بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۱۹ اردیبهشت ۸۸

روز اول — زمان:۴ ساعت و نیم

---

۱. در مثلث ABC، نقاط A'، B' و C' به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB قرار دارند به طوری که مرکز دایره محاطی $A'B'C'$ بر مرکز دایره‌ی محاطی ABC منطبق است و شعاع دایره‌ی محاطی $A'B'C'$، نصف شعاع دایره‌ی محاطی ABC است. نشان دهید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۲. a عددی طبیعی و ثابت است. ثابت کنید مجموعه‌ی عوامل اول اعداد به شکل $۲^{۲^n} + a$، $n = ۱,۲,۳,\ldots$، نامتناهی است.

۳. a و b و c اعداد حقیقی مثبت هستند و $a + b + c = ۳$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۲ + a^۲ + b^۲} + \frac{۱}{۲ + b^۲ + c^۲} + \frac{۱}{۲ + c^۲ + a^۲} \leq \frac{۳}{۴}.$$

موفق باشید!

بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۲۰ اردیبهشت ۸۸

روز دوم — زمان:۴ ساعت و نیم

---

۱. همه‌ی چندجمله‌ای‌های $f(x)$ با ضرایب صحیح را بیابید که به ازای هر عدد اول p و اعداد طبیعی u و v که $p \mid \mathrm{uv}-1$ داشته باشیم $p \mid f(\mathrm{u})f(\mathrm{v})-1$.

۲. در مثلث ABC، A_1، B_1 و C_1 به ترتیب پای ارتفاعات وارد از رئوس A، B و C هستند. اگر P پای عمود بر A_1B_1 از C_1 باشد و Q روی A_1B_1 طوری باشد که $AQ = BQ$، نشان دهید

$$P\widehat{A}Q = P\widehat{B}Q = P\widehat{C_1}C.$$

۳. در یک شبکه‌ی $n \times n$، مسیر بسته‌ای داریم که از هر رأس دقیقاً یک بار عبور کرده است. نشان دهید دو رأس مجاور در شبکه یافت می‌شوند که اگر مسیر را از آن دو نقطه ببُریم، طول هر یک از دو قطعه حاصل از $\frac{1}{4}$ طول کل مسیر کمتر نباشد.

موفق باشید!

بسمه تعالی

امتحان دوم انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۲۶ اردیبهشت ۸۸

روز اول — زمان:۴ ساعت و نیم

---

۱. سه راستای مختلف در صفحه در نظر بگیرید. در هر یک از این سه راستا، ۱۱ خط رسم می‌کنیم. حداکثر تعداد نقاطی که روی سه تا از این خطوط قرار می‌گیرند چند تاست؟

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x,y)$ با ضرایب حقیقی را بیابید که

$$P(x^۲,y^۲)=P(\frac{(x+y)^۲}{۲},\frac{(x-y)^۲}{۲})$$

۳. در مثلث ABC، D، E و F محل تماس دایره ی محاطی داخلی به مرکز I با اضلاع BC، AC و AB هستند. M پای عمود وارد از D بر EF است و P وسط DM است. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث BIC باشد، ثابت کنید PH از وسط EF می‌گذرد.

موفق باشید!

بسمه تعالی

امتحان دوم انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۲۷ اردیبهشت ۸۸

روز دوم — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۱. در مثلث ABC، $AB \neq AC$. D را روی امتداد BC (از طرف B) طوری می‌گیریم که $BD = AB$. I_C مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس C و T محل برخورد دوم CI_C با دایره ی محیطی ABC است. اگر $T\widehat{D}I_C = \frac{B+C}{۴}$، زاویه ی $\widehat{A}$ چه قدر است؟

۲. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$۳^{\frac{۵^{۲^n}-۱}{۲^{n+۲}}} \equiv (-۵)^{\frac{۳^{۲^n}-۱}{۲^{n+۲}}} \quad ۲^{n+۴}$$

۳. $T \subset \{۱,\ldots,n\}$ دارای این خاصیت است که برای هر $i,j \in T$ متمایز، داریم $i \not| ۲j$. نشان دهید

$$|T| \leq \frac{۴}{۹}n + \log_۲ n + ۲$$

موفق باشید!