



الاثنين ١٨-٧-٢٠١١

١. لكل مجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ مكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة و مختلفة، نجعل $S_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. ليكن n_A عدد الأزواج (i, j) حيث $1 \leq i < j \leq 4$ بحيث $a_i + a_j$ يقسم S_A . جد جميع المجموعات A المكونة من أربعة أعداد صحيحة مختلفة و التي تجعل n_A أكبر ما يمكن.
٢. لتكن S مجموعة منتهية مكونة من نقطتين على الأقل في المستوي. لنفرض عدم وجود ثلاث نقط على استقامة واحدة في S . نطلق على العملية التالية اسم طاحونة الهواء: نبدأ بمستقيم l يمر بنقطة واحدة $P \in S$ ، ثم ندير l باتجاه عقارب الساعة حول مركز الدوران P حتى يمر على أول نقطة Q في S مختلفة عن P . النقطة Q تصبح مركز الدوران الجديد للمستقيم l الذي يدور حولها باتجاه عقارب الساعة إلى أن يلتقي مع نقطة في S ، و هكذا تستمر هذه العملية ما لانهاية من المرات. بين أنه يمكننا اختيار نقطة P في S و مستقيم مناسب l يمر في P بحيث أن الطاحونة الناتجة تمر على جميع نقط S كمراكز دوران بعدد لانهائي من المرات.
٣. لتكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى نفسها و تحقق ما يلي

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

لكل الأعداد الحقيقية x و y . برهن أن $f(x) = 0$ لكل $x \leq 0$.



الثلاثاء ١٩-٧-٢٠١١

٤- ليكن $n > 0$ عدداً صحيحاً. لدينا ميزان بكفتين و n من الأثقال قيمها $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. نضع هذه الأثقال على الميزان واحداً تلو الآخر من خلال n من الحركات المتوالية ، بحيث لا ترحج الكفة اليمنى على اليسرى في أي حال من الأحوال. في كل حركة نختار واحداً من الأثقال التي لم نضعها على الميزان بعد ثم نضعه إما على الكفة اليمنى أو اليسرى و نستمر إلى أن ننتهي من وضع جميع الأثقال. جد عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها أن ننفذ هذه الحركات المتوالية

٥- لتكن f دالة من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. لنفرض انه لكل عددين صحيحين m و n ، المقدار $f(m) - f(n)$ يقبل القسمة على $f(m-n)$. لكل الأعداد الصحيحة m و n بحيث $f(m) \leq f(n)$ ، برهن أن العدد $f(n)$ يقبل القسمة على $f(m)$ ،

٦- لدينا مثلث ABC حاد الزوايا و Γ الدائرة المارة برؤوسه. ليكن l مستقيماً مماساً للدائرة Γ . لتكن l_a, l_b, l_c المستقيمات المنعكسة من المستقيم (المنظرة للمستقيم) l نسبة إلى المستقيمات BC, CA, AB على الترتيب. بين أن الدائرة المحيطة برؤوس المثلث المتعين بالمستقيمات l_a, l_b, l_c تماس الدائرة Γ .