금요일, 2015.7.10

문제 1. 평면의 유한점모임 $\mathcal{S}$ 는 만일 $\mathcal{S}$ 의 임의의 서로 다른 두 점 A, B 에 대하여 $AC = BC$ 인 $\mathcal{S}$ 의 점 C 가 항상 존재할 때 '**평형적**'이라고 부른다.

또한 $\mathcal{S}$ 는 만일 $\mathcal{S}$ 의 그 어떤 서로 다른 세 점 A, B, C 에 대하여서도 $PA = PB = PC$ 인 $\mathcal{S}$ 의 점 P 가 존재하지 않을 때 '**비중심적**'이라고 부른다.

(a) 임의의 옹근수 $n \geq 3$ 에 대하여 n 개의 점들로 이루어진 평형적인 모임이 존재한다는것을 증명하여라.

(b) n 개의 점들로 이루어진 평형적이고 비중심적인 모임이 존재하게 되는 옹근수 $n \geq 3$ 을 모두 구하여라.

문제 2. 정의 옹근수들의 순서조 (a, b, c) 로서 세개의 수

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

가 모두 2 의 제곱수가 되는것을 모두 구하여라.

(2 의 제곱수란 n 이 부아닌 옹근수일 때 2^n 형태의 옹근수를 말한다.)

문제 3. ABC 가 $AB > AC$ 인 뾰족 3 각형이다. Γ 는 이것의 외접원이고 H 는 이것의 수심이며 F 는 A 에서 밑변에 그은 수직선의 밑점이다.

M 가 변 BC 의 가운데점이라고 하자. Q 가 Γ 우의 점으로서 $\angle HQA = 90^\circ$ 를 만족하고 K 가 Γ 우의 점으로서 $\angle HKQ = 90^\circ$ 를 만족한다고 하자.

점 A, B, C, K, Q 들이 모두 서로 다르고 Γ 우에서 이 순서대로 놓여있다고 하자.

이때 3 각형 KQH 의 외접원과 3 각형 FKM 의 외접원이 서로 접한다는것을 증명하여라.

제한시간 : 4 *시간* 30 *분*
문제당 : 7 *점*

토요일, 2015.7.11

문제 4. 3각형 ABC의 외접원을 Ω, 외심을 O라고 하자. A를 중심으로 하는 한 원 Γ가 선분 BC와 두 점 D, E에서 사귀는데 B, D, E, C가 모두 서로 다르고 선분 BC우에서 이 순서로 놓여있다고 한다. F, G는 두 원 Γ와 Ω의 사귐점들로서 A, F, B, C, G가 Ω우에서 이 순서로 놓여있다.

K는 3각형 BDF의 외접원과 선분 AB의 두번째사귐점이고 L은 3각형 CGE의 외접원과 선분 CA의 두번째사귐점이라고 하자.
직선 FK와 GL이 서로 다르고 점 X에서 사귄다고 하자.
이때 X가 직선 AO우에 놓인다는것을 증명하여라.

문제 5. 실수전체의 모임을 R로 표시하자. 이때 다음 조건을 만족하는 함수 $f : R \to R$를 모두 구하여라: 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+f(x+y))+f(xy) = x+f(x+y)+yf(x)$$

가 선다.

문제 6. 옹근수들로 이루어진 수렬 $a_1, a_2, \ldots$이 다음의 조건들을 만족한다:

(i) 모든 $j \geq 1$ 에 대하여 $1 \leq a_j \leq 2015$ 가 선다;

(ii) 모든 $1 \leq k < \ell$ 에 대하여 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ 이 선다.

이때 두개의 정의 옹근수 b와 N이 존재하여 $n > m \geq N$ 을 만족하는 모든 옹근수 m와 n에 대하여

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

이 선다는것을 증명하여라.