Techniques de Modélisation - TP

Mathys JAM Ugo BATTISTON

March 31, 2022

L'objectif de ce TP est de résoudre analytiquement et numériquement l'EDP (E1) suivante :

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t)\ \forall x \in]0,1[,\ \forall t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\ \forall t > 0 \\ u(x,0) &= f(x)\ \forall x \in]0,1[\end{aligned}$$

1 Solution analytique

1.1 Formule générale

Soit $X(x), T(t)$ tq $u(x,t) = X(x)T(t)$

En replaçant dans l'EDP, on obtient

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= X''(x)T(t) \\ \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \end{aligned}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \\ X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0 \\ X(x)T(0) = f(x) \end{cases}$$

D'où $T(t) = 0$ ou $X(0) = X(1) = 0$

On s'intéresse au solutions non triviales $X(0) = X(1) = 0$. On résout l'EDO $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Équation caractéristiques $r^2 + \lambda = 0$ d'où $r = \sqrt{-\lambda}$.

cas $\lambda < 0$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

D'après les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} &X(0) = c_1 + C_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 = -c_2 \end{aligned}$$

$$X(1) = c_1(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}) = 0$$

D'où $c_1 = 0$ solution triviale.

cas $\lambda = 0$

$$X(x) = (\alpha x + \beta)e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

D'après les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} &X(0) = \beta = 0 \\ &X(1) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

D'où X = 0 solution triviale.
cas $\lambda > 0$

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$

D'après les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} &X(0) = c_1 = 0 \\ &X(1) = c_2 sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

D'où $c_1 = 0$ solution triviale, ou $sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = (k\pi)^2$
On injecte dans $T'(t) + \lambda T(t) = 0$

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \\ \Leftrightarrow T'(t) + (k\pi)^2 T(t) = 0 \\ \Leftrightarrow T'(t) = -(k\pi)^2 T(t) \\ \Leftrightarrow T(t) = c_3 e^{-(k\pi)^2 t} \end{aligned}$$

D'où
$$u(x,t) = X(x)T(t) = \alpha e^{-(k\pi)^2 t} sin(k\pi x)$$

Avec $\alpha = c_3 c_2$
En appliquant le principe de superposition :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-(k\pi)^2 t} sin(k\pi x)$$

D'après les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k sin(k\pi x) &= f(x) \end{aligned}$$

On reconnaît une série de Fourrier en sinus, d'où

$$\alpha_k = 2\int_0^1 f(x) sin(k\pi x)\ dx$$

1.2 Pour f1

pour $f_1 = sin(2\pi x)$ et $k = 2$

$$\alpha_2 = 2\int_0^1 sin(2\pi x)^2\ dx$$

En utilisant les identités trigonométriques :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2\int_0^1 sin(2\pi x)^2\ dx \\ &= 2\int_0^1 \frac{1 - cos(2\pi x)}{2}\ dx \\ &= \int_0^1 1\ dx - \int_0^1 cos(2\pi x)\ dx \\ &= [x]_0^1 - \left[\frac{sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 \\ &= (1-0) - \frac{sin(2\pi)}{2\pi} + \frac{sin(0)}{2\pi} \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

D'où

$$u(x,t) = e^{(-k\pi)^2 t} sin(k\pi x)$$

1.3 Pour f2

pour $f_2 = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$

$$a_k = 2\int_0^{1/2} 2x sin(k\pi x)\ dx + 2\int_{1/2}^1 2(1-x) sin(k\pi x)\ dx$$

On étudie séparément

$$\begin{cases} \int_0^{1/2} 2xsin(k\pi x)\ dx & (a) \\ \int_{1/2}^1 2(1-x)sin(k\pi x)\ dx & (b) \end{cases}$$

En utilisant $\int_a^b uv'\ dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\ dx$ avec $u = 2x$ et $v = sin(k\pi x)$ on obtient

$$\begin{aligned}(a) &= \left[2x\frac{-cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} -2\frac{cos(k\pi x)}{k\pi} \\ &= \frac{-cos(\frac{k\pi}{2})}{2} + \frac{2}{(k\pi)^2}sin(\frac{k\pi}{2})\end{aligned}$$

En faisant de même avec (b), on obtient

$$\begin{aligned}(b) &= \left[2(1-x)x - \frac{-cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{1/2}^1 + \int_{1/2}^1 \frac{2cos(kpix)}{k\pi}\ dx \\ &= \frac{cos(\frac{k\pi}{2})}{k\pi} + \frac{2sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2}\end{aligned}$$

