

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**4ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

ΑΣΚΗΣΗ 1: α) Υπολογίστε τη λύση στο $x = 0.4$ της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

με $\omega = 4$ και αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Euler με τρεις διαφορετικές τιμές για το βήμα $h = 0.1, 0.2$ και 0.4 . Μελετείστε το ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου στο $x = 0.4$.

β) Δημιουργείτε υπολογιστικό πρόγραμμα που να υπολογίζει τη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης με τις μεθόδους Runge-Kutta 2ης τάξης και Runge-Kutta 4ης τάξης και σχεδιάστε τις αντίστοιχες λύσεις στο διάστημα $0 \leq x \leq 6$ με βήμα $h = 0.1$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Η μέθοδος Runge-Kutta 2ης τάξης δεν είναι ευσταθής για οποιαδήποτε τιμή του βήματος h . Για να φανεί αυτό, να υπολογιστεί (με πρόγραμμα) η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = -10 \frac{y^2}{x}$$

με αρχική συνθήκη $y(0.1) = 1$ και μέχρι το $x = 1.1$ με τις εξής επιλογές για το βήμα: $h = 0.005, h = 0.01, h = 0.015$ και $h = 0.02$. Να συγκριθούν οι αντίστοιχες λύσεις στο διάστημα $0.1 \leq x \leq 1.1$ σε γραφική παράσταση. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' = -2y' + 8y$$

στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$ με συνθήκες $y(0) = 1$ και $y(1) = 0$. Χρησιμοποιείτε τη μέθοδο shooting με Runge-Kutta 2ης τάξης και βήμα $h = 100$.