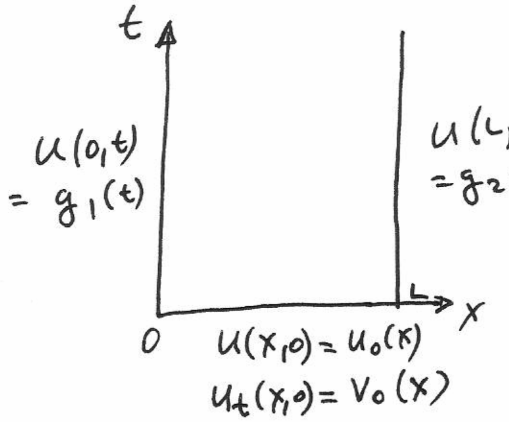
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η πρότυπη υπερβολική εξίσωση (κυματική εξίσωση 2ης τάξης) που θα μελετήσουμε είναι της μορφής

$$\boxed{u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = f}$$



Μοναδική λύση υπάρχει εφόσον καθορίσουμε:

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = v_0(x)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(L,t) = g_2(t)$$

Εννοείται πως πρέπει να υπάρχει συνέχεια ώστε $u_0(0) = g_1(0)$

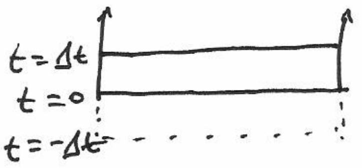
και $u_0(L) = g_2(0)$

Η διακριτοποίηση με κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης δίνει

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f_i^n$$

με ακρίβεια $O(\Delta t^2, h^2)$.

Για να εφαρμόσουμε την αρχική συνθήκη $u_t(x,0) = v_0(x)$ επινοούμε έναν χρόνο $t = -\Delta t$, ώστε



$$u_t(x,0) \rightarrow \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = v_0(x_i)$$

$$\Rightarrow u_i^{-1} = u_i^1 - 2\Delta t\, v_0(x_i)$$

Στο χρόνο $t=0$ έχουμε έτσι:

$$\frac{u_i^1 - 2u_i^0 + (u_i^1 - 2\Delta t v_0)}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} = f_i$$

η οποία λύνεται για u_i^1 ως

$$\boxed{u_i^1 = \frac{\gamma}{2} u_{i-1}^0 + (1-\gamma) u_i^0 + \frac{\gamma}{2} u_{i+1}^0 + \Delta t v_0 + \frac{\Delta t^2}{2} f_i^0}$$

όπου θέσαμε $\gamma = \dfrac{\alpha^2 \Delta t^2}{h^2}$

Στα άκρα του διαστήματος θα εμφανισθούν και οι συνοριακές συνθήκες, στους όρους u_{i+1}^0 και u_{i-1}^0, αντιστοίχως.

Στα επόμενα χρονικά βήματα, μπορούμε να λύσουμε απευθείας τη διακριτοποιημένη εξίσωση ως

$$\boxed{u_i^{n+1} = \gamma u_{i-1}^n + 2(1-\gamma) u_i^n + \gamma u_{i+1}^n - u_i^{n-1} + \Delta t^2 f_i^n}$$

Η συνθήκη ευστάθειας είναι

$$\gamma < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{h^2} < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t < \frac{h}{\alpha}}$$

Αυτό αντιστοιχεί σε

$$\frac{h}{\Delta t} > \alpha$$

που σημαίνει πως η αριθμητική ταχύτητα επίλυσης πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1ης τάξης: (ΓΡΑΜΜΙΚΗ)

$$\boxed{u_t + \alpha u_x = 0} \qquad (1)$$

$u = u(x,t)$

Αν $\alpha =$ σταθ:

$\Rightarrow \quad u_{tt} + \alpha u_{tx} = 0$

ή $\quad u_{tx} + \alpha u_{xx} = 0$

$$\left.\begin{matrix} u_{tt} + \alpha u_{tx} = 0 \\ u_{tx} + \alpha u_{xx} = 0 \end{matrix}\right\} \boxed{-\frac{1}{a^2} u_{tt} + u_{xx} = 0} \rightarrow \text{2ης τάξης}$$

$\Rightarrow \alpha =$ ταχύτητα διάδοσης

Αν $u_t = v$

$\Rightarrow u_{tt} + \alpha u_{tx} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_t + \alpha v_x = 0 \\ u_t + \alpha u_x = 0 \end{cases}$ σύστημα 2 1ης τάξης εξ.

