第二次作业

2-2 一物体沿 x 轴运动，其加速度可以表示为 $a_x = 4x - 2$ (m/s^2)。已知 $x_0 = 0$，$v_0 = 10$ m/s，试求在任意位置 x 处的速度。

分析：题中已知物体加速度和位矢的函数关系 $a \sim x$，求物体运动的速度与位矢的函数关系 $v \sim x$。常用的运动学公式以时间为变量，但本题中是以 x 为变量，因此要消去时间变量，采用微分换元。利用加速度的微分定义，经过移项、积分即可求得。

解：微分换元

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \ ,$$

将本题中已知的函数表达式 $a_x = 4x-2$ 代入，有：

$$4x - 2 = v\frac{dv}{dx} \ ;$$

对上式进行分离变量处理，积分后可以得到 $v \sim x$：

$$(4x-2)dx = vdv \qquad \text{或} \qquad \int_{x_0}^{x}(4x-2)dx = \int_{v_0}^{v} vdv$$

积分（注意积分上下限），有：

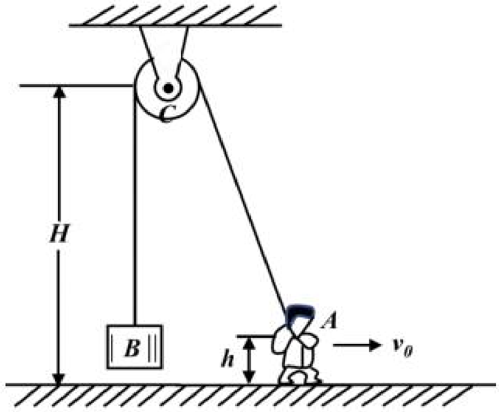
$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = 2x^2 - 2x - \left(2x_0^2 - 2x_0\right) \ ,$$

将 $x_0 = 0$，$v_0 = 10$ m/s 代入上式，有：

$$v^2 = 4x^2 - 4x + 100$$

故 $v = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}$ (m/s)。

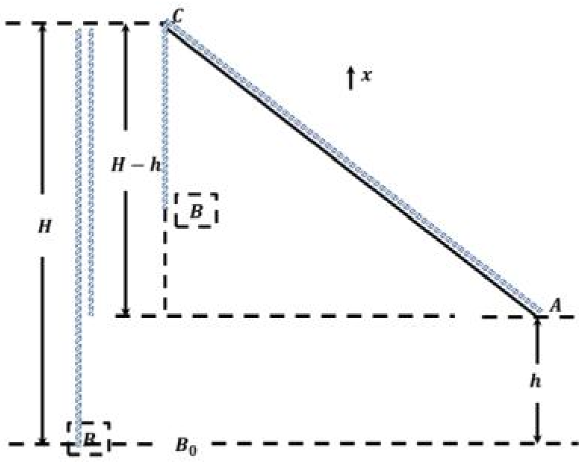
2-4 如图所示，跨过滑轮 C 的绳子，一端挂有重物 B。另一端 A 被人拉着沿水平方向匀速运动，其速率 $v_0 = 1.0$ m/s，A 点离地面的距离保持着 $h = 1.5$ m。运动开始时，重物在地面上的 B_0 处，绳两侧都呈竖直伸长状态，且滑轮离地面 $H = 10$ m，滑轮半径不计，



求 (1) 重物上升的运动方程；

(2) 到达滑轮前的任意 t时刻的速度和加速度以及到达滑轮处所需要的时间。

分析：本题有两个重要的物理量：1、人运动的距离，即人的位移 v_0t ；2、物体上升的距离，即物体的位移 $x=v_xt$ 。解题的关键在于**这两个位移之间的关系（三角形关系）**。重物直线上升，可以构造直角坐标系描述其运动（第一问，位矢随时间的变化）。由于题中没有任何直接的数学表达式可以利用，前面所说的三角形关系是我们解题的一个切入点。此外，还必须能够想到另一个重要的约束条件，即，在过程中任一时刻，**左侧绳长 l 的改变量 Δl (即 x)与右侧绳长改变量(考虑到** CA的初始位置在铅直方向，这个改变量 ＝ **t 时刻长度 －初始长度)相同**, 此条件可直接给出一个关于 x 的方程。三角形中，由 A 点的速度可知其相对于出发点的位移，则右侧的绳长l与时间 t 的函数关系 $l\sim t$ 可知，由此可知左侧绳长的改变（重物的位移 x ）。第二问是数学练习，对参量微元之间的函数关系进行变换，可进一步求得速度及加速度。



解：

解法一：如图建立简化的坐标系：以 B_0 为原点，竖直向上方向为 x 轴。由几何关系，得

$$l^2=(H-h)^2+(v_0t)^2 \quad ,$$

需要小心的是，三角形在竖直方向这条边长度不变，恒为 $(H-h)$ (右侧初始长度)。将已知条件 H，h，v_0 代入上式，得到：

$$l=\sqrt{8.5^2+t^2} \;;$$

按照上面分析，可直接写出

(1) 运动方程：

$$x=l-(H-h)=\sqrt{8.5^2+t^2}-8.5$$

(2) 速度：

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8.5^2+t^2}}\cdot 2t=\frac{t}{\sqrt{8.5^2+t^2}}$$

