

Selasa, 16. Juli 2024

Soal 1. Tentukan semua bilangan real α sehingga untuk setiap bilangan bulat positif n , bilangan bulat

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

merupakan kelipatan n . (Perhatikan bahwa $\lfloor z \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan z . Sebagai contoh, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Soal 2. Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (a, b) sehingga terdapat bilangan bulat positif g dan N yang memenuhi

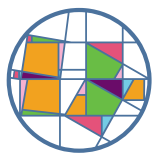
$$\text{FPB}(a^n + b, b^n + a) = g$$

untuk semua bilangan bulat $n \geq N$. (Perhatikan bahwa $\text{FPB}(x, y)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari bilangan bulat x dan y .)

Soal 3. Misalkan a_1, a_2, a_3, \dots suatu barisan tak hingga bilangan bulat positif, dan N suatu bilangan bulat positif. Diketahui bahwa untuk setiap $n > N$, a_n sama dengan banyaknya kemunculan a_{n-1} di dalam daftar a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Buktikan bahwa paling sedikit satu dari barisan a_1, a_3, a_5, \dots dan a_2, a_4, a_6, \dots pada akhirnya periodik.

(Suatu barisan tak hingga b_1, b_2, b_3, \dots dikatakan *pada akhirnya periodik* jika terdapat bilangan bulat positif p dan M sehingga $b_{m+p} = b_m$ untuk semua $m \geq M$.)



Rabu, 17. Juli 2024

Soal 4. Misalkan ABC suatu segitiga dengan $AB < AC < BC$. Misalkan ω dan I berturut-turut adalah lingkaran dalam dari segitiga ABC dan titik pusatnya. Misalkan X adalah titik pada garis BC yang berbeda dari C sehingga garis yang melalui X dan sejajar dengan AC menyinggung ω . Dengan cara serupa, misalkan Y adalah titik pada garis BC yang berbeda dari B sehingga garis yang melalui Y dan sejajar dengan AB menyinggung ω . Misalkan AI memotong kembali lingkaran luar dari segitiga ABC di titik $P \neq A$. Misalkan K dan L berturut-turut adalah titik tengah dari AC dan AB . Buktikan bahwa $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Soal 5. Si siput Turbo bermain sebuah gim pada papan kotak-kotak yang terdiri dari 2024 baris dan 2023 kolom. Diketahui bahwa terdapat monster tersembunyi di dalam 2022 kotak. Pada awalnya, Turbo tidak mengetahui di mana monster-monster tersebut berada tetapi dia mengetahui bahwa ada tepat satu monster pada setiap baris kecuali pada baris pertama dan terakhir, dan setiap kolom memuat paling banyak satu monster.

Turbo melakukan serangkaian percobaan untuk berjalan dari baris pertama menuju baris terakhir. Pada setiap percobaan, dia memilih untuk memulai dari sebarang kotak pada baris pertama, kemudian bergerak ke kotak yang memiliki sisi sekutu dengan kotak sebelumnya secara berulang-ulang. (Dia diperbolehkan untuk kembali ke kotak yang pernah dikunjungi sebelumnya.) Jika dia sampai pada suatu kotak yang memuat monster, percobaannya selesai dan dia dikembalikan ke baris pertama untuk memulai percobaan baru. Semua monster tidak bergerak dan Turbo mengingat apakah setiap kotak yang sudah dia kunjungi memuat monster atau tidak. Jika dia mencapai sebarang kotak pada baris terakhir maka percobaannya selesai dan gim berakhir.

Tentukan nilai minimum dari n sehingga Turbo mempunyai suatu strategi yang menjamin bahwa dia selalu dapat mencapai baris terakhir pada percobaan ke- n atau lebih awal, tidak bergantung pada lokasi di mana monster-monster berada.

Soal 6. Misalkan \mathbb{Q} adalah himpunan semua bilangan rasional. Suatu fungsi $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dikatakan *aquaesulian* jika sifat berikut berlaku: untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{atau} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Tunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan bulat c sehingga untuk setiap fungsi aquaesulian f terdapat paling banyak c bilangan rasional berbeda yang berbentuk $f(r) + f(-r)$ untuk suatu bilangan rasional r , dan cari nilai terkecil yang mungkin dari c .