dinsdag 16 juli 2024

Opgave 1. Bepaal alle reële getallen α zodanig dat, voor elk geheel getal $n > 0$, het gehele getal

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

een veelvoud van n is. (Hierbij staat $\lfloor z \rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z. Zo geldt bijvoorbeeld $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ en $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Opgave 2. Bepaal alle paren (a, b) van (strikt) positieve gehele getallen waarvoor er gehele getallen $g > 0$ en $N > 0$ bestaan zodanig dat

$$\mathrm{ggd}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

geldt voor alle gehele getallen $n \geqslant N$. (Hierbij staat $\mathrm{ggd}(x, y)$ voor de grootste gemene deler van de gehele getallen x en y.)

Opgave 3. Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een oneindige rij (strikt) positieve gehele getallen, en zij N een (strikt) positief geheel getal. Veronderstel dat, voor alle $n > N$, a_n gelijk is aan het aantal keer dat a_{n-1} in de lijst $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ voorkomt. Bewijs dat ten minste een van de rijen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ en $a_2, a_4, a_6, \ldots$ op den duur periodiek is. (Een oneindige rij $b_1, b_2, b_3, \ldots$ is *op den duur periodiek* als er gehele getallen $p > 0$ en $M > 0$ bestaan zodanig dat $b_{m+p} = b_m$ voor alle $m \geqslant M$.)

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.

woensdag 17 juli 2024

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AB| < |AC| < |BC|$. Zij ω de ingeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$, en zij I het middelpunt van ω. Zij X het punt, verschillend van C, op de lijn BC zodat de lijn door X die evenwijdig is met AC, raakt aan ω. Analoog, zij Y het punt, verschillend van B, op de lijn BC zodat de lijn door Y die evenwijdig is met AB, raakt aan ω. De lijn AI snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$ nogmaals in $P \neq A$. De middens van de lijnstukken AC en AB noemen we respectievelijk K en L. Bewijs dat $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Opgave 5. Turbo de slak speelt een spel op een bord met 2024 rijen en 2023 kolommen. In 2022 van de vakjes zitten monsters verborgen. In het begin weet Turbo van geen enkel monster waar het zit, maar hij weet wel dat er precies één monster zit in elke rij behalve de eerste rij en de laatste rij, en dat elke kolom ten hoogste één monster bevat. Turbo doet een aantal pogingen om van de eerste naar de laatste rij te kruipen. Bij elke poging kiest hij een startvakje op de eerste rij en kruipt dan herhaaldelijk van een vakje naar een aangrenzend vakje dat daarmee een zijde gemeen heeft. (Hij mag hierbij een reeds bezocht vakje opnieuw bezoeken.) Als hij een vakje met een monster bezoekt, dan eindigt zijn poging en wordt hij teruggestuurd naar de eerste rij om een nieuwe poging te starten. De monsters blijven op hun plaats en Turbo onthoudt van elk vakje dat hij heeft bezocht of daar al dan niet een monster zit. Zodra hij een vakje op de laatste rij bereikt, dan eindigt zijn poging en is het spel klaar. Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor Turbo een strategie heeft die garandeert dat hij de laatste rij bereikt in de n^{de} poging of eerder, onafhankelijk van de plaatsen van de monsters.

Opgave 6. Zij $\mathbb{Q}$ de verzameling rationale getallen. Een functie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ wordt *aquazuul* genoemd als f de volgende eigenschap heeft: voor elke $x, y \in \mathbb{Q}$ geldt ten minste één van de volgende twee gelijkheden:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{of} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Bewijs dat er een geheel getal c bestaat zodanig dat voor elke aquazule functie f de uitdrukking $f(r) + f(-r)$ ten hoogste c verschillende waarden aanneemt waarbij r over $\mathbb{Q}$ varieert, en bepaal de kleinst mogelijke waarde van c met die eigenschap.

Language: Dutch

Tijd: 4 uur en 30 minuten.
Elke opgave is 7 punten waard.