



*mardi, 16. juillet 2024*

**Problème 1.** Déterminer tous les réels  $\alpha$  tels que, pour tout entier  $n$  strictement positif, l'entier

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

soit un multiple de  $n$ . (On rappelle que  $\lfloor z \rfloor$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal à  $z$ . Par exemple,  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  et  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ .)

**Problème 2.** Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs pour lesquels il existe des entiers strictement positifs  $g$  et  $N$  tels que l'égalité

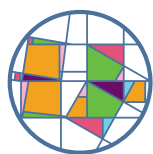
$$\text{PGCD}(a^n + b, b^n + a) = g$$

soit vérifiée pour tout entier  $n \geq N$ . (On rappelle que  $\text{PGCD}(x, y)$  désigne le plus grand commun diviseur des entiers  $x$  et  $y$ .)

**Problème 3.** Soit  $a_1, a_2, a_3, \dots$  une suite d'entiers strictement positifs, et soit  $N$  un entier strictement positif. On suppose que, pour tout  $n > N$ ,  $a_n$  est égal au nombre de fois que la valeur  $a_{n-1}$  apparaît dans la liste  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .

Démontrer que parmi les deux suites  $a_1, a_3, a_5, \dots$  et  $a_2, a_4, a_6, \dots$ , au moins une est ultimement périodique.

(Une suite  $b_1, b_2, b_3, \dots$  est *ultimement périodique* s'il existe des entiers strictement positifs  $p$  et  $M$  tels que  $b_{m+p} = b_m$  pour tout entier  $m \geq M$ .)



mercredi, 17. juillet 2024

**Problème 4.** Soit  $ABC$  un triangle vérifiant  $AB < AC < BC$ . On note  $\omega$  le cercle inscrit au triangle  $ABC$ , et  $I$  le centre de  $\omega$ . Soit  $X$  le point de la droite  $(BC)$ , distinct de  $C$ , telle que la parallèle à  $(AC)$  passant par  $X$  soit tangente à  $\omega$ . Similairement, soit  $Y$  le point de la droite  $(BC)$ , distinct de  $B$ , telle que la parallèle à  $(AB)$  passant par  $Y$  soit tangente à  $\omega$ . La droite  $(AI)$  recoupe le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  en  $P$  (distinct de  $A$ ). Soit  $K$  et  $L$  les milieux des segments  $[AC]$  et  $[AB]$  respectivement.

Démontrer que  $\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = 180^\circ$ .

**Problème 5.** Turbo l'escargot joue à un jeu sur une grille avec 2024 lignes et 2023 colonnes. Il y a des monstres cachés dans 2022 cases. Initialement, Turbo ne connaît l'emplacement d'aucun monstre, mais il sait qu'il y a exactement un monstre dans chaque ligne à part dans la première ligne et dans la dernière ligne, et que chaque colonne contient au plus un monstre.

Turbo enchaîne plusieurs tentatives pour aller de la première ligne à la dernière ligne. À chaque tentative, il choisit la case de la première ligne sur laquelle il commence, et se déplace de cases en cases, en allant à chaque fois d'une case à une case ayant un côté en commun avec celle-ci. (Il a le droit de repasser sur une case déjà visitée.) S'il accède à une case contenant un monstre, sa tentative se termine et il est transporté sur la première ligne pour commencer une nouvelle tentative. Les monstres ne bougent pas, et Turbo se souvient si chaque case qu'il a visitée contient un monstre ou non. S'il atteint n'importe quelle case de la dernière ligne, sa tentative se termine et le jeu est fini.

Déterminer la valeur minimale de  $n$  pour laquelle Turbo a une stratégie qui lui assure d'atteindre la dernière ligne à sa  $n^{\text{me}}$  tentative ou avant, quelle que soit de la localisation des monstres.

**Problème 6.** On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels. Une fonction  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  est dite *aguesuliane* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout  $x, y \in \mathbb{Q}$ , au moins une des deux égalités est vérifiée :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ou} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Démontrer qu'il existe un entier  $c$  tel que pour toute fonction aguesuliane  $f$ , la quantité  $f(r) + f(-r)$  prenne au plus  $c$  valeurs distinctes lorsque  $r$  parcourt  $\mathbb{Q}$ , et déterminer la plus petite valeur possible pour  $c$  vérifiant cela.