حل مسائل مرحله‌ی سوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

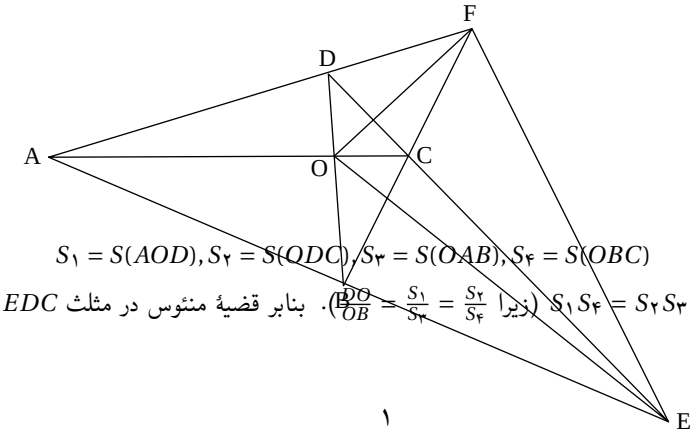
زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت می‌کنیم اگر $n \overset{۷۲}{\equiv} ۶۶$ باشد، n را نمی‌توان به‌صورت مجموع کمتر از ده مربع کامل فرد نوشت. در این‌صورت،

$$n \overset{۹}{\equiv} ۳ \quad \text{و} \quad n \overset{۸}{\equiv} ۲$$

حالا اگر $n = x_۱^۲ + \cdots + x_k^۲$ باشد با توجه به اینکه باقیماندهٔ تقسیم هر مجذور کامل بر ۸ برابر ۱ است، داریم $n \overset{۸}{\equiv} k$ و چون $k \leqslant ۹$ است، باید داشته باشیم $k = ۲$. یعنی $n = x_۱^۲ + x_۲^۲$. ولی از طرف دیگر n بر ۳ بخشپذیر است و چون مجموع دو مجذور کامل است باید بر ۹ نیز بخشپذیر باشد. که این متناقض با $n \overset{۹}{\equiv} ۳$ است.



۲.

اگر

$$S_۱ = S(AOD), S_۲ = S(ODC), S_۳ = S(OAB), S_۴ = S(OBC)$$

به وضوح $S_۱S_۴ = S_۲S_۳$ (زیرا $\frac{DO}{OB} = \frac{S_۱}{S_۳} = \frac{S_۲}{S_۴}$). بنابر قضیهٔ منئوس در مثلث EDC با قاطع

FBA داریم

$$\frac{BC}{BE}\cdot\frac{EA}{AD}\cdot\frac{DF}{FC}=۱\Longrightarrow\frac{S_۳+S_۴}{S(ABE)}\cdot\frac{S(ABE)}{S_۱+S_۳}\cdot\frac{DF}{FC}=۱$$

$$\Longrightarrow\frac{FC}{DF}=\frac{S_۳+S_۴}{S_۱+S_۳}$$

و به همین ترتیب، $\frac{EA}{ED}=\frac{S_۳+S_۴}{S_۲+S_۴}$. پس

$$\frac{S_۳+S_۴}{S_۱+S_۳}=\frac{FC}{DF}=\frac{S(BCF)}{S(BCF)+S_۲+S_۴}$$

$$\Longrightarrow\frac{S(BCF)}{S_۲+S_۴}=\frac{S_۳+S_۴}{S_۱-S_۴}$$

$$\Longrightarrow S(BCF)=\frac{(S_۲+S_۴)(S_۳+S_۴)}{S_۱-S_۴}$$

$$S(ABE)=\frac{(S_۱+S_۳)(S_۳+S_۴)}{S_۲-S_۳}$$

$$\frac{S(OBF)}{S(BCF)+S_۲+S_۴}=\frac{S_۴}{S_۴+S_۲}$$

$$\Longrightarrow\frac{S(OBF)}{S_۴}=\frac{S(BFC)}{S_۲+S_۴}+۱=\frac{S_۱+S_۳}{S_۱-S_۴}$$

$$S(OBF)=\frac{S_۴(S_۱+S_۳)}{S_۱-S_۴}\qquad(۱)$$

$$S(OEB)=\frac{(S_۲+S_۴)S_۳}{S_۲-S_۳}=\frac{S_۴(S_۱+S_۳)}{S_۲-S_۳}\qquad(۲)$$

$$\frac{S(BEF)}{S(ABE)}=\frac{S(BCF)}{S_۳+S_۴}$$

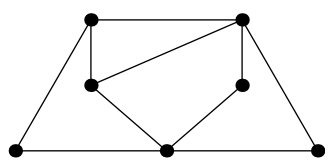
$$\Longrightarrow S(BEF)=\frac{(S_۲+S_۴)(S_۱+S_۳)(S_۳+S_۴)}{(S_۱-S_۴)(S_۲-S_۳)}\qquad(۳)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
S &= S(OEF)\\
&= \frac{S_4(S_1+S_3)(S_2-S_3-S_1+S_4)}{(S_1-S_4)(S_2-S_3)} + \frac{(S_1+S_3)(S_2+S_4)(S_3+S_4)}{(S_1-S_4)(S_2-S_3)}\\
&= \frac{(S_1+S_3)(2S_2S_4-S_1S_4+2S_4^2+S_2S_3)}{(S_1-S_4)(S_2-S_3)}\\
&= \frac{2S_4(S_1+S_3)(S_2+S_4)}{(S_1-S_4)(S_2-S_3)} \qquad \text{چون } S_1S_4 = S_2S_3\\
&= \frac{2S_2^2S_3(S_1+S_3)^2}{S_1(S_1^2-S_2S_3)(S_2-S_3)}
\end{aligned}$$

۳. گرافی به این صورت می‌سازیم: به‌ازای هر درس یک رأس در نظر می‌گیریم و اگر دو درس دارای دانشجوی مشترک باشند یک یال بین آنها رسم می‌کنیم.

