pirmadienis, 21. rugsėjo 2020

1 uždavinys. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$ ir toks taškas P jo viduje, kad

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Įrodykite, kad kampų $\angle ADP$ ir $\angle PCB$ pusiaukampinės bei atkarpos AB vidurio statmuo kertasi viename taške.

2 uždavinys. Duoti realieji skaičiai a, b, c, d, tenkinantys sąlygas $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ir $a+b+c+d = 1$. Įrodykite, kad

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

3 uždavinys. Yra $4n$ akmenukų, kurių svoriai $1, 2, 3, \dots, 4n$. Kiekvienas akmenukas nuspalvintas viena iš n spalvų. Kiekviena iš spalvų yra nuspalvinti keturi akmenukai. Įrodykite, kad akmenukus galima taip paskirstyti į dvi krūveles, kad:

- Abiejų krūvelių svoris yra vienodas.
- Kiekvienoje krūvelėje yra po du kiekvienos spalvos akmenukus.

Language: Lithuanian

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.

antradienis, 22. rugsėjo 2020

4 uždavinys. Duotas sveikasis skaičius $n > 1$. Kalno šlaite yra n^2 stotelių, visos skirtinguose aukščiuose. Kiekviena iš dviejų keltuvų kompanijų, A ir B, valdo po k keltuvų; kiekvienas keltuvas kelia iš kažkurios stotelės į aukštesnę stotelę (be tarpinių sustojimų). Visi k kompanijos A keltuvai startuoja iš k skirtingų stotelių ir kelia į k skirtingų stotelių, be to, keltuvas, kuris pradeda kelti iš aukščiau esančios stotelės, ir pakelia į aukščiau esančią stotelę. Tas pats galioja ir kompanijos B keltuvams. Sakome, kad dvi stotelės yra *sujungtos* kompanijos keltuvais, jei iš žemiau esančios stotelės į aukščiau esančią galima pakilti naudojant vieną arba keletą būtent tos kompanijos keltuvų (jokie kiti judėjimai tarp stotelių nėra leidžiami).

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių k, su kuriuo visada galima tvirtinti, kad egzistuoja dvi stotelės, kurias sujungia abiejų kompanijų keltuvai.

5 uždavinys. Kortų kaladėje yra $n > 1$ kortų. Ant kiekvienos kortos užrašyta po natūralųjį skaičių. Žinoma, kad ant bet kurių dviejų kortų užrašytų skaičių aritmetinis vidurkis taip pat yra ir skaičių, užrašytų ant vienos arba keleto šios kaladės kortų, geometrinis vidurkis.

Su kuriais n galima tvirtinti, kad ant visų kortų užrašyti skaičiai yra lygūs?

6 uždavinys. Įrodykite, kad egzistuoja toks teigiamas skaičius c, su kuriuo galioja toks teiginys:

Tarkime, kad $n > 1$ yra natūralusis skaičius, o $\mathcal{S}$ - aibė, sudaryta iš n plokštumos taškų, tarp kurių atstumai yra ne mažesni už 1. Tada egzistuoja tokia tiesė ℓ, padalijanti $\mathcal{S}$, kad atstumas nuo bet kurio aibės $\mathcal{S}$ taško iki ℓ yra ne mažesnis už $cn^{-1/3}$.

(Tiesė ℓ *padalija* plokštumos taškų aibę $\mathcal{S}$, jei egzistuoja atkarpa, jungianti kokius nors du aibės $\mathcal{S}$ taškus, kuri kerta tiesę ℓ.)

Pastaba. Įverčiai, kuriuose vietoje $cn^{-1/3}$ bus gautas silpnesnis įvertis $cn^{-\alpha}$, taip pat gali būti įvertinti taškais, atsižvelgiant į konstantos $\alpha > 1/3$ reikšmę.

Language: Lithuanian

Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais.