วันอังคารที่ ๑๘ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

โจทย์ข้อ ๑. สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $a_0 > 1$ นิยามลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ โดย

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{หาก } \sqrt{a_n} \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ a_n + 3 & \text{ในกรณีอื่นๆ} \end{cases} \qquad \text{สำหรับแต่ละ } n \geqslant 0$$

จงหาค่า a_0 ทั้งหมดที่ทำให้ มีค่า A ค่าหนึ่ง และค่า n มากมายไม่จำกัด โดยที่ $a_n = A$

โจทย์ข้อ ๒. ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่ทำให้

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

โจทย์ข้อ ๓. กระต่ายล่องหนและพรานสาวเล่นเกมบนระนาบยุคลิด จุด A_0 ที่เป็นจุดเริ่มต้นของกระต่าย และ จุด B_0 ที่เป็นจุดเริ่มต้นของพราน เป็นจุดเดียวกัน หลังการเล่นเกมรอบที่ $n-1$ กระต่ายอยู่ที่จุด A_{n-1} และพรานอยู่ที่จุด B_{n-1} ในรอบที่ n สามเหตุการณ์ต่อไปนี้จะเกิดขึ้นตามลำดับ

(i) กระต่ายย้ายที่อย่างมองไม่เห็นไปยังจุด A_n โดยที่ระยะทางระหว่าง A_{n-1} และ A_n เท่ากับ 1 พอดี

(ii) เครื่องสะกดรอยรายงานจุด P_n ให้กับพราน สิ่งเดียวที่เครื่องสะกดรอยรับประกันได้ คือ ระยะทางระหว่าง P_n และ A_n มีค่าอย่างมาก 1

(iii) พรานย้ายที่อย่างมองเห็นได้ไปยังจุด B_n โดยที่ระยะทางระหว่าง B_{n-1} และ B_n เท่ากับ 1 พอดี

เป็นไปได้หรือไม่ ที่พรานสาวจะมั่นใจได้ว่า หลังจากที่เธอได้เลือกตำแหน่งของเธอไป 10^9 รอบแล้ว ระยะทางระหว่างเธอและกระต่ายมีค่าไม่เกิน 100 ไม่ว่ากระต่ายย้ายที่อย่างไร และ ไม่ว่าเครื่องสะกดรอยรายงานจุดใดมา

วันพุธที่ ๑๙ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

โจทย์ข้อ ๔. ให้ R และ S เป็นจุดที่แตกต่างกันบนวงกลม Ω โดยที่ RS ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง ให้ ℓ เป็นเส้นสัมผัส Ω ที่ R จุด T เป็นจุดที่ทำให้ S เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง RT จุด J ถูกเลือกบนส่วนโค้ง RS ฝั่งที่สั้นกว่าของ Ω โดยที่วงกลม Γ ที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม JST ตัด ℓ ที่สองจุดที่แตกต่างกัน ให้ A เป็นจุดตัดของ Γ และ ℓ ที่ใกล้กับ R เส้นตรง AJ ตัด Ω อีกครั้งที่ K จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง KT สัมผัสกับ Γ

โจทย์ข้อ ๕. ให้ $N \geqslant 2$ เป็นจำนวนเต็ม นักฟุตบอล $N(N+1)$ คนที่ไม่มีสองคนใดสูงเท่ากัน ยืนเรียงแถวกัน เซอร์ อเล็กซ์ ต้องการนำผู้เล่น $N(N-1)$ คนออกจากแถว โดยให้แถวที่เกิดจากผู้เล่น $2N$ คนที่ยังเหลืออยู่ สอดคล้องกับเงื่อนไข N ข้อต่อไปนี้

(1) ไม่มีใครยืนอยู่ระหว่างผู้เล่นสองคนที่สูงที่สุด

(2) ไม่มีใครยืนอยู่ระหว่างผู้เล่นที่สูงเป็นอันดับสามและสี่

$\vdots$

(N) ไม่มีใครยืนอยู่ระหว่างผู้เล่นสองคนที่เตี้ยที่สุด

จงแสดงว่าสามารถทำเช่นนี้ได้เสมอ

โจทย์ข้อ ๖. คู่อันดับ (x, y) ของจำนวนเต็มเป็น *จุดพื้นฐาน* หากตัวหารร่วมมากของ x และ y เท่ากับ 1 ให้ S เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกเป็นจุดพื้นฐาน จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก n และจำนวนเต็ม $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ที่ทำให้

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

สำหรับแต่ละ (x, y) ใน S