



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Arabic (ara), day 1

الثلاثاء، 16. يوليو 2024

المشارة رقم 1 حدد جميع الأعداد الحقيقة α بحيث، لكل عدد صحيح موجب n ، يكون العدد:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

مضاعفاً لـ n . (لاحظ أن $\lfloor z \rfloor$ يرمز إلى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي z . على سبيل المثال، $4 = \lfloor 2.9 \rfloor$ و $-4 = \lfloor -\pi \rfloor$). (2)

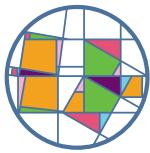
المشارة رقم 2 حدد جميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b) بحيث يوجد عددان صحيحان موجبان g و N يتحققان:

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

لكل الأعداد الصحيحة $N \geq n$. (لاحظ أن $\gcd(x, y)$ ترمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين x و y).

المشارة رقم 3 لتكن a_1, a_2, a_3, \dots متتابعة لا نهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة، ولتكن N عدد صحيح موجب. لنفترض أنه، لكل $N > n$ ، يكون a_n مساوياً لعدد المرات التي يظهر فيها a_{n-1} في القائمة a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . اثبت أن على الأقل واحدة من المتتابعين $\dots, a_1, a_3, a_5, \dots, a_2, a_4, a_6, \dots$ تكون دورية في النهاية.

(المتتابعة اللا نهائية $\dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ تكون دورية في النهاية إذا وجد عددان صحيحان موجبان p و M بحيث $b_{m+p} = b_m$ لكل $m \geq M$.



IMO 2024

65th International Mathematical Olympiad

Arabic (ara), day 2

الأربعاء، 17. يوليو 2024

المأساة رقم 4 ليكن ABC مثلثاً بحيث $AB < AC < BC$. لنكن ω هي الدائرة الداخلية للمثلث ABC ، ومركتها I . لتكن X نقطة على الضلع BC تختلف عن C بحيث يكون المستقيم المار بالنقطة X والموازي لـ AC مماساً لـ ω . وبالمثل، لنكن Y نقطة على الضلع BC تختلف عن B بحيث يكون المستقيم المار بالنقطة Y والموازي لـ AB مماساً لـ ω . ليكن AI يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مرة أخرى عند P . لنكن K و L نقطتي منتصف AC و AB على الترتيب.

أثبت أن $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

المأساة رقم 5 يلعب الحلزون توربو لعبة على رقعة تحتوي على 2024 صفاً و 2023 عموداً. هناك وحوش مخفية في 2022 من الخلايا. في البداية، لا يعرف توربو مكان أي من الوحوش، ولكنه يعرف أن هناك وحشاً واحداً بالضبط في كل صف باستثناء الصف الأول والصف الأخير، وأن كل عمود يحتوي على وحش واحد على الأكثـر.

يقوم توربو بمحاولات متتالية للانتقال من الصف الأول إلى الصف الآخـر. في كل محاولة، يختار البدء في أي خلية في الصف الأول، ثم ينتقل بشكل متكرر إلى خلية مجاورة تشارك في ضلع مشترك. (يسـمح له بالعودة إلى خلية زارها من قبل). إذا وصل إلى خلية بها وحـش، تنتـي محاولته ويتم نقله مرة أخرى إلى الصف الأول لبدء محاولة جديدة. الوحوش لا تتحرك، وتوربو يتذـكر ما إذا كانت كل خلية زارـها تحتـوي على وحـش أم لا. إذا وصل إلى أي خلية في الصف الآخـر، تنتـي محاولته وتنـتـي اللعبة.

حدد القيمة الصغرى لـ n التي يمتلك توربو استراتيجية تضمن الوصول إلى الصف الأخير في المحاولة رقم n أو قبلها، بغض النظر عن موقع الوحوش.

المأساة رقم 6 لنـكن \mathbb{Q} مجموعة الأعداد النسبية. تسمى الدالة $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$: f مائية إذا تحققت الخاصية التالية: لكل $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{أو} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

أثبت أنه يوجد عدد صحيح c بحيث لأي دالة مائية f هناك على الأكثـر c عدـداً نسبيـاً مختـلـفاً على الشـكـل $f(r) + f(-r)$ لـ عدد نـسـبيـ r ، وأوجـد أصـغر قـيمـة مـمـكـنة لـ c .