ថ្ងៃសុក្រ ទី១០ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៥

ចំណោទ 1. គេហៅសំណុំរាប់អស់ $\mathcal{S}$ មួយនៃចំនុចនៅក្នុងប្លង់ថាសំណុំ ″មានលំនឹង″ បើចំពោះគ្រប់ចំនុចពីរផ្សេងគ្នា A និង B នៅក្នុង $\mathcal{S}$ មានចំនុច C មួយនៅក្នុង $\mathcal{S}$ ដែល $AC = BC$ ។ គេហៅ $\mathcal{S}$ ថាសំណុំ ″មានផ្ចិតសេរី″ បើចំពោះគ្រប់ចំនុចបីផ្សេងគ្នា A, B និង C នៅក្នុង $\mathcal{S}$ មិនមានចំនុច P មួយនៅក្នុង $\mathcal{S}$ ដែល $PA = PB = PC$។

(a) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geqslant 3$ មានសំណុំមានលំនឹងមួយដែលផ្ទុក n ចំនុច ។

(b) កំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geqslant 3$ ដើម្បីឲ្យមានសំណុំមានលំនឹង និង មានផ្ចិតសេរីមួយដែលផ្ទុក n ចំនុច។

ចំណោទ 2. កំនត់គ្រប់ត្រីធាតុ (a, b, c) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឲ្យចំនួន

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

និមួយៗជាស្វ័យគុណនៃ 2។

(ស្វ័យគុណនៃ 2 គឺជាចំនួនគត់ដែលមានទម្រង់ 2^n ដែល n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមានឬស្មើសូន្យ។)

ចំណោទ 3. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច និងមាន $AB > AC$។ យក Γ ជារង្វង់ចារឹកក្រៅរបស់វា យក H ជាទីប្រជុំកម្ពស់របស់វា និង យក F ជើងនៃកម្ពស់គូសចេញពី A។ យក M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ BC។ យក Q ជាចំនុចនៅលើ Γ ដែល $\angle HQA = 90^\circ$ និងយក K ជាចំនុចនៅលើ Γ ដែល $\angle HKQ = 90^\circ$។ សន្មតថាចំនុច A, B, C, K និង Q សុទ្ធតែផ្សេងគ្នា និងស្ថិតនៅលើ Γ តាមលំដាប់នេះ។

បង្ហាញថារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ KQH និង រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ FKM ប៉ះគ្នា។

រយៈពេល៖ ៤ម៉ោងនិង៣០នាទី
ចំណោទនិមួយៗមានតម្លៃ ៧ពិន្ទុ

Language: **Khmer**

Day: **2**

ថ្ងៃសៅរ៍ ទី១១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៥

ចំណោទ 4. ត្រីកោណ ABC មានរង្វង់ចារឹកក្រៅ Ω និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ O។ រង្វង់ Γ ដែលមានផ្ចិត A កាត់អង្កត់ BC ត្រង់ចំនុច D និង E ដែល B, D, E និង C សុទ្ធតែផ្សេងគ្នានិងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ BC តាមលំដាប់នេះ។ យក F និង G ជាចំនុចប្រសព្វនៃ Γ និង Ω ដែល A, F, B, C និង G ស្ថិតនៅលើរង្វង់ Ω តាមលំដាប់នេះ។ យក K ជាចំនុចប្រសព្វទីពីរនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BDF និងអង្កត់ AB។ យក L ជាចំនុចប្រសព្វទីពីរនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ CGE និងអង្កត់ CA។

ឧបមាថាបន្ទាត់ FK និងបន្ទាត់ GL ជាបន្ទាត់ផ្សេងគ្នា ហើយប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច X។ បង្ហាញថាចំនុច X ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ AO។

ចំណោទ 5. គេឲ្យ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំនៃចំនួនពិត។ កំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y។

ចំណោទ 6. ស្វ៊ីត $a_1, a_2, \ldots$ នៃចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខណ្ឌដូចខាងក្រោម

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ ចំពោះគ្រប់ $j \geqslant 1$

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ ចំពោះគ្រប់ $1 \leqslant k < \ell$។

បង្ហាញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរ b និង N ដែល

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $n > m \geqslant N$។

រយៈពេល៖ ៤ម៉ោងនិង៣០នាទី
ចំណោទនិមួយៗមានតម្លៃ ៧ពិន្ទុ