Среда, 7 июля 2010 г.

Задача 1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$. (Через $[z]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее z.)

Задача 2. Точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а Γ — окружность, описанная около этого треугольника. Прямая AI пересекает окружность Γ в точках A и D. Точка E выбрана на дуге BDC, а точка F — на стороне BC так, что

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Точка G — середина отрезка IF. Докажите, что прямые DG и EI пересекаются в точке, лежащей на окружности Γ.

Задача 3. Обозначим через $\mathbb{N}$ множество всех целых положительных чисел. Найдите все функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что число

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

является точным квадратом при любых $m, n \in \mathbb{N}$.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Четверг, 8 июля 2010 г.

Задача 4. Пусть P — точка внутри треугольника ABC. Прямые AP, BP и CP вторично пересекают окружность Γ, описанную около треугольника ABC, в точках K, L и M соответственно. Касательная к окружности Γ, проведенная через точку C, пересекает прямую AB в точке S. Известно, что $SC = SP$. Докажите, что $MK = ML$.

Задача 5. В каждой из шести коробок $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ изначально находится ровно по одной монете. Разрешается производить операции следующих двух типов:

Тип 1: Выбрать любую непустую коробку B_j, где $1 \leq j \leq 5$, убрать из нее одну монету, и добавить две монеты в коробку B_{j+1}.

Тип 2: Выбрать любую непустую коробку B_k, где $1 \leq k \leq 4$, убрать из нее одну монету, и поменять местами содержимое (возможно пустое) коробки B_{k+1} с содержимым (возможно пустым) коробки B_{k+2}.

Существует ли конечная последовательность таких операций, приводящая к ситуации, в которой коробки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 пусты, а в коробке B_6 находится ровно $2010^{2010^{2010}}$ монет?
(По определению $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Задача 6. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящая из положительных действительных чисел. Известно, что для некоторого фиксированного целого положительного s при всех $n > s$ выполняется равенство

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Докажите, что существуют целые положительные числа ℓ и N такие, что $\ell \leq s$, и $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ при всех $n \geq N$.