2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Να λυθεί το σύστημα: $\mathbf{A} \cdot \mathrm{x} = \mathbf{B}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ a_{21} & & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Να λυθεί το σύστημα: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ a_{21} & & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

<u>Επιτρέπονται:</u>

- Αλλαγή της σειρά δυο εξισώσεων.
- Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μια μη-μηδενική σταθερά.
- Αντικατάσταση εξίσωσης από γραμμικό συνδυασμό αυτής με άλλες.

2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS

Αναλυτική γραφή του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \ldots + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}
$$

1ο βήμα: θέλουμε να απαλείψουμε τους συντελεστές κάτω από τη διαγώνιο στην 1η στήλη.

Πολλαπλασιάζω την 1η εξίσωση με a_{21}/a_{11} και την αφαιρώ από τη 2η.

Ομοίως με τις υπόλοιπες:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
0 + a_{N2}^{(1)}x_2 + a_{N3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(1)}x_N &= b_N^{(1)}
\end{aligned}
$$

Οι νέοι συντελεστές είναι π.χ.

$$
a_{22}^{(1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}
$$

Συνεχίζω ομοίως, ώστε να μηδενιστούν οι συντελεστές της 2ης στήλης κάτω από τη διαγώνιο:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{NN}^{(2)}x_N &= b_N^{(2)}
\end{aligned}
$$

Οι νέοι συντελεστές είναι π.χ.

$$a_{33}^{(2)} = \frac{a_{32}^{(1)}a_{33}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - a_{33}^{(1)}$$

Μετά από N-1 βήματα καταλήγω στο **άνω τριγωνικό** σύστημα:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
&\vdots \\
0 + 0 + \cdots + a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}
$$

Επίλυση **άνω τριγωνικού** συστήματος:

$$x_N = \frac{b_N^{(N-1)}}{a_{NN}^{(N-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i+1}^{N} a_{ik}^{(i-1)} x_k}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Χρήση της Οδήγησης (Pivoting)

Για τη βελτίωση της ακρίβειας των υπολογισμών φροντίζουμε στο σύστημα (2.3) το a_{11} να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο. Αντίστοιχα, στο σύστημα (2.4) το $a_{22}^{(1)}$ πρέπει να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο κ.ο.κ.

Χρήση της Οδήγησης (Pivoting)

Για τη βελτίωση της ακρίβειας των υπολογισμών φροντίζουμε στο σύστημα (2.3) το a_{11} να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο. Αντίστοιχα, στο σύστημα (2.4) το $a_{22}^{(1)}$ πρέπει να είναι το απολύτως μεγαλύτερο στοιχείο κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω ότι, μετά από τη χρήση της μεθόδου Gauss στη λύση ενός $N \times N$ συστήματος, οι δυο τελευταίες εξισώσεις, η $N-1$ και η N είναι:

$$\begin{aligned} 0x_{N-1} + x_N &= 1 \\ 2x_{N-1} + x_N &= 3 \end{aligned}$$

Προφανώς, έχουν λύση: $x_{N-1} = x_N = 1$. Αλλά, λόγω σφαλμάτων αποκοπής, στην πράξη το σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \epsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \\ 2x_{N-1} + x_N &= 3 \end{aligned}$$

οπότε συνεχίζοντας στο τελευταίο βήμα θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \epsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \\ \left(1 - \frac{2}{\epsilon}\right) x_N &= 3 - \frac{2}{\epsilon} \end{aligned}$$

οπότε συνεχίζοντας στο τελευταίο βήμα θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \epsilon x_{N-1} + x_N &= 1 \\ \left(1 - \frac{2}{\epsilon}\right) x_N &= 3 - \frac{2}{\epsilon} \end{aligned}$$

με λύσεις

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{3 - \frac{2}{\epsilon}}{1 - \frac{2}{e}} \approx 1 \qquad \text{σωστό} \\ x_{N-1} &= \frac{1 - x_N}{\epsilon}\,! \end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή, πως το x_{N-1} είναι απροσδιόριστο, γιατί αποτελεί το λόγο δυο μικρών αριθμών, των οποίων η ακρίβεια εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία εκτελεί τις πράξεις ο Η/Υ. Στη συνέχεια, ο όρος x_{N-1} θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των $x_{N-2}, \ldots, x_1$ με καταστροφικά αποτελέσματα.

Αν όμως χρησιμοποιηθεί **οδήγηση**, *το σύστημα γράφεται:*

$$2x_{N-1} + x_N = 3$$
$$\epsilon x_{N-1} + x_N = 1$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας επί ϵ *την πρώτη και επί 2 την δεύτερη καταλήγουμε*

$$2x_{N-1} + x_N = 3$$
$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) x_N = 1 - \frac{3\epsilon}{2}$$

οπότε η λύση του είναι $x_N \approx 1.0$ *και* $x_{N-1} = \frac{3-x_N}{2} \approx 1.0$.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-JORDAN

Σε κάθε βήμα μηδενίζω τους συντελεστές και πάνω από τη διαγώνιο!

