به نام او

آزمون میان‌ترم جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۳۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

---

۱. a، b و c اعداد حقیقی مثبتی هستند که $\sum_{cyc}(a+b)^2 = 2\sum a + 6abc$. ثابت کنید

$$\sum_{cyc}(a-b)^2 \leq \left|2\sum a - 6abc\right|.$$

۲. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a+f(b)+f(f(c))=0$، آن‌گاه

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2 f(c) = 3abc$$

۳. عدد طبیعی d داده شده است. همه‌ی بازه‌های باز $I \subseteq \mathbb{R}$ از بیش‌ترین طول را بیابید که برای هر انتخاب $a_0, a_1, \ldots, a_{2d-1}$ از اعضای I، چندجمله‌ای $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1}x^{2d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

موفق باشید.

۱. a، b و c اعداد حقیقی مثبتی هستند که $\sum_{cyc}(a+b)^۲ = ۲\sum a + ۶abc$. ثابت کنید

$$\sum_{cyc}(a-b)^۲ \leq |۲\sum a - ۶abc|.$$

راه‌حل. لم. اگر A، B، C و D اعداد حقیقی مثبتی باشند که $A+B=C+D$. در این صورت $AB \leq CD$ اگر و تنها اگر $|C-D| \leq |A-B|$.
اثبات لم. به سادگی می‌دانیم

$$|C-D| \leq |A-B| \Leftrightarrow (C-D)^۲ \leq (A-B)^۲ \Leftrightarrow (C+D)^۲ - ۴CD \leq (A+B)^۲ - ۴AB$$

و عبارت آخر با توجه به این که $A+B=C+D$ معادل این است که $AB \leq CD$.

حال در صورت مسئله اصلی قرار می‌دهیم، $A = ۳abc$، $B = \sum a$، $C = \sum a^۲$ و $D = \sum ab$.
طبق فرض صورت سوال می‌دانیم $A+B=C+D$. حال نشان می‌دهیم $AB \leq CD$ یا معادلاً

$$۳abc\sum a \leq (\sum a^۲)(\sum ab).$$

این نابرابری را به روش‌های مختلف می‌توان نشان داد. برای مثال

$$۳\left(\sum a^۲\right)\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)^۲\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)\left(۳\sqrt[۳]{abc}\right)\left(۳\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}\right).$$

و عبارت مورد نظر نتیجه می‌شود. حال طبق لم داریم

$$|\sum a^۲ - \sum ab| \leq |\sum a - ۳abc|.$$

با ضرب کردن طرفین در ۲ و توجه به این نکته که $۲\sum a^۲ - ۲\sum ab = \sum(a-b)^۲$ حکم نهایی سوال نتیجه می‌شود. $\square$

۲. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a+f(b)+f(f(c))=0$، آن‌گاه

$$f(a)^3+bf(b)^2+c^2f(c)=3abc$$

راه‌حل. اولاً تابع ثابت صفر در حکم مسئله صدق می‌کند. چرا که اگر a، b و c در شرط مسئله صدق کنند، a باید برابر صفر باشد و لذا تساوی برقرار است. حال فرض کنید تابع ثابت صفر نیست. ثابت می‌کنیم در این حالت حتماً f تابعی یک به یک است.

به برهان خلف فرض کنید دو عدد حقیقی متفاوت x و y موجود باشند که $f(x)=f(y)=\alpha$. در این صورت در فرض و حکم مسئله یک بار به جای c مقدار x و بار دیگر مقدار y را قرار می‌دهیم.

$$a+f(b)+f(f(x))=0\Rightarrow f(a)^3+bf(b)^2+x^2f(x)=3abx,$$

$$a+f(b)+f(f(y))=0\Rightarrow f(a)^3+bf(b)^2+y^2f(y)=3aby,$$

با کم کردن دو عبارت از هم داریم:

$$(x^2-y^2)\alpha=3ab(x-y).$$

و چون x و y نابرابر فرض شده اند، نتیجه می‌گیریم که برای هر a و b که در تساوی $a+f(b)+f(\alpha)=0$ صدق کنند

$$(x+y)\alpha=3ab,\quad (*)$$

. یک بار b را برابر صفر و a را برابر $-f(b)-f(\alpha)$ قرار می‌دهیم که $(*)$ نتیجه می‌دهد $(x+y)\alpha=0$ است. حال اگر b را ناصفر و $a=-f(b)-f(\alpha)$ بگیریم باید حتماً a برابر صفر باشد. یعنی برای مقادیر ناصفر b، f تابعی ثابت است.

حال در عبارت فرض سوال c را برابر صفر و b را مقداری ناصفر بگیرید. حال با قرار دادن $a=-f(b)-f(f(0))$ داریم

$$f(a)^3+bf(b)^2=0.$$

مقدار $f(a)^3$ نیز با تغییر b تغییر نمی‌کند. پس برای همه مقایر ناصفر b، $f(b)=0$ است و چون تابع فرض کردیم f متحد با صفر نیست، $f(0)\neq 0$.

اگر c را برابر صفر و b را ناصفر قرار دهیم، $0+f(b)+f(f(c))=0$. پس

$$f(0)^3+b\underbrace{f(b)^2}_{0}+0^2\times f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

که تناقض است پس f یک به یک می‌باشد.

حال یک بار قرار دهید $b=c=0$ و $a=-f(0)-f(f(0))$. در این صورت نتیجه می‌شود $f(r)=0$ که $r=-f(0)-f(f(0))$.

سپس b را برابر x، c را برابر صفر و a را $-f(f(\circ))$ می‌گذاریم که نتیجه می‌دهد $f(-f(f(\circ))) = \circ$.
با توجه به یک به یک بودن، نتیجه می‌گیریم $f(\circ)$ برابر صفر است.
یک بار با قرار دادن b برابر صفر و یک بار دیگر با قرار c برابر صفر نتیجه می‌گیریم

$$f(-f(b))^{۳} = -bf(b)^{۲}, f(-f(f(c)))^{۳} = -c^{۲}f(c).$$

اگر در رابطه اول به جای b، $f(c)$ قرار دهیم و با عبارت دوم مقایسه کنیم

$$-f(c)f(f(c))^{۲} = -c^{۲}f(c).$$

پس $f(f(c))^{۲} = c^{۲}$. حال در صورت سوال به جای b، $f(b)$ قرار می‌دهیم

$$a + f(f(b)) + f(f(c)) = \circ \Rightarrow f(a)^{۳} + f(b)b^{۲} + c^{۲}f(c) = ۳af(b)c.$$

به دلیل تقارن سمت چپ، نتیجه می‌گیریم $af(b)c = abf(c)$. پس اگر $b \neq \pm c$ (که نتیجه می‌دهد a نمی‌تواند برابر صفر باشد) نتیجه می‌گیریم $f(b)c = bf(c)$. یعنی برای هر $b \neq -۱$، $f(b) = bf(۱)$ و برای هر $b \neq -۲$، $f(b) = \frac{b}{۲}f(۲) = bf(۱)$. پس f تابعی خطی است. حال چون $f(f(x))^{۲} = x^{۲}$. $f(x) = x$ و یا $f(x) = -x$. به وضوح هر دو تابع به دلیل اتحاد اویلر در صورت مسئله صدق می‌کنند.

$\square$

۳. عدد طبیعی d داده شده است. همه‌ی بازه‌های باز $I \subseteq \mathbb{R}$ از بیش‌ترین طول را بیابید که برای هر انتخاب $a_0, a_1, \ldots, a_{2d-1}$ از اعضای I، چندجمله‌ای $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1}x^{2d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

راه‌حل. ادعا می‌کنیم جواب بازه‌ی $(1, 1 + \frac{1}{d})$ است.
فرض کنید (b, c) بازه‌ی مطلوب حکم مسئله باشد. در این صورت چون $P(x)$ درجه زوج است برای مقادیر به دل‌خواه بزرگ x مقدار چندجمله‌ای مثبت است. پس چون P ریشه ندارد باید مقدار آن همیشه مثبت باشد و به طور خاص $P(-1) > 0$.
برای دو عدد α و β در بازه (b, c)، ضرایب زوج چندجمله‌ای را برابر β و ضرایب فرد را برابر α قرار می‌دهیم. داریم

$$0 < P(-1) = 1 + d\beta - d\alpha.$$

پس $\alpha - \beta \leq \frac{1}{d}$ و طول بازه حداکثر $\frac{1}{d}$ است. حال ادعا می‌کنیم تنها بازه $I = (1, 1 + \frac{1}{d})$ شرط مورد نظر را دارد. اگر بازه $(\alpha, \alpha + \frac{1}{d})$ واجد شرط مسئله باشد، برای هر $x = -t < 0$ باید مقدار تابع مثبت باشد. به خصوص اگر همه‌ی ضرایب زوج را نزدیک α و همه‌ی ضرایب فرد را نزدیک $\alpha + \frac{1}{d}$ انتخاب کنیم. پس با انتخاب ضرایب زوج برابر α و ضرایب زوج برابر $\alpha + \frac{1}{d}$ نیز مقدار تابع نامنفی است.

