Tirsdag d. 8. juli 2014

Opgave 1. Lad $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ være en uendelig følge af positive hele tal. Vis at der findes netop ét helt tal $n \geq 1$ så

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Opgave 2. Lad $n \geq 2$ være et helt tal. Et $n \times n$ skakbræt er inddelt i n^2 enhedskvadrater. En konfiguration af n tårne på dette skakbræt kaldes *fredelig* hvis hver række og hver søjle indeholder netop ét tårn. Bestem det størst mulige positive hele tal k så der i hver eneste fredelige konfiguration af n tårne findes et $k \times k$ kvadrat uden tårne på nogen af dets k^2 enhedskvadrater.

Opgave 3. I en konveks firkant $ABCD$ er $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punktet H er projektionen af A på BD. Punkterne S og T ligger på henholdsvis siden AB og siden AD så H ligger i det indre af trekant SCT,

$$\angle CHS - \angle CSB = 90° \quad \text{og} \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Vis at linjen BD tangerer den omskrevne cirkel til trekant TSH.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

Onsdag d. 9. juli 2014

Opgave 4. Punkterne P og Q ligger på siden BC i en spidsvinklet trekant ABC så $\angle PAB = \angle BCA$ og $\angle CAQ = \angle ABC$. Punkterne M og N ligger på henholdsvis linjen AP og linjen AQ så P er midtpunktet af AM, og Q er midtpunktet af AN. Vis at linjerne BM og CN skærer hinanden på den omskrevne cirkel til trekant ABC.

Opgave 5. For hvert positive hele tal n udsteder Cape Town Bank mønter med værdi $\frac{1}{n}$. En samling af endeligt mange sådanne mønter (af ikke nødvendigvis forskellig værdi) med samlet værdi højst $99 + \frac{1}{2}$ er givet. Vis at det er muligt at inddele denne samling i 100 eller færre grupper så hver gruppe har en samlet værdi af højst 1.

Opgave 6. En mængde af linjer i planen er i *generel position* hvis der hverken er to linjer der er parallelle, eller tre linjer der skærer hinanden i samme punkt. En mængde af linjer i generel position inddeler planen i områder hvor nogle har endeligt areal, og vi kalder disse dens *endelige områder*. Vis at det for tilstrækkeligt store n i enhver mængde af n linjer i generel position er muligt at farve mindst $\sqrt{n}$ linjer blå så ingen af dens endelige områder har en helt blå rand.

Bemærk: Resultater med $c\sqrt{n}$ i stedet for $\sqrt{n}$ vil blive tildelt point afhængigt af konstanten c.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.