

*ponedjeljak, 11. jul 2022.*

**Zadatak 1.** Banka u Oslu koristi dvije vrste kovanica: aluminijumske (označimo takvu kovanicu sa  $A$ ) i bakarne (označimo takvu kovanicu sa  $B$ ). Marija ima  $n$  aluminijumskih i  $n$  bakarnih kovanica, poređanih u niz u proizvoljnom poretku. *Lanac* je bilo koji podniz uzastopnih kovanica iste vrste. Za dati fiksirani prirodan broj  $k \leq 2n$ , Marija ponavlja sljedeću operaciju: pronalazi najduži lanac koji sadrži  $k$ -tu kovanicu s lijeve strane i premiješta sve kovanice tog lanca na lijevi kraj niza. Na primjer, za  $n = 4$  i  $k = 4$ , polazeći od niza  $AABBBABA$ , Marija dobija

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

Naći sve parove  $(n, k)$ , gdje je  $1 \leq k \leq 2n$ , takve da za svaki početni niz, u nekom trenutku tokom izvođenja operacija, prvih  $n$  kovanica sa lijeve strane su iste vrste.

**Zadatak 2.** Označimo sa  $\mathbb{R}^+$  skup pozitivnih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  takve da za svako  $x \in \mathbb{R}^+$ , postoji tačno jedno  $y \in \mathbb{R}^+$  za koje važi

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

**Zadatak 3.** Neka je  $k$  prirodan broj i neka je  $S$  konačan skup neparnih prostih brojeva. Dokazati da postoji najviše jedan način (do na rotaciju i osnu simetriju) da se rasporede elementi skupa  $S$  oko kružnice tako da proizvod svaka dva susjedna broja ima oblik  $x^2 + x + k$  za neki prirodan broj  $x$ .

utorak, 12. jul 2022.

**Zadatak 4.** Neka je  $ABCDE$  konveksan petougao sa  $BC = DE$ . Unutar petougla  $ABCDE$  nalazi se tačka  $T$  takva da važi  $TB = TD$ ,  $TC = TE$  i  $\angle ABT = \angle TEA$ . Prava  $AB$  siječe prave  $CD$  i  $CT$  u tačkama  $P$  i  $Q$ , redom. Pretpostavimo da se tačke  $P, B, A, Q$  pojavljuju u tom redosljedu na pravoj na kojoj leže. Prava  $AE$  siječe prave  $CD$  i  $DT$  u tačkama  $R$  i  $S$ , redom. Pretpostavimo da se tačke  $R, E, A, S$  pojavljuju u tom redosljedu na pravoj na kojoj leže. Dokazati da se tačke  $P, S, Q, R$  nalaze na istoj kružnici.

**Zadatak 5.** Naći sve trojke  $(a, b, p)$  prirodnih brojeva, takve da je  $p$  prost broj i za koje važi

$$a^p = b! + p.$$

**Zadatak 6.** Neka je  $n$  prirodan broj. *Nordijski kvadrat* je tabla dimenzija  $n \times n$  koja sadrži sve prirodne brojeve od 1 do  $n^2$  tako da se na svakom polju table nalazi tačno jedan broj. Dva polja table su susjedna ako imaju zajedničku stranicu. Svako polje koje je susjedno samo sa poljima koja sadrže veće brojeve naziva se *dolina*. *Uzbrdica* je niz od jednog ili više polja takav da važe sljedeća tri uslova:

- (i) prvo polje u nizu je dolina,
- (ii) svaka dva uzastopna polja u nizu su susjedna u tabli,
- (iii) brojevi napisani u poljima niza su u rastućem poretku.

Odrediti, u funkciji od  $n$ , najmanju moguću vrijednost ukupnog broja uzbrdica u nordijskom kvadratu.