

12. juuli 2006

Ülesanne 1. Olgu ABC kolmnurk ja I tema siseringjoone keskpunkt. Punkt P selle kolmnurga sees rahuldab tingimust

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Näita, et $|AP| \geq |AI|$, kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $P = I$.

Ülesanne 2. Olgu P korrapärane 2006-nurk. P diagonaali nimetame “heaks”, kui tema otspunktid jaotavad P rajajoone kaheks osaks, mis kumbki koosneb paaritust arvust P külgedest. P külgi nimetame samuti “headeks”.

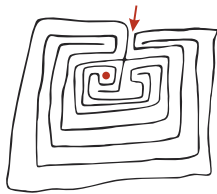
Vaatleme P jaotusi kolmnurkadeks 2003 sellise diagonaaliga, millest ühelgi kahel ei ole P sees ühist punkti. Leia suurim kahe “hea” küljega võrdhaarsete kolmnurkade arv, mis saab sellises jaotuses esineda.

Ülesanne 3. Leia vähim selline reaalarv M , et võrratus

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

kehtib kõigi reaalarvude a , b ja c korral.

*Aega on 4 tundi 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.*



13. juuli 2006

Ülesanne 4. Leia kõik sellised täisarvupaarid (x, y) , et

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Ülesanne 5. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom astmega $n > 1$ ja olgu k positiivne täisarv. Vaatleme polünoomi $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, kus P esineb k korda. Tõesta, et leidub ülimalt n sellist täisarvu t , et $Q(t) = t$.

Ülesanne 6. Kumera hulknurga P igale küljele b seame vastavusse suurima pindala, mida omab mõni hulknurgas P sisalduv kolmnurk, mille üks külg on b . Näita, et P külgedele vastavusse seatud pindalade summa on vähemalt kaks korda suurem P pindalast.

*Aega on 4 tundi 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.*