישר אחד.

שאלה 5. תהא $\mathbb{Q}_{>0}$ קבוצת המספרים הרציונליים החיוביים. תהא $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

(i) לכל $x, y\in\mathbb{Q}_{>0}$, מתקיים $f(x)f(y)\geq f(xy)$;

(ii) לכל $x, y\in\mathbb{Q}_{>0}$, מתקיים $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$;

(iii) קיים מספר רציונלי $a>1$ עבורו $f(a)=a$.

הוכח כי $f(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{Q}_{>0}$.

שאלה 6. יהא $n\geq 3$ מספר שלם, ונתבונן במעגל שעליו ממוקמות $n+1$ נקודות במרווחים שווים. נתבונן בכל הדרכים לסמן את הנקודות באמצעות המספרים $0,1,\ldots,n$ כך שכל מספר מופיע בדיוק פעם אחת. שני סימונים נחשבים זהים, אם אחד מתקבל מהשני על ידי סיבוב של המעגל. סימון נקרא **יפהפה** אם לכל ארבעה מספרים $a<b<c<d$ המקיימים $a+d=b+c$, המיתר המחבר את הנקודות המסומנות a ו-d לא נחתך עם המיתר המחבר את הנקודות המסומנות b ו-c.

נסמן ב-M את מספר הסימונים היפהפיים, ונסמן ב-N את מספר הזוגות הסדורים של שלמים חיוביים (x,y) המקיימים $x+y\leq n$ וכן $\gcd(x,y)=1$. הוכח כי

$M=N+1$.