Antradienis, 2019 m. liepos 16 d.

1 uždavinys. Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kad

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

su visais $a, b \in \mathbb{Z}$. (Čia $\mathbb{Z}$ žymi visų sveikųjų skaičių aibę.)

2 uždavinys. Taškas A_1 priklauso trikampio ABC kraštinei BC, o taškas B_1 – kraštinei AC. Taškai P ir Q priklauso atkarpoms atitinkamai AA_1 ir BB_1, o tiesės PQ ir AB yra lygiagrečios. Taškas P_1 priklauso tiesei PB_1, čia B_1 yra tarp P ir P_1, bei $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogiškai, taškas Q_1 priklauso tiesei QA_1, čia A_1 yra tarp Q ir Q_1, bei $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Įrodykite, kad taškai P, Q, P_1 ir Q_1 priklauso vienam apskritimui.

3 uždavinys. Socialinis tinklas turi 2019 naudotojų. Kai kurie iš jų yra draugai. (Draugystė visada abipusė: jei A yra B draugas, tai ir B yra A draugas.) Vienas po kito gali atsitikti tokie įvykiai:

> Bet kurie trys naudotojai A, B ir C, tokie kad A yra ir B, ir C draugas, bet B ir C nėra draugai, pakeičia savo draugysčių statusus taip: B ir C tampa draugais, tačiau A nutraukia draugystę su B ir C. Visų kitų draugysčių statusai šio įvykio metu nepasikeičia.

Pradžioje yra 1010 naudotojų, kiekvienas iš kurių turi lygiai 1009 draugus, ir 1009 naudotojai, kiekvienas iš kurių turi lygiai 1010 draugų. Įrodykite, kad egzistuoja tokia aukščiau aprašytų įvykių seka, kad po visų pasikeitimų kiekvienas tinklo naudotojas turės ne daugiau kaip po vieną draugą.

Trečiadienis, 2019 m. liepos 17 d.

4 uždavinys. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (k, n), su kuriomis

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

5 uždavinys. Banko leidžiamų monetų vienoje pusėje yra raidė H, o kitoje pusėje raidė T. Haris turi n monetų, kurios guli vienoje eilėje iš kairės į dešinę. Jis vis kartoja tokią operaciją: jei lygiai $k > 0$ monetų atverstos H puse, tai jis apverčia k-tąją monetą is kairės; jei visos monetos atverstos T puse, jis sustoja ir nieko nebedaro. Pavyzdžiui, jei $n = 3$ ir procesas prasideda nuo pradinės padėties THT, tai jis vyks taip: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$. Vadinasi, sustota bus po trijų operacijų.

(a) Įrodykite, kad kokia bebūtų pradinė padėtis, Haris visada sustos po baigtinio skaičiaus operacijų.

(b) Tegu $L(C)$ žymi operacijų skaičių, po kurio Haris sustoja, kai pradinė padėtis yra C. Pavyzdžiui, $L(THT) = 3$ ir $L(TTT) = 0$. Raskite vidutinę $L(C)$ reikšmę pagal visas 2^n pradinių padėčių C.

6 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC, kuriame $AB \neq AC$. Jo įbrėžtinis apskritimas ω, kurio centras I, liečia kraštines BC, CA ir AB atitinkamai taškuose D, E ir F. Tiesė, einanti per tašką D ir statmena EF, vėl kerta ω taške R. Tiesė AR vėl kerta ω taške P. Apie trikampius PCE ir PBF apibrėžti apskritimai darkart kertasi taške Q.

Įrodykite, kas tiesių DI ir PQ susikirtimo taškas priklauso tiesei, einančiai per tašką A ir statmenai AI.

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais