السبت, 8، تموز 2023

مسألة 1. جِدْ جميع الأعداد غير الأوّليّة $n > 1$ التي تحقّق الخاصة الآتية: إذا كانت $d_1, d_2, \ldots, d_k$ تمثّل جميع القواسم الموجبة للعدد n حيث $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$، كان d_i يقسم $d_{i+1} + d_{i+2}$ أيّاً كان العدد $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

مسألة 2. ليكن ABC مثلّثاً حاد الزوايا فيه $AB < AC$. ولتكن Ω الدائرة المارة برؤوس المثلّث . لتكن النقطة S منتصف القوس CB من Ω الذي يحوي النقطة A. العمود من A على BC يلاقي BS في D ويلاقي الدائرة Ω ثانية في $E \neq A$. المستقيم المارّ بالنقطة D موازياً BC يلاقي المستقيم BE في L. لتكن الدائرة ω المارة برؤوس المثلث BDL. ولنفترض أنّ ω تتقاطع ثانية مع Ω في $P \neq B$. أثبت أنّ المماس للدائرة ω في P يلاقي المستقيم BS في نقطة واقعة على المنصف الداخلي للزاوية $\angle BAC$.

مسألة 3. في حالة عدد صحيح $k \geqslant 2$، عيّن جميع المتتاليات اللانهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً $a_1, a_2, \ldots$ التي لأجلها يوجد كثير حدود P من الصيغة $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ أمثاله $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ أعداد صحيحة أكبر أو تساوي الصفر، ويحقق

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

أياً كان العدد الصحيح $n \geqslant 1$.

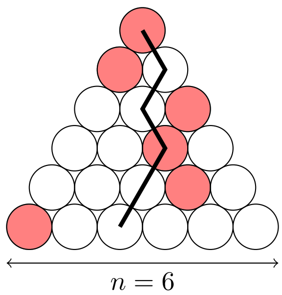
الأحد, 9. تموز 2023

مسألة 4. لتكن $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ أعداداً حقيقية موجبة مختلفة مثنى مثنى، تحقّق أنّ

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

هو عدد صحيح أياً كان $n = 1, 2, \dots, 2023$. أثبت أنّ $a_{2023} \geqslant 3034$.

مسألة 5. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً تماماً. يتألف مثلث ياباني من عدد $1 + 2 + \cdots + n$ من الدوائر المرتبة في المستوي على شكل مثلث متساوي الأضلاع يحوي السطر رقم i عدداً i من الدوائر واحدة منها فقط حمراء اللون حيث $i = 1, 2, \dots, n$. مسار النجا في مثلث ياباني هو متتالية مؤلفة من n دائرة يبدأ بالدائرة في السطر العلوي ثم ينتقل على التوالي من دائرة إلى إحدى الدائرتين الواقعتين تحتها مباشرة وصولاً إلى السطر الأخير. هنا مثال على مثلث ياباني في حالة $n = 6$ مع مسار نجا يحوي دائرتين حمراوين فيه.



جِدْ بدلالة n أكبر عدد k بحيث يحتوي أي مثلث ياباني على مسار نجا يضم k كرة حمراء اللون على الأقل.

مسألة 6. ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع. ولتكن A_1, B_1, C_1 ثلاث نقاط واقعة داخله وتحقّق

$$BA_1 = A_1C, \quad CB_1 = B_1A, \quad AC_1 = C_1B$$

وكذلك

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

يتقاطع BC_1 و CB_1 في A_2. ويتقاطع CA_1 و AC_1 في B_2، وأخيراً يتقاطع AB_1 و BA_1 في C_2. باقتراض أنّ أطوال أضلاع المثلث $A_1B_1C_1$ مختلفة مثنى مثنى أثبت وجود نقطتين مشتركتين تشترك بهما الدوائر الثلاث المارة برؤوس كل من المثلثات AA_1A_2 و BB_1B_2 و CC_1C_2 .