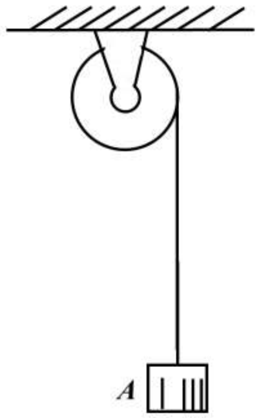
第三次作业解析

2-8 一半径为 0.1 m的圆盘，可以绕水平轴自由地转动，将一绳绕在圆盘上，绳的外端拴一物体 A，假设 A匀加速降落，它的加速度小于重力加速度。已知在 $t=0$时 A的速度为 0.04 m/s，2s 后A落下 0.2 m的距离，求圆盘边缘上任意一点在任一时刻 t 的切向和法向加速度？



分析：已知物体作匀加速直线运动、初始速度和位移，根据匀加速直线运动关系式，将已知初始速率$v_0 = 0.04\mathrm{m/s}$，$t=2$ s 时，$x=0.2$ m代入关系式，可以得到物体的加速度。注意：**此时求得的加速度**（物体**A的加速度**）为圆盘边缘的**切向加速度**，圆盘做匀加速圆周运动时，圆盘边缘**还有法向加速度**。

解：物体做匀加速直线运动时，有：

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad ,$$

将 $t=0$ 时，物体速率为 v_0= 0.04 m/s，$t=2$ s 时，$x=0.2$ m 这些已知条件代入上式，可解得物体的加速度大小为 $a=0.06\ (\mathrm{m/s^2})$ ，这里的a对应自然坐标下的**切向加速度** a_τ，即 $a_\tau=0.06\ (\mathrm{m/s^2})$，圆盘边缘的法向加速度为：

$$a_n = v^2/R \quad ;$$

对于匀加速直线运动，$v=v_0+at$ ，在本题中应写为 $v=v_0+a_\tau t$ ，

所以有

$$a_n=(0.04+0.06\,t)^2/0.1=10(0.04+0.06\,t)^2 \quad (\mathrm{m/s^2})。$$

2-12 质点在一平面内运动，其径向速度 $dr/dt=4$ m/s, 角速度 $\omega=1.0$ rad/s（rad为平面角的单位，称为弧度），试求质点距离原点 3 m 时的速度及加速度。

分析：本题考查曲线运动中径向速度、横向速度，**径向加速度以及横向加速度之间的关系**。存在转动问题，而且已经确定径向速度，应采用极坐标，求极坐标系下的速度和加速度。**注意：径向加速度**不仅与**径向速度的时间变化率**有关，还与**横向速度**有关；**横向加速度**也不仅与**横向速度的时间变化率**有关，同时还与**径向速度**有关。

解：极坐标系下，物体的速度为：

$$v=\frac{dr}{dt}e_r+r\frac{d\theta}{dt}e_\theta$$

因此本题中，物体的速度为：$v=4e_r+(3\times 1)e_\theta=4e_r+3e_\theta(m/s)$，

径向加速度

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r(\frac{d\theta}{dt})^2$$

横向加速度

$$a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt})$$

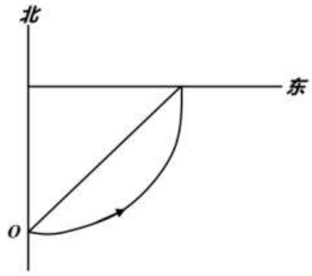
本题中径向速度和角加速度皆为常数，因此有 $d^2r\ /\ dt^2=0$，$d^2\theta\ /\ dt^2=0$，

再把 r =3 m，ω=1 rad/s，dr/dt =4 m/s 分别带入径向加速度和横向加速度的表达式，可得

质点距离原点 3 m 时的加速度：

$a=-(3\times 1^2)e_r+(2\times 4\times 1)e_\theta=-3e_r+8e_\theta(m/s^2)$。

2-14 列车在圆形轨道上自南转向东行驶， t =0 时列车在 O 点，它距 O 点的路程由 $l=80t-t^2$ 给出，如图所示，轨道半径 R=1500 m，求列车时过 O 点以后前进至 1200 m 处的速度和加速度。



分析：本题已知路程与时间的函数关系，应选择自然坐标系，在自然坐标系下求物体运动的速度和加速度。注意：在自然坐标系下，速度始终指向切线方向，所以由速率可直接推知速度。

