به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

شنبه، ۲۱ اسفند ۱۴۰۰ | امتحان اول (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. مرتضی ۱۰۰ مجموعه دارد. در هر گام مهدی می‌تواند دو مجموعه‌ی متفاوت از مجموعه‌های مرتضی را انتخاب کند و مرتضی اجتماع و اشتراک آن دو مجموعه را به مهدی می‌گوید. کم‌ترین تعداد گام‌ها را بیابید که مهدی بتواند همه‌ی مجموعه‌ها را شناسایی کند.

۲. برای عدد طبیعی n، $\tau(n)$ و $\sigma(n)$ را به ترتیب تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n و مجموع مقسوم علیه‌های مثبت n در نظر بگیرید. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sigma(b^n)$ بر $\sigma(a^n)$ بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید $\tau(b)$ بر همه‌ی عوامل اول $\tau(a)$ بخش‌پذیر است.

۳. دایره محاطی داخلی مثلث ABC، به نام ω، بر اضلاع BC و AC به ترتیب در نقاط D و E مماس است. X قرینه‌ی D نسبت به B است. فرض کنید DE بر دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در Z مماس است. دایره محیطی مثلث XZE، ω را برای بار دوم در K قطع می کند. ثابت کنید BK و AZ روی ω همرسند.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

یک‌شنبه، ۲۲ اسفند ۱۴۰۰ | امتحان اول (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. چهارضلعی محاطی $ABCD$ با مرکز دایره محیطی O مفروض است. نقطه‌ی P محل برخورد قطرها و نقاط M و N به‌ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. فرض کنید ω_1، ω_2 و ω_3 به ترتیب دایره محیطی مثلث های ADP، BCP و OMN باشند. تقاطعی از دو دایره‌ی ω_3 و ω_1 که روی کمان APD از دایره‌ی ω_1 نیست را E و تقاطعی از دو دایره‌ی ω_3 و ω_2 که روی کمان BPC از دایره‌ی ω_2 نیست را F می نامیم. ثابت کنید $OE = OF$.

۵. همه‌ی اعداد حقیقی C را بیابید به طوری که هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح که از پایین کران‌دار باشد و برای هر $n \geq 2$ در رابطه‌ی

$$0 \leq a_{n-1} + Ca_n + a_{n+1} < 1$$

صدق کند متناوب باشد.

۶. فرض کنید m، n و $a_1, a_2, \ldots, a_m$ اعداد طبیعی دل‌خواه باشند. علی و محمد این بازی را انجام می‌دهند. در هر گام، علی اعداد طبیعی $b_1, b_2, \ldots, b_m$ را انتخاب می‌کند. سپس محمد عدد طبیعی s را انتخاب می‌کند و دنباله‌ی جدید $\{c_i = a_i + b_{i+s}\}_{i=1}^{m}$ را تشکیل می‌دهد که

$$b_{m+1} = b_1,\ b_{m+2} = b_2, \ldots, b_{m+s} = b_s.$$

هدف علی این است که در متناهی مرحله همه‌ی اعداد را بر n بخش‌پذیر کند.

همه‌ی اعداد طبیعی m و n را بیابید که علی، مستقل از انتخاب اولیه‌ی اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_m$، همواره استراتژی برد داشته باشد.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

سه‌شنبه، ۲۴ اسفند ۱۴۰۰ | امتحان دوم (روز اول) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. یک $2n$-ضلعی منتظم در صفحه‌ی مختصات داده شده است که یکی از بزرگ‌ترین قطرهای آن موازی محور طول‌هاست. کم‌ترین مقدار d را بیابید که یک چندجمله‌ای درجه d با ضرایب حقیقی یافت شود که نمودار آن تمام اضلاع این چندضلعی را در نقاطی غیر از رئوس چندضلعی قطع کند.

۲. در مثلث ABC با شرط $AB < AC$، I مرکز دایره محاطی و E پای تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC است. نقطه‌ی F روی نیمساز خارجی رأس A به گونه‌ای قرار دارد که E و F در یک طرف AI قرار دارند و $\angle AIF = \angle AEB$. خط عمود از I بر AI، BC را در Q قطع می‌کند. دایره‌ی ω_b بر AB در B و بر FQ مماس است و دایره‌ی ω_c بر AC در C و بر FQ مماس است و هر دو دایره از داخل مثلث ABC می گذرند. اگر M وسط کمان BC از دایره محیطی ABC باشد که شامل A نیست، ثابت کنید M روی محور اصلی دوایر ω_b و ω_c قرار دارد.

۳. $n \geq 6$ نقطه‌ی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم‌خط نیستند. یک گراف با رئوس $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را یک شبکه‌ی بزرگ‌راهی گوییم هرگاه همبند باشد، هر یال آن پاره‌خطی بین دو تا از این نقاط باشد و هیچ دو یالی یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع نکنند. ثابت کنید سه شبکه‌ی بزرگ‌راهی وجود دارند که دوبه‌دو یال مشترکی ندارند.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون انتخاب تیم المپیاد ریاضی

چهارشنبه، ۲۵ اسفند ۱۴۰۰ | امتحان دوم (روز دوم) | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴. به یک مجموعه‌ی نامتناهی $S \subseteq \mathbb{N}$ خوب می‌گوییم اگر برای هر سه تایی دوبه‌دو متمایز $a, b, c \in S$، همه‌ی مقسوم علیه‌های مثبت $\dfrac{a^c - b^c}{a - b}$ عضو S باشند. برای هر عدد طبیعی $n > ۱$، نشان دهید مجموعه‌ی خوب S وجود دارد به طوری که $n \notin S$.

۵. جدولی با n سطر و $۲n$ ستون مفروض است. می‌توانیم در برخی از خانه‌های جدول مانع قرار دهیم. پس از قرار دادن مانع‌ها از خانه‌ای دل‌خواه شروع به حرکت می‌کنیم. نحوه‌ی حرکت به این شکل است که در راستای عمودی یا افقی در یک جهت حرکت می‌کنیم تا به خانه‌ای مانع‌دار یا انتهای جدول برسیم (وارد خانه‌ی مانع‌دار نمی‌شویم). در این لحظه متوقف می‌شویم و می‌توانیم تغییر جهت بدهیم. حداقل چه تعداد مانع در جدول باید قرار دهیم که بتوانیم با شروع از خانه‌ای دل‌خواه از همه‌ی خانه‌های بدون مانع عبور کنیم؟

۶. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های بسته‌ی $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد. همه‌ی توابع $f : \mathbb{R} \to A$ را بیابید به طوری که

- $x \in f(y) \iff y \in f(x)$.
- $|x - y| > ۲ \iff f(x) \cap f(y) = \varnothing$.
- برای هر عدد حقیقی $۰ \leq r \leq ۱$، داریم $f(r) = [r^۲ - ۱, r^۲ + ۱]$.

موفق باشید.