E martë, 16 korrik 2019

Problem 1. Le të jetë $\mathbb{Z}$ bashkësia e numrave të plotë. Të përcaktohen të gjitha funksionet $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ të tilla që, për çdo numra të plotë a dhe b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problem 2. Në një trekëndësh ABC pika A_1 shtrihet në brinjën BC dhe pika B_1 shtrihet në brinjën AC. Le të jenë P dhe Q pika në segmentet AA_1 dhe BB_1, përkatësisht, të tilla që PQ është paralele me AB. Le të jetë P_1 pikë në drejtëzën PB_1 e tillë që B_1 shtrihet rigorozisht ndërmjet P dhe P_1, dhe $\angle PP_1C = \angle BAC$. Ngjashëm, le të jetë Q_1 pikë në drejtëzën QA_1 e tillë që A_1 shtrihet rigorozisht ndërmjet Q dhe Q_1, dhe $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Të vërtetohet se pikat P, Q, P_1 dhe Q_1 i takojnë të njëjtit rreth.

Problem 3. Një rrjet social ka 2019 shfrytëzues, nga të cilët disa çifte janë miq. Çdo herë që një shfrytëzues A është mik me një shfrytëzues B, shfrytëzuesi B poashtu është mik me shfrytëzuesin A. Ngjarje të llojit vijues mund të ndodhin në mënyrë të përsëritur, vetëm një njëherësh:

> Tre shfrytëzues A, B dhe C të tillë që A është mik me B dhe C, por B dhe C nuk janë miq, ndryshojnë statuset e tyre të miqësisë ashtu që B dhe C tani bëhen miq, por A tanimë nuk është mik as me B e as me C. Të gjitha statuset tjera të miqësisë mbesin të pandryshuara.

Fillimisht 1010 shfrytëzues kanë 1009 miq secili, dhe 1009 shfrytëzues kanë 1010 miq secili. Të vërtetohet se ekziston një varg ngjarjesh të tilla pas të cilave çdo shfrytëzues është mik me të shumtën një shfrytëzues tjetër.

E mërkurë, 17 korrik 2019

Problem 4. Të gjenden të gjitha çiftet (k, n) të numrave të plotë të tilla që

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problem 5. Banka e Bath lëshon monedha me një H në njërën anë dhe një T në tjetrën. Hana ka n nga këto monedha të rradhitura në një rresht nga e majta në të djathtë. Ajo kryen në mënyrë të përsëritur veprimin vijues: në qoftë se ka saktësisht $k > 0$ monedha që tregojnë H, atëherë ajo kthen përmbys monedhën e k-të nga e majta; përndryshe, të gjitha monedhat tregojnë T dhe ajo ndalon. Për shembull, në qoftë se $n = 3$, procesi që fillon me konfiguracionin THT do të ishte $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, i cili ndalon pas tri veprimesh.

(a) Tregoni se për çdo konfiguracion fillestar Hana ndalon pas një numri të fundëm veprimesh.

(b) Për çdo konfiguracion fillestar C, le të jetë $L(C)$ numri i veprimeve para se Hana të ndalojë. Për shembull, $L(THT) = 3$ dhe $L(TTT) = 0$. Të përcaktohet vlera mesatare e $L(C)$ sipas të gjitha 2^n konfiguracioneve të mundshme fillestare C.

Problem 6. Le të jetë I qendra e rrethit të brendashkruar të një trekëndëshi këndngushtë ABC me $AB \neq AC$. Rrethi i brendashkruar ω i ABC takon brinjët BC, CA, dhe AB në pikat D, E, dhe F, përkatësisht. Drejtëza nëpër D normale me EF pret ω sërish në R. Drejtëza AR pret ω sërish në P. Rrathët e jashtashkruar të trekëndëshave PCE dhe PBF priten sërish në Q.

Të vërtetohet se drejtëzat DI dhe PQ priten në drejtëzën nëpër A normale me AI.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secili problem vlen 7 pikë