ორშაბათი, 9 ივლისი, 2018

ამოცანა 1. ვთქვათ Γ არის ABC მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. AB და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად D და E წერტილები ისე, რომ $AD = AE$. BD და CE მონაკვეთის შუამართობები კვეთენ Γ წრეწირის მცირე AB და AC რკალებს, შესაბამისად F და G წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ DE და FG წრფეები ერთმანეთის პარალელურია, ან ერთმანეთს ემთხვევა.

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა მთელი $n \geq 3$ რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს ნამდვილი $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, რიცხვები ისეთი, რომ $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ და

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

ყოველი $i = 1, 2, \ldots, n$.

ამოცანა 3. *ანტი-პასკალის სამკუთხედი* ვუწოდოთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის ცხრილს, რომელშიც ჩაწერილია რიცხვები ისე, რომ ბოლო სტრიქონში მდგომი რიცხვების გარდა, ყოველი რიცხვი ტოლია უშუალოდ მის ქვეშ მდგომი ორი რიცხვის სხვაობის მოდულის. ქვემოთ მოცემულია მაგალითი ანტი-პასკალის სამკუთხედისა, რომელიც ოთხი სტრიქონისგან შედგება და რომელშიც გვხვდება ყველა მთელი რიცხვი 1-დან 10-ის ჩათვლით.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

არსებობს თუ არა ანტი-პასკალის სამკუთხედი, რომელიც 2018 სტრიქონისგან შედგება და რომელშიც გვხვდება ყველა მთელი რიცხვი 1-დან $1 + 2 + \cdots + 2018$-ის ჩათვლით?

სამუშაო დრო: 4 სთ და 30 წთ
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

სამშაბათი, 10 ივლისი, 2018

ამოცანა 4. საკოორდინატო სიბრტყეზე *მონიშნულია* ყველა წერტილი კოორდინატებით (x, y), სადაც x და y მთელი დადებითი რიცხვებია, რომელთაგან თითოეული არ აღემატება 20-ს.

დასაწყისში 400-ვე მონიშნული წერტილი ცარიელია. ანო და ვანო რიგ-რიგობით აკეთებენ სვლებს. პირველ სვლას აკეთებს ანო. თავის სვლაზე ანო დებს ახალ წითელ ქვას ცარიელ მონიშნულ წერტილზე ისე, რომ მანძილი ნებისმიერ ორ წითელ ქვას შორის არ იყოს $\sqrt{5}$-ის ტოლი. ვანო თავის სვლაზე დებს ახალ ლურჯ ქვას ცარიელ მონიშნულ წერტილზე.(წერტილი, რომელზეც ლურჯი ქვა დევს, შეიძლება დაშორებული იყოს ნებისმიერი მანძილით სხვა დაკავებული წერტილიდან.) თამაში წყდება როცა რომელიმე მოთამაშეს აღარ შეუძლია სვლის გაკეთება. იპოვეთ უდიდესი K ისეთი, რომ ანოს შეუძლია დადოს არანაკლებ K ცალი წითელი ქვა, მიუხედავად ვანოს სვლებისა.

ამოცანა 5. ვთქვათ $a_1, a_2, \ldots$ მთელ დადებით რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობაა. დავუშვათ არსებობს მთელი რიცხვი $N > 1$ ისეთი, რომ ყოველი $n \geq N$, რიცხვი

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

არის მთელი. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი M ისეთი, რომ $a_m = a_{m+1}$ ყოველი $m \geq M$.

ამოცანა 6. $ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. X წერტილი აღებულია $ABCD$-ს შიგნით ისე, რომ

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{და} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

დაამტკიცეთ, რომ $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.