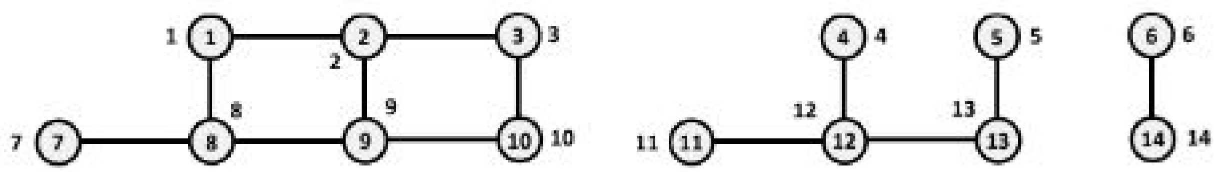
Componentes Conexas em Paralelo

Por João Curcio

Introdução

Seja G = (V, E) um grafo representado por uma lista de adjacências, o objetivo deste relatório é descobrir em paralelo se G é conexo e se não for quantas e quais são suas componentes conexas.

Um grafo é conexo se para cada par (u, v) de seus vértices, existe um caminho com origem u e término v. Tome como exemplo o grafo G1 a seguir, onde G1 é numerado da esquerda pra direita, e de cima para baixo, com número contínuos de 1 até |V| para todos os seus vértices.



Veja que a partir do vértice 1 não existe nenhum caminho para o vértice 4. Isso indica que G1 não é conexo. Contudo, a partir do vértice 1 é possível alcançar os vértices 2, 3, 7, 8, 9, e 10, implicando que esses vértices formam um pedaço (ou componente) conexo do meu grafo G1. Visualmente podemos verificar que existem 3 componentes conexas no grafo G1, mas como determinar isso através de um algoritmo?

Abordagem Sequencial

Sequencialmente podemos resolver esse problema usando k buscas em profundidade, onde k é o número de componentes conexas do meu grafo. Dada uma raiz r, a busca em profundidade visita todos os vértices conectados a essa raiz (ou seja, acha uma componente conexa). Se após realizarmos uma busca em profundidade, procurarmos por vértices não visitados e repetirmos a busca caso algum exista, podemos encontrar todas as componentes conexas de um grafo. Isso gera o seguinte algoritmo:

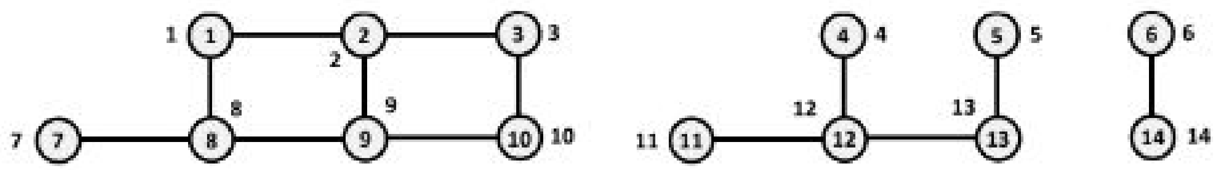
```
k ← 0
Para todo v em V, marque v como não visitado
Para todo v em V:
        Se v ainda não foi visitado
                k ← k + 1
                dfs(v)
```

O algoritmo acima possui uma complexidade de tempo de O(m + n), onde m é o número de arestas e n é o número de vértices e será usado para comparar a eficiência do algoritmo paralelo implementado para este relatório.

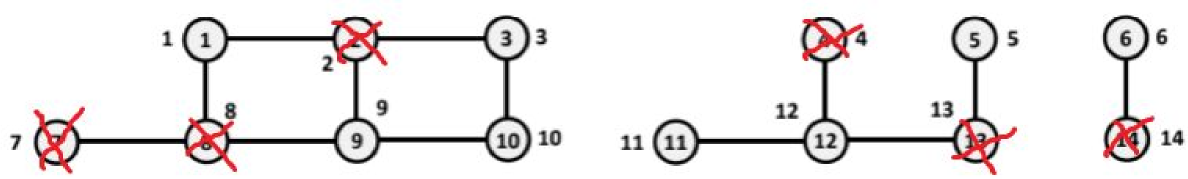
Abordagem Paralela

Existe um algoritmo chamado *Randomized Parallel Connected Components*[1] que serve para achar as componentes conexas de um grafo. Esse algoritmo foi escolhido para ser implementado neste relatório.