$$0 \leq P(-t) = t^{2d} - (\alpha + \frac{1}{d})(t^{2d-1} + \cdots + t^3 + t) + \alpha(t^{2d-2} + \cdots + t^2 + 1).$$

عبارت بالا همیشه نامنفی است و برای $t = 1$ برابر صفر می‌شود. پس $t = 1$ باید ریشه مضاعف آن باشد که نتیجه می‌دهد که $\alpha = 1$ و بازه با طول $\frac{1}{d}$ باید بازه $(1, 1 + \frac{1}{d})$ باشد.
حال نشان می‌دهیم برای هر انتخاب ضرایب در این بازه، چندجمله‌ای ریشه منفی ندارد. به وضوح اگر ضرایب در این بازه انتخاب شوند، $P(x)$ ریشه مثبت ندارد. حال نشان می‌دهیم برای هر مقدار منفی x نیز $P(x)$ مثبت است. قرار دهید $x = -t < 0$.

$$P(t) > t^{2d} - (1 + \frac{1}{d})t^{2d-1} + t^{2d-2} - (1 + \frac{1}{d})t^{2d-3} + \cdots - (1 + \frac{1}{d})t + 1.$$

پس کافی است نشان دهیم که سمت راست عبارت بالا مثبت است یا معادلاً

$$\frac{t^{2d} + t^{2d-2} + \cdots + t^2 + 1}{d+1} \geq \frac{t^{2d-1} + t^{2d-3} + \cdots + t^3 + t}{d}.$$

که چون $t^{2d} + 1 \geq t^{2d-2k+1} + t^{2k-1}$ و $t^{2k} + t^{2k-2} \geq 2t^{2k-1}$ این نیز برقرار است.

□

موفق باشید.

به نام او

آزمون پایان‌ترم جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۳۹۸ | مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. فرض کنید $k \geq ۳$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ تعدادی نقطه روی دایره واحد در صفحه باشند. ثابت کنید

$$\sum_{۱\leq i<j\leq k} |A_i - A_j|^۲ \leq k^۲.$$

(منظور از $|A_i - A_j|$ فاصله دو نقطه A_i و A_j در صفحه است.)

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح از درجه حداقل یک است. فرض کنید $P_۱(x), \ldots, P_n(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\deg(P_i) \geq \deg(P)$. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد طبیعی x، می‌توان عدد طبیعی y و اندیس i ($۱ \leq i \leq n$) یافت که $P(x) = P_i(y)$. ثابت کنید اندیس $۱ \leq j \leq n$ و عدد صحیح k وجود دارد که $P(x) = P_j(x+k)$.

۳. a، b و c اعدادی حقیقی ناصفر و متمایز هستند که برای آن‌ها توابع $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که تساوی

$$af(xy) + bf(\frac{x}{y}) = cf(x) + g(y)$$

برای هر مقدار حقیقی به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار حقیقی مثبت x برقرار باشد. ثابت کنید تابع $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر مقدار به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار مثبت x،

$$f(xy) + f(\frac{x}{y}) = ۲f(x) + h(y).$$

موفق باشید.

۱. فرض کنید $k \geq ۳$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ تعدادی نقطه روی دایره واحد در صفحه باشند. ثابت کنید

$$\sum_{۱\leq i<j\leq k} |A_i - A_j|^۲ \leq k^۲.$$

(منظور از $|A_i - A_j|$ فاصله دو نقطه A_i و A_j در صفحه است.)

راه‌حل. توجه کنید که $\sum_{۱\leq i<j\leq k} |A_i - A_j|^۲ = \frac{۱}{۲} \sum_{۱\leq i,j\leq k} |A_i - A_j|^۲$. چرا که اگر i و j برابر باشند، $|A_i - A_j|^۲$ برابر صفر است و سایر مقادیر دو بار ظاهر شده اند.

$$\begin{aligned}
\sum_{۱\leq i,j\leq k} |A_i - A_j|^۲ &= \sum_{۱\leq i,j\leq k} (A_i - A_j)(\overline{A_i} - \overline{A_j}) \\
&= \sum_{۱\leq i,j\leq k} (۲ - A_i\overline{A_j} - A_j\overline{A_i}) = ۲k^۲ - ۲ \sum_{۱\leq i,j\leq k} A_i\overline{A_j} \\
&= ۲k^۲ - (\sum_{i=۱}^{k} A_i)(\sum_{j=۱}^{k} \overline{A_j}) = ۲k^۲ - |\sum_{i=۱}^{k} A_i|^۲ \\
&\leq ۲k^۲
\end{aligned}$$

□

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح از درجه حداقل یک است. فرض کنید $P_۱(x), \dots, P_n(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\deg(P_i) \geq \deg(P)$. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد طبیعی x، می‌توان عدد طبیعی y و اندیس i ($۱ \leq i \leq n$) یافت که $P(x) = P_i(y)$. ثابت کنید اندیس $۱ \leq j \leq n$ و عدد صحیح k وجود دارد که $P(x) = P_j(x+k)$.

