الاثنين 11 جويلية 2016

المسألة 1. المثلّث BCF قائم في B. لتكن A النّقطة على المستقيم (CF) التّي تحقّق $FA = FB$ و تجعل F بين A و C. نختار النّقطة D بحيث $DA = DC$ و (AC) هو منصّف الزّاوية $\angle DAB$. نختار النّقطة E بحيث $EA = ED$ و (AD) هو منصّف الزّاوية $\angle EAC$. لتكن M منتصف $[CF]$، و X النّقطة التّي تجعل الرّباعيّ $AMXE$ متوازي الأضلاع (أي $(AM) \parallel (EX)$ و $(MX) \parallel (AE)$).

أثبت أنّ المستقيمات (BD) و (FX) و (ME) تتقاطع في نقطة واحدة.

المسألة 2. جد كلّ الأعداد الصّحيحة الموجبة تماما n التّي من أجلها يمكننا ملء كلّ خانة من خانات جدول من قياس $n \times n$ بأحد الرّموز I أو M أو O بحيث يتحقّق الشّرطان التّاليان:

- في كلّ صفّ وفي كلّ عمود، من صفوف وأعمدة الجدول، يكون ثلث الخانات مملوءا بالرّمز I، وثلث الخانات مملوءا بالرّمز M، وثلث الخانات مملوءا بالرّمز O؛
- في كلّ قطر عدد خاناته يقبل القسمة على ثلاثة، يكون ثلث الخانات مملوءا بالرّمز I، وثلث الخانات مملوءا بالرّمز M، وثلث الخانات مملوءا بالرّمز O.

تنبيه : يتمّ ترقيم صفوف وأعمدة جدول من قياس $n \times n$ بالتّرقيم المعهود من 1 إلى n. هذا الترقيم يمكّننا من تحديد كلّ خانة بزوج (i, j) مكوّن من عددين صحيحيّين موجبين تماما $1 \leqslant i, j \leqslant n$. لكلّ $n > 1$، هناك $4n - 2$ قطرا في الجدول، وهي من صنفين. يتكوّن كلّ قطر من الصّنف الأوّل من الخانات (i, j) حيث يكون المجموع $i + j$ ثابتا، بينما يتكوّن كلّ قطر من الصّنف الثّاني من الخانات (i, j) حيث يكون الفرق $i - j$ ثابتا.

المسألة 3.

ليكن $P = A_1A_2 \ldots A_k$ مضلّعا محدّبا في المستوي. تقع الرّؤوس A_1، A_2، ...، A_k كلّها على دائرة وإحداثيّا كلّ منها أعداد صحيحة. لتكن S مساحة المضلّع P. تمّ اعتبار عدد صحيح فرديّ موجب n بحيث يكون مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع P عددا صحيحا يقبل القسمة على n.

أثبت أنّ $2S$ عدد صحيح يقبل القسمة على n.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة

الثّلاثاء 12 جويلية 2016

المسألة 4. نقول عن مجموعة أعداد صحيحة موجبة تماما إنّها عطرة إذا كانت تحتوي على عنصرين أو أكثر وكان كلّ عنصر من عناصرها يقبل عاملا أوّليّا مشتركا مع عنصر آخر على الأقل. ليكن $P(n) = n^2 + n + 1$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد الصّحيح الموجب تماما b التّي من أجلها يوجد عدد صحيح موجب a يجعل المجموعة

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

عطرة؟

المسألة 5. تمّ كتابة المعادلة

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

على السّبورة، والتّي تحوي في كلّ طرف من طرفيها على 2016 عامل خطّيّ. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد k التّي من أجلها يمكننا محو k من هذه العوامل الخطيّة التّي عددها 4032 بحيث يبقى على الأقل عامل في كلّ طرف وتكون المعادلة الجديدة غير قابلة لحلول حقيقيّة؟

المسألة 6. هناك $n \geqslant 2$ قطعة مستقيمة في المستوي بحيث تتقاطع كلّ قطعتين في غير طرفيهما ولا تلتقي ثلاثة منها في نقطة واحدة. يريد جعفر أن يختار من كلّ قطعة طرفا يضع فيه ضفدعة تنظر في اتّجاه الطّرف الآخر. بعدها يصفّق جعفر $n-1$ مرّة متتالية. عند كلّ تصفيقة تقفز كلّ ضفدعة إلى نقطة التّقاطع التّالية على قطعتها، مع العلم أنّ الضّفادع لا تغيّر أبدا وجهتها. يرغب جعفر في أن يضع الضّفادع بحيث لا تلتقي منها ضفدعتان أبدا في نقطة تقاطع في نفس الوقت.

ا. أثبت أنّه يمكن دائما لجعفر أن يحقّق رغبته إذا كانت قيمة n فرديّة.

ب. أثبت أنّه لا يمكن أبدا لجعفر أن يحقّق رغبته إذا كانت قيمة n زوجيّة.

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة