

12. juli 2006

Oppgave 1. La ABC være en trekant med innsenter I . Et punkt P ligger på innsiden av trekanten og tilfredsstiller

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at likhet gjelder hvis og bare hvis $P = I$.

Oppgave 2. La P være en regulær 2006-kant. En diagonal i P kalles for *god* hvis endepunktene deler omkretsen til P i to deler, hver av dem bestående av et odde antall kanter av P . Sidene i P kalles også *gode*.

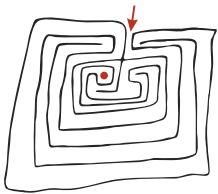
P deles opp i trekkanter av 2003 diagonaler, av hvilke ingen to har felles punkt innenfor P . Finn det maximale antallet likebente trekkanter med to gode sider som kan oppnås ved en slik oppdeling.

Oppgave 3. Bestem det minste reelle tallet M slik at ulikheten

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

holder for alle reelle tall a , b og c .

*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng*



13. juli 2006

Oppgave 4. Bestem alle par av heltall (x, y) slik at

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Oppgave 5. La $P(x)$ være et polynom av grad $n > 1$ med heltallige koeffisienter, og la k være et positivt heltall. Betrakt polynomet $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, med P skrevet k ganger. Vis at det finnes høyst n forskjellige heltall t slik at $Q(t) = t$.

Oppgave 6. Til hver side b av et konvekst polygon P tilegnes det maksimale arealet av trekantene inneholdt i P og med b som en av sidene. Vis at summen av disse tilegnede arealene er minst det dobbelte av arealet til P .

*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng*