به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

شنبه، ۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۰ | امتحان اول (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. مثلث حاده‌الزاویه ABC با اضلاع نابرابر داده شده است. X محل تقاطع نیمساز خارجی زاویه A با ضلع BC است. دو خط ℓ_b و ℓ_c را مماس به دایره محیطی ABC در نقاط B و C در نظر می‌گیریم. خطی گذرنده از X دو خط ℓ_b و ℓ_c را به ترتیب در Y و Z قطع می‌کند به طوری که X، Y و Z به همین ترتیب قرار دارند. نقطه برخورد دوم دایره محیطی مثلث‌های AYB و AZC را N می‌نامیم. اگر D محل تقاطع دو خط ℓ_b و ℓ_c باشد، ثابت کنید ND نیمساز $\angle YNZ$ است.

۲. در گراف ساده و همبند G فرض کنید بزرگ‌ترین درجه $d > ۳$ باشد و همچنین

$$x_d \geq x_{d-۱} + ۲x_{d-۲} + \cdots + (d-۱)x_۱$$

که در آن x_i برابر با تعداد رئوس با درجه i است. ثابت کنید در G رأسی از درجه d وجود دارد که با حذف آن، گراف همچنان همبند بماند.

۳. a، b، c و d اعداد طبیعی و دوبه‌دو نسبت به هم اول هستند که همگی برابر با ۱ نیستند. $f, g : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ دو تابع ضربی هستند که برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌دانیم $f(an+b) = g(cn+d)$. ثابت کنید حداقل یکی از دو گزاره زیر برقرار است:

الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(an+b) = g(cn+d) = ۰$.

ب) عدد طبیعی k وجود دارد که برای همه اعداد طبیعی مانند n که $(n,k) = ۱$ داریم $f(n) = g(n) = ۱$.

(تابع $f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ ضربی است اگر برای هر دو عدد طبیعی m و n داشته باشیم $f(mn) = f(m)f(n)$.)

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۰ | امتحان اول (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. فرض کنید $\Omega(n)$ و $\omega(n)$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل اول n باشند. علیرضا و امین تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. ابتدا علیرضا ۱۴۰۰ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح انتخاب می‌کند، سپس امین ۷۰۰ تا از آن‌ها را انتخاب می‌کند و مجموعه چندجمله‌ای‌های خود و علیرضا را به ترتیب A و B می‌نامد. امین در صورتی برنده می‌شود که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$\max_{P\in A}\left(\Omega(P(n))\right) \geq \min_{Q\in B}\left(\omega(Q(n))\right)$$

و در غیر این صورت علیرضا برنده می‌شود. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

۵. یک سه‌تایی از اعداد حقیقی را *نایس* گوییم اگر یکی از این سه عدد میانگین دوتای دیگر باشد. مجموعه A از $2n+1$ عدد حقیقی دارای حداقل n^2 سه‌تایی نایس است. ثابت کنید می‌توان اعضای A را به دو تصاعد حسابی با قدر نسبت برابر افراز کرد.

(یک عدد تنها را می‌توان تصاعد حسابی به طول یک و با قدر نسبت دلخواه در نظر گرفت.)

۶. D نقطه‌ای دلخواه روی خط اویلر و داخل مثلث حاده‌الزاویه ABC است. نقاط E و F به ترتیب تقاطع BD با AC و CD با AB هستند. نقطه X روی خط AD قرار دارد به طوری که $\angle EXF = 180^\circ - \angle A$ و A و X یک طرف EF قرار دارند. اگر دایره محیطی مثلث‌های BXE و CXF برای بار دوم در P متقاطع باشند، ثابت کنید EF، XP و ارتفاع A همرسند.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۰ | امتحان دوم (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. اعداد طبیعی در خانه‌های جدولِ از هر طرف نامتناهی قرار داده شده‌اند، به طوری که عدد هر خانه برابر است با تعداد خانه‌های مجاور رأسی آن خانه که عددشان با عدد آن خانه برابر است. بیش‌ترین تعداد ممکن برای اعداد متمایز در این جدول را بیابید.

(دو خانه را مجاور رأسی گوییم اگر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.)

۲. تمام توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n داشته باشیم

$$f(n)+۱۴۰۰m^۲ \mid n^۲+f(f(m))\ .$$

۳. ثابت کنید چندجمله‌ای‌های نسبت به هم اول P و Q با ضرایب صحیح و عدد حقیقی $u>۰$ وجود دارند که هر گاه اعداد طبیعی a، b، c و d در نامساوی‌های

$$\left|\frac{a}{c}-۱\right|^{۲۰۲۱}\le\frac{u}{dc^{۱۰۱۰}} \qquad \text{و} \qquad \left|\left(\frac{a}{c}\right)^{۲۰۲۰}-\frac{b}{d}\right|\le\frac{u}{dc^{۱۰۱۰}}$$

صدق کنند داشته باشیم $bP\left(\frac{a}{c}\right)=dQ\left(\frac{a}{c}\right)$.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

جمعه، ۳۱ اردیبهشت ۱۴۰۰ | امتحان دوم (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. همه توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر m، n و k طبیعی داشته باشیم

$$f(mk) + f(nk) - f(k)f(mn) \geq ۱$$

۵. نقطه X داخل چهارضلعی غیرذوزنقه $ABCD$ قرار دارد به طوری که $\angle AXD + \angle BXC = ۱۸۰^\circ$. فرض کنید نیمساز $\angle ABX$ عمود از D بر AX را در K و نیمساز $\angle DCX$ عمود از A بر DX را در L قطع کند. می‌دانیم $BK \perp CX$ و $CL \perp BX$. اگر KL از مرکز دایره محیطی مثلث AXD بگذرد، ثابت کنید $KL \perp AD$.

۶. ثابت کنید می‌توان همه زیرمجموعه‌های n عضوی از یک مجموعه $۳n$ عضوی را با ۸ رنگ رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ سه زیرمجموعه همرنگی یافت نشوند که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها حداکثر یک عضوی باشد.

موفق باشید.