On réinjecte dans la formule de base et on obtient

$$\begin{aligned}a_k &= 2((a)+(b)) \\ &= 2\frac{4sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2} \\ &= \frac{8sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2}\end{aligned}$$

D'où

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8sin(\frac{k\pi}{2})}{(k\pi)^2} e^{(-k\pi)^2 t} sin(k\pi x)$$

2 Solution Numérique : schéma explicite

On discrétise l'espace et le temps :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \Delta x \\ x_n = n\Delta x \end{cases} \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = \Delta t \\ t_n = n\Delta t \end{cases}$$

Pour le temps :

$$U'(x_k, t_k) = \frac{U(x_k, t_{k+1}) - U(x_k, t_k)}{\Delta t}$$

Ce qui correspond a un schéma décentrée a droite d'ordre 1.
Pour l'espace :

$$U''(x_k, t_k) = \frac{U(x_{k+1}, t_k) - 2U(x_k, t_k) + U(x_{k-1}, t_k)}{\Delta x^2}$$

Ce qui correspond a un schéma centrée d'ordre deux.
On pose $U_i^j = U(x_i, t_j)$
En remplaçant dans l'EDP $u_t = u_{xx}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} &= \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} \\
U_i^{j+1} &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) + U_i^j \\
&= \eta U_{i+1}^j - 2\eta U_i^j + \eta U_{i-1}^j + U_i^j \\
&= \eta U_{i-1}^j + (1-2\eta)U_i^j + \eta U_{i+1}^j \ (c)
\end{aligned}$$

Avec $\eta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

2.1 Stabilité du schéma

Pour que le schéma explicite soit stable, il suffit que :

$$\eta < \frac{1}{2}$$

2.2 Forme matricielle

On peut mettre (c) sous la forme matricielle

$$AU^j = U^{j+1}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \eta & (1-2\eta) & \eta & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \eta & (1-2\eta) & \eta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après les conditions au bords :

$$U^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$U^j = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1^j \\ U_2^j \\ \vdots \\ U_i^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 Solution Numérique : schéma implicite

On utilise la même discretisation que précédemment.

Pour le temps :

$$\begin{aligned} U'(x, t_{k+1}) &= \frac{U(x, t_{k+1}) - U(x, t_k)}{\Delta t} \\ &= \frac{U_i^{j+1} - U_i^J}{\Delta t} \end{aligned}$$

Pour l'espace :

$$\begin{aligned} U''(x_{k+1}, t_{k+1}) &= \frac{U(x_{k+1}, t_{k+1}) - 2U(x_k, t_{k+1}) + U(x_{k-1}, t_{k+1})}{\Delta x^2} \\ &= \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'EDP $u_t = u_{xx}$ on obtient :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

On pose $\eta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

On obtient

$$\begin{aligned} U_i^j &= U_i^{j+1} - \eta U_{i+1}^{j+1} + 2\eta U_i^{j+1} - \eta U_{i-1}^{j+1} \\ &= -\eta U_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\eta) U_i^{j+1} - \eta U_{i-1}^j + 1 \ (d) \end{aligned}$$

3.1 Stabilité du schéma

Pour un schéma implicite, le système est stable pour n'importe quelle valeur de η.

3.2 Forme matricielle

On peut mettre (d) sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} U^j &= AU^{j+1} \\ \Leftrightarrow U^{j+1} &= A^{-1}U^j \end{aligned}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\eta & (1+2\eta) & -\eta & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -\eta & (1+2\eta) & -\eta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut trouver U^0 et U^j en appliquant les conditions au bords de la même manière que pour le schéma explicite.

4 Solution Numérique : schéma de Crank-Nicholson

On utilise la même discretisation que précédemment.

Le schéma numérique de Crank-Nicholson s'obtient en faisant la moyenne du schéma explicte et implicite.

Schéma explicite :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

Schéma implicite :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

Schéma implicite :

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2})$$

On pose $\eta = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}$

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} - U_i^j &= \eta U_{i+1}^j - 2\eta U_i^j + \eta U_{i-1}^j + \eta U_{i+1}^{j+1} - 2\eta U_i^{j+1} + \eta U_{i-1}^{j+1} \\ U_I^{j+1} - \eta U_{i+1}^{j+1} + 2\eta U_i^{j+1} - \eta U_{i-1}^{j+1} &= \eta U_{i+1}^j - 2\eta U_i^j + \eta U_{i-1}^j + U_i^j \\ -\eta U_{i+1}^{j+1} + (1+2\eta)U_i^{j+1} - \eta U_{i-1}^{j+1} &= \eta U_{i+1}^j + (1-2\eta)U_i^j + \eta U_{i-1}^j \ (e) \end{aligned}$$

