

Даваа, 11. 7 дугаар сарын 2022

Бодлого 1. Осло хотын банк хоёр төрлийн зоос гаргадаг: хөнгөн цагаан (A гэж тэмдэглэе) ба зэс (B гэж тэмдэглэе). Мариана n ширхэг хөнгөн цагаан, n ширхэг зэс зоостой ба зооснуудаа анх ямар нэг санамсаргүй дарааллаар нэг мөрөнд эгнүүлэн байрлуулжээ. Дэс дараалсан нэг ижил төрлийн зоосны дэд дарааллыг *гинжс* гэж нэрлэе. Бэхлэгдсэн $k \leq 2n$ тооны хувьд Мариана дараах үйлдлийг давтан хийнэ: зүүн талаасаа k дахь зоосыг агуулсан хамгийн урт гинжийг олж, тус гинжний бүх зоосыг мөрний хамгийн зүүн тал руу зөөнө. Жишээлбэл, $n = 4$ ба $k = 4$ үед анх $AABBBABA$ гэсэн байрлалаас эхлэхэд

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots \quad (1)$$

болно. Анх ямар ч байрлалаас эхэлсэн хэдэн үйлдэл хийсний дараа зүүн талаасаа n ширхэг зоос нь бүгд ижил төрлийн байх байрлал руу шилждэг $1 \leq k \leq 2n$ байх бүх (n, k) хосыг ол.

Бодлого 2. Бүх эерэг бодит тооны олонлогийг \mathbb{R}^+ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$xf(y) + yf(x) \leq 2 \quad (2)$$

байх яг нэг $y \in \mathbb{R}^+$ оршин байдаг байх бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

Бодлого 3. k эерэг бүхэл тоо ба S сондгой анхны тоонуудаас тогтох төгсгөлөг олонлог байг. S олонлогийн гишүүдийг тойрог дээр дурын хөрш хоёр тооны үржвэр нь ямар нэг эерэг бүхэл x тооны хувьд $x^2 + x + k$ хэлбэртэй байхаар (эргүүлэлт болон толин тэгш хэмийг эс тооцвол) хамгийн олондоо нэг янзаар байрлуулж болно гэж батал.

Мягмар, 12. 7 дугаар сарын 2022

Бодлого 4. $ABCDE$ гүдгэр таван өнцөгтийн хувьд $BC = DE$ байв. $ABCDE$ дотор T цэг $TB = TD$, $TC = TE$ ба $\angle ABT = \angle TEA$ байхаар өгөгдсөн гэе. AB шулуун CD ба CT шулуунуудыг харгалзан P ба Q цэгт огтолно. P , B , A , Q цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. AE шулуун CD ба DT шулуунуудыг харгалзан R ба S цэгт огтолдог гэе. R , E , A , S цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. P , S , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлого 5. Дараах нөхцөлийг хангах эерэг бүхэл тоон бүх (a, b, p) гурвалыг ол. Энд p анхны тоо ба

$$a^p = b! + p.$$

Бодлого 6. n эерэг бүхэл тоо гэе. Нүд бүр нь яг нэг тоо агуулдаг байхаар 1-ээс n^2 хүртэлх бүх тоог агуулдаг $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийг *Нордик квадрат* гэе. Ялгаатай хоёр нүдийг ерөнхий талтай бол хөрш гэнэ. Хөрш нүднүүд нь бүгд өөрөөс нь том тоо агуулдаг нүдийг *хонхор* гэе. Дараах нөхцөлүүдийг хангах нэг болон түүнээс олон нүдний дарааллыг *өгсүүр зам* гэнэ:

- (i) дарааллын эхний нүд хонхор,
- (ii) дарааллын дараагийн нүд бүр өмнөх нүдтэйгээ хөрш,
- (iii) дарааллын нүднүүдэд бичигдсэн тоонууд өсдөг.

Нордик квадрат доторх боломжит хамгийн бага нийт хэдэн өгсүүр замын тоог n -ээр илэрхийл.