ΗΜΙ-ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

Μπορούμε να διακριτοποιήσουμε μόνο τη χωρική παράγωγο u_{xx}

$$\frac{du}{dt} = \kappa u_{xx} \to \kappa \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

και να λύσουμε ένα πλεγμένο σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων (μία για κάθε πλεγματικό σημείο x_i) ως προς το χρόνο t, χρησιμοποιώντας μία από τις γνωστές μεθόδους, π.χ. Runge-Kutta.

Η μέθοδος ονομάζεται και μέθοδος των γραμμών (method of lines).

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΔΕΜΠ

Ως πρότυπη ελλειπτική ΔΕΜΠ θα μελετήσουμε την

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$$

Η απλούστερη δυνατή διακριτοποίηση γίνεται με κεντρικές διαφορές 2ης τάξης για τις παραγώγους u_{xx} και u_{yy}.

$$u_{xx}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$u_{yy}=\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

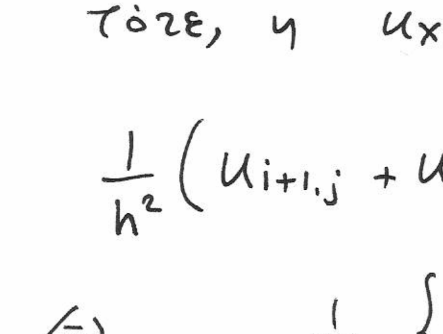
Κατ' αρχάς, μπορούμε να δούμε την περίπτωση χωρίς πηγές ($f=0$) και με ίσα $\Delta x=\Delta y=h$. Τότε, η $u_{xx}+u_{yy}=0$ γίνεται

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-4u_{i,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{h^2}\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\}u_{i,j}=0$$

(η τελευταία μορφή μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δι-διάστατος τελεστής που δρα στο $u_{i,j}$).

Θεωρούμε διαστάσεις $(0,L_x)\times(0,L_y)$ για το αριθμητικό πλέγμα.

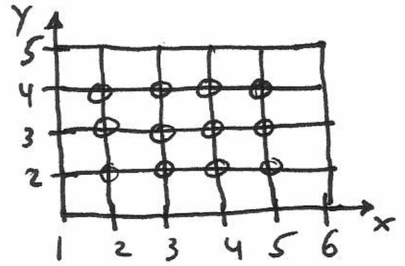


Μοναδική λύση υπάρχει εάν καθορίσουμε ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ σε ΟΛΑ ΤΑ ΣΥΝΟΡΑ του πλέγματος:

$u(x,0)=a(x)$	$u(0,y)=d(y)$
$u(x,L_y)=c(x)$	$u(L_x,y)=b(y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την $u_{xx}+u_{yy}=0$ με γνωστές συνοριακές συνθήκες σε ένα πλέγμα 6×5 σημείων (ισαπέχοντα).



Ο αριθμός των αγνώστων είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία $(6-2)\times(5-2) = 4\times 3 = 12$

Γράφουμε μία-μία τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών σε οριζόντια διάταξη (η κάθε σειρά από αριστερά προς δεξιά).

$$(2,2):\quad u_{3,2}+u_{2,3}-4u_{2,2}+u_{1,2}+u_{2,1}=0$$

Οι $u_{1,2}$ και $u_{2,1}$ είναι γνωστές τιμές από τις συνοριακές συνθήκες, κι έτσι οι όροι αυτοί μεταφέρονται στο δεξί μέρος της εξίσωσης:

$$u_{3,2}+u_{2,3}-4u_{2,2} = -u_{1,2}-u_{2,1}$$

Ομοίως προχωράμε με τις υπόλοιπες εξισώσεις. Για μια τυχαία τιμή (i,j) στο εσωτερικό του πλέγματος ισχύει

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-4u_{i,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}=0$$

Το τελευταίο σημείο είναι

$$(5,4):\quad u_{6,4}+u_{5,5}-4u_{5,4}+u_{4,4}+u_{5,3}=0$$

$$\Rightarrow\quad -4u_{5,4}+u_{4,4}+u_{5,3} = -u_{6,4}-u_{5,5}.$$

Συνολικά, οι 12 εξισώσεις σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα $\overleftrightarrow{A}\,\vec{X}=\vec{D}$.

Ο πίνακας $\overleftrightarrow{A}$ του γραμμικού συστήματος έχει την εξής μορφή:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) \end{array} \\
\begin{array}{c} (2,2) \\ (3,2) \\ (4,2) \\ (5,2) \\ (2,3) \\ (3,3) \\ (4,3) \\ (5,3) \\ (2,4) \\ (3,4) \\ (4,4) \\ (5,4) \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Δηλαδή, πρόκειται για πίνακα με μορφή ζώνης (band-diagonal) που μπορεί να λυθεί με άμεσες μεθόδους, όπως η Gauss, η LU κτλ. που όμως είναι χρονοβόρες.

Για σύστημα με $(N-2)\times(M-2)$ αγνώστους, το εύρος ζώνης (με την παραπάνω οριζόντια διάταξη) είναι $2(N-2)+1$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι $2(6-2)+1=9$.

Επειδή η κάθετη διάσταση είναι μικρότερη της οριζόντιας $(M<N)$, συμφέρει να διατάξουμε τις άγνωστες ποσότητες κάθετα (αντί για οριζόντια) ώστε να έχουμε μικρότερο εύρος ζώνης (αν θέλουμε να εκμεταλλευτούμε κάποια ειδική μέθοδο επίλυσης).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΔΕΜΠ

ΜΕΘΟΔΟΣ LIEBMANN

Πρόκειται για γενίκευση της μεθόδου $x = g(x)$.

