сабота, 8. јули 2023

Задача 1. Определи ги сите сложени цели броеви $n > 1$ кои го задоволуваат следново својство: ако $d_1, d_2, \ldots, d_k$ се сите позитивни делели на n и важи $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, тогаш d_i е делител на $d_{i+1} + d_{i+2}$ за секој $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Задача 2. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $AB < AC$. Нека Ω е опишаната кружница околу ABC. Нека S е средната точка на лакот CB од Ω кој ја содржи A. Нормалата спуштена од A на BC ја сече BS во D, а Ω по втор пат во $E \neq A$. Правата низ D паралелна на BC ја сече правата BE во L. Опишаната кружница околу триаголникот BDL ја означуваме со ω. Нека ω ја сече Ω по втор пат во $P \neq B$.
Докажи дека тангентата на ω во P ја сече правата BS во точка на внатрешната симетрала од $\angle BAC$.

Задача 3. За секој цел број $k \geqslant 2$, определи ги сите бесконечни низи од позитивни цели броеви $a_1, a_2, \ldots$ за кои постои полином P од облик $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, каде $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ се ненегативни цели броеви, такви што

$$P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

за секој цел број $n \geqslant 1$.

Language: Macedonian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.

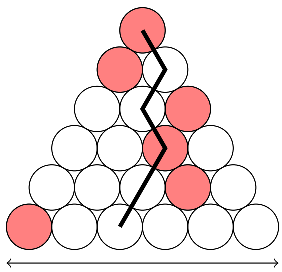
недела, 9. јули 2023

Задача 4. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ се попарно различни позитивни реални броеви такви што

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

е цел број за секое $n = 1, 2, \dots, 2023$. Докажи дека $a_{2023} \geqslant 3034$.

Задача 5. Нека n е позитивен цел број. *Јапонски триаголник* се состои од $1 + 2 + \cdots + n$ кругови распоредени во форма на рамностран триаголник, така што за секој $i = 1, 2, \dots, n$, i-тиот ред содржи точно i круга, од кои точно еден е обоен црвено. *Нинџа патека* во јапонски триаголник е низа од n кругови добиена почнувајќи од најгорниот ред, па последователно движејќи се од круг, во еден од двата круга непосредно под него, завршувајќи во најдолниот ред. Подолу е даден пример за јапонски триаголник за $n = 6$, со нинџа патека во него кога содржи два црвени кругови .



Изразено преку n, најди го најголемиот k таков што во секој јапонски триаголник постои нинџа патека која содржи најмалку k црвени круга.

Задача 6. Нека ABC е рамностран триаголник. Нека A_1, B_1, C_1 се точки во внатрешноста на ABC такви што $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Нека BC_1 и CB_1 се сечат во A_2, CA_1 и AC_1 се сечат во B_2, а AB_1 и BA_1 се сечат во C_2.
Докажу дека ако триаголникот $A_1B_1C_1$ е разностран, тогаш трите опишани кружници околу триаголниците AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 минуваат низ две заеднички точки.

(Забелешка: триаголник е разностран ако нема две страни со еднаква должина.)