



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

Bulgarian (bul), day 1

събота, 8. юли 2023

Задача 1. Да се намерят всички съставни цели числа $n > 1$, които удовлетворяват следното условие: ако d_1, d_2, \dots, d_k са всички положителни делители на n като $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, то d_i дели $d_{i+1} + d_{i+2}$ за всяко $1 \leq i \leq k - 2$.

Задача 2. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с $AB < AC$. Нека Ω е описаната окръжност за ABC . Нека S е средата на дъгата CB от Ω , съдържаща точката A . Перпендикулярът от A към BC пресича отсечката BS в точка D и пресича окръжността Ω за втори път в точка $E \neq A$. Правата през D , успоредна на BC , пресича правата BE в точка L . Да означим с ω описаната около триъгълник BDL окръжност. Нека ω пресича Ω за втори път в $P \neq B$.

Да се докаже, че допирателната към ω в точка P пресича правата BS върху вътрешната ъглополовяща на $\angle BAC$.

Задача 3. За всяко естествено число $k \geq 2$, да се намерят всички безкрайни редици от естествени числа a_1, a_2, \dots , за които има полином P от вида $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$, където c_0, c_1, \dots, c_{k-1} са неотрицателни цели числа, такъв че

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

за всяко естествено число $n \geq 1$.



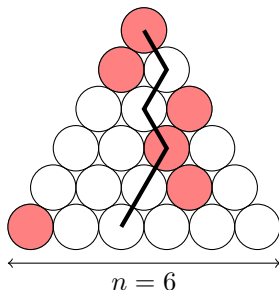
неделя, 9. юли 2023

Задача 4. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ са две по две различни положителни реални числа, такива че числото

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

е цяло за всяко $n = 1, 2, \dots, 2023$. Да се докаже, че $a_{2023} \geq 3034$.

Задача 5. Дадено е естествено число n . Японски триъгълник се състои от $1 + 2 + \dots + n$ кръга, които са подредени във формата на равнобедрен триъгълник, така че за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, i -ият ред съдържа точно i кръга, точно един от които е оцветен в червено. Нинджа-път в японски триъгълник ще наричаме редица от n кръга, която започва от първия ред, последователно преминава от кръг към един от двата кръга, непосредствено под него, и завършва в последния ред. На фигурата по-долу е показан пример за японски триъгълник при $n = 6$ заедно с нинджа-път, съдържащ два червени кръга.



В зависимост от n да се намери най-голямото k , за което във всеки японски триъгълник има нинджа-път, съдържащ поне k червени кръга.

Задача 6. Нека ABC е равнобедрен триъгълник. Нека A_1, B_1, C_1 са вътрешни точки за ABC , такива че $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Нека BC_1 и CB_1 се пресичат в A_2 , CA_1 и AC_1 се пресичат в B_2 , а AB_1 и BA_1 – в C_2 .

Да се докаже, че ако триъгълник $A_1B_1C_1$ е разностранен, то трите окръжности, описани съответно около триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 , минават през две общи точки.

(Забележка: триъгълник е разностранен ако всеки две негови страни имат различни дължини.)