

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**3ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

ΑΣΚΗΣΗ 1: (α) Εάν $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ είναι σημεία στα οποία γνωρίζουμε τις αντίστοιχες τιμές $y(x)$, δείξτε (χρησιμοποιώντας ισαπέχοντα συμπτωτικά πολυώνυμα) ότι

$$\begin{aligned} y'_n &= \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2) \\ y''_n &= \frac{-y_{n-3} + 4y_{n-2} - 5y_{n-1} + 2y_n}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

(β) Εάν $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ είναι σημεία στα οποία γνωρίζουμε τις αντίστοιχες τιμές $y(x)$, αποδείξτε τη σχέση κεντρικών διαφορών

$$y''_0 = \frac{-y_{-2} + 16y_{-1} - 30y_0 + 16y_1 - y_2}{12h^2} + O(h^4)$$

χρησιμοποιώντας i) ισαπέχοντα συμπτωτικά πολυώνυμα, ii) αναπτύγματα Taylor.

ΑΣΚΗΣΗ 2: α) Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^3 \frac{1}{5x^2 + 1} dx$$

με 3 ισαπέχοντα σημεία με τον κανόνα του τραπεζίου και υπολογίστε το σχετικό σφάλμα σε σχέση με την πραγματική τιμή. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείτε 5 ισαπέχοντα σημεία και εφαρμόστε επίσης τη βελτίωση Romberg. Για τα 5 σημεία εφαρμόστε και τη μέθοδο Simpson. Συγκρίνετε το σχετικό σφάλμα μεταξύ των τριών μεθόδων για 5 σημεία και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

β) Δημιουργείτε υπολογιστικό πρόγραμμα που να υπολογίζει την τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος για n σημεία με τον κανόνα του Simpson (όπου n περιττός αριθμός). Με αυτό, υπολογίστε το *ρυθμό σύγκλισης* του αποτελέσματος, χρησιμοποιώντας αρχικά 3, 5 και 7 σημεία και στη συνέχεια 31, 61 και 121 σημεία. Συμφωνεί ο ρυθμός σύγκλισης με την τάξη του σφάλματος της μεθόδου;

ΑΣΚΗΣΗ 3: α) Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{2\pi} e^{-x/4} \sin(20x) dx$$

με τη μέθοδο Filon, χρησιμοποιώντας 5 σημεία. β) Πόσα σημεία απαιτούνται για να υπολογίσετε το παραπάνω ολοκλήρωμα με την ίδια ακρίβεια, αν χρησιμοποιείτε υπολογιστικό πρόγραμμα με τη μέθοδο Simpson;