



e hënë, 19. korrik 2021

Detyra 1. Le të jetë $n \geq 100$ një numër i plotë. Ivani shënon numrat $n, n+1, \dots, 2n$ secilin në letër të ndryshme. Ai pastaj i përzien ato $n+1$ letra, dhe i ndan në dy grumbuj. Tregoni se të paktën njëri nga grumbujt përmban dy letra të tillë që shuma e numrave të tyre është katror i plotë.

Detyra 2. Tregoni se mosbarazia

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

vlen për të gjithë numrat realë x_1, \dots, x_n .

Detyra 3. Le të jetë D një pikë e brendshme e trekëndëshit këndngusht ABC me $AB > AC$ ashtu që $\angle DAB = \angle CAD$. Pika E në segmentin AC plotëson kushtin $\angle ADE = \angle BCD$, pika F në segmentin AB plotëson kushtin $\angle FDA = \angle DBC$, dhe pika X në drejtëzën AC plotëson kushtin $CX = BX$. Le të jenë O_1 dhe O_2 qendrat e rrathëve të jashtëshkruar në trekëndëshat ADC dhe EXD , përkatësisht. Tregoni se drejtëzat BC, EF , dhe O_1O_2 priten në një pikë (janë konkurrente).



e martë, 20 korrik 2021

Detyra 4. Le të jetë Γ një rreth me qendër I , dhe $ABCD$ një katërkëndësh konveks i tillë që secili prej segmenteve AB , BC , CD dhe DA të jetë tangjent në Γ . Le të jetë Ω rrethi i jashtëshkruar në trekëndëshin AIC . Zgjatja e BA përtej A e takon Ω në X , dhe zgjatja e BC përtej C e takon Ω në Z . Zgjatjet e AD dhe CD përtej D e takojnë Ω në Y dhe T , përkatësisht. Tregoni se

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Detyra 5. Dy ketrat, Bushi dhe Jumpi, për sezonën e dimrit kanë mbledhur 2021 arra. Jumpi numëron arrat nga 1 deri në 2021, dhe hap 2021 vrima të vogëla në një model rrëthor në tokë rreth pemës së tyre të preferuar. Të nesërmen në mëngjes, Jumpi vëren se Bushi kishte vendosur nga një arrë në secilën vrimë, por nuk i kishte kushtuar vëmendje numërimit. I pakënaqur, Jumpi vendos të rendisë përsëri arrat duke bërë një varg prej 2021 lëvizjesh. Në lëvizjen k -të, Jumpi shkëmben pozitat e dy arrave që janë fqinje me arrën me numër k . Tregoni se ekziston një vlerë k e tillë që, në lëvizjen k -të, Jumpi shkëmben disa arra a dhe b të tilla që $a < k < b$.

Detyra 6. Le të jetë $m \geq 2$ një numër i plotë, A le të jetë një bashkësi e fundme e numrave të plotë (jo doemos pozitiv) dhe $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ le të janë nënbashkësi të A -së. Supozojmë se për çdo $k = 1, 2, \dots, m$ shuma e elementeve të B_k është m^k . Tregoni se A përban të paktën $m/2$ elemente.