понеделник, 21. септември 2020

Задача 1. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$. Точката P е вътрешна за $ABCD$. В сила са следните отношения:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Да се докаже, че следните три прави се пресичат в една точка: вътрешните ъглополовящи на ъглите $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и симетралата на отсечката AB.

Задача 2. Реалните числа a, b, c, d са такива, че $a \geq b \geq c \geq d > 0$ и $a+b+c+d = 1$. Да се докаже, че

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задача 3. Имаме $4n$ камъчета с тегла $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Всяко камъче е оцветено в един от n цвята, като от всеки цвят има по точно четири камъчета. Да се покаже, че камъчетата могат да се подредят в две купчини, като следните условия са едновременно изпълнени:

- Общото тегло в двете купчини е едно и също.
- Всяка купчина съдържа по две камъчета от всеки цвят.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

вторник, 22. септември 2020

Задача 4. Дадено е цяло число $n > 1$. Върху склона на планина се намират n^2 станции, всички на различна надморска височина. Всяка от две лифтени компании, A и B, обслужва по k въжени линии; като всяка въжена линия осигурява директен превоз от една от станциите до по-висока такава (без междинни спирки). Всички k въжени линии на A тръгват от k различни начални станции и стигат до k различни крайни станции, при това въжена линия, която тръгва от по-висока начална станция стига до по-висока крайна станция. Същите условия са в сила и за B. Ще казваме, че две станции са *свързани* чрез лифтена компания, ако човек може да тръгне от по-ниската и да стигне до по-високата, използвайки една или повече въжени линии на компанията (други придвижвания между станциите не са позволени).

Да се определи най-малкото естествено число k, за което винаги има две станции, свързани и от двете компании.

Задача 5. Дадено е тесте от $n > 1$ карти. Върху всяка карта е написано естествено число. Тестето има свойството, че средното аритметично на числата върху всяка двойка карти е равно на средното геометрично на числата върху група от една или повече карти.

За кои n от горното условие следва, че числата върху всички карти са равни?

Задача 6. Да се докаже, че съществува положителна константа c, за която следното твърдение е вярно:

За всяко естествено число $n > 1$ и всяко множество $\mathcal{S}$ от n точки в равнината, такива че разстоянието между всеки две различни точки от $\mathcal{S}$ е поне 1, съществува права ℓ, разделяща $\mathcal{S}$, такава че разстоянието от всяка точка от $\mathcal{S}$ до ℓ е поне $cn^{-1/3}$.

(Права ℓ *разделя* множество от точки $\mathcal{S}$, ако отсечка, свързваща две от точките на $\mathcal{S}$, пресича ℓ.)

Забележка. По-слаби резултати от $cn^{-1/3}$ от вида $cn^{-\alpha}$ е възможно да получат точки в зависимост от стойността на константата $\alpha > 1/3$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.