Mánudagur, 11. júlí, 2016

Dæmi 1. Í þríhyrningnum BCF er hornið B rétt. Látum A vera punktinn á línunni CF þannig að $|FA| = |FB|$ og F liggur á milli A og C. Punktur D er valinn þannig að $|DA| = |DC|$ og AC er helmingalína $\angle DAB$. Punktur E er valinn þannig að $|EA| = |ED|$ og AD er helmingalína $\angle EAC$. Látum M vera miðpunkt CF. Látum X vera punktinn þannig að $AMXE$ er samsíðungur (þar sem $AM \parallel EX$ og $AE \parallel MX$). Sannið að línurnar BD, FX og ME skerast í einum punkti.

Dæmi 2. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að í sérhvern reit $n \times n$ töflu sé hægt að rita einn af bókstöfunum I, M og O þannig að:

- í sérhverri línu og í sérhverjum dálki inniheldur þriðjungur reitanna I, þriðjungur reitanna M og þriðjungur reitanna O; og
- í sérhverri skálínnu sem hefur fjölda reita sem er margfeldi af þremur þá inniheldur þriðjungur reitanna I, þriðjungur reitanna M og þriðjungur reitanna O.

Athugasemd: Línur og dálkar $n \times n$ töflu eru númeraðir frá 1 upp í n á venjulegan máta. Þar með samsvarar hver reitur tvennd af jákvæðum heiltölum (i, j) með $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Fyrir $n > 1$ hefur taflan $4n - 2$ *skálínur* af tvennu tagi. Fyrri gerðin af skálínum samanstendur af öllum reitum (i, j) þannig að $i + j$ er fasti og seinni gerðin af skálínum samanstendur af öllum reitum (i, j) þannig að $i - j$ er fasti.

Dæmi 3. Látum $P = A_1A_2 \ldots A_k$ vera úthyrndan marghyrning í sléttunni. Hornpunktarnir $A_1, A_2, \ldots, A_k$ hafa heiltölu hnit og liggja á hring. Látum S vera flatarmál P. Jákvæð oddatala n er gefin þannig að hliðarlengdir P í öðru veldi séu heiltölur deilanlegar með n. Sannið að $2S$ er heiltala deilanleg með n.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er 7 stiga virði

Þriðjudagur, 12. júlí, 2016

Dæmi 4. Mengi jákvæðra heiltalna er sagt vera *angandi* ef það inniheldur að minnsta kosti tvö stök og sérhvert stak hefur sameiginlegan frumþátt með að minnsta kosti einu af hinum stökunum. Látum $P(n) = n^2 + n + 1$. Hvað er minnsta mögulega gildi á jákvæðri heiltölu b þannig að til sé ekki neikvæð heiltala a þannig að mengið

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

sé angandi?

Dæmi 5. Jafnan

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

er skrifuð upp á töflu. Það eru 2016 línulega þætti á hvorri hlið jöfnunnar. Hvað er minnsta mögulega gildið á k þannig að hægt sé að stroka út nákvæmlega k af þessum 4032 línulegum þáttum þannig að að minnsta kosti einn þáttur sé eftir á hvorri hlið og að jafnan sem eftir stendur hafi enga rauntölulausn?

Dæmi 6. Það eru $n \geqslant 2$ línustrik í sléttunni þannig að sérhver tvö strik skerast en ekki í endapunkti og engin þrjú strik skerast í sama punkti. Gutti þarf að velja annan enda á sérhverju striki og setja frosk þar sem snýr að hinum enda striksins. Síðan mun hann klappa $n-1$ sinnum. Eftir hvert klapp mun sérhver froskur stökkva strax beint áfram á næsta skurðpunk á strikinu sínu. Froskarnir breyta aldrei um stökkstefnu. Gutti will setja froskana niður þannig að engir tveir munu nokkurntíma vera staddir á sama skurðpunkti á samatímis.

(a) Sannið að Gutti getur alltaf orðið að ósk sinni ef n er oddatala.

(b) Sannið að Gutti getur aldrei orðið að ósk sinni ef n er slétt.

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur
Hvert dæmi er 7 stiga virði