1η ΕΝΟΤΗΤΑ

1. ΡΙΖΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κλασικό πρόβλημα των στοιχειωδών μαθηματικών είναι η εύρεση μιας τιμής ρ τέτοιας, ώστε για μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a, b)$ να ισχύει:

$$f(\rho) = 0 \tag{1.1}$$

1η ΕΝΟΤΗΤΑ

1. ΡΙΖΕΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κλασικό πρόβλημα των στοιχειωδών μαθηματικών είναι η εύρεση μιας τιμής ρ τέτοιας, ώστε για μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in (a,b)$ να ισχύει:

$$f(\rho) = 0 \tag{1.1}$$

Αναδρομική σχέση:

$$\boxed{x_{n+1} = \sigma(x_n)} \tag{1.2}$$

που θα δίνει μια ακολουθία τιμών $x_0, x_1, \ldots, x_\kappa, \ldots$ και στο όριο $\kappa \to \infty$ να δίνει τη ρίζα της εξίσωσης (1.1).

1η ΕΝΟΤΗΤΑ

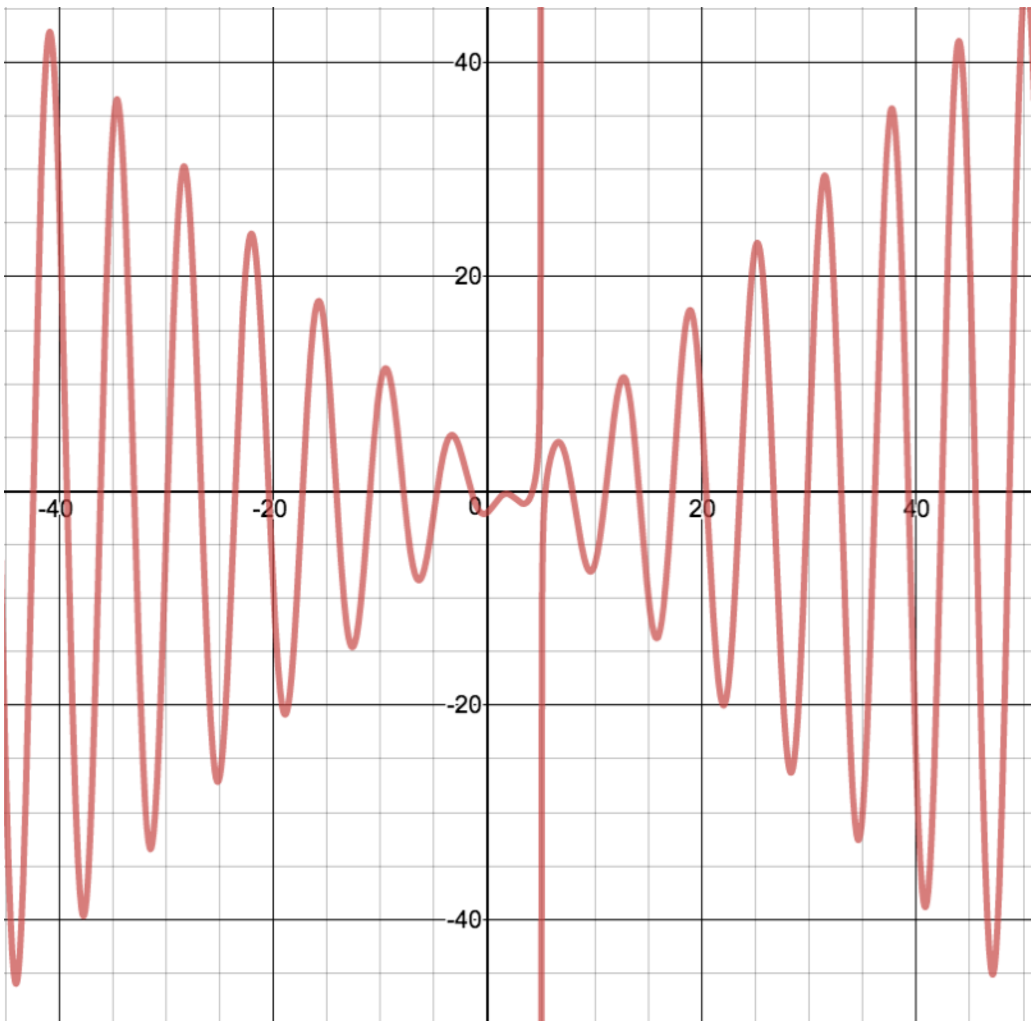
Παράδειγμα

$$(x-2)\cos(x)+\frac{\sin(x)}{x-5}=0$$

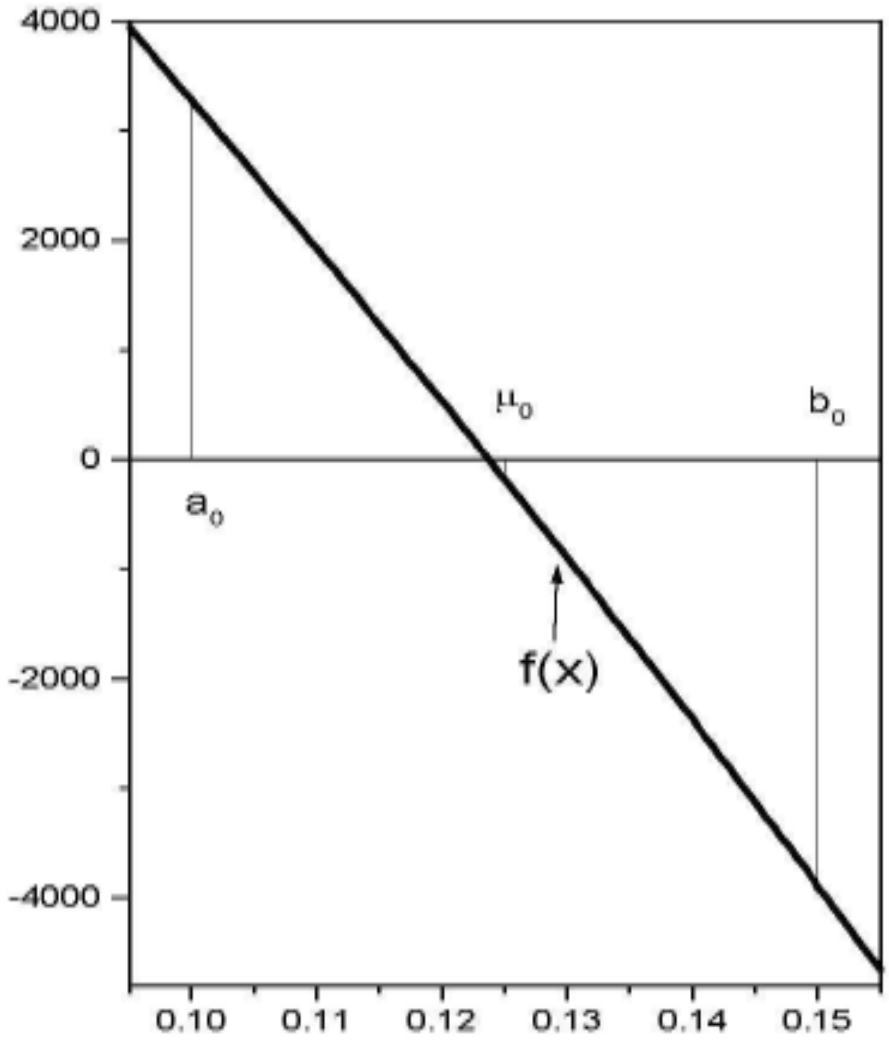
1η ΕΝΟΤΗΤΑ

Παράδειγμα

$$(x-2)\cos(x)+\frac{\sin(x)}{x-5}=0$$



1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ



1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Έστω ότι μια ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[a_0, b_0]$, τότε $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Αν $\mu_0 = (a_0 + b_0)/2$, τότε:

- (I) είτε $f(\mu_0) \cdot f(a_0) < 0$
- (II) είτε $f(\mu_0) \cdot f(b_0) < 0$
- (III) είτε $f(\mu_0) = 0$.

