Pátek, 10. července, 2015

Úloha 1. Konečnou množinu $\mathcal{S}$ bodů v rovině nazveme *vyváženou*, jestliže pro libovolné dva různé body A a B z $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ takový bod C, že $|AC| = |BC|$. Množinu $\mathcal{S}$ nazveme *středuprostou*, jestliže pro žádné tři různé body A, B a C z $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ bod P takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě n bodů.

(b) Určete všechna přirozená čísla $n \geqq 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě n bodů.

Úloha 2. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných celých čísel, pro něž každé z čísel

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

je mocninou 2.

(*Mocnina* 2 *je celé číslo tvaru* 2^n, *kde* n *je nezáporné celé číslo.*)

Úloha 3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$. Označme Γ kružnici mu opsanou, H jeho průsečík výšek a F patu výšky z vrcholu A. Střed strany BC označme M. Nechť Q je bod kružnice Γ takový, že $|\sphericalangle HQA| = 90°$, a K bod kružnice Γ takový, že $|\sphericalangle HKQ| = 90°$. Předpokládejme, že body A, B, C, K a Q jsou navzájem různé a leží na kružnici Γ v tomto pořadí.

Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům KQH a FKM se vzájemně dotýkají.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů

Sobota, 11. července, 2015

Úloha 4. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice Ω o středu O. Přitom kružnice Γ se středem A protne úsečku BC v bodech D a E takových, že body B, D, E a C jsou různé a leží na přímce BC v tomto pořadí. Kružnice Γ a Ω se protínají v bodech F a G, přičemž body A, F, B, C a G leží na kružnici Ω v tomto pořadí. Označme K další průsečík kružnice opsané trojúhelníku BDF s úsečkou AB a L další průsečík kružnice opsané trojúhelníku CGE s úsečkou CA.

Předpokládejme dále, že přímky FK a GL jsou různé a protínají se v bodě X. Dokažte, že bod X leží na přímce AO.

Úloha 5. Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jež splňují rovnici

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

pro všechna reálná čísla x a y.

Úloha 6. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel vyhovuje následujícím podmínkám:

(i) $1 \leqq a_j \leqq 2\,015$ pro každé $j \geqq 1$;

(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ pro všechna k a l taková, že $1 \leqq k < l$.

Dokažte, že existují dvě kladná celá čísla b a N taková, že

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqq 1\,007^2$$

pro všechna celá čísla m a n splňující $n > m \geqq N$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů