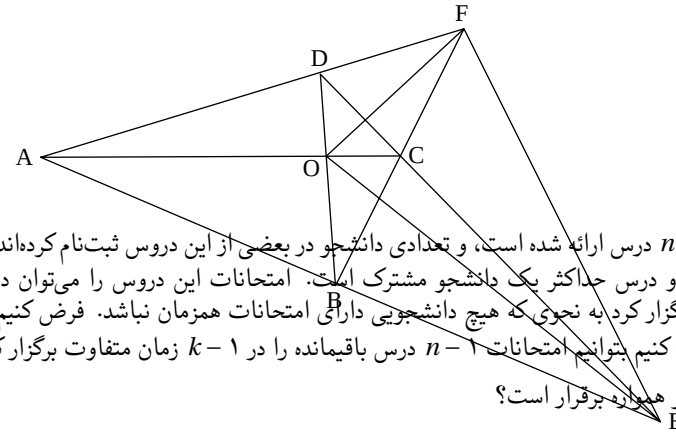
مسائل مرحله‌ی سوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید بینهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توان آنها را به صورت مجموع مربعات کمتر از ده عدد طبیعی فرد نوشت.

۲. در شکل مساحتهای سه مثلث AOD، DOC و AOB در دست است. مساحت مثلث OEF را فقط بر حسب مساحتهای سه مثلث حساب کنید.



۳. در یک ترم n درس ارائه شده است، و تعدادی دانشجو در بعضی از این دروس ثبت‌نام کرده‌اند به طوری که در هر دو درس حداکثر یک دانشجو مشترک است. امتحانات این دروس را می‌توان در k زمان متفاوت برگزار کرد به نحوی که هیچ دانشجویی دارای امتحانات همزمان نباشد. فرض کنیم هر درس را که حذف کنیم بتوانیم امتحانات $n-1$ درس باقیمانده را در $k-1$ زمان متفاوت برگزار کنیم.

آیا حکم زیر همواره برقرار است؟

«اگر یکی از دانشجویان که حداقل در دو درس ثبت‌نام کرده است یکی از درسهای خود را حذف کند باز هم می‌توان امتحانات را در $k-1$ زمان متفاوت با شرط فوق تنظیم کرد».

۴. ثابت کنید زیرمجموعهٔ S از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که هر عدد طبیعی را بتوان فقط به یک طریق به صورت تفاضل دو عضو S نوشت.

۵. در چهارضلعی محدب $ABCD$ دو قطر AC و BD برابرند. روی اضلاع این چهارضلعی و در خارج آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. ثابت کنید خطوط واصل بین مراکز مثلثهای ساخته شده روی اضلاع مقابل، بر هم عمودند.

۶. فرض می‌کنیم $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۱۲}$ اعداد حقیقی باشند که به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۱۲$، $|x_i| \geqslant ۱$، و همچنین فرض می‌کنیم $I = [a, b]$ که $b - a \leqslant ۲$. ثابت کنید تعداد اعدادی به شکل $t = \sum_{i=۱}^{۱۲} r_i x_i$ که $r_i = \pm ۱$ و در فاصلهٔ I قرار دارند از ۱۰۰۰ کمتر است.