حل مسائل مرحله‌ی سوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور - قسمت دوم

زمان برگزاری: خرداد ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

.۱

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\Longrightarrow f(\alpha^2-1)=f(\alpha)f(-\alpha)=0 \Longrightarrow f(\alpha^2-1)=0 \\ f(\alpha^2-1)=0 &\Longrightarrow f(\alpha)f(-\alpha)=f(\alpha^2-1)=0 \\ &\Longrightarrow f(\alpha)=0 \text{ یا } f(-\alpha)=0 \end{aligned}$$

پس ریشه‌های f به صورت دسته‌هایی به شکل $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \rangle$ هستند که α_iها یک دسته نقطه با تناوب k در p هستند، یعنی

$$\begin{cases} \alpha_i^2-1=\alpha_{i+1}, & i=1,2,\ldots,k-1 \\ \alpha_k^2=\alpha_1 \end{cases}$$

(اگر f_1 و f_2 در شرط مسأله صدق کنند، $f_1 f_2$ هم در شرط مسأله صدق می‌کند.) در اینصورت

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k) \\ f(x^2-1) &= (-1)^k(x^2-1-\alpha_1)(x^2-1-\alpha_2)\cdots(x^2-1-\alpha_k) \\ &= (-1)^k(x^2-\alpha_k^2)(x^2-\alpha_1^2)\cdots(x^2-\alpha_{k-1}^2) \\ &= (-1)^k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k) \\ &\quad \times (-1)^k(-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2)\cdots(-x-\alpha_k) \\ &= f(x)f(-x) \end{aligned}$$

نقاط تناوبی x^2-1 را بررسی می‌کنیم. می‌گیریم $\widehat{\phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} x^2-1-x &= (x-\phi)(x-\widehat{\phi}) \\ (x^2-1)^2-x &= (x+1)(x-\widehat{\phi})x(x-\phi) \end{aligned}$$

می‌گیریم $p(x) = x^۲ - ۱$. ثابت می‌کنیم تنها نقاط تناوبی p، $\widehat{\phi}$، ϕ، ۰ و ۱− هستند. فرض کنید x نقطه‌ای تناوبی غیر از اینها باشد.

$$
\begin{aligned}
&۱)\ \phi < x \Longrightarrow x^۲ - ۱ > x \Longrightarrow p^k(x) > x \\
&۲)\ x < -۱ \Longrightarrow x^۲ - ۱ > ۰ \Longrightarrow p^k(x) > x \\
&۳)\ ۰ < x < ۱ \Longrightarrow -۱ < x^۲ - ۱ < ۰ \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow -۱ < (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow -۱ < p^k(x) < ۰ \\
&۴)\ ۱ < x < \phi \Longrightarrow ۰ < x^۲ - ۱ < \phi \qquad \text{واضح است که } p(x) \notin (۰, ۱) \\
&\quad x^۲ - ۱ < x \Longrightarrow ۱ < x^۲ - ۱ < x \Longrightarrow p^k(x) \neq x \\
&۵)\ -۱ < x < \widehat{\phi} \Longrightarrow -۱ < (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ < \widehat{\phi} \ \text{ و } \ (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ > x \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow p^{۲k}(x) > x \\
&۶)\ \widehat{\phi} < x < ۰ \Longrightarrow \widehat{\phi} < (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ < ۰ \ \text{ و } \ (x^۲ - ۱)^۲ - ۱ < x \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow p^{۲k}(x) < x
\end{aligned}
$$

پس نقاط تناوبی $p(x)$ فقط ϕ، $\widehat{\phi}$، ۱− و ۰ هستند.

$$f(x) = (\phi - x)^{n_۱} (\widehat{\phi} - x)^{n_۲} (x^۲ + x)^{n_۳}$$

۲. فرض کنیم $S = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_k\}$ و $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_k = m$ در این‌صورت،

$$
\begin{aligned}
T = S \cup \{&m(m-۲), m(m-۱)(m-۳), m(m-۱)(m-۲)(m-۴), \\
&\ldots, m(m-۱)(m-۲)(m-۳)\cdots \times ۳ \times ۱\}
\end{aligned}
$$

اگر مجموع اعضای T را A بگیریم A را این گونه حساب می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\sum x_i &= m \\
m + m(m-۲) &= m(m-۱) \\
m(m-۱) + m(m-۱)(m-۳) &= m(m-۱)(m-۲) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

و بالاخره

$$
\begin{aligned}
&m(m-۱)\ldots \times ۳ + m(m-۱)\ldots \times ۳ \times ۱ = \\
&\qquad m(m-۱)(m-۲)\ldots \times ۳ \times ۲
\end{aligned}
$$

پس $A = m!$ و برای هر $x \in T$،

$$x < m! \Longrightarrow x \mid m!$$

و $S \subset T$. واضح است که T دارای شرایط مورد نظر است.

۳. برای راحتی قرار می‌دهیم

$$A_1B_1 = a, \quad B_1C_1 = b, \quad C_1D_1 = c, \quad D_1A_1 = d,$$
$$A_1B_1 = e, \quad B_1C_2 = f, \quad C_1D_2 = g, \quad D_1A_2 = h$$

$$S_{A_1B_2C_2} = \frac{1}{2}(a+f)e\sin\angle B_2A_1C_2$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}ad\sin\angle D_1A_1B_1 + \frac{1}{2}bc\sin\angle D_1C_1B_1$$

$$\frac{S_{A_1B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{(a+f)e}{ad+bc} = \frac{e(e+d)}{ad+bc}\cdot\frac{a+f}{e+d} = \frac{R_2^2-R_1^2}{ad+bc}\cdot\frac{a+f}{e+d}$$

$$\frac{S_{C_1D_2A_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{R_2^2-R_1^2}{ad+bc}\cdot\frac{c+h}{b+g}$$

$$\frac{S_{B_1C_2D_1}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{R_2^2-R_1^2}{ad+bc}\cdot\frac{b+g}{a+f}$$

$$\frac{S_{D_1A_2B_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{R_2^2-R_1^2}{ad+bc}\cdot\frac{e+d}{e+h}$$

اگر این چهار تا را با هم جمع نموده از نامساوی حسابی-هندسی استفاده کنیم نتیجه خواهیم گرفت که

$$\frac{S_{A_2B_2C_2D_2} - S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} \geqslant 4(R_2^2-R_1^2)\cdot\sqrt{\frac{1}{(ad+bc)(ab+cd)}} \qquad (1)$$

اما می‌دانیم از بین تمام چهارضلعیهای محاط در دایره، مربع ماکزیمم محیط را دارد، پس

$$a+b+c+d \leqslant 4\sqrt{2R}$$

اما بنابر نامساوی حسابی-هندسی

$$\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} \leqslant \frac{ad+bc+ab+cd}{2} = \frac{(a+c)(b+d)}{2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\times\frac{(a+b+c+d)^2}{4} \leqslant 4R^2$$

بنابر (۱)،

$$\frac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} \geqslant 4(R_2^2-R_1^2)\frac{1}{4r^2} + \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

۴. منحنی را چنان در صفحه جابه‌جا کنید که نقاط انتهایی آن روی محور xها قرار بگیرد و سپس کوچکترین مستطیلی را در نظر بگیرید که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و منحنی را می‌پوشاند. طول و عرض آن را a و b بگیرید.

نقاط انتهایی آن را P_0 و P_5 بنامید و نقاط P_1 و P_2 و P_3 و P_4 را روی منحنی طوری در نظر بگیرید که هر کدام روی یکی از اضلاع مستطیل باشد (ممکن است مثلاً $P_0 = P_1$ باشد). خط شکستهٔ $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ را رسم کنید. طول این خط شکسته حداکثر ۱ است. از طرفی جمع طول تصویرهای این پاره‌خطها روی محور xها حداقل a و روی محور yها حداقل $2b$ است. (زیرا از نقطه‌ای روی محور xها شروع به حرکت کرده و تا نقطه‌ای روی ضلع بالایی مستطیل بالا رفته و تا نقطه‌ای روی ضلع پایین مستطیل پایین رفته به نقطه‌ای روی محور xها باز می‌گردد) بنابراین طول خط شکسته حداقل $\sqrt{a^2+4b^2}$ است (چرا؟). بنابراین $a^2+4b^2 \leqslant 1$ بنابراین $4ab = 2\sqrt{a^2\times 4b^2} \leqslant a^2+4b^2 \leqslant 1$ یا $ab \leqslant \frac{1}{4}$. یعنی مساحت این مستطیل کمتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ است.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم $k \leqslant 2$. مثالی که ما برای این اثبات در نظر می‌گیریم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است که M مرکز دایرهٔ محیطی آن است. در این حالت به سادگی دیده می‌شود که Γ همان دایرهٔ محیطی مثلث است. پس

$$R = 2r \Longrightarrow k \leqslant 2$$

و حالا ثابت می‌کنیم $k \geqslant 2$. برای اینکار ثابت می‌کنیم اگر مثلث ABC کاملاً داخل هر دایرهٔ دلخواه قرار گرفته باشد، دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی آن از شعاع دایرهٔ مفروض کمتر است.

لم. در مثلث ABC، AB را از طرف A امتداد می‌دهیم و X را روی نیم‌خط بدست آمده می‌گیریم. $r_{XBC} \geqslant r_{ABC}$.

اثبات. اگر

$$\begin{aligned}
&r_{ABC} > r_{XBC}\\
&\Longrightarrow \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} > \frac{S_{XBC}}{p_{XBC}}\\
&\Longrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{XBC}} > \frac{2p_{ABC}}{2p_{XBC}}\\
&\Longrightarrow \frac{AB}{XB} > \frac{AB+AC+BC}{XB+XC+BC}\\
&\Longrightarrow AB\cdot BX + AB\cdot CX + AB\cdot BC >\\
&\qquad\qquad AB\cdot BX + AC\cdot BX + BC\cdot BX\\
&\Longrightarrow AB\cdot CX + AB\cdot BC > AC\cdot BX + BC\cdot AB + BC\cdot AX\\
&\Longrightarrow AB\cdot CX + AX\cdot CX > AC\cdot BX + AX\cdot BC + AX\cdot BX\\
&\Longrightarrow BX\cdot CX > AC\cdot BX + AX(BC+CX) >\\
&\qquad\qquad AC\cdot BX + AX\cdot BX\\
&\Longrightarrow BX\cdot CX > BX(AC+AX) > BX\cdot CX \quad \text{تناقض}
\end{aligned}$$

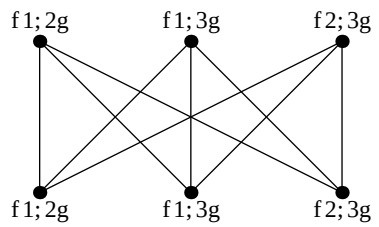
از آنجا که ABC داخل Γ قرار دارد، AB را امتداد می‌دهیم تا دایره را در طرف A در X و در طرف B در Y قطع کند. و نیز YC را امتداد می‌دهیم تا دایره را در طرف C در Z قطع کند.

$$r_{ABC} \leqslant r_{XBC} \leqslant r_{XYC} \leqslant r_{XYZ} \quad \text{(لم)}$$

اما Γ دایرهٔ محیطی XYZ است، پس

$$\left.\begin{array}{r} R \geqslant ۲r_{XYZ} \geqslant ۲r_{ABC} \Longrightarrow k \geqslant ۲ \\ k \leqslant ۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow k = ۲$$

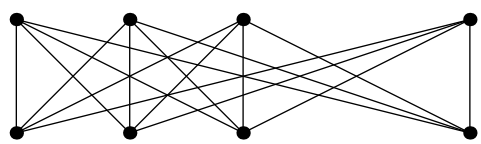
۶. الف) گراف زیر را با لیست رنگهای داده شده در نظر می‌گیریم.



واضح است که این گراف با این لیست رنگها، رنگ‌آمیزی لیستی ندارد. پس

$$\chi_l(G) > ۲ = \chi(G)$$

ب) از مثال بند (الف) می‌توان به مثال کلی زیر دست یافت.



یعنی گراف دو بخشی کامل که در هر بخش n راس دارد و یالهای آن تشکیل شده است از تمام یالهایی که رأسهای یک بخش را به بخش دیگر وصل می‌کنند. حال اگر $n = \binom{۲k-۱}{k}$ بگیریم و در هر بخش از این گراف لیست رنگها را تمام زیرمجموعه‌های kتایی از $۲k-۱$ فرض کنیم، به سادگی دیده می‌شود که این گراف با لیست رنگهای داده شده رنگ‌آمیزی لیستی ندارد. پس $\chi_l(K_{n,n}) > k$ در صورتی که $\chi(K_{n,n}) = ۲$ یعنی $\chi_l(K_{n,n}) \geqslant \chi(K_{n,n}) + (k-۱)$ (به‌ازای $n = \binom{۲k-۱}{k}$).