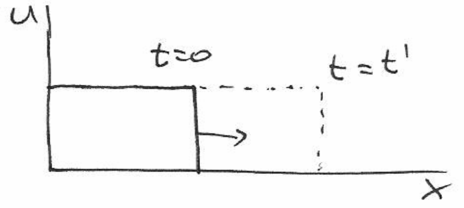
Λύση:

$$u(x,t) = u(x - \alpha t, 0)$$

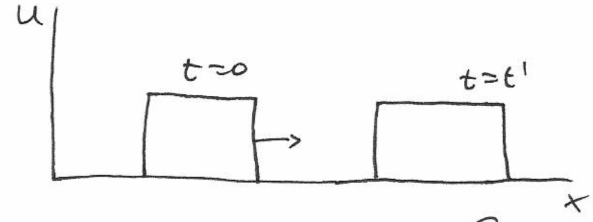
π.χ. αν οι αρχικές συνθήκες είναι

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

έχουμε απλώς μετατόπιση της αρχικής λύσης με ταχύτητα α. (αν $\alpha > 0$ διάδοση προς δεξιά, $\alpha < 0$ . . . . αριστερά).

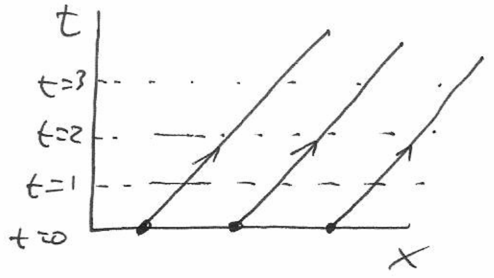


ή, π.χ.



δηλ. για τη γραμμική εξίσωση με $\alpha =$ σταθ. το προφίλ της λύσης πρέπει να διατηρείται (στην πράξη όμως, λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, δε θα έχουμε διατήρηση).

Χαρακτηριστικές:



κλίση: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha}$

Αν υπάρχουν "πηγές" (δηλ. και δεξιό μέρος):

$$u_t + \alpha u_x = S \quad , \quad S = S(x,t)$$

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Αν $\alpha = \alpha(x,t)$

$$u_t + \alpha(x,t)\, u_x = 0$$

τότε, οι χαρακτηριστικές έχουν διαφορετική κλίση! το προφίλ της αρχικής λύσης δε διατηρείται με το χρόνο.

ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

$$\boxed{u_t + \alpha(u)\, u_x = S(x,t)}$$

Η μορφή αυτή ονομάζεται <u>μη-συντηρητική</u>. ή πρωτόγονη (primitive)

Αν ορίσουμε τη ροή

$$f = \int \alpha \, du$$

τότε $\alpha = \dfrac{df}{du}$

και $u_t + \dfrac{df}{du} u_x = S(x,t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_t + f_x = S(x,t)}$$

Η μορφή αυτή ονομάζεται <u>συντηρητική</u>.

Αριθμητικές λύσεις που βασίζονται στη συντηρητική μορφή έχουν την ιδιότητα να διατηρούν κάποια ολοκληρωτική ποσότητα στο πλέγμα, π.χ. την ολική μάζα ή την ολική ορμή.

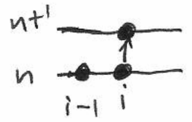
Στην περίπτωση διάδοσης ασυνεχειών υπό μορφή κρουστικών κυμάτων, η μη-συντηρητική μορφή δε δίνει τη σωστή ταχύτητα διάδοσης του κρουστικού κύματος κι έτσι είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε τη συντηρητική μορφή (και μάλιστα με μέθοδο πεπερασμένων όγκων).

ΣΧΗΜΑΤΑ:

FTBS (upwind), explicit

Με $\alpha > 0$: $\quad u_t + \alpha u_x = 0$

$$\to \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$



$$\Rightarrow \boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - c\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)} + O(\Delta t, \Delta x)$$

όπου $\boxed{c = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}}$

Αν $C \leq 1 \Rightarrow$ ευσταθές (CFL condition
Courant - Friedrichs - Levy)

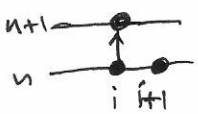
Αν $\alpha < 0 \Rightarrow$ πάντα ασταθές.

