بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۱۵ اردیبهشت ۱۳۸۹

روز اول — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۱. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $m$، عدد طبیعی $N$ وجود دارد که به ازای هر عدد طبیعی $b$ که $۲ \leq b \leq ۱۳۸۹$، مجموع ارقام $N$ در مبنای $b$، بیش‌تر از $m$ باشد.

۲. در مثلث $ABC$، $O$ مرکز دایره‌ی محیطی و $H$ محل برخورد ارتفاع‌هاست. $M$ و $N$ به ترتیب وسط $BH$ و $CH$ هستند و $B'$ نقطه‌ی مقابل قطری $B$ در دایره‌ی محیطی است. اگر چهارضلعی $HONM$ محاطی باشد، ثابت کنید

$$B'N = \frac{۱}{۲}AC$$

۳. در یک جدول $m \times n$، در هر خانه‌ی آن به دلخواه یکی از دو قطر را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که یا مسیری از این قطرها وجود دارد که ضلع بالای جدول را به ضلع پایین آن وصل می‌کند و یا مسیری از این قطرها وجود دارد که ضلع چپ جدول را به ضلع راست آن وصل می‌کند و یا هر دو.

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان اول انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۱۶ اردیبهشت ۱۳۸۹

روز دوم — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۴. بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، یک زوج ضلعی رسم کرده‌ایم که اضلاع آن یکی در میان عمودی هستند. در ضمن در حین رسم این چندضلعی، همه‌ی اضلاع عمودی از پایین به بالا رسم شده‌اند. ثابت کنید این چندضلعی خودش را قطع کرده است.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$، $AB = AC$ و $BC > AB$. $D$ و $M$ به ترتیب وسط‌های اضلاع $BC$ و $AB$ هستند. $X$ نقطه‌ای است که $BX \perp AC$ و $XD \parallel AB$. $H$ محل برخورد $BX$ و $AD$ است. اگر $P$محل برخورد $DX$ با دایره محیطی مثلث $AHX$ (غیر از $X$) باشد، ثابت کنید مماسی که در $A$ بر دایره محیطی مثلث $AMP$ رسم می‌شود موازی $BC$ است.

۶. دنباله‌ی $a_۰, \cdots, a_{۱۳۸۹}$ از اعداد حقیقی را مقعر می‌نامیم هرگاه برای هر $۰ < i < ۱۳۸۹$ داشته باشیم $a_i \geq \frac{a_{i-۱} + a_{i+۱}}{۲}$. بیش‌ترین مقدار $c$ را بیابید که برای هر دنباله‌ی مقعر از اعداد نامنفی، داشته باشیم

$$\sum_{i=۰}^{۱۳۸۹} i a_i^۲ \geq c \sum_{i=۰}^{۱۳۸۹} a_i^۲$$

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان دوم انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۱۹ اردیبهشت ۱۳۸۹

روز اول — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۱. $M$ نقطه‌ای دل‌خواه روی ضلع $BC$ از مثلث $ABC$ است. $W$ دایره‌ای است که در $T$ بر پاره‌خط $AB$ و در $K$ بر پاره‌خط $BM$ و در $P$ بر دایره‌ی محیطی مثلث $AMC$ مماس است. اگر $TK \parallel AM$ ثابت کنید دایره‌ی محیطی $APT$ و دایره‌ی محیطی $KPC$ بر هم مماس‌اند.

۲. $S$ و $T$ دو درخت هستند که رأس درجه ۲ ندارند. به هر یال آن‌ها عددی مثبت نسبت داده‌ایم که آن را طول آن یال می‌نامیم. منظور از فاصله‌ی دو رأس در یکی از این دو درخت، مجموع طول‌های یال‌های موجود در مسیر بین آن دو رأس است. رأس‌های درجه یک را برگ می‌نامیم. $f$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا از مجموعه‌ی برگ‌های $S$ به مجموعه‌ی برگ‌های $T$ است با این خاصیت که برای هر دو برگ $u$ و $v$ از $S$، فاصله‌ی $u$ و $v$ در $S$ برابر است با فاصله‌ی $f(u)$ و $f(v)$ در $T$. ثابت کنید تابع یک‌به‌یک و پوشای $g$ از مجموعه‌ی رأس‌های $S$ به مجموعه‌ی رأس‌های $T$ موجود است به طوری که برای هر دو رأس $u$ و $v$ از $S$، فاصله‌ی $u$ و $v$ در $S$ برابر است با فاصله‌ی $g(u)$ و $g(v)$ در $T$.

۳. تمام توابع صعودی $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ داشته باشیم

$$f(\frac{x + f(x)}{2} + y) = 2x - f(x) + f(f(y))$$

(توجه کنید که $f$ لزوماً اکیداً صعودی نیست.)

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان دوم انتخاب تیم المپیاد ریاضی — ۲۰ اردیبهشت ۱۳۸۹

روز دوم — زمان: ۴ ساعت و نیم

---

۴. همه‌ی چندجمله‌ای‌های دو متغیره با ضرایب حقیقی مانند $P(x,y)$ را بیابید که به ازای هر $a,b,c$ حقیقی،

$$P(ab,c^۲+۱)+P(bc,a^۲+۱)+P(ca,b^۲+۱)=۰$$

۵. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی صعودی است و $n$ عددی طبیعی است. فرض کنید اعداد اول $p_۱,p_۲,\cdots,p_n$ و اعداد طبیعی $s_۱,s_۲,\cdots,s_n$ وجود داشته باشند که برای هر $۱\le i\le n$ مجموعه‌ی $\left\{f(p_ir+s_i)\mid r=۱,۲,\cdots\right\}$ یک تصاعد حسابی نامتناهی باشد. ثابت کنید عدد طبیعی $a$ وجود دارد که

$$f(a+۱),f(a+۲),\cdots,f(a+n)$$

یک تصاعد حسابی تشکیل دهد.

۶. دو دایره‌ی $W_۱$ و $W_۲$ در $P$ و $K$ متقاطع‌اند. $XY$ مماس مشترکی از دو دایره است که به $P$ نزدیک‌تر است و $X$ روی $W_۱$ و $Y$ روی $W_۲$ قرار دارد. $XP$ برای بار دوم، $W_۲$ را در $C$ و $YP$ برای بار دوم $W_۱$ را در $B$ قطع می‌کند. $A$ محل برخورد $BX$ و $CY$ است. اگر $Q$ محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های $ABC$ و $AXY$ باشد، ثابت کنید

$$\angle QXA=\angle QKP.$$

موفق باشید