الثّلاثاء 8 يوليو 2014

المسألة 1. لتكن $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ متتاليّة غير متنهية من الأعداد الصّحيحة الموجبة. برهن أنّ هناك عددا صحيحا وحيدا $n \geq 1$ بحيث

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

المسألة 2. ليكن $n \geq 2$ عددا صحيحا. لدينا طاولة شطرنج من القياس $n \times n$ مشتملة على n^2 من الخانات. يقال عن تشكيلة مكوّنة من n حجرا على خانات هذه الطّاولة إنّها مسالمة إذا كان كلّ صفّ وكلّ عمود يحوي حجرا واحدا فقط. جد أكبر عدد صحيح k بحيث، لكلّ تشكيلة مسالمة من n حجرا، يوجد مربّع من القياس $k \times k$ لا يحوي على حجر في أيّ من خاناته الّتي عددها k^2.

المسألة 3. لدينا رباعي محدّب $ABCD$ فيه $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. النقطة H هي قدم العمود النّازل من A على BD. تقع النّقطتان S و T على الضّلعين AB و AD، على التّرتيب، بحيث تقع النّقطة H داخل المثلّث SCT و

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

برهن أنّ المستقيم BD يمسّ الدّائرة المحيطة بالمثلّث TSH.

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة

الأربعاء 9 يوليو 2014

المسألة 4. تقع النّقطتان P و Q على الضّلع BC للمثلّث الحادّ الزّوايا ABC بحيث $\angle PAB = \angle BCA$ و $\angle CAQ = \angle ABC$. النّقطتان M و N تقعان على المستقيمين AP و AQ، على التّرتيب، بحيث تجعلان النّقطة P منتصف AM، والنّقطة Q منتصف AN. أثبت أنّ المستقيمين BM و CN يتقاطعان على الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC.

المسألة 5. لكلّ عدد صحيح موجب n، يُصدر بنك كايب تاون قطعا نقديّة قيمتها $\frac{1}{n}$. إذا كان لدينا عدد منته من هذه القطع النّقديّة (ليست بالضّرورة مختلفة القيم) بحيث يكون مجموع قيمها هو $99+\frac{1}{2}$ على الأكثر، أثبت إمكانيّة توزيع هذه القطع النّقديّة إلى 100 حفنة أو أقل، بحيث لا تزيد قيمة كلّ حفنة على 1.

المسألة 6. يقال عن مجموعة مستقيمات في المستوى إنّها في الوضع العام إذا لم يتواز أيّ مستقيمين فيها ولم يتقاطع أيّ ثلاث مستقيمات فيها في نقطة واحدة. تُجزّئ أيّ مجموعة من المستقيمات في الوضع العام المستوى إلى مناطق تكون مساحة بعضها متهية. نشير إلى هذه المناطق على أنّها مناطق متهية. برهن أنّه لكلّ عدد n، كبير بما فيه الكفاية، يمكننا التّلوين بالأزرق $\sqrt{n}$ مستقيما على الأقل وذلك في أيّ مجموعة مكوّنة من n مستقيما في الوضع العام، بحيث لاتوجد منطقة متهية جميع حدودها مستقيمات زرقاء.

ملاحظة: تعطى درجات لمن يحصل على $c\sqrt{n}$ بدلا من $\sqrt{n}$ وذلك اعتمادا على قيمة الثّابت c.

الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة