ponedeljek, 21. september 2020

Naloga 1. Dan je konveksen štirikotnik $ABCD$. Točka P leži v notranjosti štirikotnika $ABCD$. Za velikosti kotov veljajo naslednja razmerja:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Dokaži, da se naslednje tri premice sekajo v eni točki: simetrala notranjega kota $\angle ADP$, simetrala notranjega kota $\angle PCB$ in simetrala daljice AB.

Naloga 2. Za realna števila a, b, c, d velja, da je $a \geq b \geq c \geq d > 0$ in $a + b + c + d = 1$. Dokaži, da je

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Naloga 3. Na mizi je $4n$ kamenčkov, katerih mase so $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Vsak kamenček je pobarvan z eno od n barv in z vsako barvo so pobarvani štirje kamenčki. Dokaži, da lahko razdelimo kamenčke na dva kupa, tako da sta izpolnjena oba naslednja pogoja:

- Skupni masi obeh kupov sta enaki.
- Vsak kup vsebuje dva kamenčka vsake barve.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

torek, 22. september 2020

Naloga 4. Dano je naravno število $n > 1$. Na pobočju gore je n^2 postaj, vse na različnih nadmorskih višinah. Vsako od dveh žičničarskih podjetij A in B upravlja s k žičnicami; vsaka žičnica vozi potnike iz ene od postaj na drugo višjo postajo (brez vmesnih postankov). Vseh k žičnic podjetja A ima k različnih začetnih postaj in k različnih končnih postaj, pri čemer žičnica, ki se začne višje, tudi konča višje. Enaki pogoji veljajo tudi za žičnice podjetja B. Pravimo, da podjetje *povezuje* dve postaji, če lahko potnik pride z nižje postaje na višjo postajo z uporabo ene ali več žičnic tega podjetja (med postajami niso dovoljeni nobeni drugi premiki).

Določi najmanjše naravno število k, za katero zagotovo obstajata dve postaji, ki ju povezujeta obe podjetji.

Naloga 5. Dan je zavoj $n > 1$ kart. Na vsaki karti je napisano naravno število. Zavoj kart ima lastnost, da je aritmetična sredina števil na kateremkoli paru dveh kart enaka geometrijski sredini števil na eni ali več kartah iz zavoja.

Za katere n sledi, da so števila na vseh kartah enaka?

Naloga 6. Dokaži, da obstaja taka pozitivna konstanta c, da je naslednja trditev resnična:

Naj bo n naravno število, za katero velja $n > 1$, in naj bo $\mathcal{S}$ množica n točk v ravnini, tako da je razdalja med katerimakoli različnima točkama iz $\mathcal{S}$ vsaj 1. Sledi, da obstaja premica ℓ, ki razdeli $\mathcal{S}$, tako da je razdalja katerekoli točke iz $\mathcal{S}$ do ℓ vsaj $cn^{-1/3}$.

(Premica ℓ *razdeli* množico točk $\mathcal{S}$, če vsaj ena daljica, ki povezuje dve toči iz $\mathcal{S}$, seka ℓ.)

Opomba. Šibkejši rezultat, pri katerem je izraz $cn^{-1/3}$ nadomeščen s $cn^{-\alpha}$, bi lahko bil nagrajen s točkami, odvisno od vrednosti konstante $\alpha > 1/3$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.