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + 0 + a_{13}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{1N}^{(2)}x_N &= b_1^{(2)} \\
0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2N}^{(1)}x_N &= b_2^{(1)} \\
0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3N}^{(2)}x_N &= b_3^{(2)} \\
&\vdots \\
0 + 0 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N &= b_N^{(2)}
\end{aligned}
$$

Στο τέλος καταλήγω σε ένα **διαγώνιο πίνακα:**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(N-1)} \\
a_{22}^{(1)}x_2 \qquad\qquad\qquad &= b_2^{(N-1)} \\
&\vdots \\
a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}
$$

Στο τέλος καταλήγω σε ένα **διαγώνιο πίνακα:**

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(N-1)} \\
a_{22}^{(1)}x_2 \qquad\qquad\qquad &= b_2^{(N-1)} \\
&\vdots \\
a_{NN}^{(N-1)}x_N &= b_N^{(N-1)}
\end{aligned}$$

με προφανή λύση:

$$x_i = \frac{b_i^{(N-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ L-U

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \underset{(lower)}{\mathbf{L}} \cdot \underset{(upper)}{\mathbf{U}}$$

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ L-U

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \underset{(lower)}{\mathbf{L}} \cdot \underset{(upper)}{\mathbf{U}}$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή του **L** με την 1η στήλη του **U** βρίσκουμε:

$$l_{11} = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31}, \quad l_{41} = a_{41}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή του **L** με τις υπόλοιπες στήλες του **U** βρίσκουμε:

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

Ομοίως, με τη δεύτερη γραμμή του **L** βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \\ l_{41}u_{12} + l_{42} = a_{42} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\ l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} \end{array}$$

κ.ο.κ.

Συνοπτικά:

Για j=1:

$$l_{i1} = a_{i1}$$

Για i=1:

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

Για όλα τα υπόλοιπα:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad \text{για} \quad j \leq i \quad \text{και} \quad i = 1, 2, ..., N$$

$$u_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}}{l_{jj}} \quad \text{για} \quad j \leq i \quad \text{και} \quad j = 2, 3, ..., N$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα εφαρμόσθει ή μέθοδος LU για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε με βάση τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε:

$$l_{11} = 3, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = 2, \quad u_{12} = -\frac{1}{3}, \quad u_{13} = \frac{2}{3}$$

$$l_{22} = 2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}, \quad l_{32} = -\frac{4}{3}, \qquad u_{23} = 1, \qquad l_{33} = -1$$

οπότε τελικά οι ζητούμενοι πίνακες είναι:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & 4/3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμογή της ‘ L-U ’ στα γραμμικά συστήματα

Με τη μέθοδο L-U ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $\mathbf{A} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}$ ανάγεται στο σύστημα

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b} \tag{2.17}$$

Λύνουμε πρώτα το κάτω-τριγωνικό σύστημα $\mathbf{L} \cdot \mathrm{b}' = \mathrm{b}$ σύμφωνα με τον κανόνα:

$$b'_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad b'_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}} \quad \text{για} \quad i = 2, 3, ..., N$$

οπότε απομένει να λύσουμε το τριγωνικό σύστημα $\mathbf{U} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b}'$ με τις σχέσεις που δόθηκαν στη μέθοδο Gauss, για την επίλυση τριγωνικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν έχουμε να λύσουμε ένα μεγάλο αριθμό γραμμικών συστημάτων που διαφέρουν μόνο στο διάνυσμα b.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ)

Είναι γενίκευση της x=g(x) στα γραμμικά συστήματα:

Έστω το σύστημα των N εξισώσεων με N αγνώστους :

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0 \\
&\;..... \\
f_n(x_1, x_2, ..., x_N) &= 0
\end{aligned}
$$

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ)

Είναι γενίκευση της x=g(x) στα γραμμικά συστήματα:

Έστω το σύστημα των N εξισώσεων με N αγνώστους :

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$$
$$.....$$
$$f_n(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$$

που εύκολα μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$x_1 = g_1(x_2, x_3, ..., x_N)$$
$$x_2 = g_2(x_1, x_3, ..., x_N)$$
$$...$$
$$x_N = g_N(x_1, x_2, ..., x_{N-1})$$

κάθεμια από τις N εξισώσεις θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} a_{ij} x_j} \tag{2.21}$$

και στη συνέχεια δίνοντας N ‘αυθαίρετες’ αρχικές τιμές $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$, δημιουργώ μια γενικευμένη αναδρομική σχέση της μορφής

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)})\,.} \tag{2.22}$$

κάθεμια από τις N εξισώσεις θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} a_{ij} x_j} \tag{2.21}$$

και στη συνέχεια δίνοντας N 'αυθαίρετες' αρχικές τιμές $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$, δημιουργώ μια γενικευμένη αναδρομική σχέση της μορφής

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)})\,.} \tag{2.22}$$

Ικανή **συνθήκη σύγκλισης** είναι η:

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|} \tag{2.23}$$

Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από το σύστημα

$$
\begin{aligned}
4x - y + z &= 7 \\
4x - 8y + z &= -21 \\
-2x + y + 5z &= 15
\end{aligned}
$$

(που έχει λύσεις $x = 2, y = 4, z = 3$*) μπορώ να δημιουργήσω τις*
σχέσεισ:

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4} \\
y^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x^{(k)} + z^{(k)}}{8} \\
z^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x^{(k)} - y^{(k)}}{5}
\end{aligned}
$$

και θέτοντας ως αρχικές τιμές $(1,2,2)$ *παίρνω την ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων*

$$\begin{aligned}(1,2,2) &\to (1.75, 3.375, 3)\\ &\to (1.844, 3.875, 3.025)\\ &\to (1.963, 3.925, 2.963)\\ &\to (1.991, 3.977, 3.0)\\ &\to (1.994, 3.995, 3.001)\end{aligned}$$

Δηλαδή, απαιτήθηκαν 5 συνολικά επαναλήψεις, για να βρούμε τη λύση του συστήματος με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ)

Στη γενική περίπτωση για τον υπολογισμό του x_1 μετα από k επαναλήψεις θα χρησιμοποιώ μια σχέση της μορφής :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{N} a_{1j} x_j^{(k)} \right) \tag{2.24}$$

στη δεύτερη εξίσωση από την οποία θα υπολογίζω το x_2 μετά από k επαναλήψεις αντικαθιστώ το $\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)}\right)$ και υπολογίζω το $x_2^{(k+1)}$ απο τη σχέση

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{N} a_{2j} x_j^{(k)} \right) \tag{2.25}$$

οπότε στην τρίτη εξίσωση θέτω $\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)}\right)$ κ.ο.κ. Άρα, ο γενικός τύπος θα είναι :

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right)} \tag{2.26}$$

Και εδώ, η συνθήκη σύγκλισης είναι:

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \ldots, N} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\right) \tag{2.28}$$

όπου $\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{L}}_{lower} + \underbrace{\mathbf{D}}_{diagonal} + \underbrace{\mathbf{U}}_{upper}$. Ο πίνακας $\mathbf{L}$ περιέχει τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{A}$ που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, ο πίνακας $\mathbf{D}$ μόνο τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$ και τέλος ο πίνακας $\mathbf{U}$ τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{A}$ που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εφαρμόστε την μέθοδο Gauss-Seidel στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου και συγκρίνετε την ταχύτητα σύγκλισης.

Πρακτικά οι προηγούμενες αναδρομικές σχέσεις θα γραφούν ως

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{7 + y^{(k)} - z^{(k)}}{4} \\
y^{(k+1)} &= \frac{21 + 4x^{(k)}{}^{+1} + z^{(k)}}{8} \\
z^{(k+1)} &= \frac{15 + 2x^{(k)}{}^{+1} - y^{(k)}{}^{+1}}{5}
\end{aligned}
$$

$\textit{Παίρνω την ακολουθία τιμών:}$

$$
\begin{aligned}
(1,2,2) &\to (1.75, 3.75, 2, 95) \\
&\to (1.95, 3.97, 2.99) \\
&\to (1.996, 3.996, 2.999)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή χρειάστηκαν μόνο 3 αντί για 5 επαναλήψεις (περίπου οι μισές).

2.7 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0$$

Για παράδειγμα, στην εξίσωση

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u_1}} = \underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u_1}}$$

το διάνυσμα $\mathbf{v_1} = (2, 1, -2)^\top$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και $\lambda_1 = -1$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0 \tag{2.33}$$

Το πολυώνυμο $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και οι ρίζες του $\lambda_i = -1$, 3 και 3 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$.

