الاثنين 11 جويلية 2016

المسألة 1. المثلّث BCF قائم في B. لتكن A النّقطة على المستقيم (CF) الّتي تحقّق $FA = FB$ و تجعل F بين A و C. نختار النّقطة D بحيث $DA = DC$ و $[AC]$ هو منصّف الزّاوية $\angle DAB$. نختار النّقطة E بحيث $EA = ED$ و $[AD]$ هو منصّف الزّاوية $\angle EAC$.
لتكن M منتصف $[CF]$ ، و X النّقطة الّتي تجعل $AMXE$ متوازي الأضلاع (أي $(AM) \parallel (EX)$ و $(AE) \parallel (MX)$).
أثبت أنّ المستقيمات (BD) و(FX) و (ME) تتقاطع في نقطة واحدة.

المسألة 2. جد كلّ الأعداد الصّحيحة الموجبة قطعا n الّتي لأجلها يمكننا ملء كلّ خانة من خانات جدول من قياس $n \times n$ بأحد الرّموز I أو M أو O بحيث يتحقّق الشّرطان التّاليان:

- يكون في كلّ سطر و في كلّ عمود ثلث الخانات مملوءا بـ I ، وثلث الخانات مملوءا بـ M وثلث الخانات مملوءا بـ O ؛
- في كلّ قطر عدد خاناته مضاعف لثلاثة، يكون ثلث خاناته مملوءا بـ I ، وثلث خاناته مملوءا بـ M وثلث خاناته مملوءا بـ O .

ملاحظة : يتمّ ترقيم صفوف وأعمدة جدول من قياس $n \times n$ بالتّرقيم المعهود من 1 إلى n . هذا الترقيم يمكّننا من تحديد كلّ خانة بزوج (i, j) مكوّن من عددين صحيحيّين موجبين قطعا $1 \leqslant i, j \leqslant n$ ، لكلّ $n > 1$.
هناك $4n - 2$ قطرا في الجدول، وهي من نوعين. أقطار من النّوع الأوّل تتكوّن من الخانات (i, j) حيث يكون $i + j$ عددا ثابتا، وأقطار من النّوع الثّاني تتكوّن من الخانات (i, j) حيث يكون $i - j$ عددا ثابتا.

المسألة 3.
ليكن $P = A_1A_2 \ldots A_k$ مضلّعا محدّبا في المستوي. تقع الرّؤوس A_1 ، A_2 ، ... ، A_k كلّها على دائرة وإحداثياتها أزواج أعداد صحيحة. لتكن S مساحة P. تمّ اعتبار عدد صحيح فرديّ موجب n بحيث يكون مربّع طول كلّ ضلع P عددا صحيحيّا يقبل القسمة على n.
أثبت أنّ $2S$ عدد صحيح يقبل القسمة على n.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة
تمنح 7 نقاط لكلّ مسألة

الثّلاثاء 12 جويلية 2016

المسألة 4. نقول عن مجموعة أعداد صحيحة موجبة قطعا إنّها عطرة إذا كانت تحتوي على عنصرين أو أكثر وكان كلّ عنصر فيها يشترك مع عنصر آخر على الأقل في عامل أوّليّ. ليكن $P(n) = n^2 + n + 1$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد الصّحيح الموجب قطعا b الّتي لأجلها يوجد عدد صحيح موجب a يجعل المجموعة

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

عطرة؟

المسألة 5. تمّ كتابة المعادلة

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

على السّبورة، والّتي تحوي في كلّ طرف من طرفيها على 2016 عامل خطّيّ. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد k الّتي لأجلها يمكننا محو k من هذه العوامل الخطيّة الّتي عددها 4032 بحيث يبقى على الأقل عامل في الطّرفين وتكون المعادلة الجديدة بدون جذور حقيقيّة؟

المسألة 6. هناك $n \geqslant 2$ قطعة مستقيمة في المستوي بحيث تتقاطع كلّ قطعتين في غير طرفيهما ولا تلتقي ثلاثة منها في نقطة واحدة. يريد جعفر أن يختار من كلّ قطعة طرفا يضع فيه ضفدعة تنظر في اتّجاه الطّرف المقابل. ثمّ يصفّق جعفر $n-1$ مرّة متتالية. عند كلّ تصفيقة تقفز كلّ ضفدعة إلى نقطة التّقاطع التّالية على قطعتها، مع العلم أنّ الضّفادع لا تغيّر أبدا وجهتها. يرغب جعفر في أن يضع الضّفادع بحيث لا تلتقي منها ضفدعتان أبدا في نقطة تقاطع في نفس الوقت.

ا. أثبت أنّه يمكن دائما لجعفر أن يحقّق رغبته إذا كانت قيمة n فرديّة.

ب. أثبت أنّه لا يمكن أبدا لجعفر أن يحقّق رغبته إذا كانت قيمة n زوجيّة.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

تمنح 7 نقاط لكلّ مسألة