Η διακριτοποιημένη εξίσωση

$$0 = \left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_{i,j}$$

γράφεται σε αναδρομική μορφή ως:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_{i,j}^{n}$$

ή, αλλιώς:

$$\boxed{u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i-1,j}^{n} + u_{i,j-1} \right)}$$

όπου ο δείκτης n μετρά τον αριθμό των επαναλήψεων.

Ξεκινάμε την αναδρομική επίλυση επιλέγοντας μια κατάλληλη εκτίμηση u_{ij}^{0}. Μια καλή εκτίμηση είναι ο μέσος όρος των συνοριακών τιμών.

SOR : Successive Over Relaxation

(Επιτάχυνση της Liebmann)

Ο αναδρομικός τύπος της Liebmann μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

$$\boxed{u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \frac{\omega}{4}\left(u_{i+1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\right)}$$

Προφανώς, για $\omega = 1$ ο παραπάνω τύπος συμπίπτει με τον τύπο του Liebmann.

Ο παράγοντας ω ονομάζεται παράγοντας επιτάχυνσης (overrelaxation factor).

Για ένα ορθοκανονικό πλέγμα $N \times M$, η ιδανική τιμή του ω (που δίνει συγκεκριμένη ακρίβεια με το μικρότερο αριθμό επαναλήψεων) είναι η μικρότερη ρίζα της τετραγωνικής εξίσωσης

$$\boxed{\left[\cos\left(\frac{\pi}{N-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{M-1}\right)\right]^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0}$$

Για το παράδειγμα με $(N \times M) = (9 \times 5)$ βρίσκουμε $\omega_{ιδαν} = 1.267 \simeq 1.3$.

Πράγματι για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ο αριθμός επαναλήψεων για να πετύχουμε ακρίβεια 10^{-4} είναι ελάχιστος για $\omega \simeq 1.3$ και κατά $\sim 40\%$ μικρότερος από ό,τι για $\omega = 1$.

Υπάρχουν μέθοδοι υπολογισμού του $\omega_{ιδαν}$ μετά από μερικές επαναλήψεις.

ΕΞΙΣΩΣΗ POISSON

Εάν η πηγή $f(x,y)$ δεν είναι μηδενική, τότε

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$$

και η διακριτοποίηση δίνει:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u_{i,j} - h^2 f_{i,j} = 0}$$

Προκύπτει πάλι ένα γραμμικό σύστημα που μπορεί να λυθεί άμεσα, απλώς θα έχει διαφορετικό δεξί μέρος, σε σχέση με την περίπτωση $f=0$.

Για να λυθεί με την αναδρομική μέθοδο Liebmann, γράφουμε:

$$\boxed{u^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{4}\left[\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u^{n}_{i,j} - h^2 f_{i,j}\right]}$$

Ενώ η SOR γενικεύεται ως

$$\boxed{u^{n+1}_{i,j} = u^{n}_{i,j} + \frac{\omega}{4}\left[\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u^{n}_{i,j} - h^2 f_{i,j}\right]}$$

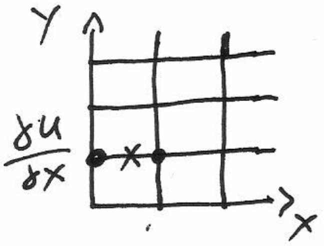
ΕΑΝ $\Delta x \neq \Delta y$

τότε

$$u_{xx}+u_{yy} = \left[\frac{1}{\Delta x^2}\{1 \quad -2 \quad 1\} + \frac{1}{\Delta y^2}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}\right]$$

Μπορούμε να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα με άμεση μέθοδο, όχι όπως με τη Liebmann.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ Neumann



Έστω ότι στο αριστερό σύνορο θέλουμε τη συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta(y)$$

Για τα σημεία $(1,j)$ του άξονα Y μπορούμε να κάνουμε τη διακριτοποίηση

$$\nabla^2 u_{1,j} = \frac{(u_x)_{1+1/2,j} - (u_x)_{1,j}}{h/2}$$

$$= \frac{(u_{2,j}-u_{1,j})/h - \beta_j}{h/2}$$

$$= \frac{2\,(u_{2,j}-u_{1,j})}{h^2} - \frac{2\beta_j}{h}$$

οπότε, προκύπτουν επιπλέον εξισώσεις στο γραμμικό σύστημα για τις άγνωστες ποσότητες $u_{1,j}$ που ενσωματώνουν τη συνοριακή συνθήκη.

Η παραπάνω τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί και για μικτές συνοριακές συνθήκες του τύπου

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = \beta \; .$$

ADI: Alternating Direction Implicit

Στην περίπτωση $\Delta x \neq \Delta y$ που δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Liebmann, διότι δε βγαίνει κοινός παράγοντας στην εξίσωση

$$\frac{1}{\Delta x^2}\{1 \quad -2 \quad 1\}\, u_{ij} + \frac{1}{\Delta y^2}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix} u_{ij} = 0$$

μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αναδρομική μέθοδο δύο βημάτων:

Στο πρώτο βήμα υπολογίζω ένα νέο, ενδιάμεσο $\bar{u}^{n+1}$, λύνοντας το τριδιαγώνιο σύστημα

$$\{1 \quad -2 \quad 1\}\, \bar{u}^{n+1}_{ij} = -\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix} u^{n}_{ij}$$

Στο δεύτερο βήμα, υπολογίζω την τελική λύση u^{n+1}, λύνοντας πάλι ένα τριδιαγώνιο σύστημα

$$\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix} u^{n+1}_{ij} = -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\{1 \quad -2 \quad 1\}\, \bar{u}^{n+1}_{ij}$$

(με διαφορετική διάταξη των αγνώστων, αυτή τη φορά).

Στην παραπάνω μέθοδο μπορούμε να εισάγουμε και έναν παράγοντα επιτάχυνσης.