2.7.1 Η μέθοδος των δυνάμεων

Η μέθοδος εφαρμόζεται αν υπάρχει μια ιδιοτιμή λ_1 που είναι απολύτως μεγαλύτερη από όλες τις υπόλοιπες, δηλαδή

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_N| \tag{2.34}$$

και επίσης, αν κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των N ιδιοδιανυσμάτων $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}^{(N)}\right\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{u}^{(i)}$ ισχύει:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \qquad (1 \leq i \leq N) \tag{2.35}$$

και

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\mathbf{u}^{(N)} \tag{2.36}$$

Αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέλη της (2.36) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα έχω:

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N\mathbf{u}^{(N)} \tag{2.37}$$

Αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέλη της (2.36) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα έχω:

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N\mathbf{u}^{(N)} \tag{2.37}$$

Αν πολλαπλασιάσω k φορές την (2.37) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα καταλήξω σε μια σχέση της μορφής

$$\mathbf{x}^{(k)} \equiv \mathbf{A}^k\mathbf{x} = a_1\lambda_1^k\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N^k\mathbf{u}^{(N)}$$

Αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέλη της (2.36) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα έχω:

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N\mathbf{u}^{(N)} \tag{2.37}$$

Αν πολλαπλασιάσω k φορές την (2.37) με τον πίνακα $\mathbf{A}$, θα καταλήξω σε μια σχέση της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} &\equiv \mathbf{A}^k\mathbf{x} = a_1\lambda_1^k\mathbf{u}^{(1)} + a_2\lambda_2^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\lambda_N^k\mathbf{u}^{(N)} \\ &= \lambda_1^k\left(a_1\mathbf{u}^{(1)} + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + a_N\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(N)}\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

επειδή όμως η λ_1 είναι η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή (σχέση 2.34), οι όροι $(\lambda_j/\lambda_1)^k$ τείνουν στο μηδέν, καθώς το $k \to \infty$.

Άρα, για $k \to \infty$ λαμβάνουμε προσεγγιστικά ότι:

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{x} \approx \lambda_1^k a_1 \mathbf{u}^{(1)}} \tag{2.39}$$

επειδή όμως η λ_1 είναι η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή (σχέση 2.34), οι όροι $(\lambda_j/\lambda_1)^k$ τείνουν στο μηδέν, καθώς το $k \to \infty$.

Άρα, για $k \to \infty$ λαμβάνουμε προσεγγιστικά ότι:

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{x} \approx \lambda_1^k a_1 \mathbf{u}^{(1)}} \tag{2.39}$$

και επομένως, ο λόγος

$$\mathbf{r}_k \equiv \frac{\mathbf{x}^{(k+1)}}{\mathbf{x}^{(k)}} = \frac{\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}}{\mathbf{A}^k\mathbf{x}} \approx \frac{\lambda_1^{k+1} a_1 \mathbf{u}^{(1)}}{\lambda_1^k a_1 \mathbf{u}^{(1)}} \to \lambda_1 \tag{2.40}$$

τείνει στην τιμή λ_1, καθώς $k \to \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι από την (2.39) υπολογίζουμε προσεγγιστικά και το αντίστοιχο ιδιοδυανύσμα $\mathbf{u}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(k)}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Εστω, το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x} = (1, 2, 1)^\top$

οπότε,

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 68 & 0 & 164 \\ 136 & 32 & 428 \\ 164 & 0 & 396 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^6 = \begin{pmatrix} 232 & 0 & 560 \\ 532 & 64 & 1484 \\ 560 & 0 & 1352 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{A}^5\mathbf{x} = (232, 628, 560)^\top$$

$$\mathbf{x}^{(6)} = \mathbf{A}^6\mathbf{x} = (792, 2144, 1912)^\top$$

$$\lambda_1 \approx \frac{x^{(6)}}{x^{(5)}} = \frac{2144}{628} \approx 3.4140$$

το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}^{(1)}$ *θα είναι ίσο με το* $\mathbf{x}^{(6)}$

με κανονικοποίηση (διαιρούμε με το μεγαλύτερο στοιχείο του)

$$(0.3694, 1, 0.8918)$$

2.7.3 Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα $\mathbf{A}$, τότε η λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{-1}$.

2.7.3 Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα $\mathbf{A}$, τότε η λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{-1}$.

Επομένως, εάν ένας πίνακας $\mathbf{A}$ έχει N ιδιοτιμές $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{N-1}| > |l_N| > 0$, τότε, οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^{-1}$ είναι οι τιμές λ_i^{-1}, για τις οποίες θα ισχύει:

$$|\lambda_N^{-1}| > |\lambda_{N-1}^{-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_1^{-1}| > 0 \tag{2.43}$$

2.7.4 Μέθοδος της μετάθεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν οι N τιμές λ_i με $(i = 1, \ldots, N)$ είναι ιδιοτιμές ενός $N \times N$ πίνακα $\mathbf{A}$, τότε δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού μ ο πίνακας $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$: ο μοναδιαίος πίνακας) θα έχει ως ιδιοτιμές τις $(\lambda_i - \mu)$ για $(i = 1, \ldots N)$.