12. júlí 2006

Dæmi 1. Látum ABC vera þríhyrning með innmiðju I. Um punkt P innaní þríhyrningnum gildir

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Sýnið að $AP \geq AI$, og að jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að $P = I$.

Dæmi 2. Látum P vera reglulegan 2006-hyrning. Hornalína í P er sögð vera *góð* ef endapunktar hennar skipta jaðri P í tvo hluta sem hver um sig samanstendur af oddatölufjölda hliða í P. Hliðar P eru einnig sagðar vera *góðar*.

Nú er P skipt niður í þríhyrninga með 2003 hornalínum, þannig að engar tvær hornalínur hafi sameiginlegan punkt innaní P. Finnið mesta fjölda jafnarma þríhyrninga með tvær góðar hliðar sem geta komið fyrir í slíkri skiptingu.

Dæmi 3. Finnið lægstu rauntölu M þannig að ójafnan

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gildi fyrir allar rauntölur a, b og c.

Tími: $4\frac{1}{2}$ klukkustundir
Hvert dæmi er sjö stiga virði

13. júlí 2006

Dæmi 4. Ákvarðið öll pör (x, y) af heiltölum þannig að

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Dæmi 5. Látum $P(x)$ vera margliðu með heiltölustuðla af stigi $n > 1$ og látum k vera jákvæða heiltölu. Lítið á margliðuna $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, þar sem P kemur k sinnum fyrir. Sannið að í mesta lagi séu til n heiltölur t þannig að $Q(t) = t$.

Dæmi 6. Úthlutum hverri hlið b í kúptum marghyrningi P mesta mögulega flatarmál þríhyrnings sem hefur b sem hlið og liggur í P. Sýnið að summa flatarmálanna sem hliðum P er úthlutað sé að minnsta kosti tvöfalt flatarmál P.

Tími: $4\frac{1}{2}$ klukkustundir
Hvert dæmi er sjö stiga virði