4.1 Ordre du schéma

En temps

$$\begin{aligned} &(1)\ U(x,t_k) \\ &(2)\ U(x,t_{k+1}) = U(x,t_k) + \Delta t * U'(x,t_k) + \frac{\Delta t^2}{2!} * u''(x,t_k) + \frac{\Delta t^3}{3!} * r(\Delta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) &= \Delta t * U'(x,t_k) - \frac{\Delta t^2}{2!} * u''(x,t_k) - \frac{\Delta t^3}{3!} * r(\Delta t) \\ \frac{U(x,t_{k+1}) - U(x,t)}{\Delta t} &= U'(x,t_k) - \frac{\Delta t}{2!} * u''(x,t_k) - \frac{\Delta t^2}{3!} * r(\Delta t) \\ \mid \frac{U(x,t_{k+1}) - U(x,t)}{\Delta t} - U'(x,t_k) \mid &= \mid -\frac{\Delta t}{2!} * u''(x,t_k) - \frac{\Delta t^2}{3!} * r(\Delta t) \mid \\ \mid \frac{U(x,t_{k+1}) - U(x,t)}{\Delta t} - U'(x,t_k) \mid &= \mid -\Delta t * \frac{1}{2!} * u''(x,t_k) - \frac{\Delta t}{3!} * r(\Delta t) \mid \end{aligned}$$

Le schéma est à l'ordre 1 en temps.

En espace

(1) $U(x_{k+1},t) = U(x_k,t) + \Delta x * U'(x_k,t) + \frac{\Delta x^2}{2!} * u''(x_k,t) + \frac{\Delta x^3}{3!} * u^{(3)}(x_k,t) + \frac{\Delta x^4}{4!} * u^{(4)}(x_k,t) + \frac{\Delta x^5}{5!} * r(\Delta x)$

(2) $U(x_k,t)$

(3) $U(x_{k-1},t) = U(x_k,t) - \Delta x * U'(x_k,t) + \frac{\Delta x^2}{2!} * u''(x_k,t) - \frac{\Delta x^3}{3!} * u^{(3)}(x_k,t) - \frac{\Delta x^4}{4!} * u^{(4)}(x_k,t) + \frac{\Delta x^5}{5!} * r(\Delta x)$

$$
\begin{aligned}
(1) - 2*(2) + (3) &= \Delta x^2 * U''(x_k,t) + \frac{\Delta x^4}{4!} * u^{(4)}(x_k,t) + \frac{\Delta x^5}{5!} * r(\Delta x) \\
\frac{U(x_{k+1},t) - 2*U(x_k,t) + U(x_{k-1},t)}{\Delta x^2} &= U''(x_k,t) + \frac{\Delta x^2}{4!} * u^{(4)}(x_k,t) + \frac{\Delta x^3}{5!} * r(\Delta x) \\
\mid \frac{U(x_{k+1},t) - 2*U(x_k,t) + U(x_{k-1},t)}{\Delta x^2} - U''(x_k,t) \mid &= \Delta x^2 \mid \frac{1}{4!} * u^{(4)}(x_k,t) + \frac{\Delta x}{5!} * r(\Delta x) \mid
\end{aligned}
$$

Le schéma est donc à l'ordre 2 en temps.

4.2 Stabilité du schéma

La stabilité du schéma de Crank-Nicholson dépend de la stabilité des schémas qui le compose (Stabilité du schéma et Stabilité du schéma). Si les deux schémas sont stables alors le schéma de Crank-Nilcholson est stable.

4.3 Forme matricielle

On peut mettre (e) sous la forme matricielle :

$$
\begin{aligned}
B * U^{j+1} &= A * U^j \\
U^{j+1} &= B^{-1} * A * U^j
\end{aligned}
$$

Avec

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\eta & (1-2\eta) & \eta & 0 & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & 0 & \eta & (1-2\eta) & \eta \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-\eta & (1+2\eta) & -\eta & 0 & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & 0 & -\eta & (1+2\eta) & -\eta \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

On peut trouver U^0 et U^j en appliquant les conditions au bords de la même manière que pour le schéma explicite.

