ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

5ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να βρεθεί η λύση του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών που καθορίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$u_{xx} + u_{yy} = 10.0e^{-0.5\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}}$$

με συνορικές συνθήκες $u(x,y) = 1.0$ σε όλα τα σύνορα. Χρησιμοποιείστε την επαναληπτική μέθοδο Liebmann, σε ένα ορθοκανονικό πλέγμα με όρια $(0,1) \times (0,1)$ το οποίο θα διακριτοποιήσετε με $N \times M = 200 \times 200$ σημεία. Ως αρχική τιμή για τις επαναλήψεις χρησιμοποιείστε την $u(x,y) = 1.0$ σε όλο το πλέγμα. Μετά από κάθε επανάληψη, ελέγξτε τον μέσο όρο του αθροίσματος της απόλυτης μεταβολής από μια επανάληψη έως την επόμενη (χρησιμοποιώντας μόνο τα εσωτερικά σημεία)

$$\text{tolerance} = \frac{1}{(N-2)(M-2)} \sum_{i,j} |u_{i,j}^{\text{new}} - u_{i,j}^{\text{old}}|$$

Η επαναληπτική μέθοδος μπορεί να τερματιστεί όταν $\text{tolerance} \leq 10^{-7}$. Σχεδιάστε ως επιφάνεια την πηγή (δεξιό μέρος) της ελλειπτικής εξίσωσης καθώς και την λύση $u(x,y)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να λυθεί η γραμμική κυματική εξίσωση $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0$ με $\alpha^2 = 2/\pi^2$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 12$ και με αρχικές συνθήκες $u(x,0) = \sin(\pi x)$ στο διάστημα $2 \leq x \leq 4$ και $u(x,0) = 0$ στα διαστήματα $0 \leq x < 2$ και $4 < x \leq 12$ και με συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = 0$ και $u(12,t) = 0$. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Lax-Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

όπου $c = \alpha\Delta t/\Delta x$. Ως χρονικό βήμα, χρησιμοποιείστε το $\Delta t = 0.5\Delta x/\alpha$ και βρείτε τη λύση $u(x,t)$ για $0 \leq t \leq 5\pi$. Για $N = 200$ πλεγματικά σημεία, σχεδιάστε τη λύση $u(x,t)$ για $t = 0, \pi, 2\pi, ..., 5\pi$ (σε ένα σχήμα). Επίσης, σχεδιάστε τη λύση $u(x,t)$ ως επιφάνεια για $0 < x < 12$ και $0 \leq t \leq 5\pi$.