



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Mongolian (mon), day 1

2024 оны 7 сарын 16, Мягмар

Бодлого 1. Дурын натурал n тооны хувьд бүхэл

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

тоо n тоонд хуваагддаг байх бүх бодит α тоог ол.

(Бодит z тооноос хэтэрдэггүй хамгийн их бүхэл тоог $\lfloor z \rfloor$ гэж тэмдэглэнэ. Жишээлбэл, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ба $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Бодлого 2. Дараах чанартай натурал g ба N тоонууд олддог байх бүх (a, b) натурал тоон хосыг ол:

Дурын бүхэл $n \geq N$ тооны хувьд $\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$ байна.

(x, y бүхэл тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $\gcd(x, y)$ гэж тэмдэглэнэ.)

Бодлого 3. a_1, a_2, a_3, \dots натурал тоон төгсгөлгүй дараалал ба N натурал тоо гэе. Дурын $n > N$ дугаарын хувьд a_{n-1} тоо a_1, a_2, \dots, a_{n-1} жагсаалт дотор яг a_n удаа гарч ирдэг байв.

a_1, a_3, a_5, \dots ба a_2, a_4, a_6, \dots дарааллуудын ядаж нэг нь яваандаа үелнэ гэж батал.

(Натурал p, M тоонууд олдоод, дурын $m \geq M$ хувьд $b_{m+p} = b_m$ байдаг бол b_1, b_2, b_3, \dots дарааллыг яваандаа үелнэ гэж хэлнэ.)



2024 оны 7 сарын 17, Лхагва

Бодлого 4. $AB < AC < BC$ байдаг ABC гурвалжинд багтсан ω тойргийн төвийг I гэе. BC шулуун дээр C цэгээс ялгаатай X цэгийг, X цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун ω тойргийг шүргэдэг байхаар авав. Мөн ижлээр, BC шулуун дээр B цэгээс ялгаатай Y цэгийг, Y цэгийг дайрсан AB шулуунтай параллел шулуун ω тойргийг шүргэдэг байхаар авав. AI шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой дахин $P \neq A$ цэгээр огтлонцоно. AB талын дундаж цэгийг K , AC талын дундаж цэгийг L гэе.

$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ байна гэж батал.

Бодлого 5. Турбо гэдэг эмгэн хумс 2024 мөр, 2023 баганатай хүснэгт дээр тоглоом тоглоно. Хүснэгтийн 2022 нүдэнд үл үзэгдэх мангас нуугдаж байгаа. Эхлээд, Турбо мангасууд хаана нуугдаж байгааг мэдэхгүй, гэхдээ 1-р мөр ба 2024-р мөрөөс бусад мөр бүрд яг нэг мангас байгаа бөгөөд аль ч баганад ихдээ нэг мангас байгаа гэж мэднэ.

Турбо 1-р мөрөөс эхлэн 2024-р мөр хүртэл явах оролдлого давтан хийнэ. Оролдлого бүр дараах байдлаар явагдана:

Эхлээд Турбо эхлэх нүдээ 1-р мөрөөс сонгоно. Тэгээд одоо байгаа нүдтэйгээ ерөнхий хилтэй нүд рүү шилжих үйлдлийг давтана (урд нь очсон нүдэндээ дахиж очихыг зөвшөөрнө). Шилжиж очсон нүдэнд нь мангас нуугдаж байвал оролдлого амжилтгүй болох ба 1-р мөр рүү буцаагдан дараагийн оролдлогоо шинээр эхлүүлнэ.

Мангасууд байршилаа өөрчлөхгүй ба Турбо нэг очсон нүдэндээ мангас байсан эсэхийг мартахгүй. 2024-р мөрний ямар нэг нүдэнд очиж чадвал оролдлого амжилттай болж тоглоом дуусна.

Мангасуудын байрлалаас үл хамааран, n эсвэл түүнээс цөөн оролдлого дотор Турбо 2024-р мөр хүрч чадах хамгийн бага n тоог ол.

Бодлого 6. Бүх рационал тооны олонлогийг \mathbb{Q} гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y \in \mathbb{Q}$ рационал тоонуудын хувьд

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{эсвэл} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

байдаг бол $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ функцийг *тансаг* гэе. Дараах чанартай бүхэл c тоо олдохыг баталж, ийм с тооны авч болох хамгийн бага утгыг ол:

Дурын тансаг f функцийн хувьд, рационал r тоо ашиглан $f(r) + f(-r)$ гэж илэрхийлж болдог ялгаатай рационал тоо хамгийн олондоо c ширхэг байна.