

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

ខ្លួន ពី ១៦ កក្កដា ២០០៨

លំហាត់ ១: គោរព ABC ជាផ្ទៃកោណដែលមុនាំងអស់ជាមុន្យច H ជាអរគូសង់ ។ រួចកាត់តាម H មាន ផ្ទើតជាចំនួចកណ្តាលនៃ BC រួចនៃប្រសព្វនឹង BC ត្រង់ A₁ និង A₂ ។ ផ្ទើតជានេះដើរ រួចកាត់តាម H មានផ្ទើតជាចំនួចកណ្តាលនៃ CA ហើយរួចនៃប្រសព្វនឹង CA ត្រង់ B₁ និង B₂ ។ រួចនៃមួយទ្វៈពាត់តាម H ដែលមានផ្ទើតជាចំនួចកណ្តាលនៃ AB រួចនៃប្រសព្វនឹង AB ត្រង់ C₁ និង C₂ ។ បង្ហាញថាចំនួច A₁, A₂, B₁, B₂, C₁, C₂ ស្ថិតនៅលើរួចនៃពេមួយ ។

លំហាត់ ២: (ក) បង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z ដែលចំនួននិមួយទីមក 1 ហើយធ្វើងផ្ទាត់ xyz = 1

(ខ) បង្ហាញថាវិសមភាពខាងលើនេះទៅជាសមភាព ចំពោះត្រួតពិនិត្យ x, y, z ត្រូវនឹងរបៀប មិនអស់ដែល x, y, z ជាចំនួនសនិទានខុសពី 1 និង ធ្វើងផ្ទាត់ xyz = 1 ។

លំហាត់ ៣: បង្ហាញថាមានចំនួនគតវិធីមាន n ត្រូវនឹងរបៀប មិនអស់ដែល $n^2 + 1$ មានត្រូវចែក ជាចំនួនបច្ចេកទេស ដំបាន $2n + \sqrt{2n}$ ។



**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

ក្រសួងពេទ្យ និង ការបណ្តុះបណ្តាល

លំហាត់ ៤: រកត្រូវបែងអនុវត្តន៍ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (មាននូយថា f ជាអនុវត្តន៍ពីចំនួនពិតវិធីមានទៅចំនួនពិតវិធីមាន) ដែល

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

ចំណោះត្រប់ចំនួនពិតិវិធីមាន w, x, y, z ដែលផ្លូវងារដូចតាំ $wx = yz$ ។

លំហាត់ ៤: គោរព n និង k ជាចំនួនគតិផ្លូមានដោយ $k \geq n$ និង $k - n$ ជាចំនួនគតុ។ គោរពអំពូលចំនួន $2n$ ដែលជាកំណែល $1, 2, \dots, 2n$ អំពូលនិមួយៗនៃអំពូលទាំងនេះវាមិន បើក វិលី ឬ ធម៌ ។ ដូច្នេះ អំពូលទាំងអស់នឹង យើងទិន្ន្រ័ត្ត ស្ថិតនៃជំហាត់ នៅជាបាននិមួយៗ អំពូលមួយនៃអំពូលទាំងនេះត្រូវបានឱ្យបញ្ជូន (ចុចបញ្ជូនពិបិកទៅបិទ វិចុចបញ្ជូនពិបិទទៅបិក) ។

តាត N ជាចំនួននៃស្ថិតិនេះ ដែលមាន k ដំបាកន ហើយធ្វើអាយមានស្ថានភាព ដែលអំពុលពី 1 ទៅ n ទាំងអស់បើកនិង អំពុល n+1 ទៅ 2n ទាំងអស់បិច្ច។

ពារ M ជាចំនួនស្ថិតនេះ ដែលមាន k ជំហើន ធ្វើឡាយមានស្ថានភាព ដែលអំពូលពី 1 ទៅ n ទាំងអស់បើក និង អំពូល $n+1$ ទៅ $2n$ ទាំងអស់បិទ ប៉ុន្តែការអំពូលពី $n+1$ ទៅ $2n$ ធាប់បានបើកទេ។

កំណត់អត្រា N / M ၅

លំហាត់ ៦: គើរការពិនិត្យការណ៍ដោយ ដែល $|BA| \neq |BC|$ ។ តាត ω_1 និង ω_2 ជានួចដៃក្នុងត្រីការណា ABC និង ADC រួចរាល់។ ឧបមាថា មាននួចដៃ ω បែងក្នុងបន្ទាត់ BA បន្ទាយចេញពី A និងបែងក្នុងបន្ទាត់ BC បន្ទាយចេញពី C ដែលរួចរាល់ក្នុងបន្ទាត់ AD និង CD ដែរ។

បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៊ែរមខាងក្រោមទាំងសងខាងនីងរដ្ឋធំ ឬ និង រដ្ឋធំ ឬ ប្រសព្វតាមីនីរដ្ឋធំ ។