به زبان نظریهٔ گراف صورت این مسأله چنین است: «گراف n رأسی G دارای این ویژگی است که عدد رنگی رأسی آن مساوی k است و اگر هر رأس آن را حذف کنیم عدد رنگی گراف حاصل، $k-1$ می‌شود. آیا این گراف دارای این ویژگی نیز هست که اگر هر یال آن را حذف کنیم عدد رنگی آن تغییر کند؟» جواب لزوماً مثبت نیست. گراف زیر مثالی بر این مدعاست.



۴. کوچکترین عددی را که تا مرحله iام در S وجود ندارد j می‌گیریم. دو عدد a و $a+j$ را در این مرحله به S اضافه می‌کنیم با این شرط که a را آنقدر بزرگ اختیار کنیم که

$$\forall \alpha \in S, \quad a-\alpha \notin S_i, a+j-\alpha \notin S_i$$

این کار عملی است زیرا اگر x را عضوی از S_i و y را بزرگترین عضو S_i بگیریم، کافی است $a > 2y$ باشد. در این‌صورت،

$$\begin{aligned}
a-x \geqslant a-y > y &\Longrightarrow a-x \notin S_i\\
&\Longrightarrow a-x+j \notin S_i
\end{aligned}$$

و به همین روش S را به هر مقدار دلخواه گسترش می‌دهیم و S نامتناهی را می‌توان ساخت.

چون در هر مرحله کمترین عددی را که نیامده است می‌سازیم، هر عددی یک بار برابر تفاضل دو عدد می‌شود و چون هیچ تفاضلی بعداً ساخته نمی‌شود هر عدد را فقط به یک طریق می‌توان به‌صورت تفاضل دو عضو S نوشت.

۵. مرکزهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده روی AB، BC، CD و DA را به‌ترتیب O_1، O_2، O_3 و O_4 می‌نامیم.

$$\begin{aligned}
O_1O_4^2 + O_2O_3^2 &= O_1A^2 + O_4A^2 - 2O_1A\cdot O_4A\cdot\cos(60^\circ + A)\\
&\quad + O_2C^2 + O_3C^2 - 2O_2C\cdot O_3C\cdot\cos(60^\circ + C)\\
&= O_1A^2 + O_4A^2 + O_2C^2 + O_3C^2\\
&\quad - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}AD\right)\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)\\
&\quad - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}CD\right)\left(\frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\\
&= O_1A^2 + O_4A^2 + O_2C^2 + O_3C^2\\
&\quad - \frac{1}{3}(AB\cdot AD\cdot\cos A + BC\cdot CD\cdot\cos C)\\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{3}(AB\cdot AD\cdot\sin A + BC\cdot CD\cdot\sin C)\\
&= O_1B^2 + O_4D^2 + O_2B^2 + O_3D^2\\
&\quad - \frac{1}{3}(AB\cdot BC\cdot\cos B + AD\cdot CD\cdot\cos D)\\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{3}(AB\cdot BC\cdot\sin B + AD\cdot CD\cdot\sin D)\\
&= O_1O_2^2 + O_3O_4^2
\end{aligned}$$

زیرا

$$AB\cdot AD\cdot\sin A + BC\cdot CD\cdot\sin C = 2S_{ABCD} = AB\cdot BC\cdot\sin B + AD\cdot CD\cdot\sin D$$

و از برابر بودن AC و BD نتیجه می‌شود $2AC^2 = 2BD^2$ و

$$AB^2+BC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos B+AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D = AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A+BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C$$

یعنی

$$AB\cdot BC\cdot\cos B + AD\cdot CD\cdot\cos D = AB\cdot AD\cdot\cos A + BC\cdot CD\cdot\cos C$$

از تساوی $O_1O_4^2 + O_2O_3^2 = O_1O_2^2 + O_3O_4^2$ می‌توان به سادگی عمود بودن O_1O_3 بر O_2O_4 را نتیجه گرفت.

۶. چون $r_i = \pm 1$ بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان x_iها را مثبت فرض کرد. حالا برای هر t مجموعه X_t را طوری تعریف می‌کنیم که

$$X_t = \{j \mid r_j = +1\}$$

اگر برای p و q دلخواه $X_p \subset X_q$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} q - p &= (+A + B - C) - (+A - B - C) \\ &= ۲ \times B = ۲ \times \sum x_j \geqslant ۲ \end{aligned}$$

که A قسمت مشترک p و q با ضریب هر عضو ۱+ بوده و C قسمت مشترک p و q است که هر عضو آن ضریب ۱− دارد. B قسمت تفاوت p و q است.

پس p و q نمی‌توانند با هم در یک بازه به طول کمتر از ۲ قرار بگیرند. بنابراین، مسأله تبدیل می‌شود به ماکزیمم کردن تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۱۲ عضوی که هیچ دوتای آنها زیرمجموعهٔ هم نباشند و این تعداد برای مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}$.

$$n = ۱۲ \Longrightarrow A \leqslant \binom{۱۲}{۶} < ۱۰۰۰$$