مسائل مرحله‌ی سوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور - قسمت دوم

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مثلث دلخواه ABC را که غیرقائم‌الزاویه است در نظر می‌گیریم. فرض کنید H محل تلاقی ارتفاعات آن باشد. خط l که از H می‌گذرد AB و AC را به‌ترتیب در $D \neq B$ و $E \neq C$ قطع می‌کند. P را نقطه‌ای (در داخل مثلث) می‌گیریم که $AP \perp l$، ثابت کنید

$$\frac{S(\triangle PBD)}{S(\triangle PCE)} = \frac{DH}{EH}$$

۲. کوچکترین مقدار $\lambda \geqslant 0$ را پیدا کنید تا نامساوی زیر برای کلیهٔ مقادیر غیرمنفی x، y و z برقرار باشد.

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz \geqslant (x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda)(x^{3-\lambda} + y^{3-\lambda} + z^{3-\lambda})$$

۳. نشان دهید دنبالهٔ $a_n = 3^n - 2^n$ که در آن $n \geqslant 1$، دارای هیچ سه عضوی نمی‌باشد که تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند.

۴. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC داریم $\angle BAC = 60^\circ$. اگر H، I و O به‌ترتیب محل تلاقی ارتفاعات، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند و $BH = OI$، زوایای مثلث ABC را پیدا کنید.

۵. کلیهٔ اعداد صحیح و مثبت $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ را بیابید که

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 26$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 62$$
$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = 164$$

۶. روی دایره‌ای $2n + 1$ نقطهٔ متمایز در نظر می‌گیریم. هر نقطه را به تمام نقاط دیگر به غیر از دو نقطهٔ کنار خود وصل می‌کنیم. می‌خواهیم این نقاط و خطوط بین آنها را چنان رنگ کنیم که:

الف) هیچ دو نقطهٔ متصل به‌هم دارای رنگ یکسان نباشند.

ب) هیچ دو خط متصل به‌هم (در یکی از نقاط) دارای رنگ یکسان نباشد.

ج) رنگ هیچ خطی با نقاط انتهایی خود یکسان نباشد.

واضح است که اقلاً $2n-1$ رنگ لازم داریم. آیا عددی مانند n_0 وجود دارد به طوری که برای $n > n_0$ این تعداد رنگ کافی نیز باشد؟