加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{1}{(8.5^2+t^2)^{1/2}}+t\cdot(-\frac{1}{2})\frac{1}{(8.5^2+t^2)^{3/2}}2t$$

$$=\frac{1}{(8.5^2+t^2)^{1/2}}-\frac{t^2}{(8.5^2+t^2)^{3/2}}$$

重物到达滑轮处时，根据 (1) 得到的运动方程，

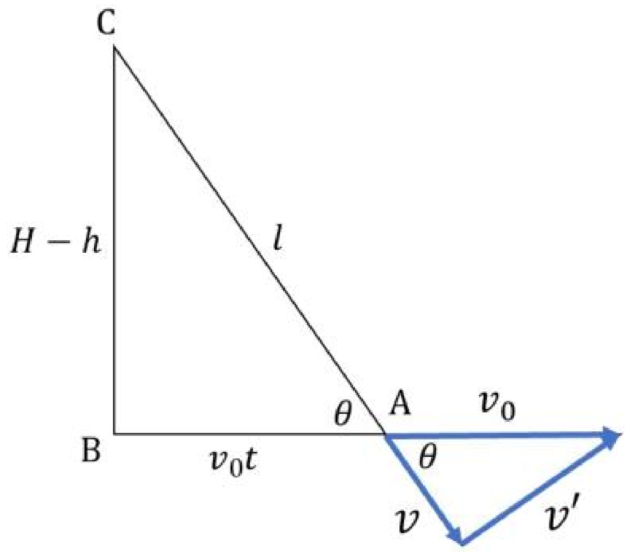
$$x=H=\sqrt{8.5^2+t^2}-8.5=10$$

$$t^2=18.5^2-8.5^2$$

利用计算器解出所需时间： $t=\pm 16.4(s)$ （负值舍去）

解法二：仿照悬崖小船问题，

分析绳子顶端处的速度，可正交分解为沿着绳子方向的速度 v 和垂直绳子方向的速度 v'，前者作用使绳子伸长，后者作用使绳子旋转。



速度关系为：

$$v=v_0\cos\theta$$

根据相似三角形

$$\cos\theta=\frac{v_0t}{\sqrt{(v_0t)^2+(H-l)^2}}$$

$$v=\frac{v_0^2t}{\sqrt{(v_0t)^2+(H-l)^2}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+8.5^2}}$$

所以运动方程：

$$x=\int_0^t vdt=\int_0^t\frac{t}{\sqrt{t^2+8.5^2}}dt=\sqrt{8.5^2+t^2}-8.5$$

加速度同解法一：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{(8.5^2 + t^2)^{1/2}} - \frac{t^2}{(8.5^2 + t^2)^{3/2}}$$

注：题目中某些符号代表的是常量，另外一些符号是变量，隐含着参量(例如时间 t)，要写成相关参量的函数表达式。

2-7 从地面向高空抛出一球，观察到它在高 9.1 米处的速度 $\boldsymbol{v} = 7.6\,\boldsymbol{i} + 6.1\,\boldsymbol{j}$（m/s），$\boldsymbol{x}$ 轴沿水平方向，$\boldsymbol{y}$ 轴沿竖直向上方向，求：

（1）球上升的最大高度；

（2）球从抛出后所走过的总的水平距离；

(3) 球在落地时的速度。

分析：本题是已知物体在某点的速度，求物体运动的轨迹及速度等参量。运动可分解为 2 个方向的运动，水平方向做匀速直线运动，竖直方向做匀加速直线运动（加速度为 g）各有其特点，然后进行合成。

解：根据运动的叠加原理，把小球的运动分解为 $\boldsymbol{x}$ 方向和 $\boldsymbol{y}$ 方向两个运动的叠加：

$\boldsymbol{x}$ 方向：小球不受力，作匀速直线运动，

t =0 时，$\boldsymbol{x}_0$=0，$\boldsymbol{v}_x$=7.6m/s ；

$\boldsymbol{y}$ 方向：小球受重力作用，作匀加速直线运动，加速度为重力加速度：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ ，

t =0 时，$\boldsymbol{y}_0$ = 9.1 m，$\boldsymbol{v}_{y0}$ =6.1 m/s，$a = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$ ；

（1） 球上升到最高点时，$\boldsymbol{y}$ 方向的速度为 0，有：$v_y = v_{y_0} - gt = 6.1 - 9.8t = 0$

解得 $t = 6.1/9.8 = 0.62$ s，即还需要 0.62 s 才能达到最高处，

所以最高点的坐标： $\boldsymbol{y}_{\max} = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{v}_{y0}t - (1/2)\boldsymbol{g}t^2$ ，

即： $\boldsymbol{y}_{\max} = 11$ m。

（2）球从最高点到落地，所需要的时间为t'，有：$2\,\boldsymbol{y}_{\max} = \boldsymbol{g}\,t'^2$ ，

解得 t'≈1.5 s，所以$\boldsymbol{x}_{\max}$ =7.6×(2×1.5) =22.8m。

（3）球在落地时的速度为：

$\boldsymbol{v}_x$ =7.6 m/s，$\boldsymbol{v}_y = \boldsymbol{g}t' = -14.7$ m/s，

所以，$\boldsymbol{v}$ =7.6 $\boldsymbol{i}$ −14.7 $\boldsymbol{j}$ (m/s)。