

Thứ Hai, ngày 9 tháng 7 năm 2018

Bài 1. Cho Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Các điểm D và E lần lượt nằm trong các đoạn thẳng AB và AC sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của BD và CE cắt các cung nhỏ AB và AC của Γ tại các điểm F và G tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng DE và FG song song.

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại các số thực a_1, a_2, \dots, a_{n+2} thỏa mãn $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ và

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

với $i = 1, 2, \dots, n$.

Bài 3. Tam giác phản-Pascal là một bảng tam giác đều chứa các số sao cho, ngoại trừ các số ở hàng dưới cùng, mỗi số là giá trị tuyệt đối của hiệu của hai số ở ngay dưới nó. Ví dụ, bảng số dưới đây là một tam giác phản-Pascal với bốn hàng và chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Tồn tại hay không một tam giác phản-Pascal với 2018 hàng và chứa tất cả các số từ 1 đến $1 + 2 + \dots + 2018$?

Thứ Ba, ngày 10 tháng 7 năm 2018

Bài 4. Một vị trí là một điểm (x, y) trên mặt phẳng sao cho x và y là các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 20.

Lúc đầu, tất cả 400 vị trí đều trống. Ánh và Bảo lần lượt đặt các viên đá với Ánh là người đi trước. Trong mỗi lượt đi của mình, Ánh đặt một viên đá màu đỏ vào một vị trí trống sao cho khoảng cách giữa hai vị trí bất kì được đặt đá màu đỏ sẽ khác $\sqrt{5}$. Trong mỗi lượt đi của mình, Bảo đặt một viên đá màu xanh vào một vị trí trống bất kì. (Vị trí được đặt viên đá màu xanh có thể ở bất kì khoảng cách nào đến các vị trí đã được đặt đá.) Hai bạn sẽ dừng lại khi một trong hai người không thể tiếp tục đặt được các viên đá.

Tìm giá trị lớn nhất của K sao cho Ánh luôn có thể đặt được ít nhất K viên đá mà không phụ thuộc vào cách đặt đá của Bảo.

Bài 5. Cho a_1, a_2, \dots là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $N > 1$ sao cho với mọi $n \geq N$, số

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương M sao cho $a_m = a_{m+1}$ với mọi $m \geq M$.

Bài 6. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Điểm X nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{và} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Chứng minh rằng $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.