Τρίτη, 16 Ιουλίου, 2019

Πρόβλημα 1. Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες ώστε, για όλους τους ακεραίους a και b, να ισχύει

$$f(2a) + 2f(b) = f\big(f(a+b)\big).$$

Πρόβλημα 2. Στο τρίγωνο ABC, το σημείο A_1 βρίσκεται στην πλευρά BC και το σημείο B_1 βρίσκεται στην πλευρά AC. Έστω P και Q δύο σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα AA_1 και BB_1, αντίστοιχα, έτσι ώστε το PQ είναι παράλληλο προς το AB. Έστω P_1 σημείο της ευθείας PB_1, έτσι ώστε το B_1 να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία P και P_1, και $\angle PP_1C = \angle BAC$. Ομοίως, έστω Q_1 σημείο της ευθείας QA_1, έτσι ώστε το A_1 να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Q και Q_1, και $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία P, Q, P_1, και Q_1 είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3. Σε ένα κοινωνικό δίκτυο που έχει 2019 χρήστες, μερικά ζεύγη από αυτούς είναι φίλοι. Όταν ο χρήστης A είναι φίλος με τον χρήστη B, ο χρήστης B είναι επίσης φίλος με τον χρήστη A. Συμβάντα όπως το παρακάτω μπορεί να συμβούν επαναληπτικά, αλλά ένα κάθε φορά:

> Τρεις χρήστες A, B, και C τέτοιοι ώστε ο A είναι φίλος και με τους δύο B και C, αλλά οι B και C δεν είναι φίλοι μεταξύ τους, αλλάζουν την κατάσταση φιλίας τους ώστε οι B και C γίνονται φίλοι, ενώ ο A δεν είναι πλέον φίλος με τον B, και δεν είναι πλέον φίλος με τον C. Όλες οι άλλες καταστάσεις φιλίας δεν αλλάζουν.

Αρχικά, 1010 χρήστες έχουν 1009 φίλους ο καθένας, και 1009 χρήστες έχουν 1010 φίλους ο καθένας. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακολουθία τέτοιων συμβάντων μετά την οποία ο κάθε χρήστης είναι φίλος με το πολύ έναν άλλο χρήστη.

Τετάρτη, 17 Ιουλίου, 2019

Πρόβλημα 4. Να βρείτε όλα τα ζεύγη (k, n) θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την εξίσωση

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Πρόβλημα 5. Η Τράπεζα του Bath εκδίδει νομίσματα με το H στην μια όψη και το T στην άλλη όψη. Ο Χάρης έχει n από αυτά τα νομίσματα τοποθετημένα σε μία γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά. Ο Χάρης εκτελεί επαναληπτικά την παρακάτω πράξη: αν υπάρχουν ακριβώς $k > 0$ νομίσματα στα οποία φαίνεται η όψη H, τότε αναποδογυρίζει το νόμισμα που βρίσκεται στη θέση k από τα αριστερά, διαφορετικά, αν σε όλα τα νομίσματα φαίνεται η όψη T , τότε σταματά. Για παράδειγμα, αν $n = 3$ η διαδικασία που αρχίζει με την τοποθέτηση THT θα είναι $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, η οποία σταματά μετά από τρεις πράξεις.

a) Να αποδείξετε ότι, για κάθε αρχική τοποθέτηση, ο Χάρης σταματά μετά από πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

b) Για κάθε αρχική τοποθέτηση C, έστω $L(C)$ ο αριθμός των πράξεων μέχρι που ο Χάρης να σταματήσει. Για παράδειγμα, $L(THT) = 3$ και $L(TTT) = 0$. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των τιμών του $L(C)$ για όλες τις 2^n δυνατές αρχικές τοποθετήσεις C.

Πρόβλημα 6. Έστω I το έκκεντρο του οξυγώνιου τριγώνου ABC με $AB \neq AC$. Ο εγγεγραμμένος κύκλος ω του ABC εφάπτεται των πλευρών BC, CA, και AB στα σημεία D, E, και F, αντίστοιχα. Η ευθεία που περνά από το σημείο D και είναι κάθετη στο EF τέμνει τον κύκλο ω ξανά στο σημείο R. Η ευθεία AR τέμνει ξανά τον κύκλο ω στο σημείο P. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων PCE και PBF τέμνονται ξανά στο σημείο Q.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DI και PQ τέμνονται πάνω στην ευθεία που περνά από το A και είναι κάθετη στο AI.