

12 ביולי 2006

שאלה מס' 1.

יהי ABC משולש שמרכזו המ Engel החסום שלו הוא I . נקודה P הנמצאת בתחום המשולש מקיימת את השוויון

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

הוכח כי $AP \geq AI$ וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $I = P$.

שאלה מס' 2.

יהי P מצולע משוכלל בעל 2006 צלעות. אלכסון של P נקרא טוב אם שני קצוותיו מחולקים את הhip של P לשני חלקיים, שככל אחד מהם מורכב ממספר איזוגי של צלעות של P . הצלעות של המצולע P נקראות גם הן טובות.

נניח כי המצולע P חולק למשולשים על ידי העברת 2003 אלכסונים, כך שאין בהם שני אלכסונים בעלי נקודה משותפת הנמצאת בתחום המצולע P . מצא את המספר הגדול ביותר של משולשים שווים שוקיים, שיש להם שתי צלעות טובות, אשר יכולים להתקבל בתצורה כזו.

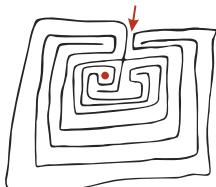
שאלה מס' 3.

מצא את המספר ממשי M הקטן ביותר, כך שאיל השוויון

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

מתקיים עבור כל שלושה מספרים ממשיים a, b, c .

זמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות



13 ביולי 2006

שאלה מס' 4.

מצא את כל הזוגות (x, y) של מספרים שלמים כך ש

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

שאלה מס' 5.

יהי (x) פולינום בעל דרגה $I > n$ ובעל מקדמים שלמים, ויהי k מספר שלם חיובי. נתבונן בפולינום $((P(x)) \dots P(P(x))) \dots Q(x) = P(P(\dots P(P(x))))$, כאשר P מופיע k פעמים. הוכח כי קיימים לכל היותר n מספרים שלמים t כך ש $Q(t) = t$.

שאלה מס' 6.

לכל צלע b של פוליגון קמור P נשיק את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחד שלו היא b וכולו מוכל ב- P . הוכח כי הסכום של השטחים המשווים לצלעות של P שווה לפחות $\frac{1}{2}$ שטח של P .

זמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות