

Wtorek, 10 lipca 2012 r.

Zadanie 1. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A . Okrąg ten jest styczny do boku BC w punkcie M oraz do prostych AB i AC odpowiednio w punktach K i L . Proste LM i BJ przecinają się w punkcie F , a proste KM i CJ przecinają się w punkcie G . Niech S będzie punktem przecięcia prostych AF i BC , a T punktem przecięcia prostych AG i BC . Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka ST .

(Okręgiem dopisanym do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A nazywamy okrąg styczny do odcinka BC oraz do przedłużeń boków AB i AC .)

Zadanie 2. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą oraz niech a_2, a_3, \dots, a_n będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, dla których $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Udowodnić, że

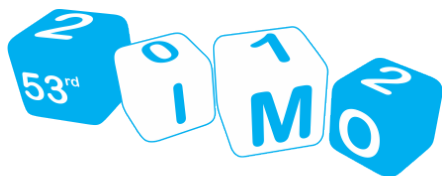
$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Zadanie 3. Gra w *zgadywającego i kłamię* rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami A i B . Reguły gry są zależne od dwóch całkowitych dodatnich liczb k i n , które są znane obu graczom.

Na początku gracz A wybiera liczby całkowite x i N spełniające $1 \leq x \leq N$. Gracz A trzyma liczbę x w tajemnicy, natomiast liczbę N przekazuje graczowi B . Gracz B z kolei próbuje zdobyć informacje o liczbie x zadając graczowi A pytania. Przed każdym pytaniem gracz B wybiera dowolny zbiór S dodatnich liczb całkowitych, po czym pyta gracza A , czy liczba x należy do zbioru S . Gracz B może zadać tyle pytań, ile chce, może także wielokrotnie wybierać ten sam zbiór S . Na każde pytanie gracza B , gracz A musi natychmiast odpowiedzieć, odpowiadając *tak* lub *nie*. Może przy tym skłamać dowolną liczbę razy, pamiętając jednak, że odpowiadając na każde $k + 1$ kolejnych pytań, co najmniej raz musi powiedzieć prawdę.

Po zakończeniu zadawania pytań gracz B musi podać zbiór X złożony z co najwyżej n dodatnich liczb całkowitych. Jeśli liczba x należy do zbioru X , gracz B wygrywa, w przeciwnym wypadku, gracz B przegrywa. Dowieść, że

1. jeśli $n \geq 2^k$, to gracz B może zagwarantować sobie zwycięstwo,
2. dla każdej dostatecznie dużej liczby k istnieje taka liczba całkowita $n \geq 1.99^k$, przy której gracz B nie może zagwarantować sobie wygranej.



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Polish

Day: 2

Środa, 11 lipca 2012 r.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c spełniających $a + b + c = 0$ zachodzi równość

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Symbol \mathbb{Z} oznacza zbiór liczb całkowitych.)

Zadanie 5. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\angle BCA = 90^\circ$ oraz niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Punkt X leży wewnątrz odcinka CD . Niech K będzie punktem leżącym na odcinku AX , przy czym $BK = BC$. Niech L będzie punktem leżącym na odcinku BX , przy czym $AL = AC$. Punkt M jest punktem przecięcia prostych AL i BK .

Wykazać, że $MK = ML$.

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których istnieją nieujemne liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_n spełniające

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Polish

Czas: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów