Δευτέρα, 18 Ιουλίου 2011

Πρόβλημα 1. Για κάθε δεδομένο σύνολο $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ με στοιχεία τέσσερις διαφορετικούς θετικούς ακέραιους, συμβολίζουμε με s_A το άθροισμα $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Έστω n_A ο αριθμός των ζευγαριών (i, j), με $1 \leq i < j \leq 4$, για τα οποία ο αριθμός $a_i + a_j$ διαιρεί τον s_A. Βρείτε όλα τα σύνολα A με στοιχεία τέσσερις διαφορετικούς θετικούς ακέραιους, για τα οποία επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το n_A.

Πρόβλημα 2. Έστω $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του επιπέδου με δύο τουλάχιστον σημεία. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία του $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ που να είναι συνευθειακά. Ένας *ανεμόμυλος* είναι μία διαδικασία η οποία αρχίζει με μία ευθεία ℓ που περνάει από ένα μόνο σημείο $P \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Η ευθεία περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου με κέντρο το σημείο P μέχρι που να συναντήσει για πρώτη φορά κάποιο άλλο σημείο που ανήκει στο σύνολο $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Αυτό το σημείο, έστω Q, γίνεται τώρα νέο κέντρο περιστροφής και η ευθεία περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου γύρω από το Q, μέχρι που να συναντήσει ένα σημείο του $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται απεριόριστα με κέντρο περιστροφής πάντοτε ένα σημείο του $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα σημείο P του συνόλου $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ και μία ευθεία ℓ που περνάει από το P, έτσι ώστε ο παραγόμενος *ανεμόμυλος* να χρησιμοποιεί κάθε σημείο του $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ως κέντρο περιστροφής άπειρες φορές.

Πρόβλημα 3. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση που ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x)),$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \leq 0$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τρίτη, 19 Ιουλίου 2011

Πρόβλημα 4. Έστω n ακέραιος, με $n > 0$. Έχουμε μία ζυγαριά και n βάρη με τιμές $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Πρόκειται να τοποθετήσουμε καθένα από τα n βάρη πάνω στη ζυγαριά, το ένα μετά το άλλο, με τέτοιο τρόπο, ώστε ο δεξιός δίσκος να μην είναι ποτέ βαρύτερος από τον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα από τα βάρη, το οποίο δεν έχει μέχρι τότε τοποθετηθεί πάνω στη ζυγαριά, και το τοποθετούμε είτε στον αριστερό είτε στον δεξιό δίσκο, μέχρις ότου τοποθετηθούν όλα τα βάρη. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η τοποθέτηση.

Πρόβλημα 5. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων και τιμές στο σύνολο των θετικών ακεραίων. Υποθέτουμε ότι, για οποιουσδήποτε δύο ακέραιους m και n, η διαφορά $f(m) - f(n)$ διαιρείται με τον $f(m-n)$. Να αποδείξετε ότι, για όλους τους ακέραιους m και n με $f(m) \leq f(n)$, ο αριθμός $f(n)$ διαιρείται με τον $f(m)$.

Πρόβλημα 6. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο και Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Έστω ℓ μία εφαπτομένη ευθεία του Γ, και έστω ℓ_a, ℓ_b και ℓ_c οι συμμετρικές ευθείες της ℓ ως προς άξονα συμμετρίας τις ευθείες BC, CA και AB, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες ℓ_a, ℓ_b και ℓ_c εφάπτεται του κύκλου Γ.