5 Résulats

En respectant les conditions nécessaires pour que les différents schémas soit stable, on obtient les différents graphiques :

5.1 Résultats fonction f1

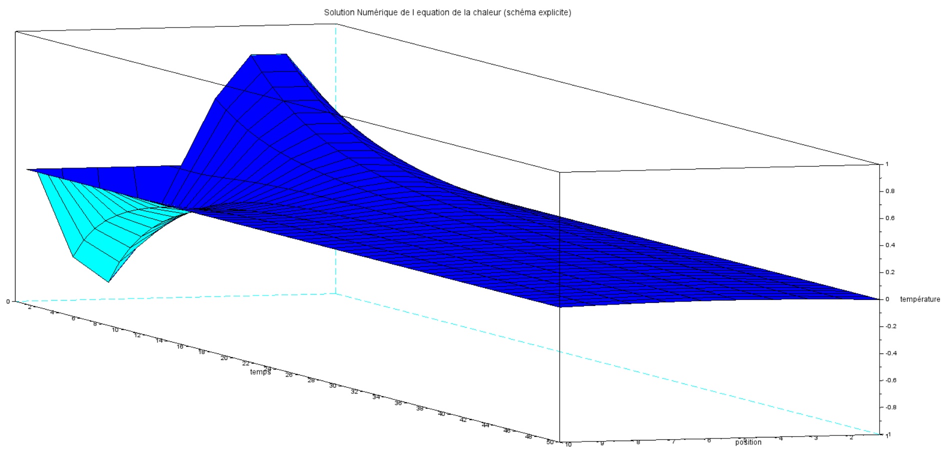

Figure 1: Schéma explicite de la solution numérique avec la fonction f1

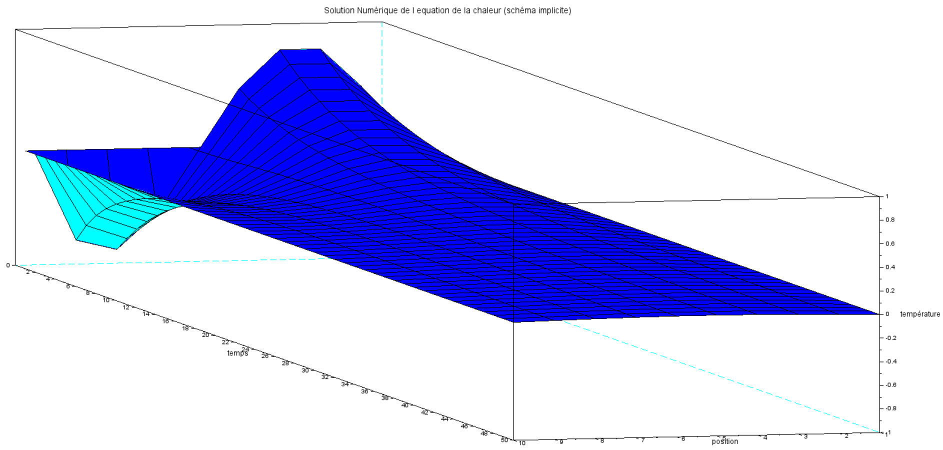

Figure 2: Schéma implicite de la solution numérique avec la fonction f1

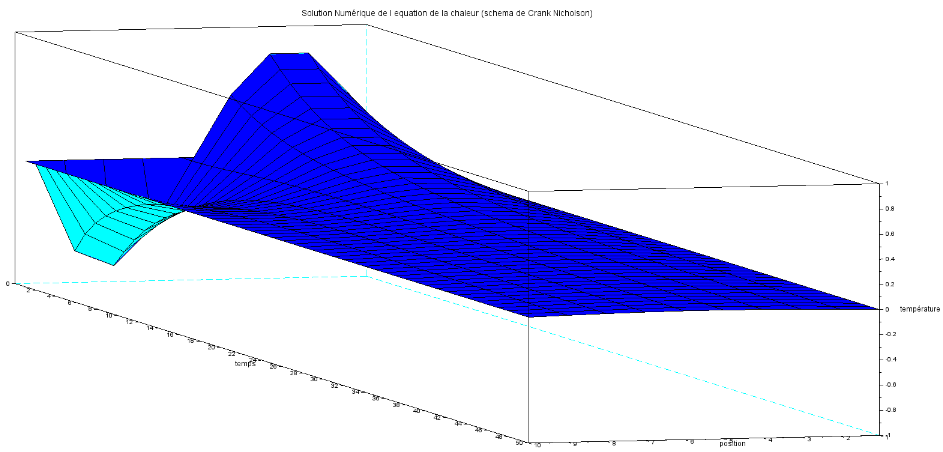

Figure 3: Schéma Crank-Nicholson de la solution numérique avec la fonction f1

