12 липня 2006 року

Задача 1. Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC. Усередині трикутника вибрано точку P таку, що

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з I.

Задача 2. Діагональ правильного 2006-кутника P називається доброю, якщо її кінці поділяють межу P на дві частини, кожна з яких містить непарне число сторін. Сторони P також називаються добрими.

Нехай P розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині P.

Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожний з яких має дві добрі сторони, може містити таке розбиття?

Задача 3. Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$\left| ab\left(a^2-b^2\right) + bc\left(b^2-c^2\right) + ca\left(c^2-a^2\right) \right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел a, b, c.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

13 липня 2006 року

Задача 4. Знайдіть усі пари (x, y) цілих чисел такі, що

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Нехай $P(x)$ – многочлен степеня $n > 1$ з цілими коефіцієнтами, k – довільне натуральне число. Розглянемо многочлен

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

(тут P застосовується k разів).

Доведіть, що існує не більше, ніж n цілих чисел t таких, що $Q(t) = t$.

Задача 6. Кожній стороні b опуклого многокутника P поставлено у відповідність найбільшу з площ трикутників, які містяться в P і одна із сторін яких співпадає з b. Доведіть, що сума площ, які відповідають усім сторонам P, не менша за подвоєну площу многокутника P.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.