1.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Έστω ότι μια ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[a_0, b_0]$, τότε $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Αν $\mu_0 = (a_0 + b_0)/2$, τότε:

- (I) είτε $f(\mu_0) \cdot f(a_0) < 0$
- (II) είτε $f(\mu_0) \cdot f(b_0) < 0$
- (III) είτε $f(\mu_0) = 0$.

Αν ισχύει η (III), τότε έχει υπολογισθεί η ρίζα και σταματά η διαδικασία, αλλιώς ορίζω νέο διάστημα

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\mu_0, b_0] & \text{αν} \quad (II) \\ \\ [a_0, \mu_0] & \text{αν} \quad (I) \end{cases} \tag{1.7}$$

ΚΡΙΤΙΚΗ

Δύο στοιχεία κάνουν την μέθοδο ελάχιστα ελκυστική:

- Η αργή σύγκλιση
- Επικίνδυνη, όταν υπάρχουν ασυνέχειες

ΚΡΙΤΙΚΗ

Δύο στοιχεία κάνουν την μέθοδο ελάχιστα ελκυστική:

- Η αργή σύγκλιση
- Επικίνδυνη, όταν υπάρχουν ασυνέχειες

ΣΦΑΛΜΑ

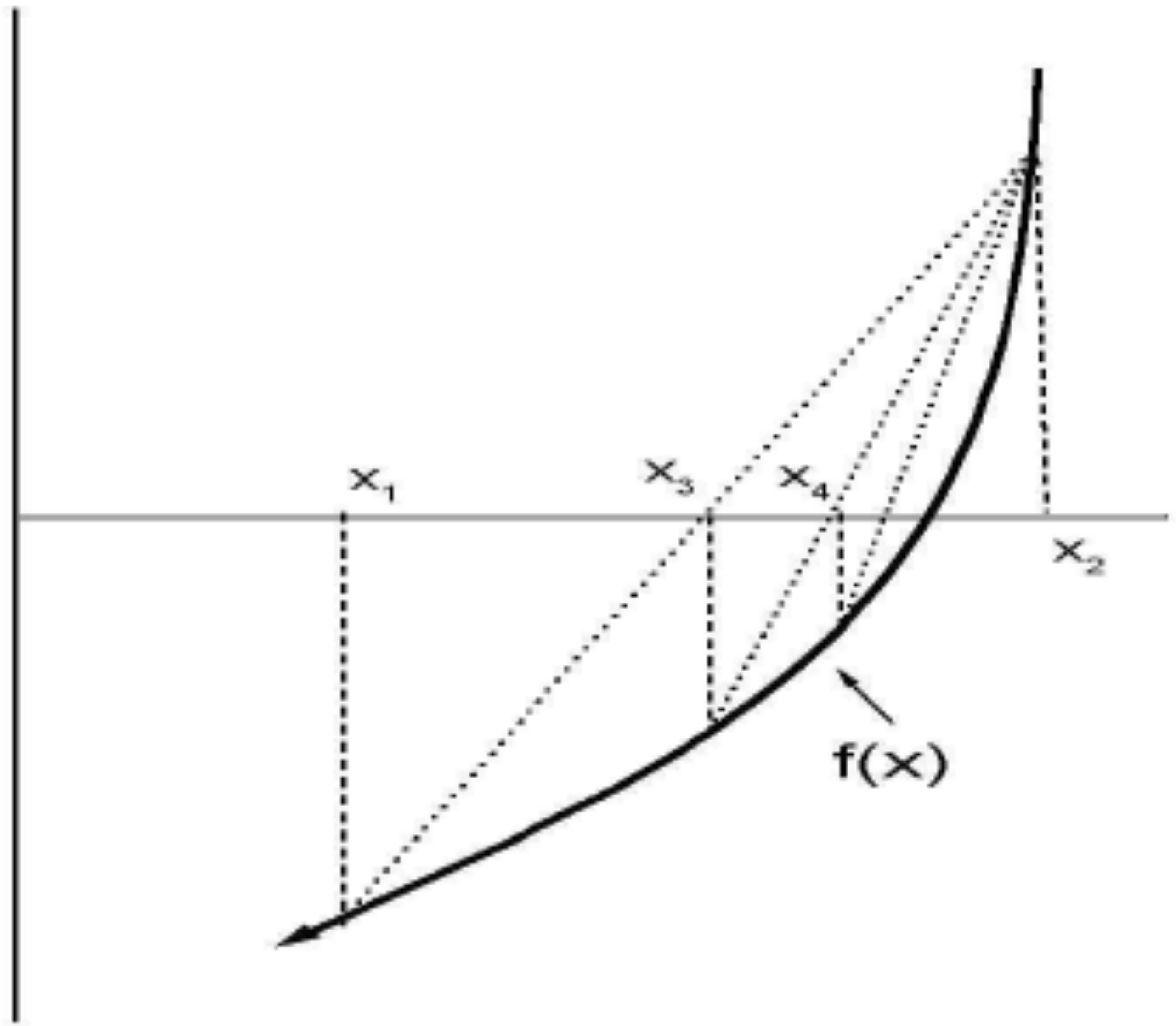
Ως σφάλμα ορίζουμε την " απόσταση" $\boxed{\varepsilon_n = |\rho - x_n|}$ της τιμής x_n από τη ρίζα ρ της εξίσωσης. Για τη μέθοδο διχοτόμησης το σφάλμα είναι μικρότερο απο το μισό του διαστήματος στο οποίο περικλείεται η ρίζα

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| \tag{1.8}$$

Σε κάθε βήμα το σφάλμα μειώνεται στο μισό του προηγουμένου

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{\varepsilon_0}{2^n} \tag{1.9}$$

1.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ



1.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στηρίζεται στην εξής λογική: Αν στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει μία ρίζα της $f(x)$, δηλαδή $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, τότε φέρνω την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με εξίσωση:

$$\boxed{y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1)} \qquad (1.11)$$

1.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στηρίζεται στην εξής λογική: Αν στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει μία ρίζα της $f(x)$, δηλαδή $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, τότε φέρνω την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με εξίσωση:

$$\boxed{y\left(x\right) = f\left(x_1\right) + \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)}{x_1 - x_2}\left(x - x_1\right)} \tag{1.11}$$

η οποία τέμνει τον άξονα Ox έστω στο σημείο x_3 που υπολογίζεται απο την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}\left(x_2 - x_1\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η σχέση (1.12) με κατάλληλους δείκτες είναι η ζητούμενη αναδρομική σχέση:

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} (x_{n+1} - x_n)} \tag{1.13}$$

Δηλαδή αν δοθούν δύο αρχικές τιμες x_n και x_{n+1} με την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε μια νές τιμή x_{n+2} που βρίσκεται πλησιέστερα στη ρίζα ρ της μη-γραμμικής εξίσωσης.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η σχέση (1.12) με κατάλληλους δείκτες είναι η ζητούμενη αναδρομική σχέση:

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}(x_{n+1} - x_n)\,.} \qquad (1.13)$$

Δηλαδή αν δοθούν δύο αρχικές τιμες x_n και x_{n+1} με την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε μια νές τιμή x_{n+2} που βρίσκεται πλησιέστερα στη ρίζα ρ της μη-γραμμικής εξίσωσης.

Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής :

- Συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο διχοτόμησης
- Δεν είναι υποχρεωτικό η ρίζα να εσωκλείεται μεταξύ των δύο αρχικών τιμών.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Έστω ξ η ακριβής ρίζα της εξίσωσης. Αν θεωρήσουμε ότι $\varepsilon_n = |\xi - x_n|$ είναι το σφάλμα στην εύρεση της ρίζας της $f(x) = 0$ για $x = x_n$, τότε η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής συγκλίνει με βάση τη σχέση

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = k \cdot \varepsilon_n^{1.618}} \tag{1.14}$$

1.3 ΜΕΘΟΔΟΣ MULLER

Αν δοθούν τρεις αρχικές τιμές x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, υποθέτουμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται από ένα 2ο-βάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου εύκολα υπολογίζουμε τις ρίζες. Για τις τρεις αρχικές τιμές του x_i λαμβάνουμε τρεις εξισώσεις της μορφής :

$$\boxed{f(x_i) \approx P(x_i) = Ax_i^2 + Bx_i + \Gamma} \tag{1.20}$$

1.3 ΜΕΘΟΔΟΣ MULLER

Αν δοθούν τρεις αρχικές τιμές x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, υποθέτουμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται από ένα 2ο-βάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου εύκολα υπολογίζουμε τις ρίζες. Για τις τρεις αρχικές τιμές του x_i λαμβάνουμε τρεις εξισώσεις της μορφής :

$$\boxed{f(x_i) \approx P(x_i) = Ax_i^2 + Bx_i + \Gamma} \tag{1.20}$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τους 3 συντελεστές του τριωνύμου μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} A &= qP\left(x_i\right) - q\left(1+q\right)P\left(x_{i-1}\right) + q^2 P\left(x_{i-2}\right) \\ B &= \left(2q+1\right)P\left(x_i\right) - \left(1+q\right)^2 P\left(x_{i-1}\right) + q^2 P\left(x_{i-2}\right) \\ \Gamma &= \left(1+q\right)P\left(x_i\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου

$$q = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}}\,. \tag{1.22}$$

1.3 ΜΕΘΟΔΟΣ MULLER

Αν δοθούν τρεις αρχικές τιμές x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, υποθέτουμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται από ένα 2ο-βάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου εύκολα υπολογίζουμε τις ρίζες. Για τις τρεις αρχικές τιμές του x_i λαμβάνουμε τρεις εξισώσεις της μορφής :

$$\boxed{f(x_i) \approx P(x_i) = Ax_i^2 + Bx_i + \Gamma} \tag{1.20}$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τους 3 συντελεστές του τριωνύμου μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} A &= qP\left(x_i\right) - q\left(1+q\right)P\left(x_{i-1}\right) + q^2 P\left(x_{i-2}\right) \\ B &= \left(2q+1\right)P\left(x_i\right) - \left(1+q\right)^2 P\left(x_{i-1}\right) + q^2 P\left(x_{i-2}\right) \\ \Gamma &= \left(1+q\right)P\left(x_i\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου

$$q = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}}\,. \tag{1.22}$$

Οπότε η επόμενη προσεγγιστική τιμή x_{i+1} βρίσκεται ως η ρίζα της παραβολής

$$Ax^2 + Bx + \Gamma = 0\,. \tag{1.23}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η παρακάτω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την εύρεση της ρίζας

$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[\frac{2\Gamma}{B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}} \right] \tag{1.24}$$

Το σημείο του παρονομαστή επιλέγεται ούτως ώστε να γίνεται το κλάσμα μικρότερο απολύτως.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η παρακάτω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την εύρεση της ρίζας

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[\frac{2\Gamma}{B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}} \right]} \tag{1.24}$$

Το σημείο του παρονομαστή επιλέγεται ούτως ώστε να γίνεται το κλάσμα μικρότερο απολύτως.

ΣΦΑΛΜΑ

Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της μεθόδου είναι:

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n^{1.84}} \tag{1.25}$$

δηλαδή η συγκλιση είναι σημαντικά καλύτερη από τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Η παρακάτω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την εύρεση της ρίζας

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[\frac{2\Gamma}{B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}} \right]} \tag{1.24}$$

Το σημείο του παρονομαστή επιλέγεται ούτως ώστε να γίνεται το κλάσμα μικρότερο απολύτως.

ΣΦΑΛΜΑ

Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της μεθόδου είναι:

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n^{1.84}} \tag{1.25}$$

δηλαδή η συγκλιση είναι σημαντικά καλύτερη από τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ x=g(x)

Επομένως, προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση της μορφής

$$\boxed{x_{n+1} = g\left(x_n\right)} \tag{1.26}$$

ούτως ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \rho\,. \tag{1.27}$$

1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ x=g(x)

Επομένως, προσπαθούμε να βρούμε μια σχέση της μορφής

$$\boxed{x_{n+1} = g\left(x_n\right)} \tag{1.26}$$

ούτως ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \rho\,. \tag{1.27}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) = x - \cos x$$

Παράδειγμα:

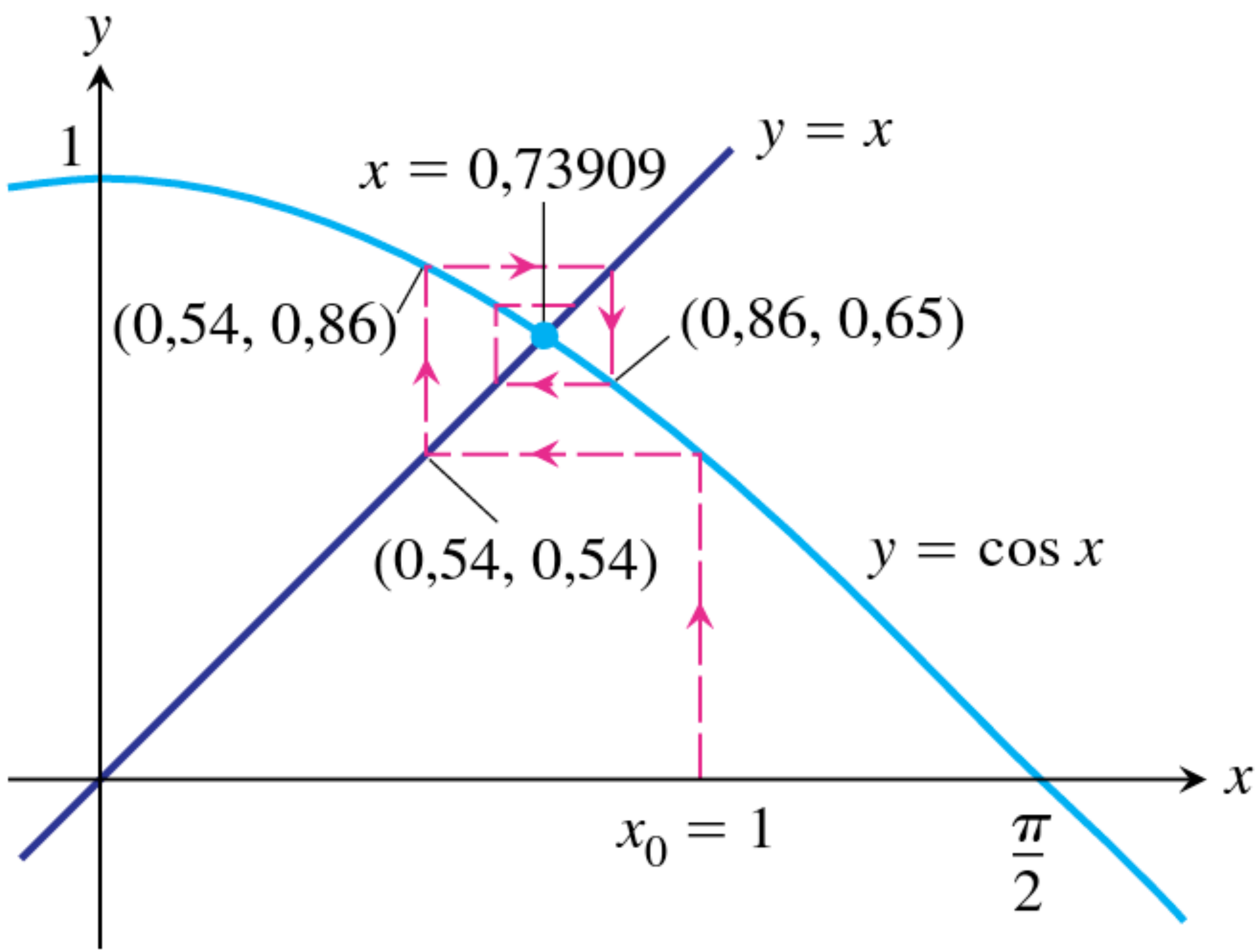
Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x - \cos x$