Seja G1 o grafo dado a seguir, podemos achar as componentes conexas de G1 da seguinte forma:

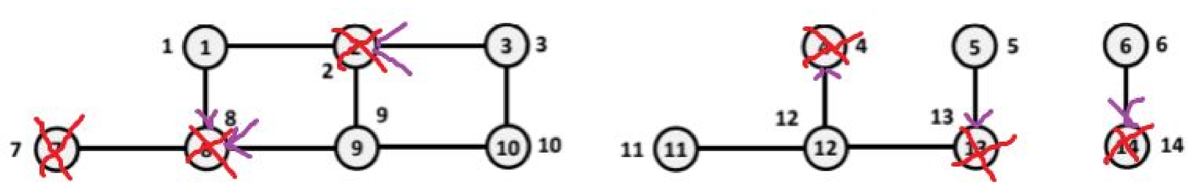


Passo 1: Para cada vértice v em V, jogue uma moeda aleatoriamente. Se der cara, marque esse vértice como um filho. Se der coroa, marque-o como pai..

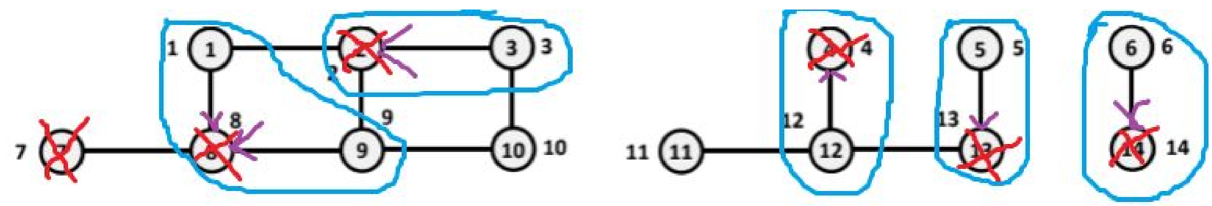


Os vértices marcados com um X vermelho são pais.

Passo 2: Para cada aresta (u, v) em E, se u é um pai e v é um filho, faça o filho apontar para o pai.



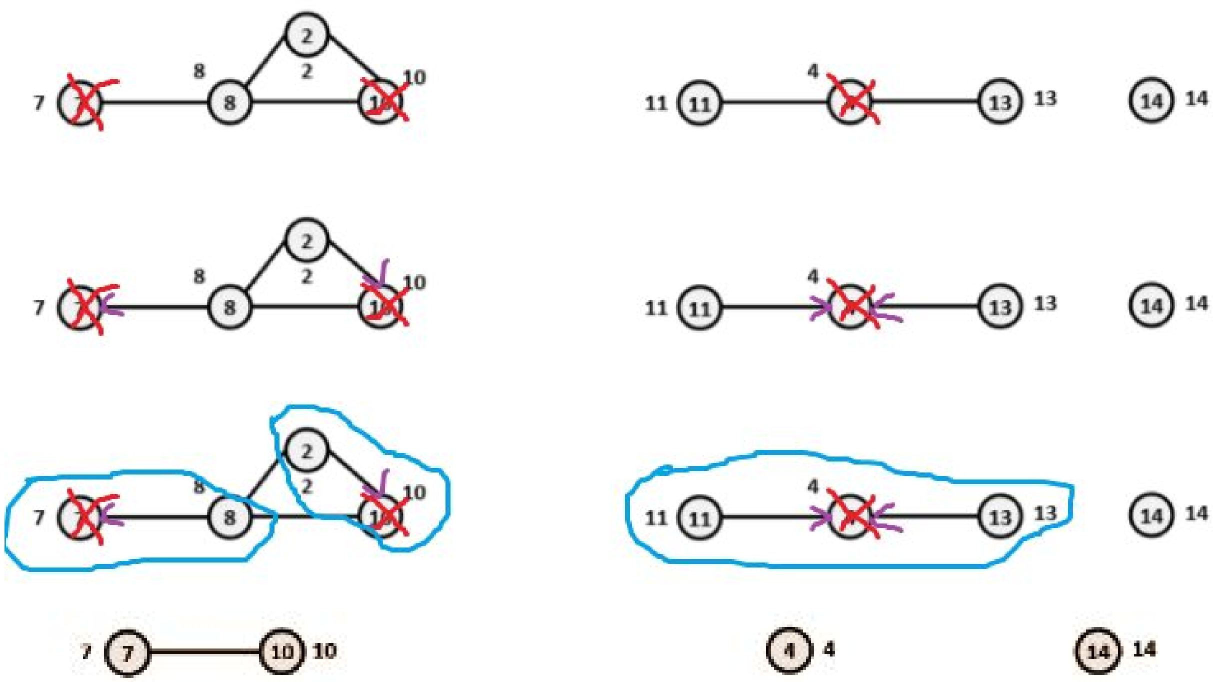
O conjunto formado por cada um dos pais e dos seus filhos formam um possível candidato a componente conexa.



