Wednesday, July 15, 2009

المسألة الأولى

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً و لتكن ($k \geq 2$) $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ أعداداً صحيحة مختلفة من المجموعة $\{1, \ldots., n\}$ بحيث n يقسم $a_i(a_{i+1}-1)$ لكل i من $\{1, \ldots., k-1\}$. برهن أن n لا يقسم $a_k(a_1-1)$.

المسألة الثانية

ليكن ABC مثلثاً و ليكن O مركز الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث. نعتبر P و Q نقطتان من الضلعين AC و AB على الترتيب . و لتكن K و L و M منتصفات القطع المستقيمة $[BP]$ و $[CQ]$ و $[PQ]$ على الترتيب ، ولتكن ω هي الدائرة المارة من النقط K و L و M. إذا كان المستقيم (PQ) مماساً للدائرة ω فبرهن أن $OP = OQ$

المسألة الثالثة

لتكن $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تكون المتتاليتان الجزئيتان :

$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots\ldots$ و $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots\ldots$ متتاليتين حسابيتين.

برهن أن $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ متتالية حسابية كذلك.

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

Thursday, July 16, 2009

المسألة الرابعة

ليكن ABC مثلثاً فيه $AB = AC$. المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{CAB}$ يقطع الضلع BC في النقطة D والمنصف الداخلي للزاوية $\widehat{ABC}$ يقطع الضلع AC في النقطة E .
ليكن K مركز الدائرة الماسة داخلا لأضلاع المثلث ADC , بفرض أن $\widehat{BEK} = 45^\circ$ ،
أوجد جميع القيم الممكنة لقياس الزاوية $\widehat{CAB}$

المسألة الخامسة

أوجد جميع التوابع $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ التي تحقق الخاصة:
لكل a و b من $\mathbb{N}^*$ يوجد مثلث غير مضمحل بحيث تكون أطوال أضلاعه هي
a و $f(b)$ و $f(b + f(a) - 1)$
(المثلث غير المضمحل هو المثلث الذي رؤوسه لا تقع على استقامة واحدة)

المسألة السادسة

لتكن $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ أعداداً صحيحة موجبة مختلفة و لتكن M مجموعة مكونة من $n-1$ عدداً صحيحاً موجباً بحيث $s = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n \notin M$. تقفز جرادة على محور الأعداد الحقيقية . تنطلق الجرادة من مبدأ الإحداثيات 0 بالاتجاه الموجب و تنفذ n قفزة ذات الأطوال $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ بترتيب ما.
برهن أن هذه الجرادة تستطيع ترتيب قفزاتها بحيث لا تمر من أي نقطة من المجموعة M.