Παράδειγμα:

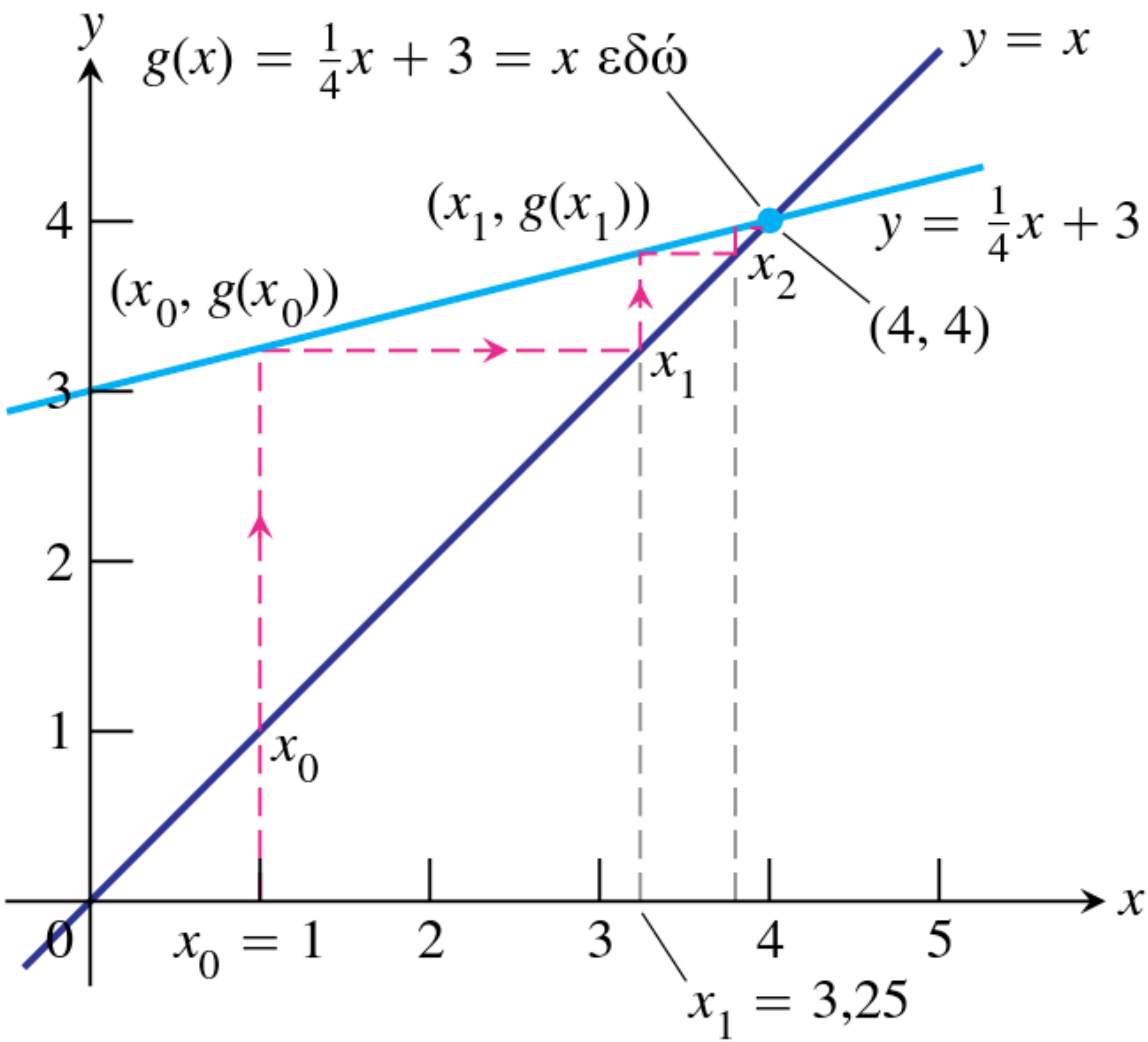
Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x - \cos x$ $\Rightarrow x = \cos x$

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x - \cos x \qquad \Rightarrow x = \cos x$



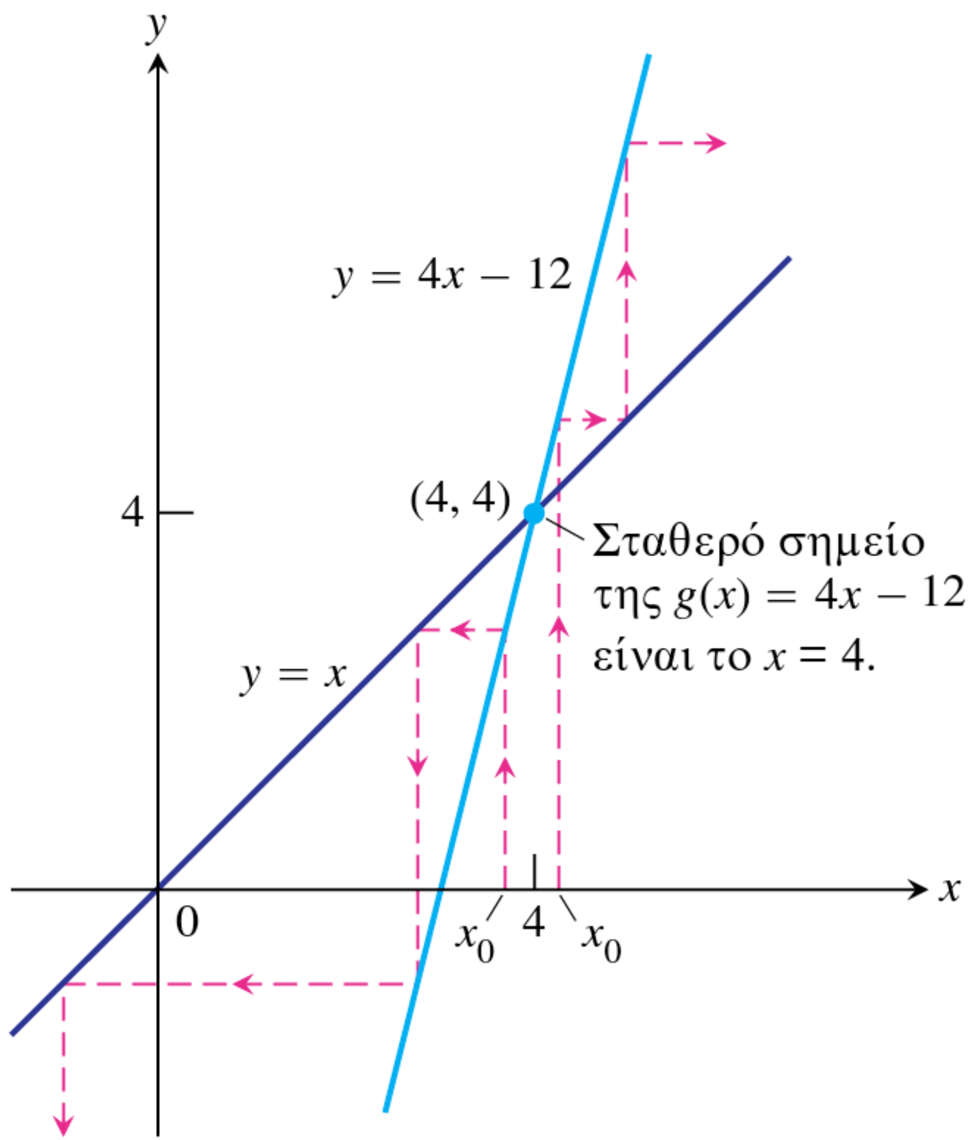
Παράδειγμα:



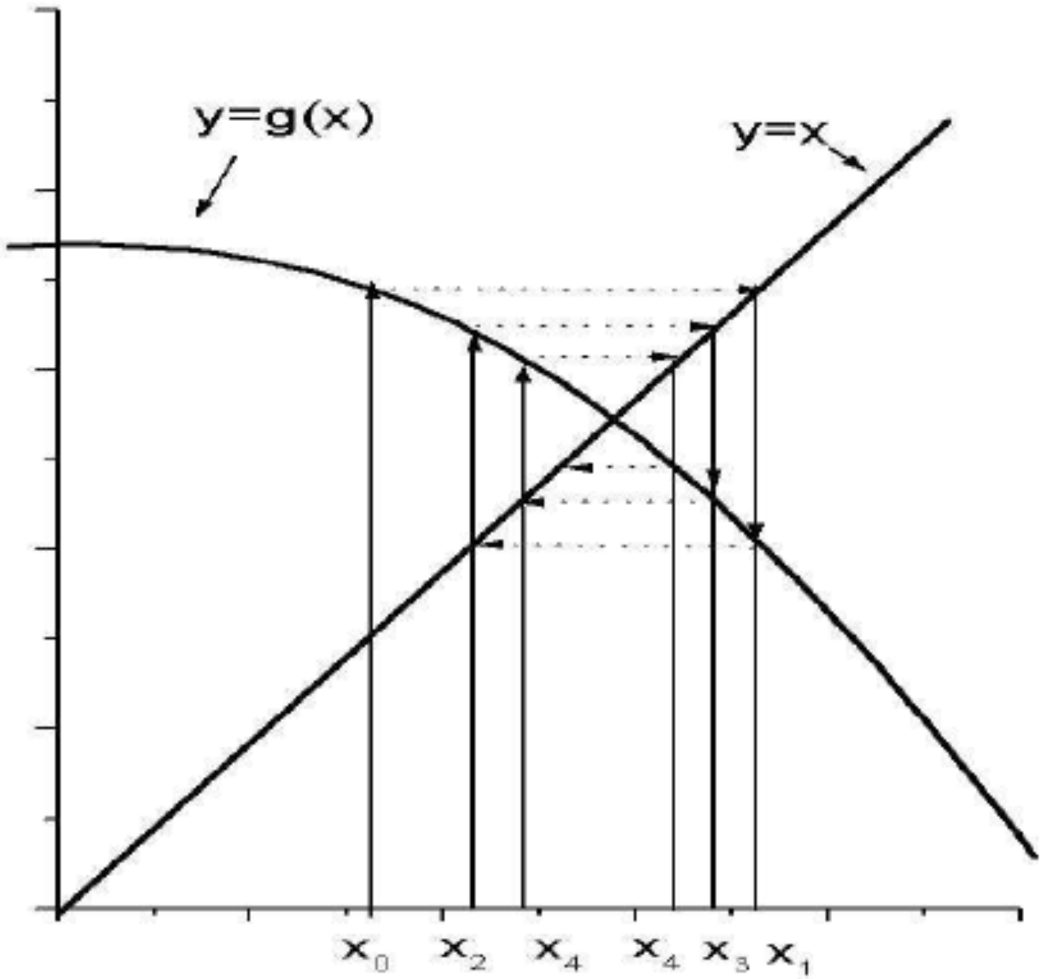
y
$g(x) = \frac{1}{4}x + 3 = x$ εδώ
$y = x$
$(x_1, g(x_1))$
$y = \frac{1}{4}x + 3$
$(x_0, g(x_0))$
x_2
$(4, 4)$
x_1
x_0
4
3
2
1
0
$x_0 = 1$
2
3
4
5
x
$x_1 = 3{,}25$