Passo 3: Junte cada pai com seus filhos em um único vértice. Isso é possível de ser feito com uma soma de prefixos.

Passo 4: Nesse novo grafo formado, se o número de arestas for 0 vá para o passo 5, senão repita o passo 1.

Iteração 2:



Iteração 3:

Passo 5: Quando o número de arestas for 0, a quantidade de componentes conexas foi encontrada e é possível mapear de volta para o grafo original.

Pseudo-código

Dado um grafo G = (V, E), onde |V| = n, |E| = m. Seja L meu vetor resposta, C o vetor que guarda se um vértice é pai ou filho e S o vetor da soma de prefixos, o passo a passo explicado acima pode ser traduzido no seguinte pseudo-código:

```
randomizedCC(L, V, E)
    1. Inicialize os arrays C[1..n], L[1..n] = V, S[1..m]
    2. Se m = 0, então retorne L
    3. Para v de 1 até n em paralelo
        a. C[v] = random{ PAI, FILHO }
    4. Para (u, v) em E em paralelo
        a. Se C[u] é um pai e C[v] é um filho
            i. L[u] = L[v]
    5. Para i de um até m em paralelo
        a. Se L[E[i].u] != L[E[i].v]
            i. S[i] = 1
        b. Senão
            i. S[i] = 0
    6. S = soma_prefixos(S, +)
    7. Inicialize F[ 1.. |S[n]| ]
    8. Para i de um até m em paralelo
        a. Se L[E[i].u] != L[E[i].v]
            i. F[S[i]] = (L[E[i].u],L[E[i].v])
    9. L = randomizedCC(L, V, E)
    10. Para (u, v) em E em paralelo
        a. Se v = L[u]
```

i. `L[u] = L[v]`

11. `Retorne L`

Implementação

Usando cilk++, o código acima foi implementado da seguinte forma:

```
void randomizedConectedComponents(vector<Vertex> &L, vector<Vertex> &V, vector<Edge> &E){
  if (E.size() == 0) return;
  int n = V.size();  int m = E.size();
  vector<Vertex> tmpS(m);

  Group *C = new Group[n+1];
  cilk_for(int i = 0; i < n; i++){
      C[V[i]] = ((double)rand()/RAND_MAX > 0.5) ? Group::PARENT : Group::CHILD;
  }

  cilk_for(int i = 0; i < m; i++){
    if (C[E[i].u] == Group::CHILD && C[E[i].v] == Group::PARENT){
      L[E[i].u] = L[E[i].v];
    }
  }

  cilk_for(int i = 0; i < m; i++){
    if ( L[E[i].u] != L[E[i].v] ) tmpS[i] = 1; else tmpS[i] = 0;
  }

  vector<Vertex> S(m);
  prefixSum(tmpS, S);
  vector<Edge> F(S[m-1]);

  cilk_for(int i = 0; i < m; i++){
    if(L[E[i].u] != L[E[i].v]){
       F[S[i]-1].u = L[E[i].u];
       F[S[i]-1].v = L[E[i].v];
    }
  }

  randomizedConectedComponents(L, V, F);

  cilk_for(int i = 0; i < m; i++){
    if(E[i].v == L[E[i].u]) L[E[i].u] = L[E[i].v];
  }
}
```

