lørdag, 8. juli 2023

Opgave 1. Bestem alle sammensatte hele tal $n > 1$ med følgende egenskab: hvis $d_1, d_2, \ldots, d_k$ er alle de positive divisorer i n hvor $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, så vil d_i dele $d_{i+1} + d_{i+2}$ for hvert $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Opgave 2. Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor $|AB| < |AC|$. Lad Ω være den omskrevne cirkel til ABC. Lad S være midtpunktet af cirkelbuen CB i Ω der indeholder A. Linjen gennem A vinkelret på BC skærer BS i D og skærer Ω igen i $E \neq A$. Linjen gennem D der er parallel med BC skærer linjen BE i L. Lad ω betegne den omskrevne cirkel til trekant BDL. Lad ω skære Ω igen i $P \neq B$.
Vis at tangenten til ω i P skærer linjen BS på den indre vinkelhalveringslinje til $\angle BAC$.

Opgave 3. For hvert helt tal $k \geqslant 2$, bestem alle uendelige følger af positive hele tal $a_1, a_2, \ldots$ for hvilke der findes et polynomium P på formen $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ hvor $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ er ikke-negative hele tal så

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

for hvert helt tal $n \geqslant 1$.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.

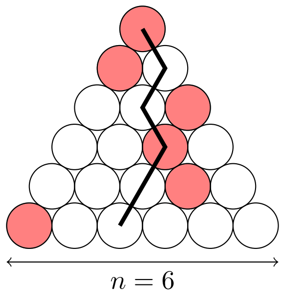
søndag, 9. juli 2023

Opgave 4. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ være parvist forskellige positive reelle tal så

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

er et helt tal for hvert $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Vis at $a_{2023} \geqslant 3034$.

Opgave 5. Lad n være et positivt helt tal. En *japansk trekant* består af $1+2+\cdots+n$ cirkler stablet i form af en ligesidet trekant så der for hvert $i = 1, 2, \ldots, n$ gælder at den i'te række indeholder netop i cirkler, hvoraf netop én af dem er farvet rød. En *ninja-sti* i en japansk trekant er en følge af n cirkler der starter i den øverste række, hvor hver cirkel efterfølges af en af de to cirkler direkte under den og som ender i nederste række. Her er et eksempel på en japansk trekant hvor $n = 6$ sammen med en ninja-sti i trekanten der indeholder to røde cirkler.



Udtrykt ved n, bestem det største k så der i enhver japansk trekant findes en ninja-sti der indeholder mindst k røde cirkler.

Opgave 6. Lad ABC være en ligesidet trekant. Lad A_1, B_1, C_1 være indre punkter i ABC så $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ og

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Lad A_2 være skæringspunktet mellem BC_1 og CB_1, lad B_2 være skæringspunktet mellem CA_1 og AC_1, og lad C_2 være skæringspunktet mellem AB_1 og BA_1.
Vis at hvis trekant $A_1B_1C_1$ ikke er ligebenet, så vil de tre omskrevne cirkler til trekanterne AA_1A_2, BB_1B_2 og CC_1C_2 alle gå gennem to fælles punkter.

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Hver opgave kan give op til 7 point.