Η μέθοδος του Picard δεν θα μας δώσει τη λύση της εξίσωσης

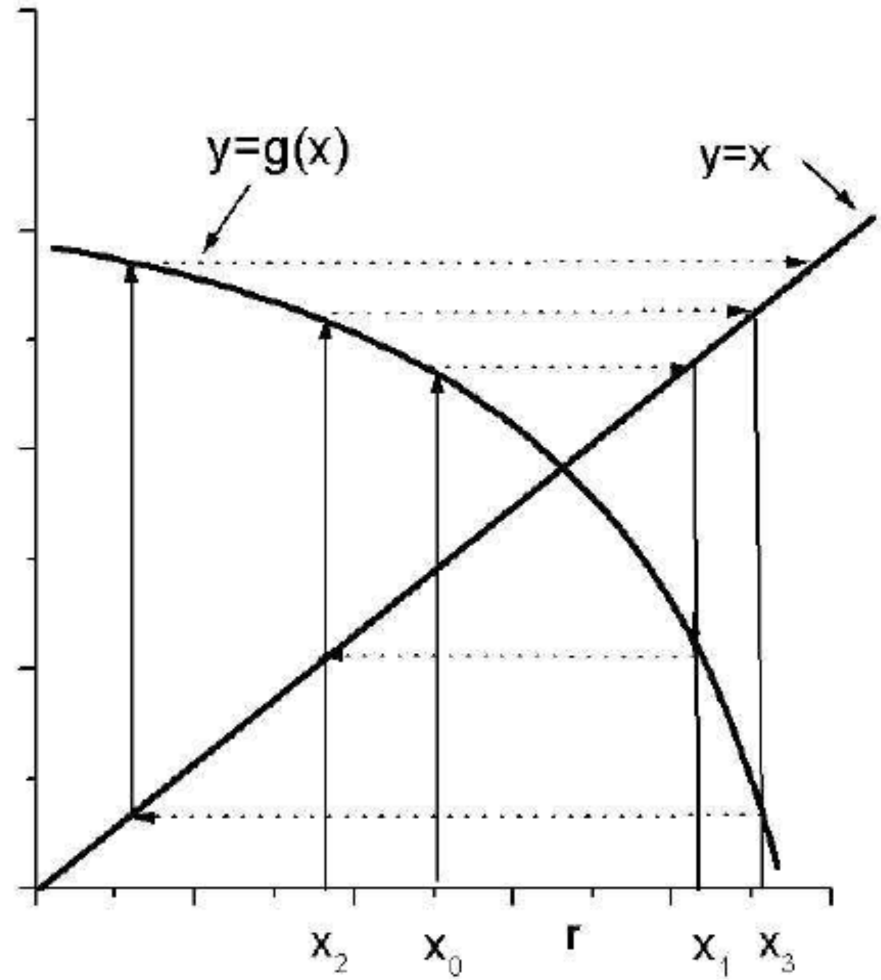
$$g(x) = 4x - 12 = x.$$



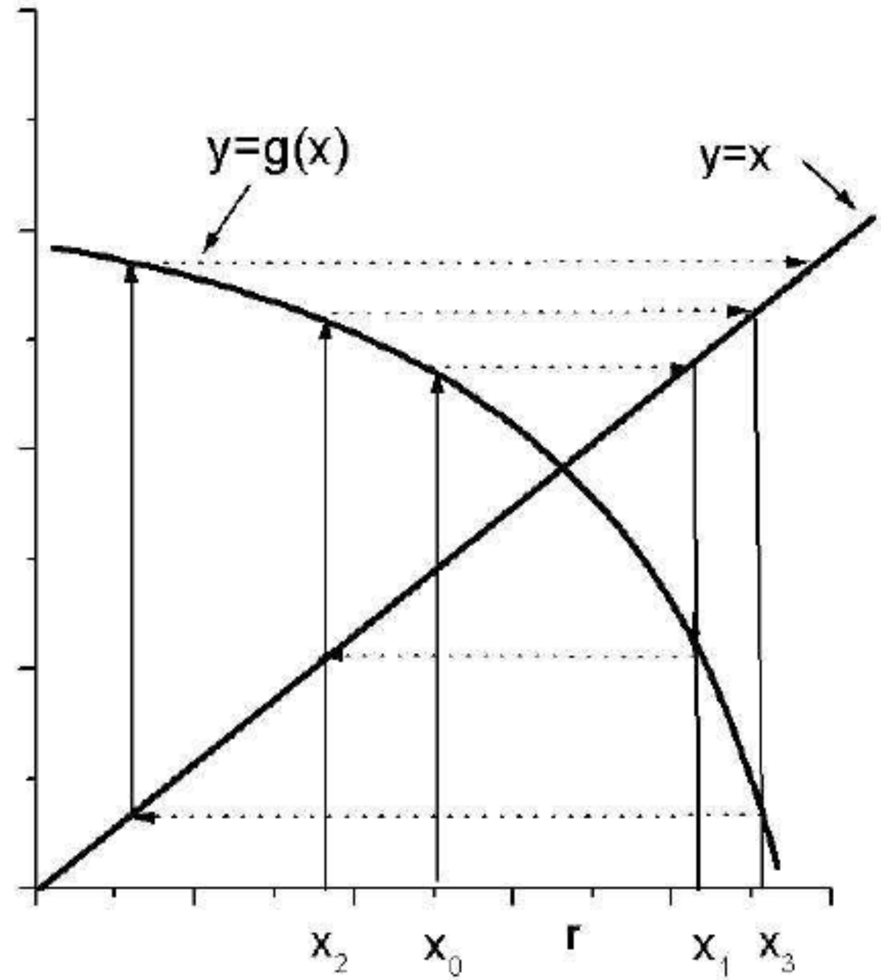
Σύγκλιση όταν |g’(x)|<1



Απόκλιση όταν $|g'(x)|>1$



Απόκλιση όταν |g’(x)|>1



ΣΦΑΛΜΑ

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = g'(r)\varepsilon_n}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης :

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$
  αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$ ***οπότε δεν συγκλίνει.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης :

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$
  αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$ ***οπότε δεν συγκλίνει.***
- $x_{n+1} = e^{-x_n}$
  οπότε $|y'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1$ ***άρα συγκλίνει.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης :

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$
  αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$ ***οπότε δεν συγκλίνει.***
- $x_{n+1} = e^{-x_n}$
  οπότε $|y'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1$ ***άρα συγκλίνει.***
- *Μια άλλη γραφή είναι η εξής :* $x = (x + e^{-x})/2$
  οπότε $|g'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-1}| = 0.316$ ***άρα συγκλίνει.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x + \ln(x)$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$.

Δοκιμάζουμε διάφορες γραφές της εξίσωσης :

- $x_{n+1} = -\ln(x_n)$
  αλλά $|g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1$ *στο διάστημα* $[0.1, 1]$ ***οπότε δεν συγκλίνει.***
- $x_{n+1} = e^{-x_n}$
  οπότε $|y'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.1} \approx 0.9 < 1$ ***άρα συγκλίνει.***
- *Μια άλλη γραφή είναι η εξής :* $x = (x + e^{-x})/2$
  οπότε $|g'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leq \frac{1}{2}|1 - e^{-1}| = 0.316$ ***άρα συγκλίνει.***
- $x = \frac{x+2e^{-x}}{3}$ *οπότε* $|g'(x)| = \frac{1}{3}|1 - 2e^{-x}| \leq \frac{1}{3}|1 - 2e^{-1}| = 0.03$ ***άρα συγκλίνει.***

Προφανώς θα επιλέξουμε την τελευταία γραφή και η ζητούμενη αναδρομική σχέση θα είναι:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2e^{-x_n}}{3} .$$

1.4.1 Βελτίωση Aitken

Όταν η σύγκλιση μιας μεθόδου είναι γραμμική, όπως στην προηγούμενη μέθοδο, όπου είχαμε $e_{n+1} = g'(\rho)e_n$, τότε, για $n \to \infty$, η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί, για να επιτύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα χωρίς επιπλέον πράξεις.

Το σφάλμα μετά από n εφαρμογές της σχέσης $x_{n+1} = g'(x_n)$ είναι:

$$\rho - x_{n+1} \approx g'(\rho)(\rho - x_n)$$

και μετά από $n+1$ εφαρμογές είναι:

$$\rho - x_{n+2} = g'(\rho)(\rho - x_{n+1})$$

1.4.1 Βελτίωση Aitken

Όταν η σύγκλιση μιας μεθόδου είναι γραμμική, όπως στην προηγούμενη μέθοδο, όπου είχαμε $e_{n+1} = g'(\rho)e_n$, τότε, για $n \to \infty$, η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί, για να επιτύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα χωρίς επιπλέον πράξεις.

Το σφάλμα μετά από n εφαρμογές της σχέσης $x_{n+1} = g'(x_n)$ είναι:

$$\rho - x_{n+1} \approx g'(\rho)(\rho - x_n)$$

και μετά από $n+1$ εφαρμογές είναι:

$$\rho - x_{n+2} = g'(\rho)(\rho - x_{n+1})$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι

$$\frac{\rho - x_{n+1}}{\rho - x_{n+2}} = \frac{g'(\rho)(\rho - x_n)}{g'(\rho)(\rho - x_{n+1})}$$

1.4.1 Βελτίωση Aitken

Όταν η σύγκλιση μιας μεθόδου είναι γραμμική, όπως στην προηγούμενη μέθοδο, όπου είχαμε $e_{n+1} = g'(\rho)e_n$, τότε, για $n \to \infty$, η μέθοδος είναι δυνατόν να επεκταθεί, για να επιτύχουμε ακριβέστερο αποτέλεσμα χωρίς επιπλέον πράξεις.