Onde a função `prefixSum` é implementada também em paralelo da seguinte forma:

```
void prefixSum(vector<int> &S, vector<int> &res){
  int n = S.size();
  vector<int> Sstar(n/2);
  vector<int> Sout(n/2);

  if(n == 1){
    res[0] = S[0];
    return;
  }

  cilk_for(int i = 0; i < n/2; i++){
    Sstar[i] = S[2*i] + S[2*i + 1];
  }

  prefixSum(Sstar, Sout);

  cilk_for(int i = 0; i < n; i++){
    if(i == 0){
      res[i] = S[i];
    }else if(i%2 != 0){
      res[i] = Sout[i/2];
    }else{
      res[i] = Sout[(i-1)/2] + S[i];
    }
  }
}
```

O programa implementado espera um arquivo de texto com o grafo G = (V, E). A primeira linha do arquivo de texto possui a n e m separados por um espaço. Depois disso m linhas se seguem onde cada linha possui dois números indicando uma aresta no grafo.

O código completo pode ser encontrado em https://github.com/johncurcio/AlPaCa

Trabalho Total

Cada vez que o passo 3 do algoritmo é executado, o grafo é reduzido mais ou menos pela metade. Dessa forma, a cada iteração do algoritmo, estamos trabalhando com a metade da iteração anterior. Além disso, o grafo está representado por uma lista de adjacências, que tem complexidade O(n + m) para ser percorrida. Portanto, o trabalho total desse algoritmo é de O((n+m)*log n).

Testes e Resultados

Para testar o algoritmo implementado foram usados os grafos encontrados em:

1. https://snap.stanford.edu/data/wiki-Vote.html
2. https://snap.stanford.edu/data/email-Enron.html
3. https://snap.stanford.edu/data/roadNet-CA.html

E o algoritmo para encontrar componentes conexas sequencialmente disponível em: http://www.geeksforgeeks.org/connected-components-in-an-undirected-graph/. Após algumas pequenas modificações no algoritmo do Geeks for Geeks para ficar no padrão do meu algoritmo, os seguintes resultados foram achados:

Arquivo	Meu algoritmo	Geeks for Geeks	Vertices x Arestas | CC
wiki-Vote.txt	0.728755 s	0.00716278 s	7115 x 103689 | 903
email-Enron.txt	0.232372 s	0.0317371 s	36692 x 183831 | 1067
roadNet-CA.txt	16.5865 s	25.6373 s	1965206 x 2766607 | 8685

CC = número de componentes conexas

Os resultados mostram que conforme o tamanho do grafo vai crescendo, a solução sequencial se torna cada vez menos eficiente enquanto a paralela ainda é uma solução viável. Grafos monstruosos, como o do orkut (encontrado em https://snap.stanford.edu/data/com-Orkut.html) não terminaram de rodar nem sequencialmente nem paralelamente nos testes realizados na minha máquina de 8 cores.

Apesar de a solução que implementei ser eficiente, ela não chega a ser melhor que a sequencial em todos os casos. Veja que nos primeiros dois casos a versão paralela chega a ser cerca de 10 vezes pior que a sequencial. A versão paralela parece ficar mais eficiente quando o número de componentes conexas e o tamanho do grafo aumenta em comparação a versão sequencial.

Referências

[1] http://www3.cs.stonybrook.edu/~rezaul/Spring-2013/CSE638/CSE638-lectures-10-11.pdf
[2] Joseph Jajá, Introduction to Parallel Algorithms