화요일, 2017년 7월 18일

문제 1. 정수 $a_0 > 1$에 대하여, 수열 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 을 다음과 같이 정의한다.

모든 $n \geqslant 0$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}\,, & \sqrt{a_n} \text{ 이 정수인 경우} \\ a_n + 3, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

무한히 많은 n의 값에 대하여 $a_n = A$가 되는 수 A가 존재하도록 하는 a_0의 값을 모두 구하여라.

문제 2. $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라.

임의의 실수 x, y에 대하여,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

문제 3. 한 사냥꾼과 보이지 않는 토끼 한 마리가 평면 상에서 다음과 같은 게임을 한다. 토끼의 출발점 A_0와 사냥꾼의 출발점 B_0는 일치한다. 게임의 $n-1$번째 라운드를 마친 후 토끼가 위치한 점을 A_{n-1}, 사냥꾼이 위치한 점을 B_{n-1}이라 하자. n번째 라운드에서 다음과 같은 세 가지가 순차적으로 발생한다.

(i) 토끼가 보이지 않게 점 A_n으로 움직이고, A_{n-1}과 A_n의 거리는 정확히 1이다.

(ii) 사냥꾼의 추적기가 점 P_n의 위치를 알려준다. 이 추적기가 알려주는 점 P_n과 A_n의 거리는 1 이하임이 보장될 뿐이다.

(iii) 사냥꾼은 눈에 띄게 점 B_n으로 움직이고, B_{n-1}과 B_n의 거리는 정확히 1이다.

토끼가 어떻게 움직이든, 추적기가 어떤 점을 알려주든 상관없이 항상 사냥꾼이 10^9 라운드 후에 그와 토끼의 거리가 100 이하가 되도록 할 수가 있겠는가?

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점

수요일, 2017년 7월 19일

문제 4. 원 Ω 위에 두 점 R, S를 RS가 지름이 되지 않도록 잡자. 점 R에서의 Ω의 접선을 ℓ이라 하자. 점 T를 점 S가 선분 RT의 중점이 되도록 하는 점이라 하자. 점 J는 원 Ω의 호 $\widehat{RS}$ 중 작은 호 위에 있고, 삼각형 JST의 외접원 Γ가 ℓ과 서로 다른 두 점에서 만난다. Γ와 ℓ의 두 교점 중 R에 더 가까운 점을 A라 하자. 직선 AJ가 Ω와 점 K에서 다시 만난다. 직선 KT가 Γ에 접함을 보여라.

문제 5. 정수 $N \geqslant 2$이 주어져 있다. $N(N+1)$명의 축구선수들이 한 줄로 서 있고, 이들 중 어느 두 사람도 키가 서로 같지 않다. 알렉스 경은 이 선수들 중 $N(N-1)$명을 빼내, $2N$명의 선수들을 남기되, 남아 있는 선수들이 다음과 같은 N개의 조건을 만족하도록 한다.

(1) 가장 키가 큰 두 선수 사이에는 아무도 없다.

(2) 세번째로 키가 큰 선수와 네번째로 키가 큰 선수 사이에는 아무도 없다.

⋮

(N) 가장 키가 작은 두 선수 사이에는 아무도 없다.

이렇게 하는 것이 항상 가능함을 보여라.

문제 6. 정수 x, y의 최대공약수가 1일 때, 순서쌍 (x, y)를 **원천점**이라 하자. 유한개의 원천점들의 집합 S에 대하여, 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 정수 a_0, a_1, $\ldots$, a_n이 존재함을 보여라.

모든 $(x, y) \in S$에 대하여 등식

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1$$

이 성립한다.

Language: Korean

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점