Το σφάλμα μετά από n εφαρμογές της σχέσης $x_{n+1} = g'(x_n)$ είναι:

$$\rho - x_{n+1} \approx g'(\rho)(\rho - x_n)$$

και μετά από $n+1$ εφαρμογές είναι:

$$\rho - x_{n+2} = g'(\rho)(\rho - x_{n+1})$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι

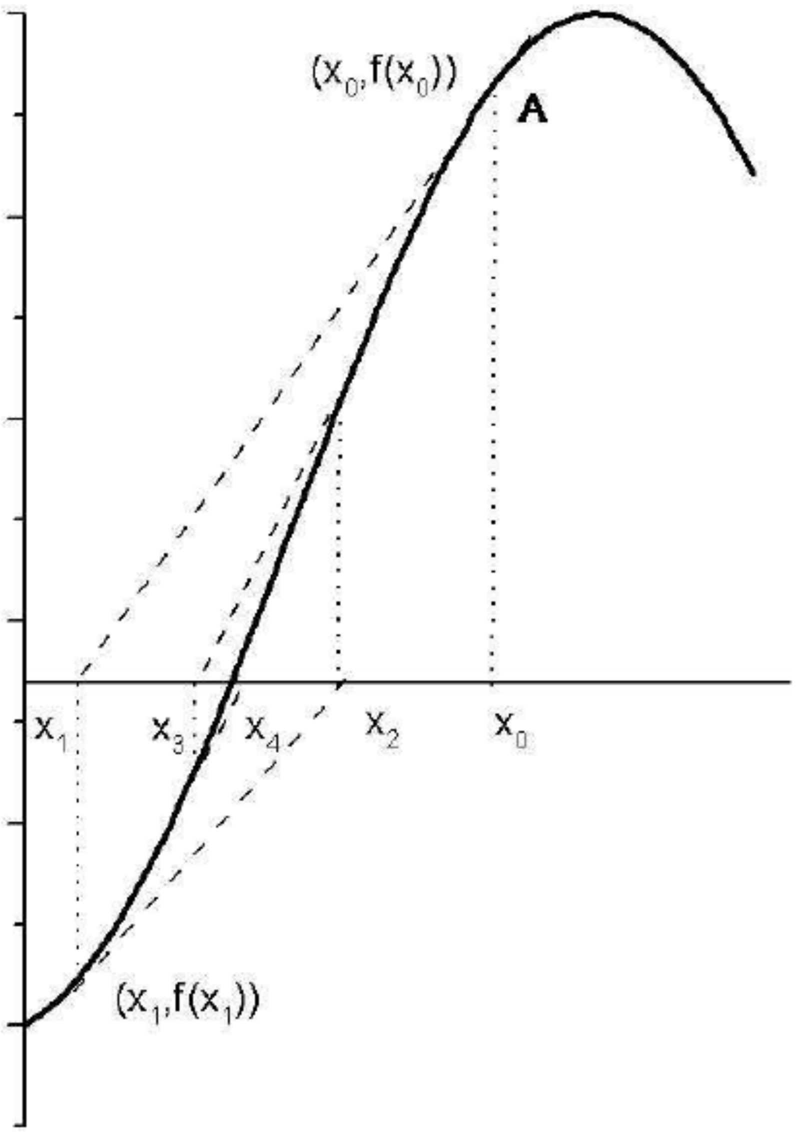
$$\frac{\rho - x_{n+1}}{\rho - x_{n+2}} = \frac{\cancel{g'(\rho)}(\rho - x_n)}{\cancel{g'(\rho)}(\rho - x_{n+1})}$$

και λύνοντας ως προς ρ βρίσκουμε:

$$\boxed{\rho = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}} \tag{1.29}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως *βελτίωση του Aitken*.

1.5 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON



Ας προσπαθήσουμε τώρα να δημιουργήσουμε τη σχέση (1.31) με πιο αυστηρό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι x_{n+1} είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης και μια τιμή x_n βρίσκεται σχετικά κοντά στην x_{n+1} και έστω $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$. Τότε:

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_n + \varepsilon_n\right) = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''\left(x_n\right) + \cdots$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να δημιουργήσουμε τη σχέση (1.31) με πιο αυστηρό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι x_{n+1} είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης και μια τιμή x_n βρίσκεται σχετικά κοντά στην x_{n+1} και έστω $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$. Τότε:

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_n + \varepsilon_n\right) = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''\left(x_n\right) + \cdots$$

Αλλά, επειδή υποθέσαμε ότι η x_{n+1} είναι ρίζα της $f\left(x\right)$, θα ισχύει $f\left(x_{n+1}\right) = 0$, και έτσι αναγόμαστε στη σχέση

$$0 = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right)$$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να δημιουργήσουμε τη σχέση (1.31) με πιο αυστηρό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι x_{n+1} είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης και μια τιμή x_n βρίσκεται σχετικά κοντά στην x_{n+1} και έστω $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$. Τότε:

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_n + \varepsilon_n\right) = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''\left(x_n\right) + \cdots$$

Αλλά, επειδή υποθέσαμε ότι η x_{n+1} είναι ρίζα της $f\left(x\right)$, θα ισχύει $f\left(x_{n+1}\right) = 0$, και έτσι αναγόμαστε στη σχέση

$$0 = f\left(x_n\right) + \varepsilon_n f'\left(x_n\right)$$

δηλαδή

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.32}$$

οπότε καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{1.33}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω ξ η ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=0$. Τότε $x_n=\xi+\varepsilon_n$ και $x_{n+1}=\xi+\varepsilon_{n+1}$, οπότε:

$$\xi+\varepsilon_{n+1}=\xi+\varepsilon_n-\frac{f\left(\xi+\varepsilon_n\right)}{f'\left(\xi+\varepsilon_n\right)}=\xi+\varepsilon_n-\frac{f\left(\xi\right)+\varepsilon_n f'\left(\xi\right)+\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''\left(\xi\right)}{f'\left(\xi\right)+\varepsilon_n f''\left(\xi\right)}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω ξ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Τότε $x_n = \xi + \varepsilon_n$ και $x_{n+1} = \xi + \varepsilon_{n+1}$, οπότε:

$$\xi + \varepsilon_{n+1} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi + \varepsilon_n)}{f'(\xi + \varepsilon_n)} = \xi + \varepsilon_n - \frac{f(\xi) + \varepsilon_n f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(\xi)}{f'(\xi) + \varepsilon_n f''(\xi)}$$

Επειδή όμως $f(\xi) = 0$ και

$$\frac{1}{1 + \varepsilon f''(\xi)/f'(\xi)} \approx 1 - \varepsilon_n \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \cdot \varepsilon_n^2} \tag{1.34}$$

Όπως παρατηρείτε, η σύγκλιση της μεθόδου είναι “ τετραγωνική”, δηλαδή καλύτερη από κάθε άλλη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα.