راه‌حل. ابتدا با یک لم شروع می‌کنیم.
لم. فرض کنید $Q(x)$ یک چندجمله‌ای تکین از درجه m با ضرایب حقیقی باشد. در این صورت عدد طبیعی M وجود دارد که برای هر x با $|x| > M$، $\frac{۱}{۲}|x|^m < |Q(x)| < \frac{۳}{۲}|x|^m$.

راه‌حل لم. با توجه به تکین بودن $Q(x)$ می‌توان نوشت $Q(x) = x^m + S(x)$ که $S(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کم‌تر از m است. در این صورت می‌توان عدد حقیقی مثبت M یافت که برای هر x با $|x| > M$، $|\frac{۱}{۲}x^m - S(x)| > ۰$ و لذا $\frac{۱}{۲}|x|^m > |S(x)|$. پس

$$|Q(x)| = |x^m + S(x)| \leq |x|^m + |S(x)| \leq |x|^m + \frac{۱}{۲}|x|^m = \frac{۳}{۲}|x|^m.$$

$$|Q(x)| = |x^m + S(x)| \geq |x|^m - |S(x)| \geq |x|^m - \frac{۱}{۲}|x|^m = \frac{۱}{۲}|x|^m.$$

□

حال به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قصد داریم برای یک عدد طبیعی N بزرگ، تعداد اعدادی که در بین اعداد $۱, ۲, \dots, N$ به فرم $P(x)$ برای یک عدد طبیعی x هستند را تخمین بزنیم. فرض کنید چندجمله‌ای P در صورت مسئله از درجه d باشد. می‌توان $M_۰$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که حکم بیان شده در لم بالا برقرار باشد و به علاوه برای هر $x > M_۰$، چندجمله‌ای P صعودی و مثبت باشد.

$$M_۰ < x < T \Rightarrow P(x) \leq \frac{۳}{۲}|x|^d < \frac{۳}{۲}T^d.$$

طبق این نکته اگر $M_۰ < x < (\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}}$ باشد (برای N بزرگ که این مقدار از $M_۰$ بیش‌تر باشد، $۰ < Q(x) < N$. پس تعداد اعدادی در بین $۱, ۲, \dots, N$ که در $P(\mathbb{N})$ هستند دست‌کم $(\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}} - M_۰$ است.
بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید، چندجمله‌ای‌های $P_۱, P_۲, \dots, P_t$ در صورت سوال از درجه بیش‌تر از d باشند و $P_{t+۱}, \dots, P_n$ درجه d داشته باشند. با استدلال مشابه بالا برای $P_۱, \dots, P_t$ می‌توان $M_۱$ یافت که اگر $x > M_۱$ حکم لم برای هر یک از این چندجمله‌ای‌ها برقرار باشد و به علاوه همه روی این بازه مثبت و اکیداً صعودی باشند.

$$M_۱ < T < x \Rightarrow P_i(x) \geq \frac{۱}{۲}|x|^{\deg(P_i)} > \frac{۱}{۲}T^{\deg P_i}, \quad ۱ \leq i \leq t.$$

این نتیجه می‌دهد که اگر $(۲N)^{\frac{۱}{\deg P_i}} \leq (۲N)^{\frac{۱}{d+۱}} < x$ باشد، $N < P_i(x)$. پس تعداد اعداد طبیعی در $۱, ۲, \dots, N$ که در $P_۱(\mathbb{N}) \cup \dots \cup P_t(\mathbb{N})$ آمده است، حداکثر برابر $t(۲N)^{\frac{۱}{d+۱}}$ است. بنابراین حداقل

$$(\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}} - M_۰ - t(۲N)^{\frac{۱}{d+۱}}$$

تا از اعداد بین $1,\dots,N$ باید در برد $P_{t+1}(\mathbb{N})\cup\dots\cup P_n(\mathbb{N})$ باشند. چون تفاضل بالا با زیاد شدن N به بی‌نهایت میل می‌کند، پس نتیجه می‌گیریم که بی‌نهایت عدد به فرم $P(x)$ به فرم $P_i(y)$ برای یک P_i از درجه d هستند. چون تعداد چندجمله‌ای‌های از درجه d متناهی است، پس اندیس j یافت می‌شود که برای بی‌نهایت x، $P(x)$ به فرم $P_j(y)$ برای یک y طبیعی مناسب است.

بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $P_j(x)$ را با $Q(x)$ نمایش دهیم. اکنون می‌دانیم دنباله‌ای اکیداً صعودی $x_1 < x_2 < \dots$ و دنباله‌ی $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی وجود دارند که برای هر i، $P(x_i)=Q(y_i)$. با توجه به این که $P(x)$ و $Q(x)$ هم‌درجه و تکین هستند، می‌توان عدد صحیح k یافت که $P(x+k-1)<Q(x)<P(x+k+1)$ (لم پایین). پس برای هر y_i که به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$P(y_i+k-1)<Q(y_i)=P(x_i)<P(y_i+k+1).$$

(دقت کنید که چون x_i به بی‌نهایت میل می‌کند و P از جایی به بعد صعودی است، y_iها نیز از جایی به بعد در دامنه صعودی بودن تابع Q قرار می‌گیرند و لذا به بی‌نهایت میل می‌کنند.) پس $y_i+k-1<x_i<y_i+k+1$ و لذا $x_i=y_i+k$. این یعنی تساوی $Q(x)=P(x+k)$ برای بی‌نهایت x برقرار است و حکم مدنظر ما اثبات می‌شود.

لم. فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای تکین هم‌درجه باشند. ثابت کنید عدد صحیح یک‌تای k وجود دارد که برای مقادیر بزرگ x، $Q(x+k-1)<P(x)<Q(x+k+1)$.

اثبات لم. فرض کنید $P(x)=x^d+ax^{d-1}+\cdots$ و $Q(x)=x^d+bx^{d-1}+\cdots$. حال برای عدد صحیح m

$$Q(x+m)=(x+m)^d+b(x+m)^{d-1}+\cdots=x^d+(m+b)x^{d-1}+\cdots.$$

پس اگر k به گونه‌ای انتخاب شود که $b+k-1<a<b+k+1$ نابرابری‌های مد نظر برای مقادیر بزرگ x برقرار می‌شود. $\square$

$\square$

۳.

راه‌حل. یک بار در فرض سوال x را برابر xy و بار دیگر برابر $\frac{x}{y}$ قرار می‌دهیم و به همراه فرض اصلی می‌نویسیم.

$$af(xy^۲)+bf(x)=cf(xy)+g(y)$$
$$af(x)+bf(\frac{x}{y^۲})=cf(\frac{x}{y})+g(y)$$
$$af(xy)+bf(\frac{x}{y})=cf(x)+g(y)$$

سه عبارت بالا را به ترتیب در a، b ، c ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم

$$a^۲f(xy^۲)+b^۲f(\frac{x}{y^۲})+\underbrace{acf(xy)+bcf(\frac{x}{y})}+۲abf(x)=\underbrace{acf(xy)+bcf(\frac{x}{y})}+c^۲f(x)+(a+b+c)g(y).$$

معادلاً

$$a^۲f(xy^۲)+b^۲f(\frac{x}{y^۲})=(c^۲-۲ab)f(x)+(a+b+c)g(y).$$

از طرف دیگر با جای‌گذاری $y^۲$ به جای y در فرض سوال

$$af(xy^۲)+bf(\frac{x}{y^۲})=cf(x)+g(y^۲).$$

اگر این عبارت را در b ضرب کنیم و از بالایی کم کنیم

$$(a^۲-ab)f(xy^۲)=(c^۲-۲ab-ac)f(x)+(\underbrace{bg(y^۲)-(a+b+c)g(y)}_{T(y)})$$

اگر در این رابطه به جای y، $y^۲$ قرار دهیم

$$(a^۲-ab)f(xy^۴)=(c^۲-۲ab-ac)f(x)+T(y^۲)$$

با کم کردن این دو از هم و با توجه به ناصفر بودن $a^۲-ab$ داریم

$$f(xy^۴)-f(xy^۲)=\frac{T(y^۲)-T(y)}{a^۲-ab}$$

که عبارت آخر را با $S(y)$ نمایش می‌دهیم. حال برای هر $X>۰$ می‌توان x یافت که $xy^۲=X$ پس

$$f(Xy^۲)-f(X)=S(y).$$

به همین ترتیب $f(X)-f(\frac{X}{y^۲}=S(y)$. کم کردن این دو عبارت و قرار دادن $\sqrt{y}$ به جای y حکم مد نظر سوال نتیجه می‌شود.

□

موفق باشید.