



יום שני, 19. יולי 2021

שאלה 1. יהא $n \geq 100$ מספר שלם. מאיר כותב את המספרים $n, n+1, \dots, 2n$ על קלפים, כל מספר על קלף משלו. לאחר מכן הוא מערבב את $n+1$ הקלפים, ומחלק אותם לשתי ערמות. הוכיחו כי בלפחות אחת מהערמות יש שני קלפים אשר סכום המספרים עליהם הוא ריבוע שלם.

שאלה 2. הוכיחו כי האי-שיוויון

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

מתקיים לכל n מספרים ממשיים x_1, \dots, x_n .

שאלה 3. יהא ABC משולש חד זוויות בו $AB > AC$. תהא D נקודה פנימית במשולש ABC עבורה $\angle DAB = \angle CAD$. הנקודה E על הקטע AC מקיימת $\angle ADE = \angle BCD$, הנקודה F על הקטע AB מקיימת $\angle FDA = \angle DBC$, והנקודה X על הישר AC מקיימת $CX = BX$. יהיו O_1 ו- O_2 מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים ADC ו- EXD , בהתאמה. הוכיחו כי הישרים BC , EF , ו- O_1O_2 נפגשים בנקודה אחת.



יום שלישי, 20 ביולי 2021

שאלה 4. יהא Γ מעגל עם מרכז I , ויהא $ABCD$ מרובע קמור בו כל אחד מהקטעים AB, BC, CD ו- DA משיק למעגל Γ . יהא Ω המעגל החוסם של AIC . המשך הקרן BA מעבר ל- A פוגש את Ω בנקודה X , והמשך הקרן BC מעבר ל- C פוגש את Ω בנקודה Z . המשכי הקרניים AD ו- CD מעבר ל- D פוגשים את Ω בנקודות Y ו- T , בהתאמה. הוכיחו כי

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

שאלה 5. שתי לוטרות, ששמותיהן ברווז וג'ירפה, אספו 2021 אבנים לפתיחת צדפות. ג'ירפה סימנה את האבנים במספרים 1 עד 2021, וחפרה 2021 בורות קטנים במעגל מסביב לעץ האהוב עליהן. בבוקר למחרת ג'ירפה הבחינה שברווז הכניס אבן אחת לכל בור, אך לא התייחס למספורן כלל. ג'ירפה האומללה החליטה לסדר מחדש את האבנים באמצעות סדרה של 2021 מהלכים. במהלך ה- k , ג'ירפה החליפה את המיקומים של שתי האבנים הסמוכות לאבן k . הוכיחו כי קיים ערך של k עבורו במהלך ה- k ג'ירפה החליפה אבנים a ו- b עם $a < k < b$.

שאלה 6. יהא $m \geq 2$ מספר שלם, תהא A קבוצה סופית של שלמים (לאו דווקא חיוביים), ותהא $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ תתי-קבוצות של A . נתון כי לכל $k = 1, 2, \dots, m$ סכום איברי B_k שווה m^k . הוכיחו כי A מכילה לפחות $m/2$ איברים.