segunda-feira, 11 de julho de 2022

Problema 1. O Banco de Oslo emite dois tipos de moedas: moedas de alumínio (denotadas por A) e moedas de bronze (denotadas por B). Marianne tem n moedas de alumínio e n moedas de bronze, dispostas numa linha em alguma ordem inicial arbitrária. Um *bloco* é qualquer subsequência de moedas consecutivas do mesmo tipo. Dado um inteiro positivo fixo $k \leqslant 2n$, Marianne realiza repetidamente a seguinte operação: ela identifica o bloco mais longo contendo a k-ésima moeda da esquerda para a direita, e move todas as moedas desse bloco para o extremo esquerdo da linha. Por exemplo, se $n = 4$ e $k = 4$, o processo começando com a seguinte ordem $AABBBABA$ seria

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Encontre todos os pares (n, k) com $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tais que, para qualquer ordem inicial, em algum momento durante o processo, as n moedas mais à esquerda serão todas do mesmo tipo.

Problema 2. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe exatamente um $y \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problema 3. Seja k um inteiro positivo e seja S um conjunto finito de números primos ímpares. Prove que existe no máximo uma forma (a menos de rotação e reflexão) de colocar os elementos de S ao redor de uma circunferência de modo que o produto de quaisquer dois vizinhos é da forma $x^2 + x + k$ para algum inteiro positivo x.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

terça-feira, 12 de julho de 2022

Problema 4. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $BC = DE$. Suponha que existe um ponto T no interior de $ABCDE$ com $TB = TD$, $TC = TE$ e $\angle ABT = \angle TEA$. A reta AB intersecta as retas CD e CT nos pontos P e Q, respetivamente. Suponha que os pontos P, B, A e Q aparecem na reta nesta ordem. A reta AE intersecta as retas CD e DT nos pontos R e S, respectivamente. Suponha que os pontos R, E, A e S aparecem na reta nesta ordem. Prove que os pontos P, S, Q e R estão sobre uma circunferência.

Problema 5. Encontre todas as triplas (a, b, p) de inteiros positivos tais que p é primo e

$$a^p = b! + p.$$

Problema 6. Seja n um inteiro positivo. Um *quadrado Nórdico* é um tabuleiro $n \times n$ contendo todos os inteiros de 1 até n^2 de modo que cada quadradinho contém exatamente um número. Dois quadradinhos diferentes são considerados adjacentes se eles têm um lado em comum. Um quadradinho que é adjacente apenas a quadradinhos com números maiores é chamado de um *vale*. Um *caminho crescente* é uma sequência de um ou mais quadradinhos tais que:

(i) o primeiro quadradinho da sequência é um vale,

(ii) cada quadradinho a partir do segundo é adjacente ao quadradinho anterior,

(iii) os números contidos nos quadradinhos da sequência estão em ordem crescente.

Encontre, em função de n, a menor quantidade possível de caminhos crescentes de um quadrado Nórdico.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.