解：自然坐标系下，质点的速度和加速度分别为：

$\boldsymbol{v}_\tau$= dl/dt = 80−2t,

$\boldsymbol{a}_\tau$=d$\boldsymbol{v}_\tau$ /dt=−2(m/s)，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ = $\boldsymbol{v}_\tau^2$/R；

前进至 1200 m 处的时间 t，应满足方程：

1200=80t−t^2，

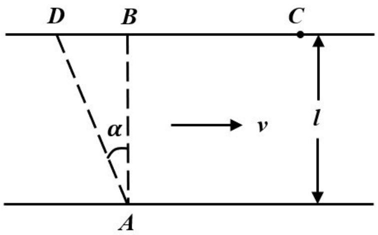
求得 t_1=20 s，t_2=60 s，

当 t_2=60 s 时，$\boldsymbol{v}_\tau = -40$ m/s，列车是返程，非前进方向，舍去；

当 t_1=20 s 时，有$\boldsymbol{v}_\tau$=80 −2×20=40 (m/s)，

$\boldsymbol{a}_\tau = -2$ (m/s^2)，$\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \boldsymbol{v}_\tau^2/R = 40^2/1500 = 16/15$ (m/s^2)。

2-15 小船渡河，从 A 点出发，如果保持与岸垂直的方向划行，10 min 以后到达对岸的 C 点，C 点与正对着 A 点位置的 B 点之间的距离是 BC=120 m。如果要使小船正好到达 B 点，则小船必须向着 D 点方向划行，如题图所示，这时需要 12.5 min 才能到达对岸。试求小船划行的速率 u，河面宽度 l，水流速度 v 以及航角 α?



分析：本题是相对运动问题，速度合成、位移合成时要服从矢量相加的平行四边形法则。

解：正对河岸划船时，$|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}|\ t_1$=AC，$t_1$=600s，

正对 D 点划船时，$(u\cos\alpha)\ t_2 = l$，t_2=750 s，$u\sin\alpha = v$，

由已知条件可知 $ut_1 = l$ ，BC= $v\ t_1$=120 m，

有 v =120/600=0.2 (m/s)，

联立方程，有 $\cos\alpha = t_1/\ t_2$=4/5，$\sin\alpha = 3/5$，

则 α =arcos0.8≈36.9°，

可知 $u = v/\sin\alpha$ =0.2/(3/5)=1/3 (m/s)，

$l = ut_1$ =600×(1/3)=200 (m/s)。

2-16 测得一质点在坐标系 O 中的位置为 $\boldsymbol{r} = (6t^2 - 4t)\boldsymbol{i} + (-3t^2)\ \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ (m)

(1)如果在坐标系 O′内测得它的位置为 $\boldsymbol{r}' = (6t^2 + 3t)\boldsymbol{i} + (-3t^2)\ \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ (m)，试确定 O′系相对于 O 系的速度。

(2)证明在这两个坐标系中，质点的加速度相同。

分析：本题属于伽利略变换的问题。

解：（1）比较 2 个位矢的直角坐标

$\boldsymbol{r} = (6t^2 - 4t)\boldsymbol{i} + (-3t^2)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}' = (6t^2 + 3t)\boldsymbol{i} + (-3t^2)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

有 $\boldsymbol{x} = 6t^2 - 4t$，　　$\boldsymbol{x}' = 6t^2 + 3t$，

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' = -3t^2$，

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}' = 3$；

由伽利略变换公式 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}t$，有：

$6t^2 + 3t = 6t^2 - 4t - \boldsymbol{u}t$，

解得：$\boldsymbol{u} = -7\,\boldsymbol{i}$。

或者分别求得质点在两个坐标系中的速度，然后相减，也可得到同样的结果。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (12t-4)\boldsymbol{i} + (-6t)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = (12t+3)\boldsymbol{i} + (-6t)\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' = -7\boldsymbol{i}$

(2) $a = \frac{d^2 r}{dt^2} = 12i - 6j$ ，

$a = \frac{d^2 r'}{dt^2} = 12i - 6j$ ，

可见，在这两个坐标系中，加速度相同。

2-17 一人在静水中划船的速率为 u，现在他在水流速率为 v 的小河中将船从一岸划向另一岸，如果他希望用最短的时间到达对岸，应向什么方向划行？如果他希望用最短路径到达对岸，应向什么方向划行？

分析：本题与 2-15 题相似，是速度的合成问题。

解：显然，垂直于河岸的方向路径最短，如果希望用最短时间过河，则船对地的速度应垂直于河岸的方向；

因此船速在河岸方向的分量刚好能够抵消水的流速时，路径最短。