LAX-WENDROFF

Α. ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$u_t + \alpha u_x = 0$$

Αναπτύσσουμε το u_i^{n+1} σε σειρά Taylor γύρω από το u_i^n (ως προς το χρόνο):

$$u_i^{n+1} = u_i(x_i, t^n + \Delta t)$$
$$= u_i^n + u_t^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Στη συνέχεια, θα αντικαταστήσουμε τις χρονικές παραγώγους u_t^n, u_{tt}^n από χωρικές:

$$u_t = -\alpha u_x$$

και
$$u_{tt} = -\alpha u_{xt}$$
$$= -\alpha u_{tx}$$
$$= \alpha^2 u_{xx}$$

Οπότε:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha u_x^n \Delta t + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2} u_{xx}^2$$

και με κεντρικές διαφορές $O(\Delta x^2)$ βρίσκουμε:

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{c^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)}$$
$$+O(\Delta t^2, \Delta x^2).$$

Β. ΜΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Αν $$u_t + \alpha(u) u_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_t + f_x = 0$$

όπου θέσαμε $\alpha(u) = \frac{df}{du}$.

Στη συνέχεια, θα μετονομάσουμε $\alpha(u) = A$.

Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + u_t^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}^n \Delta t^2 + \cdots$$

και αντικαθιστούμε χρονικές παραγώγους από χωρικές:

$$u_t^n = - f_x^n$$

και

$$\begin{aligned} u_{tt} &= - f_{xt} \\ &= - f_{tx} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du} u_t\right) \\ &= (A f_x)_x \end{aligned}$$

Οπότε:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta_x f_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \delta_x \left(A_i \delta_x f_i \right)^n \Delta t^2$$

Χρησιμοποιούμε κεντρικές διαφορές με βήμα $\Delta x/2$ γύρω από το x_i:

$$\delta_x f_i^n = \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{\Delta x}$$

και

$$\delta_x (A_i^n \delta_x f_i^n) = \frac{1}{\Delta x}\left[A_{i+1/2}^n \delta_x f_{i+1/2}^n - A_{i-1/2}^n \delta_x f_{i-1/2}^n \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left[A_{i+1/2}^n (f_{i+1}^n - f_i^n) - A_{i-1/2}^n (f_i^n - f_{i-1}^n) \right]$$

Τελικά:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[A_{i+1/2}^n \left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) - A_{i-1/2}^n \left(f_i^n - f_{i-1}^n\right)\right]$$

όπου θέσαμε:

$$A_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(A_{i+1} + A_i\right)$$

$$A_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(A_i + A_{i-1}\right)$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ για

$$\left| A_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1$$

όπου $A_{max} = \max \left[A(u(x,t)) \right]$.

Γ. ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Εάν έχουμε έναν αριθμό από μη-γραμμικές εξισώσεις του τύπου

$$(u_1)_t + (f_1)_x = 0$$
$$(u_2)_t + (f_2)_x = 0$$
$$\vdots$$
$$(u_N)_t + (f_N)_x = 0$$

τότε μπορούμε να σχηματίσουμε το "διάνυσμα" των αγνώστων $\vec{u}$ και το "διάνυσμα" των ροών $\vec{F}$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

ώστε το σύστημα να γράφεται σε συμπαγή μορφή ως:

$$\boxed{\vec{U}_t + \vec{F}_x = 0}$$

Ισοδύναμα, το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μη-συντηρητική μορφή, με το μετασχηματισμό:

$$\vec{U}_t + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \vec{U}_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U}_t + \overleftrightarrow{A}\,\vec{U}_x = 0}$$

όπου $\overleftrightarrow{A} = \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots \\ \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας μετασχηματισμού.

Για παράδειγμα, για ένα σύστημα 2 εξισώσεων:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + \partial_x f_1 = 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_x f_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \partial_x u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \partial_x u_2 = 0 \\ \partial_t u_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \partial_x u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \partial_x u_2 = 0 \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα Taylor δίνει τη μορφή Lax-Wendroff

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^n - \partial_x \vec{F}_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \partial_x \left(\overleftrightarrow{A}_i \partial_x \vec{F}_i\right) \Delta t^2$$

και με κεντρικές διαφορές με βήμα $\Delta x/2$:

$$\partial_x \vec{F}_i^n = \frac{\vec{F}_{i+1/2}^n - \vec{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x}$$

$$\partial_x \left(\overleftrightarrow{A}_i \partial_x \vec{F}_i\right) = \frac{1}{\Delta x}\left[\overleftrightarrow{A}_{i+1/2}\, \partial_x \vec{F}_{i+1/2}^n - \overleftrightarrow{A}_{i-1/2}\, \partial_x \vec{F}_{i-1/2}^n\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left[\overleftrightarrow{A}_{i+1/2}\left(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i\right) - \overleftrightarrow{A}_{i-1/2}\left(\vec{F}_i - \vec{F}_{i-1}\right)\right]$$

και έτσι:

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^{n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\vec{F}_{i+1}^{n} - \vec{F}_{i-1}^{n}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[\overleftrightarrow{A}_{i+1/2}\left(\vec{F}_{i+1}-\vec{F}_i\right) - \overleftrightarrow{A}_{i-1/2}\left(\vec{F}_i-\vec{F}_{i-1}\right)\right]$$

όπου

$$\overleftrightarrow{A}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\overleftrightarrow{A}_{i+1} + \overleftrightarrow{A}_i\right)$$

$$\overleftrightarrow{A}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(\overleftrightarrow{A}_i + \overleftrightarrow{A}_{i-1}\right)$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:

$$\left|\lambda_{max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < 1$$

όπου $\lambda_{max} = max\left[\lambda_j\left(u(x,t)\right)\right]$

με λ_j τις ιδιοτιμές του πίνακα $\overleftrightarrow{A}$.

ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ x, y

Το σύστημα γράφεται ως

$$\boxed{\vec{U}_t + \vec{F}_x + \vec{G}_y = 0}$$

όπου $\vec{G}$ είναι οι ροές κατά μήκος του y.

Η μέθοδος LAX-Wendroff γίνεται

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1} = \vec{U}_{i,j}^{n} - d_x \vec{F}_{i,j}^{n} \Delta t - d_y \vec{G}_{i,j}^{n} \Delta t$$

$$+ \frac{1}{2} d_x \left(\overleftrightarrow{A}_{i,j} d_x \vec{F}_{i,j} \right) \Delta t^2$$

$$+ \frac{1}{2} d_y \left(\overleftrightarrow{B}_{i,j} d_y \vec{G}_{i,j} \right) \Delta t^2$$

$$+ \text{μικτοί όροι } d_x d_y \ldots$$

όπου $\overleftrightarrow{B}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας που αντιστοιχεί στη ροή $\vec{G}$.

Προφανώς, οι μικτοί όροι $d_x d_y \ldots$ δυσκολεύουν κατά πολύ τη διαμόρφωση και την υπολογιστική υλοποίηση.

ΜΕΘΟΔΟΣ MACCORMACK ΔΥΟ ΒΗΜΑΤΩΝ

Α. ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Έστω $$u_t + a u_x = 0$$

$n+1$ ———
$n+1/2$ - - - - -
n ———

Θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ: FTFS μεταξύ t^n, t^{n+1}

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)}$$

όπου $\bar{u}^{n+1}$ είναι η πρόβλεψη της λύσης στο t^{n+1}.
Έχοντας το $\bar{u}^{n+1}$, μπορούμε να ορίσουμε μια πρόβλεψη για το $\bar{u}^{n+1/2}$, δηλ.

$$\bar{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(u_i^n + \bar{u}_i^{n+1}\right)$$

ΔΙΟΡΘΩΣΗ: BTBS μεταξύ $t^{n+1/2}$ και t^{n+1}

$$\frac{u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -a \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_i^n + \bar{u}_i^{n+1}\right) - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x}\left(\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1}\right)}$$

$$+ O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ για $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} < 1$.

Β. ΜΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$u_t + \alpha(u) u_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; u_t + f_x = 0$$

Τότε

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}\left[u_i^n + \bar{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{f}_i^{n+1} - \bar{f}_{i-1}^{n+1}\right)\right] \end{aligned}}$$

όπου $\bar{f}_i^{n+1} = f\left(\bar{u}_i^{n+1}\right)$ κοκ.

Ευστάθεια για $A_{max}\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, $A_{max} = \max\left[\frac{df}{du}\right]$

Γ. ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η γενίκευση είναι απλά

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\vec{U}}_i^{n+1} &= \vec{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\vec{F}_{i+1}^n - \vec{F}_i^n\right) \\ \vec{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}\left[\vec{U}_i^n + \bar{\vec{U}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{\vec{F}}_i^{n+1} - \bar{\vec{F}}_{i-1}^{n+1}\right)\right] \end{aligned}}$$

Ευστάθεια για $\left|\lambda_{max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < 1$, $\lambda_{max} = \max[\lambda_j]$.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ X,Y

$$\vec{U}_t + \vec{F}_x + \vec{G}_y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{U}_t + \overleftrightarrow{A}\vec{U}_x + \overleftrightarrow{B}\vec{U}_y = 0$$

Η γενίκευση είναι απλώς

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\vec{U}}^{n+1}_{i,j} &= \vec{U}^{n}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\vec{F}^{n}_{i+1,j} - \vec{F}^{n}_{i,j}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\vec{G}^{n}_{i,j+1} - \vec{G}^{n}_{i,j}\right) \\ \vec{U}^{n+1}_{i,j} &= \frac{1}{2}\Big[\vec{U}^{n}_{i} + \bar{\vec{U}}^{n+1}_{i} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{\vec{F}}^{n+1}_{i,j} - \bar{\vec{F}}^{n+1}_{i-1,j}\right) \\ &\qquad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\bar{\vec{G}}^{n+1}_{i,j} - \bar{\vec{G}}^{n+1}_{i,j-1}\right)\Big] \end{aligned}}$$

Ευστάθεια:

$$\Delta t < \left[\frac{|\lambda(A)|_{max}}{\Delta x} + \frac{|\lambda(B)|_{max}}{\Delta y}\right]^{-1}.$$