- Έχει ταχύτατη συγκλιση
- Απαιτεί γνώση της 1ης παραγώγου της συνάρτησης

1.5.1 Δεύτερης τάξης Newton-Raphson (Halley)

$$x_{n+1} = \quad x_n - \frac{2f\left(x_n\right) f'\left(x_n\right)}{2f'^2\left(x_n\right) - f''\left(x_n\right)\, f\left(x_n\right)}$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

$$\varepsilon_{n+1} = -\left[\frac{1}{6}\frac{f'''\left(\xi\right)}{f'\left(\xi\right)} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''\left(\xi\right)}{f'\left(\xi\right)}\right)^2\right] \cdot \varepsilon_n^3$$

1.5.2 Πολλαπλές ρίζες

$$\boxed{f(x) = (x-\rho)^m q(x)}$$

όπου m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ρ

1.5.2 Πολλαπλές ρίζες

$$\boxed{f(x) = \ (x-\rho)^m q(x)}$$

όπου m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ρ

Επομένως, $f'(x) = (x-\rho)^{m-1}\left[mq(x) + (x-\rho)q'(x)\right]$
άρα οι $f(x)$ και $f'(x)$ μηδενίζονται συγχρόνως για $x = \rho$

οπότε ο λόγος $f(x)/f'(x)$ θα υπολογίζεται με μεγάλο σφάλμα

1.5.2 Πολλαπλές ρίζες

$$\boxed{f(x) = (x-\rho)^m q(x)}$$

όπου m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ρ

Επομένως, $f'(x) = (x-\rho)^{m-1}\left[mq(x) + (x-\rho)q'(x)\right]$
άρα οι $f(x)$ και $f'(x)$ μηδενίζονται συγχρόνως για $x = \rho$

οπότε ο λόγος $f(x)/f'(x)$ θα υπολογίζεται με μεγάλο σφάλμα

Για να ξεπερασθεί το πρόβλημα δημιουργούμε μια νέα συνάρτηση

$$\boxed{\phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}} = \frac{(x-\rho)q(x)}{mq(x) + (x-\rho)q'(x)}$$

η οποία έχει τη ρ ως ρίζα με πολλαπλότητα $m = 1$ και η αναδρομική σχέση είναι:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

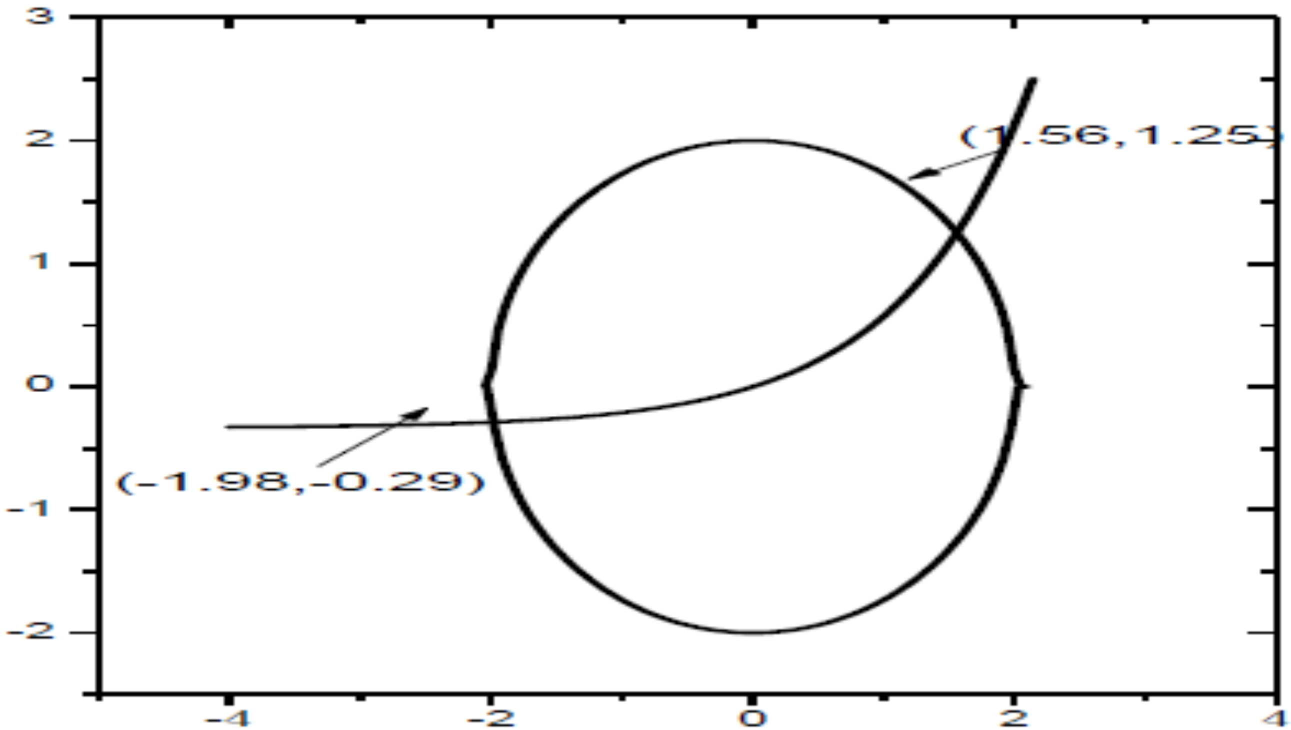
1.6 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ένα παράδειγμα συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων είναι το εξής. Έστω δύο συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x - 3y - 1 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 4 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Ζητούμε τα πιθανά σημεία για τα οποία ταυτοχρόνως ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\begin{aligned} f\left(x,y\right) &= 0 \\ g\left(x,y\right) &= 0 \end{aligned}$$



3
2
1
0
-1
-2
-4
-2
0
2
4
(1.56,1.25)
(-1.98,-0.29)

1.6.1 Η Μέθοδος Newton

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω το σύστημα

$$f\left(x, y\right) = 0$$
$$g\left(x, y\right) = 0$$

αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από τη λύση, βρίσκουμε:

$$0 \cong f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong f(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$0 \cong g(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong g(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial g}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial g}{\partial y}$$

1.6.1 Η Μέθοδος Newton

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω το σύστημα

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από τη λύση, βρίσκουμε:

$$0 \cong f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong f(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$0 \cong g(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n + \varepsilon_n, y_n + \delta_n) \cong g(x_n, y_n) + \varepsilon_n \frac{\partial g}{\partial x} + \delta_n \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{g \cdot f_x - f \cdot g_x}{f_x \cdot g_y - g_x \cdot f_y}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $f_x = \partial f / \partial x$.

1.6.2 Μέθοδος τύπου $x = g(x)$

Έστω το σύστημα των N εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) &= 0 \\ \vdots \quad &\vdots \\ f_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Εάν είναι δυνατόν το σύστημα να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} &x_1 = F_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) \\ &\ldots \\ &x_N = F_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για τη μέθοδο $x = g(x)$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_N}\right| < 1$$

$$\vdots \; \vdots$$

$$\left|\frac{\partial f_N}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_N}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f_N}{\partial x_N}\right| < 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 4 \\
e^x - 3y &= 1
\end{aligned}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ e^x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -\sqrt{4 - y_n^2} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$e^x - 3y = 1$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_{n+1} = -\sqrt{4 - y_n^2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

1η μέθοδος

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	-2	-1.9884	-1.9791	-1.9792	-1.9793
y	0	-0.2107	-0.2882	-0.2877	-0.2873	-0.2873

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εστω το σύστημα

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$e^x - 3y = 1$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_{n+1} = -\sqrt{4 - y_n^2}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(e^{x_n} - 1)$$

1η μέθοδος

n	0	1	2	3	4	5
x	-1	-2	-1.9884	-1.9791	-1.9792	-1.9793
y	0	-0.2107	-0.2882	-0.2877	-0.2873	-0.2873

2η μέθοδος

n	0	1	2	3
x	-1	-2	-1.9791	-1.9793
y	0	-0.2882	-0.2873	-0.2873