FTFS

σε αναλογία με το FTBS.

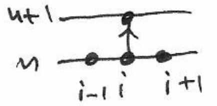
Αν $\alpha < 0 \Rightarrow$ ευσταθές για $C \leq 1$

$\alpha > 0 \Rightarrow$ πάντα ασταθές.



FTCS

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0}, \quad O(\Delta t, \Delta x^2)$$



$\to$ πάντα ασταθές

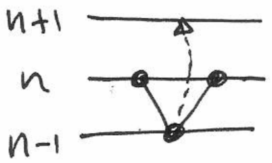
BTCS (implicit)

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

πάντα ευσταθές, αλλά λύση τριδιαγώνιου πίνακα (1-D).

CTCS (Leapfrog)



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - c\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

Το σχήμα είναι ευσταθές για $c \leq 1$, αλλά χρειάζεται να γνωρίζουμε πάντοτε δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές $(n, n-1)$ για να φτάσουμε στην επόμενη $n+1$.

ΜΕΘΟΔΟΣ LAX-FRIEDRICHS

Σταθεροποιεί την FTCS αντικαθιστώντας το u_i^n με το μέσο όρο $\frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α) Μία γραμμική εξίσωση (μονοδιάστατη)

$$u_t + \alpha u_x = 0$$

FTCS: $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

και αντικαθιστώντας $u_i^n \to \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$

βρίσκουμε

$$\boxed{u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}$$

όπου $$c = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Το σχήμα είναι ευσταθές εάν $c \leq 1$.

β) Μία μη-γραμμική εξίσωση (μονοδιάστατη) σε συντηρητική μορφή:

$$u_t + f_x = 0$$

όπου $f = f(u,x)$ είναι η ροή.

Τότε $$\boxed{u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\lambda}{2}\left[f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)\right]}$$

όπου $$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Η ίδια εξίσωση γράφεται και ως

$$u_t + \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

άρα μπορούμε να ορίσουμε τη (μη-σταθερή) ταχύτητα του κύματος ως

$$\alpha(u) = \frac{df}{du}$$

Η συνθήκη για να είναι το σχήμα ευσταθές είναι

$$\alpha(u)\cdot\lambda \leq 1 .$$

δ) Σύστημα Εξισώσεων

Εάν έχουμε N εξισώσεις για N αγνώστους $u_1, u_2, \dots, u_N$ τότε σχηματίζουμε το διάνυσμα αγνώστων
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, θα υπάρχουν N ροές $f_1, f_2, \dots f_N$ που σχηματίζουν το διάνυσμα

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Το σύστημα γράφεται σε συμπαγή μορφή

$$\vec{u}_t + \vec{f}_x = 0$$

και η μέθοδος Lax-Friedrichs είναι

$$\boxed{\vec{u}_i^{\,n+1} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}_{i+1}^{\,n} + \vec{u}_{i-1}^{\,n}\right) - \frac{\lambda}{2}\left[\vec{f}(\vec{u}_{i+1}^{\,n}) - \vec{f}(\vec{u}_{i-1}^{\,n})\right].}$$

Το σύστημα $\vec{u}_t + \vec{f}_x = 0$ γράφεται ισοδύναμα (σε μη-συντηρητική μορφή) ως

$$\vec{u}_t + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \vec{u}_x = 0$$

όπου $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \equiv \overleftrightarrow{A}(u)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

δηλ. $$\overleftrightarrow{A}(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει ιδιοτιμές λ_i και ιδιοδιανύσματα $\vec{k}^{(i)}$ ώστε

$$\overleftrightarrow{A}\, \vec{k}^{(i)} = \lambda_i \vec{k}^{(i)}$$

Οι ιδιοτιμές λ_i είναι οι ταχύτητες των N κυμάτων που υπάρχουν στο σύστημα (κάθε εξίσωση εισάγει κι ένα κύμα με μια ταχύτητα λ_i). Για να είναι το αριθμητικό σχήμα ευσταθές, επιλέγουμε την $\alpha_{max} = (\lambda_i)_{max}$ και απαιτούμε να ισχύει η συνθήκη

$$\alpha_{max} \cdot \lambda \leq 1. \qquad (\lambda = \Delta t/\Delta x \text{ εδώ}).$$