5.2 Résultats fonction f2

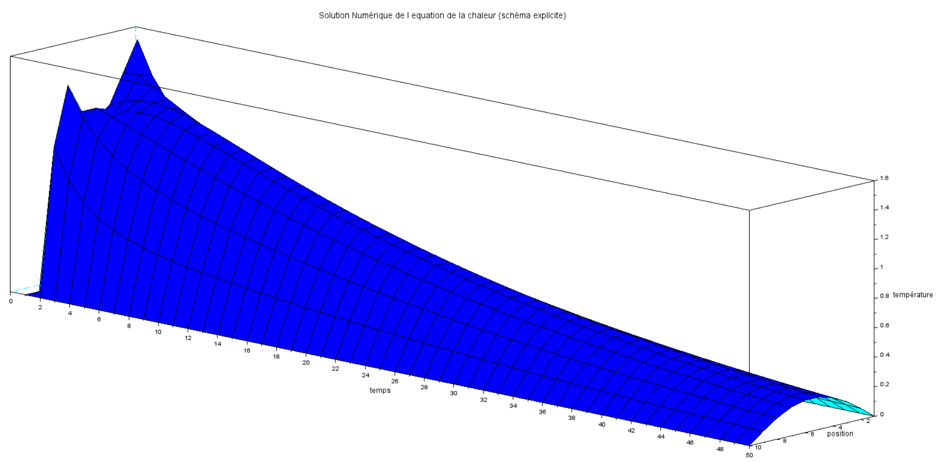

Figure 4: Schéma explicite de la solution numérique avec la fonction f2

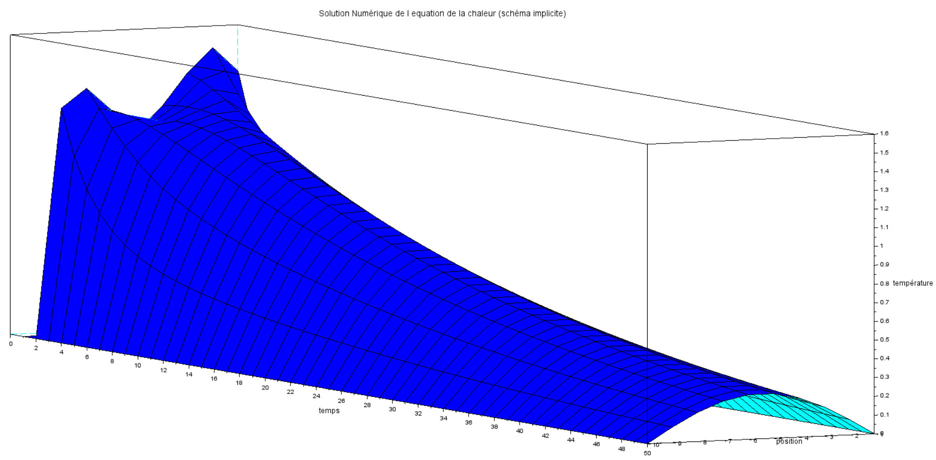

Figure 5: Schéma implicite de la solution numérique avec la fonction f2

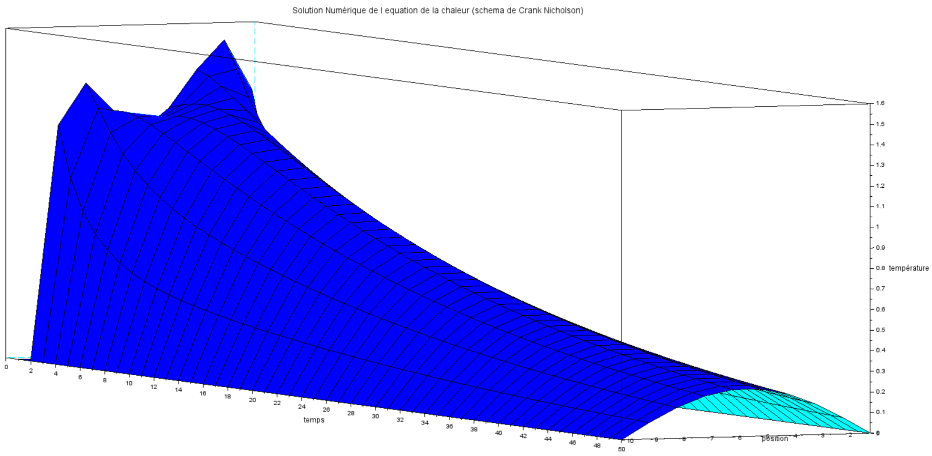

Figure 6: Schéma Crank-Nicholson de la solution numérique avec la fonction f2

Nous observons que pour les deux fonctions, nous obtenons des résultats similaire avec les 3 schémas, vérifiant ainsi de manière empirique le projet.